

```
> tau := 2*Pi:
```

Shortcuts in the Voronoi Path

Evaluation of the gain using the ccw shortcuts centered above $[st]$

```
> S := (h, a1, a2, a3) ->
    A123(h, a1, a2, a3)+ A12(h, a1, a2, a3)+ A23(h, a1, a2, a3)
    -A12_23(h, a1, a2, a3)-A12_123(h, a1, a2, a3)-A23_123(h, a1, a2,
    a3)
    +A12_23_123(h, a1, a2, a3)
S := (h, a1, a2, a3) -> A123(h, a1, a2, a3) + A12(h, a1, a2, a3) + A23(h, a1, a2, a3)
    - A12_23(h, a1, a2, a3) - A12_123(h, a1, a2, a3) - A23_123(h, a1, a2, a3)
    + A12_23_123(h, a1, a2, a3) (1)
```

```
> A12_23 := (h, a1, a2, a3) -> A12_23_123(h, a1, a2, a3)
    A12_23 := (h, a1, a2, a3) -> A12_23_123(h, a1, a2, a3) (2)
```

```
> r12 := (h, a1, a2, a3) ->
    sqrt((h+sin(a1))^2+(cos(a1)+h*(cos(a1)+cos(a2))/(sin(a1)+sin(a2))
    )^2)
r12 := (h, a1, a2, a3) -> sqrt((h + sin(a1))^2 + (cos(a1) + h (cos(a1) + cos(a2)) / (sin(a1) + sin(a2)))^2) (3)
```

```
> r23 := (h, a1, a2, a3) ->
    sqrt((h+sin(a3))^2+(cos(a3)+h*(cos(a2)+cos(a3))/(sin(a2)+sin(a3))
    )^2)
r23 := (h, a1, a2, a3) -> sqrt((h + sin(a3))^2 + (cos(a3) + h (cos(a2) + cos(a3)) / (sin(a2) + sin(a3)))^2) (4)
```

```
> A123 := (h, a1, a2, a3) -> (1/2)*tau
    A123 := (h, a1, a2, a3) -> 1/2 tau (5)
```

```
> A12 := (h, a1, a2, a3) ->
    (1/2)*tau*r12(h, a1, a2, a3)^2
    A12 := (h, a1, a2, a3) -> 1/2 tau r12(h, a1, a2, a3)^2 (6)
```

```
> A23 := (h, a1, a2, a3) ->
    (1/2)*tau*r23(h, a1, a2, a3)^2
    A23 := (h, a1, a2, a3) -> 1/2 tau r23(h, a1, a2, a3)^2 (7)
```

```
> A12_123 := (h, a1, a2, a3) ->
    (1/2)*r12(h, a1, a2, a3)^2*(theta12(h, a1, a2, a3)-sin(theta12(h,
    a1, a2, a3)))+(1/2)*(phi12(h, a1, a2, a3)-sin(phi12(h, a1, a2, a3)))
A12_123 := (h, a1, a2, a3) -> 1/2 r12(h, a1, a2, a3)^2 (theta12(h, a1, a2, a3) - sin(theta12(h, a1, a2,
    a3))) + 1/2 phi12(h, a1, a2, a3) - 1/2 sin(phi12(h, a1, a2, a3)) (8)
```

```
> A23_123 := (h, a1, a2, a3) ->
  ((1/2)*r23(h, a1, a2, a3)^2*(theta23(h, a1, a2, a3)-sin(theta23(h,
  a1, a2, a3)))+(1/2)*(phi23(h,a1,a2,a3)-sin(phi23(h,a1,a2,a3)))
A23_123 := (h, a1, a2, a3) →  $\frac{1}{2} r23(h, a1, a2, a3)^2 (\theta23(h, a1, a2, a3) - \sin(\theta23(h, a1, a2, a3))) + \frac{1}{2} \phi23(h, a1, a2, a3) - \frac{1}{2} \sin(\phi23(h, a1, a2, a3))$  (9)
```

```
> phi12 := (h, a1, a2, a3) ->
  a2-a1
phi12 := (h, a1, a2, a3) → a2 - a1 (10)
```

```
> phi23 := (h, a1, a2, a3) ->
  a3-a2+tau
phi23 := (h, a1, a2, a3) → a3 - a2 + τ (11)
```

```
> theta12:=(h,a1,a2,a3)->
  2*arccos(
  sqrt(1-(sin(a1/2-a2/2)^2)/(r12(h,a1,a2,a3)^2))
  *sgn(2*h+sin(a1)+sin(a2)))
theta12 := (h, a1, a2, a3) → 2 arccos  $\left( \sqrt{1 - \frac{\sin\left(\frac{1}{2} a1 - \frac{1}{2} a2\right)^2}{r12(h, a1, a2, a3)^2}} \operatorname{sgn}(2 h + \sin(a1) + \sin(a2)) \right)$  (12)
```

```
> theta23:=(h,a1,a2,a3)->
  2*arccos(
  sqrt(1-(sin(a2/2-a3/2)^2)/(r23(h,a1,a2,a3)^2))
  *sgn(2*h+sin(a2)+sin(a3)))
theta23 := (h, a1, a2, a3) → 2 arccos  $\left( \sqrt{1 - \frac{\sin\left(\frac{1}{2} a2 - \frac{1}{2} a3\right)^2}{r23(h, a1, a2, a3)^2}} \operatorname{sgn}(2 h + \sin(a2) + \sin(a3)) \right)$  (13)
```

```
> f1_cond := (h, a1, a2, a3) ->
  2*g2(a1, a2, a3)/S(h, a1, a2, a3)^3
f1_cond := (h, a1, a2, a3) →  $\frac{2 g2(a1, a2, a3)}{S(h, a1, a2, a3)^3}$  (14)
```

```
> g2 := (a1, a2, a3) ->
  2*g(a1, a2, a3)*A(a1, a2, a3)
g2 := (a1, a2, a3) → 2 g(a1, a2, a3) A(a1, a2, a3) (15)
```

```
> g := (a1, a2, a3) ->
  abs(sin((1/2)*a1-(1/2)*a2))
  +abs(sin((1/2)*a2-(1/2)*a3))
  -abs(sin((1/2)*a1-(1/2)*a3))
```

$$g := (a1, a2, a3) \rightarrow \left| \sin\left(\frac{1}{2} a1 - \frac{1}{2} a2\right) \right| + \left| \sin\left(\frac{1}{2} a2 - \frac{1}{2} a3\right) \right| - \left| \sin\left(\frac{1}{2} a1 - \frac{1}{2} a3\right) \right| \quad (16)$$

```
> A := (a1, a2, a3) ->
      (1/2)*abs(sin(a1-a2))+sin(a2-a3)+sin(a3-a1))
      A := (a1, a2, a3) -> 1/2 |sin(a1 - a2) + sin(a2 - a3) + sin(a3 - a1)|
```

(17)

```
> sgn := x ->
      piecewise(0 <= x, 1, -1)
      sgn := x -> piecewise(0 ≤ x, 1, -1)
```

(18)

```
> f1 := (h, a1, a2, a3) ->
      piecewise(0 < h and h < 1 and arcsin(h)-(1/2)*tau < a2-tau
      and a2-tau < a3 and a3 < tau-a2 and tau-a2 < a1 and a1 < a2 and
      a2 < tau-arcsin(h),
      f1_cond(h, a1, a2, a3), 0)
      f1 := (h, a1, a2, a3) -> piecewise(0 < h and h < 1 and arcsin(h) - 1/2 τ < a2 - τ and a2
```

(19)

$$- \tau < a3 \text{ and } a3 < \tau - a2 \text{ and } \tau - a2 < a1 \text{ and } a1 < a2 \text{ and } a2 < \tau - \arcsin(h),$$

$$f1_cond(h, a1, a2, a3), 0)$$

```
> region := [h = 0 .. 1, a2 = tau/2 .. tau, a1 = 0 .. tau, a3 = -
      tau/2 .. tau/2]
      region := [h = 0..1, a2 = π..2 π, a1 = 0..2 π, a3 = -π..π]
```

(20)

```
> evalf(Int(f1(h, a1, a2, a3), region, 'epsilon' = 0.00001, 'method' =
      _CubaDivonne', 'digits' = 50'))
      0.107938857914146674
```

(21)