



HAL
open science

Définitions et calcul de l'alpha-équivalence

Michel Lévy

► **To cite this version:**

Michel Lévy. Définitions et calcul de l'alpha-équivalence. [Research Report] RR-LIG-013, LIG. 2011, pp.9. hal-01354360

HAL Id: hal-01354360

<https://inria.hal.science/hal-01354360>

Submitted on 18 Aug 2016

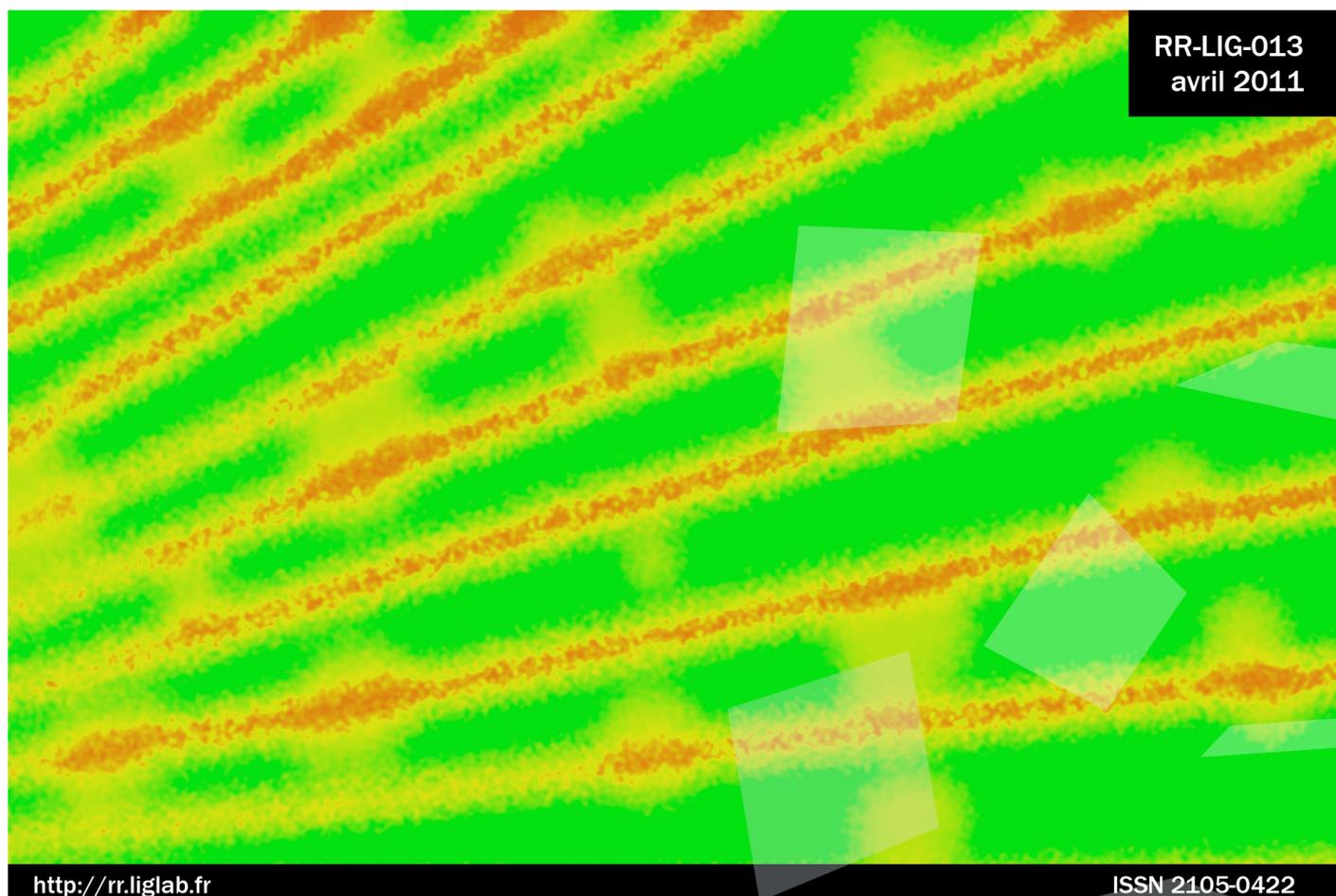
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les rapports de recherche du LIG

Définitions et calcul de l'alpha-équivalence

MICHEL LEVY, Retired Associate Professor, Volunteer Research Scientist,
LIG, Grenoble, France



Définitions et calcul de l'alpha-équivalence

Michel Lévy

22 mars 2011

Résumé

Nous rappelons la définition de l'alpha-équivalence par réécriture, nous prouvons qu'elle est équivalente à celle donnée par J.L. Krivine dans [2] page 12. Nous prouvons que la condition « pour toute variable y sauf un nombre fini » est équivalente à deux conditions permettant de calculer l'alpha-équivalence, sans utiliser la notation de De Bruijn.

1 Définition de l'alpha-équivalence par réécriture

Comme notre travail repose presque exclusivement sur celui de J.L. Krivine, nous reprenons ses notations sauf pour l'application du terme u sur le terme t , que J.L. Krivine note $(u)t$ et que nous noterons $(u t)$.

Le terme u donne le terme u' par un changement de variables liées, si et seulement si le terme u' est obtenu en remplaçant une occurrence d'un sous-terme de u de la forme $\lambda x v$ par $\lambda y v\langle y/x \rangle$ où y ne figure pas dans v . Nous notons cette relation pas $u \rightarrow u'$ et nous en donnons une définition équivalente par induction sur la taille de u , ce qui facilite la suite de notre présentation.

Définition 1.1 (changement de variables liées) Soient u et u' deux termes. Le terme u donne le terme u' par un changement de variables liées, autrement dit $u \rightarrow u'$ si et seulement si nous sommes dans l'un des cas suivants

1. $u = \lambda x v$ et $u' = \lambda y v\langle y/x \rangle$ où y ne figure pas dans v
2. $u = \lambda x v$ et $u' = \lambda x v'$ et $v \rightarrow v'$
3. $u = (v w)$ et $u' = (v' w)$ et $v \rightarrow v'$
4. $u = (w v)$ et $u' = (w v')$ et $v \rightarrow v'$

Définition 1.2 (alpha-équivalence) Soient u et u' deux termes.

$u \leftrightarrow u'$ si et seulement si $u \rightarrow u'$ ou $u' \rightarrow u$.

Soit $\equiv = (\leftrightarrow)^*$.

Lorsque $u \equiv u'$, on dit que u et u' sont alpha-équivalents ou encore que u et u' sont égaux à des changements près de variables liées.

Nous prouvons que cette définition est équivalente à celle donnée par J.L. Krivine dans [2] page 12. L'avantage de la définition de J.L. Krivine est de permettre de prouver directement et simplement les propriétés de la relation \equiv . L'inconvénient de sa définition est qu'elle ne donne pas un algorithme pour la calculer. Nous montrons dans le paragraphe suivant comment remédier à cet inconvénient.

Propriété 1.1 (conservation des variables libres) Notons $vl(u)$ l'ensemble des variables libres du terme u . Soient u et u' deux termes tels que $u \rightarrow u'$. Un changement de variables liées préserve l'ensemble des variables libres, autrement dit $vl(u) = vl(u')$.

Preuve : On vérifie cette propriété pour le premier cas de la définition 1.1. Par définition de vl , nous avons :

$$vl(\lambda x v) = vl(v) - \{x\}$$

$$vl(\lambda y v \langle y/x \rangle) = vl(v \langle y/x \rangle) - \{y\}$$

1. Supposons que x n'est pas libre dans v .
Puisque x n'est pas libre dans v , $vl(\lambda x v) = vl(v)$ et $v \langle y/x \rangle = v$, par suite :
Donc $vl(\lambda x v) = vl(v)$ et $vl(\lambda y v \langle y/x \rangle) = vl(v) - \{y\}$.
Puisque y n'est pas dans v , $vl(\lambda x v) = vl(v) = vl(\lambda y v \langle y/x \rangle)$.

2. Supposons que x est libre dans v .
D'après cette hypothèse, $vl(v \langle y/x \rangle) = (vl(v) - \{x\}) \cup \{y\}$. Donc $vl(\lambda x v) = vl(v) - \{x\} = vl(\lambda y v \langle y/x \rangle)$.

On montre la propriété par récurrence sur les sous-termes de u . Examinons seulement le deuxième cas de la définition 1.1, car les deux autres cas sont analogues.

On a $u = \lambda x v$, $u' = \lambda x v'$ et $v \rightarrow v'$. On suppose, par hypothèse de récurrence, que $vl(v) = vl(v')$.

Puisque $vl(u) = vl(v) - \{x\}$ et $vl(u') = vl(v') - \{x\}$, on a $vl(u) = vl(u')$. □

Propriété 1.2 Soient u, v deux termes. Soient x, y deux variables où y ne figure pas dans u . Nous avons : $u \langle y/x \rangle \langle v/y \rangle = u \langle v/x \rangle$.

Preuve : Par récurrence sur les sous-termes de u .

1. Supposons que u est une variable.
 - (a) Supposons $u = x$. Nous avons : $u \langle y/x \rangle \langle v/y \rangle = y \langle v/y \rangle = v = u \langle v/x \rangle$.
 - (b) Supposons $u \neq x$. Nous avons : $u \langle y/x \rangle \langle v/y \rangle = u \langle v/y \rangle = u = u \langle v/x \rangle$.
2. Supposons que $u = \lambda z w$.
 - (a) Supposons $x = z$. $u \langle y/x \rangle \langle v/y \rangle = u = u \langle v/x \rangle$.
 - (b) Supposons $x \neq z$. Puisque y ne figure pas dans u , donc est différent de z , nous avons : $u \langle y/x \rangle \langle v/y \rangle = \lambda z w \langle y/x \rangle \langle v/y \rangle$.
Par récurrence $w \langle y/x \rangle \langle v/y \rangle = w \langle v/x \rangle$.
Donc $u \langle y/x \rangle \langle v/y \rangle = u \langle v/x \rangle$.
3. Le cas où $u = (t w)$ est analogue au cas précédent.

□

Propriété 1.3 Soient t, u, v trois termes. Soient x, y deux variables distinctes où y n'est pas libre dans t . Nous avons : $v \langle t/x \rangle \langle u/y \rangle = v \langle t/x, u/y \rangle$;

Preuve : Par récurrence sur les sous-termes de v .

1. Supposons que v est une variable.
 - (a) Supposons $v = x$.
Puisque y n'est pas libre dans t , nous avons : $v \langle t/x \rangle \langle u/y \rangle = t \langle u/y \rangle = t$.
Et nous avons : $v \langle t/x, u/y \rangle = t$.

- (b) Supposons $v \neq x$.
 Nous avons : $v \langle t/x \times u/y \rangle = v \langle u/y \rangle$.
 Et nous avons : $v \langle t/x, u/y \rangle = v \langle u/y \rangle$.
2. Supposons que $v = \lambda z w$.
- (a) Supposons $z = x$.
 Nous avons : $v \langle t/x \times u/y \rangle = v \langle u/y \rangle$.
 Puisque $z \neq y$, $v \langle u/y \rangle = \lambda z w \langle u/y \rangle$
 Puisque $z \neq y$ et $z = x$, $v \langle u/y, t/x \rangle = \lambda z w \langle u/y \rangle$.
- (b) Supposons $z \neq x$ et $z = y$.
 Nous avons : $v \langle t/x \times u/y \rangle = (\lambda z w \langle t/x \rangle) \langle u/y \rangle = \lambda z w \langle t/x \rangle$.
 Et nous avons : $v \langle u/y, t/x \rangle = \lambda z w \langle t/x \rangle$.
- (c) Supposons $z \neq x$ et $z \neq y$.
 Nous avons : $v \langle t/x \times u/y \rangle = \lambda z w \langle t/x \times u/y \rangle$.
 Par hypothèse de récurrence : $w \langle t/x \times u/y \rangle = w \langle t/x, u/y \rangle$.
 Et par définition de la substitution : $\lambda z w \langle t/x, u/y \rangle = v \langle t/x, u/y \rangle$.
3. Le cas où $v = (t w)$ est analogue au précédent.

□

Propriété 1.4 Soient u et u' deux termes tels que $u \rightarrow u'$. Pour toute variable y sauf un nombre fini, $u \langle y/x \rangle \rightarrow u' \langle y/x \rangle$

Preuve :

1. Supposons que x n'est pas libre dans u . D'après la propriété précédente, x n'est pas libre dans u' , donc $u \langle y/x \rangle = u$ et $u' \langle y/x \rangle = u'$.
 Par suite $u \langle y/x \rangle \rightarrow u' \langle y/x \rangle$.
2. Supposons que x est libre dans u . On prouve la propriété par récurrence sur les sous-termes de u . Comme précédemment, on n'examine que les deux premiers cas de la définition 1.1.
- (a) Soit $u = \lambda z v$, $u' = \lambda z' v \langle z'/z \rangle$ où z' ne figure pas dans v .
 Puisque x est une variable libre de u et que z n'est pas une variable libre de u , les variables x et z sont distinctes donc $u \langle y/x \rangle = \lambda z v \langle y/x \rangle$.
 Puisque x est une variable libre de v et que z' ne figure pas dans v , les variables x et z' sont distinctes donc $u' \langle z'/x \rangle = \lambda z' v \langle z'/z \times y/x \rangle$.
 Puisque les variables x et z' sont distinctes, d'après la propriété 1.3, nous avons $v \langle z'/z \times y/x \rangle = v \langle z'/z, y/x \rangle = v \langle y/x \times z'/z \rangle$.
 Choisissons y absente de v et distincte de z' , ce qui n'exclut qu'un nombre fini de variables y . Puisque z' ne figure pas dans v , z' ne figure pas dans $v \langle y/x \rangle$ donc par définition de \rightarrow :
 $u \langle y/x \rangle = \lambda z v \langle y/x \rangle \rightarrow \lambda z' v \langle y/x \times z'/z \rangle = u' \langle y/x \rangle$.
- (b) Soit $u = \lambda y v$, $u' = \lambda y v'$ et $v \rightarrow v'$.
 Par hypothèse de récurrence, pour toute variable z sauf un nombre fini :
 $v \langle z/x \rangle \rightarrow v' \langle z/x \rangle$.
 Puisque x est libre dans u , $u \langle z/x \rangle = \lambda y v \langle z/x \rangle$ et $u' \langle z/x \rangle = \lambda y v' \langle z/x \rangle$.
 Par définition de \rightarrow , on a $u \langle z/x \rangle \rightarrow u' \langle z/x \rangle$

□

Propriété 1.5 Soient u, u' deux termes tels que $u \leftrightarrow u'$. Pour tout terme v et toute variable x , nous avons :

$$\lambda x u \leftrightarrow \lambda x u', (u v) \leftrightarrow (u' v), (v u) \leftrightarrow (v u').$$

Preuve : Conséquence immédiate de la définition de la relation \leftrightarrow . \square

Propriété 1.6 Soit n un entier naturel. Soient u, u' deux termes tels que $u \leftrightarrow^n u'$. Pour tout terme v et toute variable x , nous avons :

$$\lambda x u \leftrightarrow^n \lambda x u', (u v) \leftrightarrow^n (u' v), (v u) \leftrightarrow^n (v u').$$

Preuve : Conséquence immédiate, par récurrence sur n , de la propriété précédente. \square

Définition 1.3 (relation passant au contexte) Une relation r entre termes passe au contexte si elle est réflexive et si elle vérifie :

1. si $t r t'$ alors $\lambda x t r \lambda x t'$
2. si $t r t', u r u'$ alors $(t u) r (t' u')$

Notons que cette notion est définie par J.L.Krivine page 4 de [1] et qu'elle est appelée relation λ -compatible page 11 de [2]. Nous conservons le premier nom de cette propriété.

Propriété 1.7 La relation \equiv passe au contexte.

Preuve :

1. Supposons $t \equiv t'$. Par définition de \equiv , il existe n tel que $t \leftrightarrow^n t'$. D'après la propriété précédente $\lambda x t \leftrightarrow^n \lambda x t'$. Par suite $\lambda x t \equiv \lambda x t'$.
2. Supposons $t \equiv t'$ et $u \equiv u'$. Par définition de \equiv , il existe n, p tels que $t \leftrightarrow^n t', u \leftrightarrow^p u'$. De la propriété précédente, on déduit que $(t u) \leftrightarrow^{n+p} (t' u')$. Par suite $(t u) \equiv (t' u')$.

\square

Propriété 1.8 Supposons que $u = (v w)$ et $u \leftrightarrow u'$. Alors $u' = (v' w')$, $v \equiv v'$ et $w \equiv w'$.

Preuve : Par définition de \leftrightarrow , on a $u \rightarrow u'$ ou $u' \rightarrow u$.

1. Supposons $u \rightarrow u'$. Par définition de \rightarrow , $u' = (v' w')$ et nous avons soit $v = v'$ et $w \rightarrow w'$, soit $v \rightarrow v'$ et $w = w'$. Puisque \equiv est réflexive et que $\rightarrow \subseteq \equiv$, il en résulte que dans les deux cas $v \equiv v'$ et $w \equiv w'$.
2. Supposons $u' \rightarrow u$. Par définition de \rightarrow , $u' = (v' w')$ et nous avons soit $v = v'$ et $w' \rightarrow w$, soit $v' \rightarrow v$ et $w = w'$. Donc comme ci-dessus, $v \equiv v'$ et $w \equiv w'$.

\square

Propriété 1.9 Supposons que $u = \lambda x v$ et $u \leftrightarrow u'$. Alors $u' = \lambda x' v'$ et pour toute variable y sauf un nombre fini, $v \langle y/x \rangle = v' \langle y/x' \rangle$.

Preuve : Par définition de \leftrightarrow , on a $u \rightarrow u'$ ou $u' \rightarrow u$.

1. Supposons $u \rightarrow u'$. Par définition de \rightarrow , nous devons examiner deux cas

- (a) Il existe x' ne figurant pas dans v tel que $u' = \lambda x' v \langle x'/x \rangle$.
 Posons $v' = v \langle x'/x \rangle$. Soit y une variable quelconque. Puisque x' ne figure pas dans v , d'après la propriété 1.2, nous avons :
 $v' \langle y/x' \rangle = v \langle x'/x \rangle \langle y/x' \rangle = v \langle y/x \rangle$ ce qu'il fallait prouver.
- (b) $u' = \lambda x v'$ et $v \rightarrow v'$.
 D'après la propriété 1.4, pour toute variable y sauf un nombre fini,
 $v \langle y/x \rangle \rightarrow v' \langle y/x \rangle$.
 Puisque $\rightarrow \subset \equiv$, pour toute variable y sauf un nombre fini,
 $v \langle y/x \rangle \equiv v' \langle y/x \rangle$, ce qu'il fallait prouver.
2. Supposons $u' \rightarrow u$. Par définition de \rightarrow , nous devons examiner deux cas
- (a) $u' = \lambda x' v'$, x ne figure pas dans v' et $v = v' \langle x/x' \rangle$.
 Soit y une variable quelconque. Puisque x ne figure pas dans v' , d'après la propriété 1.2, nous avons :
 $v \langle y/x \rangle = v' \langle x/x' \rangle \langle y/x \rangle = v' \langle y/x' \rangle$, ce qu'il fallait prouver.
- (b) $u' = \lambda x v'$ et $v' \rightarrow v$. Comme dans le cas où $v' \rightarrow v$, on a $v \langle y/x \rangle \equiv v' \langle y/x \rangle$, ce qu'il fallait prouver.

□

Nous énonçons et prouvons un théorème qui montre que la relation d'alpha-équivalence est celle définie par J.L.Krivine p12 de [2].

Théorème 1.1 Soient u et u' deux termes.

1. si u est une variable, on a : $u \equiv u'$ si et seulement si $u = u'$
2. si $u = (v w)$, on a : $u \equiv u'$ si et seulement si $u' = (v' w')$, $v \equiv v'$ et $w \equiv w'$
3. si $u = \lambda x v$, on a : $u \equiv u'$ si et seulement si $u' = \lambda x' v'$ et pour toute variable y sauf un nombre fini, $v \langle y/x \rangle \equiv v' \langle y/x' \rangle$.

Preuve :

1. Prouvons la condition suffisante du théorème.
 - (a) Soit u une variable. Supposons que $u = u'$.
 Puisque \equiv est réflexive, on a : $u \equiv u'$.
 - (b) Soit $u = (v w)$. Supposons que $u' = (v' w')$, $v \equiv v'$ et $w \equiv w'$.
 Puisque \equiv passe au contexte, on a $u \equiv u'$.
 - (c) Soit $u = \lambda x v$. Supposons que $u' = \lambda x' v'$ et que pour toute variable y sauf un nombre fini, $v \langle y/x \rangle \equiv v' \langle y/x' \rangle$.
 Choisissons y ne figurant ni dans v , ni dans v' . En raison de ce choix, par définition de \rightarrow , on a :
 $\lambda x v \rightarrow \lambda y v \langle y/x \rangle$ et $\lambda x' v' \rightarrow \lambda y v' \langle y/x' \rangle$.
 Puisque la relation \equiv passe au contexte, $\lambda y v \langle y/x \rangle \equiv \lambda y v' \langle y/x' \rangle$
 Donc par définition de \equiv , on a $u \equiv u'$.
2. Prouvons la condition nécessaire du théorème.
 - (a) Soit u une variable. Supposons que $u \equiv u'$. Puisqu'il n'y a pas de changement possible de variables liées, on a $u = u'$.
 - (b) Soit $u = (v w)$. Supposons que $u \equiv u'$. Il existe n tel que $u \leftrightarrow^n u'$. On prouve par récurrence sur n que $u' = (v' w')$, $v \equiv v'$ et $w \equiv w'$.
 Pour $n = 0$ la propriété résulte de la réflexivité de \equiv .

Supposons que $u \leftrightarrow u'' \leftrightarrow^n u'$.

D'après la propriété 1.8, $u'' = (v'' w'')$, $v \equiv v''$ et $w \equiv w''$.

Par hypothèse de récurrence, $u' = (v' w')$, $v'' \equiv v'$ et $w'' \equiv w'$.

Puisque \equiv est transitive, $v \equiv v'$ et $w \equiv w'$. Puisque \equiv passe au contexte $u \equiv u'$.

- (c) Soit $u = \lambda x v$. Supposons que $u \equiv u'$. Il existe n tel que $u \leftrightarrow^n u'$. On prouve par récurrence sur n que $u' = \lambda x' v'$ et que pour toute variable y sauf un nombre fini $v \langle y/x \rangle \equiv v' \langle y/x' \rangle$.

Pour $n = 0$ la propriété résulte de la réflexivité de \equiv .

Supposons que $u \leftrightarrow u'' \leftrightarrow^n u'$.

D'après la propriété 1.9, $u'' = \lambda x'' v''$ et pour toute variable y sauf un nombre fini, $v \langle y/x \rangle \equiv v'' \langle y/x'' \rangle$.

Par hypothèse de récurrence, $u' = \lambda x' v'$ et pour toute variable y sauf un nombre fini, $v'' \langle y/x'' \rangle \equiv v' \langle y/x' \rangle$.

Par transitivité de \equiv , il en résulte que pour toute variable y sauf un nombre fini, $v \langle y/x \rangle \equiv v' \langle y/x' \rangle$.

□

2 Calcul de l'alpha-équivalence

Propriété 2.1 Soient u, u', t des termes et x une variable. Supposons que $u \equiv u'$ et que les variables libres de t ne sont liées ni dans u , ni dans u' . Alors :

$$u \langle t/x \rangle \equiv u' \langle t/x \rangle$$

Preuve : Conséquence la proposition 2 page 8 de [1], qui est aussi la proposition 1.6 page 12 de [2] □

Théorème 2.1 Soient v et v' deux termes et soient x, x' des variables. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Pour toute variable y sauf celles figurant dans v et v' , $v \langle y/x \rangle \equiv v' \langle y/x' \rangle$
2. Pour toute variable y sauf un nombre fini, $v \langle y/x \rangle \equiv v' \langle y/x' \rangle$
3. Il y a une variable y ne figurant ni dans v , ni dans v' , telle que $v \langle y/x \rangle \equiv v' \langle y/x' \rangle$

Preuve : Il est trivial que (1) implique (2).

Puisqu'il y a une infinité de variables, il y a une variable qui ne fait partie ni des variables exclues par la condition «sauf un nombre fini», ni des variables figurant dans v , ni de celles figurant dans v' . Donc la condition (2) implique la condition (3).

Montrons que (3) implique (1).

Supposons que $v \langle y/x \rangle \equiv v' \langle y/x' \rangle$ pour la variable y ne figurant ni dans v , ni dans v' .

D'après les conditions sur y , cette variable n'est liée ni dans $v \langle y/x \rangle$, ni dans $v' \langle y/x' \rangle$.

Soit une variable z quelconque ne figurant ni dans v , ni dans v' .

Puisque y n'est liée ni dans $v \langle y/x \rangle$, ni dans $v' \langle y/x' \rangle$, la variable z n'est liée dans aucun de ces deux termes.

Donc, d'après la propriété 2.1, on a :

$$v \langle y/x \rangle \times z/y \equiv v' \langle y/x' \rangle \times z/y.$$

D'après la propriété 1.2, puisque y ne figure ni dans v , ni dans v'

- $v\langle y/x \rangle \times \langle z/y \rangle = v\langle z/x \rangle$
- $v'\langle y/x' \rangle \times \langle z/y \rangle = v'\langle z/x' \rangle$

Donc pour toute variable z ne figurant ni dans v , ni dans v' , $v\langle z/x \rangle \equiv v'\langle z/x' \rangle$. □

Ce théorème nous permet de calculer la relation \equiv . Nous n'examinons que le cas du calcul de $u \equiv u'$ quand $u = \lambda x v$.

1. Si $u' \neq \lambda x' v'$ alors d'après la définition de J.L. Krivine, $u \neq u'$.

2. Supposons $u' = \lambda x' v'$.

On choisit une variable y ne figurant ni dans v , ni dans v' .

(a) Si $v\langle y/x \rangle \neq v'\langle y/x' \rangle$ alors $u \neq u'$.

En effet supposons au contraire que $u \equiv u'$. D'après la définition de J.L. Krivine et l'équivalence des conditions (1) et (3) du théorème 2.1, nous aurions pour toute variable y ne figurant ni dans v , ni dans v' , $v\langle y/x \rangle \equiv v'\langle y/x' \rangle$.

(b) Si $v\langle y/x \rangle \equiv v'\langle y/x' \rangle$ alors d'après la définition de J.L. Krivine et l'équivalence des conditions (2) et (3) du théorème 2.1, nous avons $u \equiv u'$.

Références

- [1] Jean-Louis Krivine. *Lambda-calcul types et modèles*. Masson, 1990.
- [2] Jean-Louis Krivine. *Lambda-calculus types and models*. Ellis Horwood, 1993.
<http://www.pps.jussieu.fr/~krivine/articles/Lambda.pdf>
Dernière révision 2009.