HAL
open science

Solutions surstables avec singularités au point tournant

Eric Benoît

To cite this version:

Eric Benoît. Solutions surstables avec singularités au point tournant. Revue Africaine de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées, 2015, Volume 20 - 2015 - Special issue - Colloquium in Honor of Éric Benoît, pp.5-24. 10.46298/arima.1987 . hal-01320622

HAL Id: hal-01320622

https://inria.hal.science/hal-01320622v1

Submitted on 24 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Solutions surstables avec singularités au point tournant

Éric Benoît

Laboratoire Mathématiques Image Applications
Université de La Rochelle
La Rochelle
France
ebenoit@univ-lr.fr

RÉSUMÉ. Dans cet article, on va établir de façon très simple, presque sans analyse complexe, la première condition de style Matkowsky nécessaire pour qu'une solution soit un canard avec singularités. Le but est d'étudier des équations différentielles singulièrement perturbées analytiques présentant un point tournant. Des illustrations numériques sont présentées.

ABSTRACT. In this article, the first Matkowsky's condition for existence of canards with singularities is obtained with very few complex analysis. The aim is the study of singularly perturbed differential equations with a turning point. Numerical illustrations are provided.

MOTS-CLÉS : Canard, canard à pôles, lent-rapide, relief, retard à la bifurcation de Hopf

KEYWORDS : Canard, canard with poles, Hopf-bifurcation delay, relief, slow-fast

1. Avant-propos

Après que j'ai écrit ce texte, quelques amis collègues mathématiciens m'ont fait remarquer qu'il n'y avait aucun nouveau résultat. C'est parfaitement vrai. Malgré cela, je persiste à croire que le texte ci-dessous a un certain intérêt.

Le théorème 3 , but de la première partie de l'article n'est qu'un extrait d'un théorème beaucoup plus général étudié dans [12] et [14]. Cependant, il est bien utile, sous cette forme, pour des travaux ultérieurs sur le retard à la bifurcation des équations réelles présentant, outre la bifurcation de Hopf, une transition noeud-foyer (équations génériques dont un exemple est donné dans l'article [2]). La démonstration que je donne est très "réelle" et évite en grande partie l'analyse complexe approfondie nécessaire pour l'étude de [14].

Je ne donne aucune preuve du résultat que j'évoque dans la deuxième partie, ni même un énoncé précis. Ce résultat a été conjecturé par J.-L. Callot dans [7]. On trouve, toujours avec les mêmes méthodes complexes, des énoncés précis dans [11]. L'intérêt de ce texte (je l'espère) est l'illustration que je donne, qui montre bien les dangers d'une interprétation simpliste de la théorie.

2. Introduction

Les équations différentielles singulièrement perturbées ou, avec une très légère différence de point de vue, les équations lentes-rapides ont été abondamment étudiées depuis quelques décennies. Quelques résultats ont semblé étranges au début quand des solutions *naturelles* donc stables ont exhibé un comportement typique de solutions instables. La théorie des canards est née alors, avec l'article initial [3] en dimension 2, suivi de nombreux autres écrits à l'aide de l'analyse non standard ou non, en dimension 2 puis en dimension supérieure. Les canards originels correspondent à une bifurcation nœud-col du champ rapide, les canards en dimension supérieure correspondent au passage d'une valeur propre à l'origine.

Plus tard (voir [15, 6, 18, 16]), un phénomène analogue est apparu dans le cas où le champ rapide présente une bifurcation de Hopf : il y a *retard à la bifurcation*. L'étude de ce phénomène nécessite de prendre en compte l'analyticité du système et de complexifier la variable t. Le retard est de même nature que le rayon de convergence d'une fonction analytique réelle : il se lit sur les singularités de la fonction étendue au champ complexe.

Une étude générale du retard pour une singularité isolée dans le champ complexe est faite dans [4]. Il s'agit de chercher des conditions pour qu'existe une solution régulière en ε dans tout un voisinage du point étudié. Ces solutions sont appelées *surstables*.

Dans [5, 1], les *canards à pôles* sont étudiés pour les équations de Riccati. Ces articles sont purement réels, et les pôles sont considérés comme des points réguliers à l'infini, ce qui permet de définir une solution de part et d'autre du pôle. En fait, si les auteurs avaient

pensé à complexifier la variable t, ils auraient remarqué que les solutions étudiées sont définies et régulières sur tout un voisinage complexe épointé de la singularité : ce sont des solutions surstables avec singularités.

Dans cet article, je me propose d'étudier de la façon la plus générale (mais générique) possible de telles solutions surstables avec singularités. Il est indispensable de considérer le temps complexe pour pouvoir définir une solution à la fois sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$ alors qu'elle admet une singularité près de l'origine.

2.1. Le problème

Considérons l'équation complexe singulièrement perturbée

$$\varepsilon \dot{x} = F(t, x, \varepsilon) \qquad [1]$$

où ε est un paramètre réel positif qui tend vers 0, et où F est analytique en toutes ses variables (mais pas nécessairement réelle analytique). On s'intéresse à un voisinage $\mathcal{D}$ uniforme par rapport à ε d'un point critique t_0. On étudie la situation la moins dégénérée, on choisit pour cela les hypothèses suivantes, après avoir mis le point critique à l'origine :

Hypothèse H :

$\star$ L'origine est un point critique : en $(0, 0, 0)$, on a $F = \partial_x F = \partial_t F = 0$

$\star$ non dégénéré : $(\partial_{tx} F)^2 - \partial_{tt} F \partial_{xx} F \neq 0$ et $\partial_{xx} F \neq 0$.

L'exemple le plus simple, qu'on prendra comme *modèle* dans cet article, est l'équation de Riccati

$$\varepsilon \dot{x} = tx - x^2 - \varepsilon a \qquad [2]$$

où a est un paramètre complexe. L'équation de Riccati a une propriété importante : les solutions n'ont que des pôles comme singularités. En particulier, elles sont uniformes : la valeur de la solution ne dépend pas du chemin le long duquel on a intégré l'équation.

Le théorème principal de cet article est rédigé ci-dessous avec une grande imprécision dans l'énoncé. il sera précisé plus loin (théorème 3).

Théorème 1 *Si il existe une solution de l'équation (1) régulière par rapport à ε sur un secteur épointé d'ouverture supérieure à $\frac{3\pi}{2}$ autour de t_0, alors l'un des coefficients de cette équation doit être un entier (pour l'équation (2), il s'agit de a).*

Une autre propriété sera évoquée mais non démontrée, elle concerne la dynamique des singularités d'une solution quand le paramètre a varie. Ce problème a déjà été envisagé mais non résolu par Callot dans des œuvres posthumes. Elle permettrait, entre autres, de démontrer une réciproque au théorème précédent : l'existence pour chaque entier d'un paramètre $a(\varepsilon)$ convergeant vers cet entier tel que l'équation (1) admette une solution définie et régulière sur un secteur épointé d'ouverture supérieure à $\frac{3\pi}{2}$ autour de t_0.

Avant d'attaquer le problème proprement dit, on va donner quelques rappels sur la théorie des équations différentielles lentes-rapides. Ce paragraphe est très largement inspiré des travaux de Callot. Ensuite, on étudiera le problème "simple" de l'équation de

Riccati (2), puis on généralisera à une équation quelconque présentant un turning point du même type.

3. Equations différentielles singulièrement perturbées

3.1. Analyse Non Standard complexe

Je sais que beaucoup de mathématiciens n'*aiment pas* l'analyse non standard, mais j'avoue que la simplicité d'écriture qu'elle permet donne un confort que j'ai du mal à refuser. Tous les théorèmes et les démonstrations peuvent être traduits en analyse classique, mais je laisse ce travail à d'autres. La rançon de ce choix est que je dois faire quelques rappels pour que le texte soit compréhensible. Pour plus de détails, se reporter à [9].

Dorénavant, ε est un paramètre *fixé* infinitésimal réel positif. Malgré cela, j'écrirai quand même ε comme argument des fonctions dans lesquels il apparaît. En effet, il sera souvent utile de considérer $F(t, x, \varepsilon)$ et $F(t, x, 0)$. L'équation étudiée est donc bien l'équation (1), ce n'est plus une famille à un paramètre comme devrait le considérer le mathématicien standard.

Quelques notions et notations utiles dans la suite :

– Le symbole $\emptyset$ désigne une quantité infinitésimale, différente a priori à chaque occurrence du symbole. C'est l'analogue d'un petit o.

– Avec les mêmes conventions, le symbole ∞ désigne une quantité infiniment grande, l'inverse d'un infiniment petit.

– Dans la même veine, le symbole $\pounds$ désigne une quantité limitée, c'est-à-dire non infiniment grande.

– Et le symbole @ désigne une quantité appréciable, c'est-à-dire ni infiniment petite, ni infiniment grande.

– On dit que deux objets sont infiniment voisins et on note $x \simeq y$ si $x - y$ est infinitésimal. On note bien sûr $x \not\simeq y$ la relation contraire.

– La notation $x \lesssim y$ signifie $x < y \vee x \simeq y$ et la notation $x \underset{\not\simeq}{<} y$ signifie $x < y \wedge x \not\simeq y$.

– On dit qu'une fonction f est S-continue en un point standard x_0 si

$$x \simeq x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \simeq f(x_0)$$

Si f est une fonction standard, la S-continuité en x_0 est équivalente à la continuité en x_0 (voir les détails dans [9]).

– On dit qu'une fonction f est S-continue dans un domaine $\mathcal{D}$ si

$$x \simeq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \simeq f(y)$$

Si f et $\mathcal{D}$ sont standard, la S-continuité est équivalente à la continuité uniforme sur $\mathcal{D}$ (voir les détails dans [9]).

– Si x est un objet (pour nous ce sera un réel ou un complexe) limité, alors *l'ombre* $^\circ x$ est (s'il existe) l'unique objet standard infiniment proche de x. La même notation est employée pour des fonctions, mais c'est un peu plus délicat, et ce sera précisé dans le lemme de Robinson ci-dessous.

– Le *halo* d'un point t_0 est l'ensemble externe de tous les t infiniment voisins de t_0.

– Le S-*intérieur* d'un domaine standard $\mathcal{D}$ est l'ensemble externe des points dont le halo est inclus dans $\mathcal{D}$.

Voici maintenant deux lemmes techniques. Le premier est démontré dans [9]. J'ai pris l'énoncé du second dans [6], et la démonstration peut se trouver dans [17], [8] ou [10].

Lemme 1 (de l'ombre courte) *Soient f et F deux fonctions. On suppose f standard*[1] *continue. Soit H l'ensemble externe des x tels que $F(x) \simeq f(x)$. On suppose que les deux équations $x' = f(x)$ et $x' = F(x)$ ont la propriété d'existence et d'unicité des solutions. Soit $\tilde{x}(t)$ une solution standard de $x' = f(x)$, définie sur un intervalle standard $[0, T]$. On suppose qu'il existe un ensemble interne K inclus dans H tel que le halo de la courbe $\tilde{x}([0, T])$ est inclus dans K. Alors la solution $\tilde{X}$ de $X' = F(X)$ de condition initiale $\tilde{X}(0) \simeq \tilde{x}(0)$ est définie sur $[0, T]$ et vérifie $\tilde{X}(t) \simeq \tilde{x}(t)$.*

Lemme 2 (de Robinson) *Soit f une fonction analytique dans un domaine contenant le halo du point limité z_0, telle que $f(z_0)$ est limité.*

1) Si f est limitée en tout point du halo de z_0, alors :

a) f est S-continue en z_0, c'est-à-dire que pour tout z infiniment voisin de z_0, $f(z)$ est infiniment voisin de $f(z_0)$;

b) il existe un voisinage standard V de z_0 et une fonction standard $^\circ f$ analytique dans V telle que, pour tout z dans V,

$$^\circ f(z) \simeq f(z) \quad \textit{et} \quad (^\circ f)'(z) \simeq f'(z)$$

$^\circ f$ est appelée l'ombre *de f.*

2) Si f n'est pas S-continue en z_0, alors l'image par f du halo de z_0 contient tous les nombres complexes limités sauf, éventuellement, une partie du halo d'un point.

3) Si f est S-continue en z_0 et si son ombre est non constante, alors l'image par f du halo de z_0 est exactement le halo de $f(z_0)$.

1. Souvent on sera dans la situation où f et F sont données par une même fonction standard Φ avec $f(x) = \Phi(x, 0)$ et $F(x) = \Phi(x, \varepsilon)$.

3.2. Théorie du relief

Elle a été expliquée par Callot dans [6]. Je la reprends ici car elle est à la base de cet article.

Définition 1 *Une* courbe sage *de l'équation (1) est une fonction analytique ϕ telle que $F(t, \phi(t), 0) = 0$, définie dans un voisinage de l'origine. Quitte à faire une translation sur la variable x, on supposera que $\phi(0) = 0$.*

L'équation (2) possède deux courbes sages : $\phi_1(t) = 0$ et $\phi_2(t) = t$.

Définition 2 *Le* relief *associé à la courbe sage $x = \phi(t)$ de l'équation (1) est la fonction d'argument complexe t et à valeurs réelles*

$$R(t) = \Re \int_{t_1}^{t} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\tau, \phi(\tau), 0) \right) d\tau$$

Le choix de t_1 importe peu car la fonction relief n'interviendra que par ses variations. Le dessin des lignes de niveau de la fonction relief est fondamental dans la suite. Sur la figure 1 est dessinée en couleurs la valeur de la fonction relief de la courbe sage nulle de l'équation (2). Il s'agit de la fonction $\Re(\frac{1}{2}t^2)$. Le signe $+$ indique les montagnes qui correspondent à des valeurs grandes positives, et le signe $-$ les vallées.

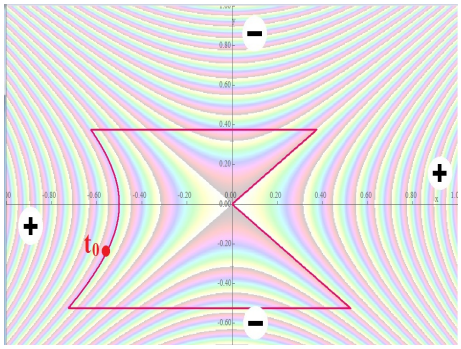


Figure 1 – Le relief de la courbe sage nulle de l'équation (2) et, bordé de rouge, un domaine sous t_0.

Un peu de terminologie liée à cette idée de relief est utile dans la suite :

Définition 3

– *Un chemin* $t = \gamma(s)$ *est dit* descendant *(resp.* appréciablement descendant) *le relief si pour tout* s*, on a* $\frac{d}{ds}R(\gamma(s)) \leq 0$ *(resp.* $\lneqq 0$*).*

– *Soit* t_0 *un complexe donné. Un domaine* $\mathcal{D}$ *est* situé sous t_0 *si tout point du* S*-intérieur de* $\mathcal{D}$ *est l'extrémité d'un chemin appréciablement descendant d'origine* t_0 *entièrement tracé dans* $\mathcal{D}$*.*

Sur la figure 1, on a dessiné un domaine situé sous t_0. On pourrait agrandir ce domaine vers le haut et vers le bas, mais ni à gauche, ni à droite.

Le lemme principal qui suit est démontré par Callot dans [6], (théorème 2 page 156). Je l'énonce un tout petit peu différemment, mais c'est exactement le même.

Lemme 3 (de descente) *(Callot) Soit* $\mathcal{D}$ *un domaine situé sous* t_0*. Soit* $\tilde{x}(t)$ *la solution de l'équation (1) dont la valeur initiale est infiniment voisine de la courbe sage* $\tilde{x}(t_0) \simeq \phi(t_0)$*. Alors* $\tilde{x}$ *est définie au moins dans le* S*-intérieur de* $\mathcal{D}$*, et elle y est infiniment voisine de* $\phi(t)$*.*

4. Équations de Riccati

Dans tout ce paragraphe, a est un paramètre complexe limité, pas nécessairement standard (c'est-à -dire dépendant éventuellement de ε).

Théorème 2 *Supposons qu'il existe une solution* $\tilde{x}$ *de l'équation (2) vérifiant* $\tilde{x}(t_e) \simeq 0$ *et* $\tilde{x}(t_s) \simeq 0$ *pour un* t_e *appréciable situé sur la montagne* $\frac{3\pi}{4} \lneqq \arg(t) \lneqq \frac{5\pi}{4}$ *et un* t_s *appréciable sur la montagne* $\frac{-\pi}{4} \lneqq \arg(t) \lneqq \frac{\pi}{4}$*. Posons* $k = \min(\frac{1}{2}\Re(t_e^2), \frac{1}{2}\Re(t_s^2))$*. Alors il existe un entier naturel standard* n *tel que*

1) $\tilde{x}$ *est définie et infinitésimale dans le* S*-intérieur du domaine* $\mathcal{D}$ *constitué de la réunion des domaines situés respectivement sous* ${}^{\circ}t_e$ *et sous* ${}^{\circ}t_s$ *(ce domaine est un domaine simplement connexe, duquel on a retiré l'origine).*

2) $\varepsilon \ln|a - n| \lneqq -k$*.*

3) $\tilde{x}$ *possède exactement* n *pôles dans le halo de l'origine.*

4.1. Lemmes préparatoires

Lemme 4 *Les solutions de l'équation (2)*$_a$ *sont méromorphes sur* $\mathbb{C}$*, les pôles sont simples, les zéros sont simples (sauf pour le cas particulier de la solution nulle quand* $a = 0$*).*

Preuve La raison fondamentale est bien connue de tout étudiant ayant rencontré une fois une équation de Riccati : une équation de Riccati est une équation linéaire déguisée, ses solutions s'écrivent

$$x = \varepsilon \frac{\dot{u}}{u} \quad \text{où} \quad \varepsilon \ddot{u} - t\dot{u} + au = 0 \,. \qquad [3]$$

La fonction u est analytique sur $\mathbb{C}$ en tant que solution d'une équation linéaire sans singularité. Les pôles de x sont donc les zéros de u, et les zéros de x sont les zéros de $\dot{u}$.

Les zéros de x sont simples car, sauf pour l'exception indiquée dans le lemme, en tout point où x est nul, on a $\dot{x} = -a \neq 0$. Les pôles sont simples car u et $\dot{u}$ ne peuvent pas s'annuler simultanément. □

Le point *1* du théorème 2 est un corollaire : le lemme 3 donne le résultat souhaité sur deux parties du domaine $\mathcal{D}$, et l'uniformité de la solution méromorphe permet de conclure.

Lemme 5 *On suppose $a \not\simeq 0$. Si $\tilde{x}$ est une solution de l'équation (2)$_a$ infinitésimale aux points t_e et t_s de l'énoncé, alors*

$$\tilde{y} = t - \varepsilon \frac{a}{\tilde{x}} \qquad [4]$$

est solution de l'équation (2)$_{a-1}$. De plus, il existe des points τ_e et τ_s infiniment voisins de t_e et t_s tels que $\tilde{y}(\tau_e) \simeq 0$ et $\tilde{y}(\tau_s) \simeq 0$.

Preuve Le fait que $\tilde{y}$ soit solution de (2)$_{a-1}$ est le résultat élémentaire du changement d'inconnue.

On étudie $\tilde{x}$ dans le S-intérieur du domaine situé sous ${}^{\circ}t_e$. Comme $\tilde{x}(t_e)$ est infinitésimal, le lemme 3 assure que $\tilde{x}$ est infinitésimale dans le domaine externe considéré. Le lemme 2 assure que $\dot{\tilde{x}} \simeq 0$. On en déduit que $t\tilde{x} - \tilde{x}^2 - \varepsilon a = \varepsilon \emptyset$ qui donne

$$\tilde{x} = \frac{\varepsilon(a + \emptyset)}{t - \tilde{x}} = \frac{\varepsilon(a + \emptyset)}{t}$$

Donc $\tilde{y}$ est infinitésimale dans ce même domaine. Par permanence[2], il existe un point dans le halo de ${}^{\circ}t_e$ où $\tilde{y}$ est infinitésimale. Il en est de même dans le halo de ${}^{\circ}t_s$. □

Lemme 6 *Si $\tilde{x}$ est une solution de l'équation (2)$_a$ infinitésimale aux points t_e et t_s de l'énoncé, alors $\tilde{x}$ a au plus un nombre limité de pôles dans le halo de l'origine. Ces derniers sont tous de la forme $\sqrt{\varepsilon}\pounds$.*

Preuve Soit r_0 réel appréciable tel que le disque de rayon r_0 centré à l'origine soit inclus dans le S-intérieur du domaine $\overline{\mathcal{D}}$. On définit r comme le plus grand réel inférieur à r_0 tel qu'il existe t vérifiant $|t| = r$ et $|t\tilde{x}(t)| = \varepsilon(|a| + 1)$. S'il existe, il est forcément infinitésimal car on sait que $t\tilde{x} = \varepsilon(a + \emptyset)$ dans le disque de rayon r_0 privé du halo de l'origine. S'il n'existe pas, c'est que $\tilde{x}$ ne peut pas avoir d'autre pôle que l'origine.

On va montrer que $r = \sqrt{\varepsilon}\pounds$ à l'aide de l'outil *zoom*, c'est-à-dire de la famille de loupes $(t, x) = (\alpha T, \alpha X)$ où α est un paramètre a priori infinitésimal. Cette loupe transforme l'équation (2) en

$$\frac{\varepsilon}{\alpha^2}\frac{dX}{dT} = TX - X^2 - \frac{\varepsilon}{\alpha^2}a$$

2. Le principe de permanence est un *truc* d'analyse non standard bien commode ici, qui pourrait se contourner fastidieusement. Le *truc* permet d'éviter de construire plus ou moins explicitement τ_c.

Supposons, par l'absurde, que $\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}$ soit infiniment grand et choisissons $\alpha = r$. L'équation sous la loupe est alors une équation lente-rapide du type de (2). On sait, par construction de r, que pour tout T limité de module supérieur à 1, $|T\tilde{X}| = \frac{1}{r^2}|t\tilde{x}| < \frac{\varepsilon}{r^2}(|a|+1)$ est infinitésimal. On en déduit, comme dans la preuve du lemme 5, que $T\tilde{X} = \frac{\varepsilon}{\alpha^2}(a + \emptyset)$ dès que $T \not\simeq 0$, ce qui est contradictoire avec le fait qu'il existe un T de module 1 tel que $|T\tilde{X}| = \frac{\varepsilon}{r^2}(|a|+1)$.

Choisissons maintenant $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$. On sait que pour T supérieur à $\frac{r}{\alpha}$, on a $|T\tilde{X}| < |a|+1$, donc la solution considérée est limitée pour tout T limité assez grand. Elle a donc une ombre solution de l'équation standard $X' = TX - X^2 - {}^\circ a$. Cette dernière n'a pas de pôle à l'extérieur du compact $|T| \leq \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}$, elle n'a donc qu'un nombre fini standard de pôles. Les pôles sont isolés donc une perturbation analytique infinitésimale (qui remplace ${}^\circ a$ par a) ne fait que déplacer infiniment peu les pôles sans changer leur nombre. □

Lemme 7 *On suppose $\Re(a) \lneq 0$. Si $\tilde{x}$ est une solution de l'équation (2)$_a$ infinitésimale aux points t_e et t_s de l'énoncé, le nombre de pôles réels de $\Re(\tilde{x}(t))$ est strictement supérieur au nombre de pôles réels de $\Re(\tilde{y}(t))$ où $\tilde{y}(t) = t - \varepsilon\frac{a}{\tilde{x}(t)}$.*

Remarquons que ce lemme est *absurde* (bien qu'on ne le sache pas encore) dans le sens suivant : le théorème 2 affirme que les hypothèses du lemme sont contradictoires.

Preuve Pour toute fonction méromorphe x sur $\mathbb{C}$, on a les remarques suivantes : tout zéro de x est un zéro de $\Re(x)$; tout pôle de $\Re(x)$ est un pôle de x. On en déduit des relations d'inégalité sur les cardinaux correspondant. La même remarque s'applique si on ne considère que les pôles ou les zéros réels.

On remarque de façon immédiate que les zéros de $\tilde{x}$ sont exactement les pôles de $\tilde{y}$.

Reste l'ingrédient principal : la comparaison du nombre de zéros et de pôles réels de $\Re(\tilde{x})$ grâce à un argument de piège. Notons ξ et η les fonctions méromorphes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, parties réelle et imaginaire de $x = \xi + i\eta$. La fonction ξ est solution de l'équation réelle

$$\varepsilon\dot{\xi} = t\xi - \xi^2 + \eta^2 - \varepsilon\Re(a)$$

Comme $\Re(a) < 0$, la droite $\xi = 0$ est un piège où $\dot{\xi} > 0$. Connaissant le développement asymptotique de $\tilde{x}$ pour t appréciable réel dans le S-intérieur de $\mathcal{D}$, on sait que $\tilde{\xi}$ a le signe de $-t$ pour t appréciable suffisamment petit. On en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il y a au moins un pôle de plus que de zéro.

Avec des notations évidentes (# pour cardinal, P pour pôles et Z pour zéros), et en ne prenant en compte que les pôles et zéros réels, nous avons montré que

$$\#P(\Re(\tilde{y})) \leq \#P(\tilde{y}) = \#Z(\tilde{x}) \leq \#Z(\Re(\tilde{x})) < \#P(\Re(\tilde{x}))$$

□

4.2. Preuve du théorème 2

Le point *1* a déjà été démontré ci-dessus, comme corollaire du lemme 4.

Montrons maintenant que a est infiniment proche d'un entier naturel. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que a n'est pas infiniment proche d'un entier naturel et qu'il existe une solution infinitésimale dans le S-intérieur d'un voisinage standard épointé de l'origine pour l'équation $(2)_a$. D'après le lemme 5, ceci est encore vrai pour $a-1$. En itérant cette procédure un nombre limité de fois, on montre que ceci reste encore vrai pour une valeur de a à partie réelle strictement négative. Soit n le nombre de pôles réels de la solution correspondante. Il est limité (lemme 6). On fait encore $n+1$ fois le changement d'inconnue (4). En appliquant le lemme 7, on obtient une fonction solution de $(2)_{a-n}$ ayant au plus -1 pôles. Cela n'a aucun sens. L'hypothèse était donc absurde.

Comme a est infiniment proche d'un entier n, la loupe de puissance $\sqrt{\varepsilon}$ transforme l'équation $(2)_a$ en une perturbation régulière de $X' = TX - X^2 - n$. L'ombre de notre solution est la seule solution de cette dernière équation qui a pour comportement asymptotique $X = \frac{n}{T}$. C'est le quotient $\frac{P'(T)}{P(T)}$ où P est le polynôme d'Hermite de degré n. Le point *3* du théorème est démontré.

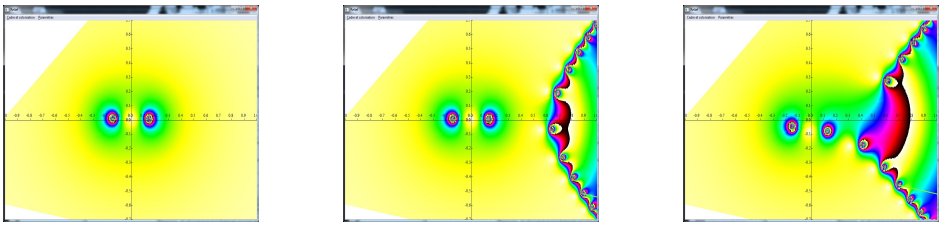
Après n changements d'inconnue (4), on obtient une solution de l'équation avec $a \simeq 0$. Celle-ci n'a pas de pôle, on peut donc appliquer la théorie de la surstabilité (voir [4]) pour obtenir le point *2* du théorème.

4.3. Illustration

Dans la figure 2, la couleur représente la norme d'une solution de l'équation (2). Les pôles sont donc visibles là où la couleur change très rapidement sur des petits cercles concentriques autour du pôle. Les grandes plages jaunes correspondent au domaine où x est « infinitésimale » La trajectoire choisie a pour condition initiale 0 en un point situé hors de la figure en temps négatif. Sur la figure de gauche, le paramètre a est entier. Sur celle du milieu, il est « exponentiellement proche » d'un entier, et sur celle de droite il est loin d'un entier. J'ai volontairement choisi des valeurs complexes.

Il faut interpréter ainsi ces figures : quand $a = 2$, on voit les deux pôles situés dans le halo de l'origine. Pour $a = 2 + 0.01i$, se rajoute une ligne de pôles le long d'une courbe de niveau du relief. Comme 0.01 est « exponentiellement petit », cette ligne de niveau ne passe pas par l'origine. Dans la troisième figure, la ligne de pôles passe dans le halo de l'origine.

Techniquement, j'ai intégré l'équation par une méthode de Runge Kutta le long d'une demi-droite de pente légèrement positive, puis à partir des points ainsi calculés, le long de demi-droites de pente nettement positives et de pente négative. Ces pentes sont visibles sur le côté gauche du dessin car la solution n'a pas été calculée sur tout le rectangle. Si on observe avec soin le troisième dessin, on voit certaines irrégularités dues aux erreurs numériques quand un chemin passe trop près d'un pôle.



(a) $a = 2$ (b) $a = 2 + 0.01i$ (c) $a = 2 + 0.5i$

Figure 2 – Les pôles d'une solution *sage* de (2) avec $\varepsilon = 0.02$.

5. Généralisation

On va démontrer le théorème principal de cet article, analogue au théorème 2 pour l'équation plus générale (1) sous l'hypothèse **H**. Pour plus de commodité nous allons définir l'indice d'une équation :

Définition 4 *L'indice de l'équation (1) (satisfaisant l'hypothèse* **H***) est l'un ou l'autre des nombres complexes*

$$a = \frac{-\partial_{xx}F}{2\sqrt{\Delta}}\left(\partial_\varepsilon F + \frac{\partial_{xt}F}{\partial_{xx}F}\right) - \frac{1}{2} \quad \textit{où} \quad \Delta = (\partial_{xt}F)^2 - \partial_{tt}F\partial_{xx}F$$

toutes les fonctions étant évidemment évaluées à l'origine.

Le choix de la détermination de la racine carrée sera précisé quand le besoin s'en fera sentir.

Théorème 3 *Supposons qu'il existe une solution $\tilde{x}$ de l'équation (1) définie et S-analytique au voisinage d'un chemin reliant deux instants appréciables assez petits et tournant autour de l'origine d'un angle supérieur à $\frac{3\pi}{2}$. Alors l'indice de (1) est infiniment proche d'un entier (positif ou négatif).*

Remarquons que si pour l'une des déterminations de $\sqrt{\Delta}$ l'indice est un entier strictement négatif, alors, pour l'autre détermination, c'est un entier naturel. Et réciproquement.

REMARQUE. —
Cet énoncé est moins précis que le théorème 2 concernant l'équation de Riccati. D'une part, la solution a des singularités mobiles plus compliquées que des pôles, et il est hors

de question de les compter. D'autre part, une théorie plus approfondie (voir [13]) permet de préciser que, sous l'hypothèse du théorème, l'indice est contraint non seulement à un infiniment petit près comme indiqué ici, mais à un exponentiellement petit près, il a un développement asymptotique en puissance de $\sqrt{\varepsilon}$ qu'on peut calculer (avec parfois beaucoup de sueur). Ainsi, par exemple, les calculs numériques faits pour l'équation (6) avec $\varepsilon = 0.02$ donnent des valeurs possibles pour a voisines de $1.96 - 0.2i$, et un calcul théorique donne le début du développement asymptotique : $a = 2 - i\sqrt{\frac{2\pi}{e}}\sqrt{\varepsilon} + \pounds\varepsilon$. La valeur conjuguée donnerait une solution définie et infinitésimale sur un chemin faisant le tour de l'origine par au-dessus.

5.1. Préparation de l'équation

Avant d'attaquer la démonstration proprement dite du théorème, on prépare l'équation pour se ramener au plus près à l'équation de Riccati (2) étudiée ci-dessus. On obtiendra l'équation (5) ci-dessous dont les termes de plus bas degré sont précisément ceux de l'équation de Riccati.

Lemme 8 *L'hypothèse* **H** *implique qu'il existe deux courbes sages ϕ_1 et ϕ_2 passant par l'origine.*

Preuve C'est un exercice qui devrait se trouver dans tout bon ouvrage traitant du théorème des fonctions implicites.

Supposons qu'une telle fonction ϕ existe. En dérivant deux fois la relation $F(t, \phi(t), 0) = 0$, et en prenant les valeurs en zéro, on obtient, à l'origine

$$\partial_{tt}F + 2\partial_{xt}F\phi'(0) + \partial_{xx}F\phi'(0)^2 = 0$$

Grâce à l'hypothèse **H**, ce polynôme admet deux racines distinctes exactement. Notons les α_1 et α_2. Le choix d'une détermination de $\sqrt{\Delta}$ détermine la racine $\alpha = \frac{-\partial_{xt}F+\sqrt{\Delta}}{\partial_{xx}F}$. La fonction ϕ est donc de la forme $\phi(t) = t(\alpha + \psi(t))$, avec $\psi(0) = 0$. La relation que doit satisfaire ψ est $\frac{1}{t^2}F(t, t(\alpha + \psi(t)), 0) = 0$. J'ai rajouté le facteur de normalisation $\frac{1}{t^2}$ car on sait que le quotient est analytique. On applique maintenant le théorème des fonctions implicites à la fonction

$$(t, y) \mapsto u(t, y) = \frac{1}{t^2}F(t, t(\alpha+y), 0) = \tfrac{1}{2}\partial_{tt}F + (\alpha+y)\partial_{tx}F + \tfrac{1}{2}(\alpha+y)^2\partial_{xx}F + O(t)$$

C'est licite car la dérivée $\partial_y u$ est non nulle à l'origine, en effet, elle vaut $\partial_{tx}F + \alpha\partial_{xx}F = \sqrt{\Delta}$. □

La solution dont il est question dans le théorème 3 a une ombre sur un voisinage du chemin où elle est définie. Cette ombre est forcément l'une des deux courbes sages. Quitte à choisir la bonne détermination de $\sqrt{\Delta}$, on peut supposer qu'il s'agit de la courbe sage vérifiant $\phi'(0) = \alpha$.

Lemme 9 *Quitte à faire un changement de variables (standard), l'équation (1) peut s'écrire*

$$\varepsilon\dot{x} = tx - x^2 - \varepsilon a + P(t, x, \varepsilon) \qquad [5]$$

où $P(t, 0, 0) = 0$, et P est de valuation pondérée au moins 3 pour les variables pondérées $(t, 1)$, $(x, 1)$ et $(\varepsilon, 2)$. La courbe sage 0 de l'équation (5) a un relief $R(t) = \Re(\frac{1}{2}t^2 + \pounds t^3)$ qui a, au voisinage de l'origine, deux montagnes notées Ouest et Est et deux vallées notées Nord et Sud. Toute l'étude qui suit se fait dans un voisinage de l'origine où le relief reste conjugué au relief de l'équation de Riccati.

L'indice des deux équations est le même, c'est a.

La solution envisagée dans le théorème 3 est maintenant infinitésimale sur un chemin proche de l'origine, et reliant les deux montagnes Ouest et Est en passant par la vallée Sud.

Preuve 1) On commence par redresser la courbe sage en posant $x = \phi(t) + y$. Ceci donne l'équation $\varepsilon\dot{y} = G(t, y, \varepsilon)$ avec $G(t, y, \varepsilon) = F(t, \phi(t) + y, \varepsilon) - \varepsilon\dot{\phi}(t)$. On calcule alors sans mal

$$G(t, 0, 0) = 0\ ,\ \ \partial_{tt}G(0) = 0\ ,\ \ \partial_{yy}G(0) = \partial_{xx}F(0),$$

$$\partial_{ty}G(0) = \partial_{tx}F(0) + \alpha\partial_{xx}F(0) = \sqrt{\Delta}$$

On en déduit immédiatement que les deux équations ont même indice.

2) On fait maintenant une homothétie des deux variables : $t = \lambda s$ et $y = \frac{-1}{\lambda\partial_{yy}G(0)}z$ où $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\partial_{ty}G(0)}}$. La nouvelle équation $\varepsilon\frac{dz}{ds} = H(s, z, \varepsilon)$ est donnée par

$$H(s, z, \varepsilon) = \frac{-\partial_{yy}G(0)}{\partial_{ty}G(0)}\ G\left(\lambda s, \frac{-z}{\lambda\partial_{yy}G(0)}, \varepsilon\right)$$

et les calculs de dérivées partielles à l'origine permettent d'écrire H sous la forme indiquée dans le lemme.

Le choix de la détermination de la racine carrée de $\partial_{ty}G(0)$ permet de choisir l'orientation de l'axe imaginaire. On choisit celle qui fait que le chemin considéré dans le théorème 3 traverse la vallée Sud.

□

5.2. Preuve du théorème 3

L'idée de base est de montrer que le terme $P(t, x, \varepsilon)$ de l'équation (5) ne change presque rien. Toutes les figures qui illustreront cette preuve sont calculées avec l'équation

$$\varepsilon\dot{x} = tx - x^2 - \varepsilon a - \tfrac{1}{2}x^3 \qquad [6]$$

Il est vrai que pour $a = 0$ cette équation a 0 pour solution évidente. Ceci n'apprend pas grand chose sur ce qui se passe pour des valeurs non infinitésimales de a. Il est vrai aussi que le relief de l'équation (6) est précisément le même que celui de l'équation de Riccati, mais cela ne sera qu'une simplification pratique pour les dessins, sans influence sur la preuve.

Notons t_e (resp. t_s) un point de la montagne Ouest (resp. Est) où la solution $\tilde{x}$ donnée dans le théorème est définie et limitée. La solution peut se prolonger sur le S-intérieur d'un domaine $\mathcal{D}'$ situé *sous* ce chemin. Le chemin donné passe par le secteur Sud. Le domaine $\mathcal{D}'$ est alors constitué (au moins localement autour de l'origine) des secteurs successifs Nord, Ouest, Sud, Est, Nord, privés de l'origine. Les considérations précédentes montrent que $\tilde{x}$ est analytique et infinitésimale dans le S-intérieur de $\mathcal{D}'$ (avec deux déterminations différentes dans le secteur Nord). On prolonge $\tilde{x}$ autant que faire se peut le long des rayons jusqu'à l'origine. Si on ne rencontre aucune singularité, la solution $\tilde{x}$ est analytique au voisinage de l'origine et la théorie des solutions surstables (voir [4]) montre que a est infiniment petit (avec un développement en ε-ombre calculable). Si on rencontre des singularités, $|\tilde{x}|$ est infinie en chacune de ces singularités.

La suite de la preuve reprend la méthode dite du *zoom* déjà utilisée dans la preuve du lemme 6 : remarquons tout d'abord que dans le S-intérieur de $\mathcal{D}'$, on a $\tilde{x} \simeq 0$, d'où (lemme 2) $\frac{d}{dt}\tilde{x} \simeq 0$, c'est-à-dire $t\tilde{x} - \tilde{x}^2 - \varepsilon a + P(t, \tilde{x}, \varepsilon) = \varepsilon\delta$ avec $\delta \simeq 0$. D'autre part, les hypothèses sur P montrent que, pour $\tilde{x} \simeq 0$, on a

$$P(t, \tilde{x}(t), \varepsilon) = \tilde{x}(t^2 Q_1(t) + \mathcal{O}) + \varepsilon(tQ_2(t) + \mathcal{O})$$

d'où

$$\tilde{x} = \frac{\varepsilon(a - tQ_2(t) - \mathcal{O})}{t(1 + tQ_1(t)) + \mathcal{O}}$$

On en déduit que pour t de module non infinitésimal suffisamment petit, $|t\tilde{x}| < \varepsilon(|a|+1)$.

Ceci permet de définir correctement le plus grand réel r tel qu'il existe t dans $\mathcal{D}'$ vérifiant $|t| = r$ et $|t\tilde{x}(t)| = \varepsilon(|a| + 1)$. Exactement comme dans la démonstration du lemme 6, on montre que $r = \sqrt{\varepsilon}\pounds$. La loupe de puissance $\sqrt{\varepsilon}$ donne l'équation

$$\frac{dX}{dT} = TX - X^2 - a + \sqrt{\varepsilon}\frac{P(\sqrt{\varepsilon}T, \sqrt{\varepsilon}X, \varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}}$$

C'est une perturbation régulière de l'équation de Riccati de paramètre $^\circ a$, donc a est infiniment proche d'un entier naturel.

On voit sur la figure 4 plusieurs tracés faits de la même façon que ceux de la figure 2. La valeur du paramètre est proche de 2 (bien que numériquement, la distance ne soit pas si infiniment petite !). La différence essentielle avec le cas de l'équation de Riccati est que les singularités ne sont plus des pôles simples, chaque pôle de l'équation de Riccati a été remplacé par un motif plus compliqué. De plus, ces singularités n'étant plus des pôles, il faut faire attention au chemin utilisé. Sur les figures de cet article, les points réels positifs situés avant la ligne de singularités sont atteints par un chemin passant par la vallée Sud.

Il n'y a aucune raison a priori pour qu'un chemin passant par la vallée Nord donne les mêmes valeurs pour la solution.

6. Dynamique des pôles, équation de Riccati

Dans ce paragraphe, on étudie la dynamique des pôles d'une solution particulière de (2) quand le paramètre a varie. On cherchera surtout à voir la monodromie quand a décrit un cycle.

6.1. $a \simeq 0$

Considérons l'équation de Riccati (2) où le paramètre a décrit un lacet exponentiellement petit autour de l'origine : $a = a_0 \exp(i\theta)$. On étudie une solution de condition initiale infinitésimale en un point situé assez haut sur la montagne Ouest. On observe alors ses pôles : voir la figure 3. Huit valeurs de a ont été testées dans les huit points cardinaux (W, NW, N, NE, E, SE, S, SW) autour de l'origine. Le schéma est positionné en fonction de ce point cardinal.

La solution est exponentiellement petite sur la montagne Ouest et les deux vallées Nord et Sud. C'est pour cela qu'on voit la couleur blanche. Il n'y a aucun pôle dans le halo de l'origine, et la ligne de pôles est loin de l'origine donc a est exponentiellement petit (théorème 2).

On peut facilement voir à l'aide d'une loupe $t = t_0 + \varepsilon T$ que si la solution a un pôle en t_0 non infinitésimal, elle en a d'autres situés environ en $t_0 + \frac{2i\pi\varepsilon}{t_0}$. On explique ainsi le chapelet de pôles rangés le long d'une courbe de niveau du relief. Ce qui est remarquable, c'est que si a tourne autour de l'origine dans le sens direct, les pôles se décalent d'une unité vers le bas.

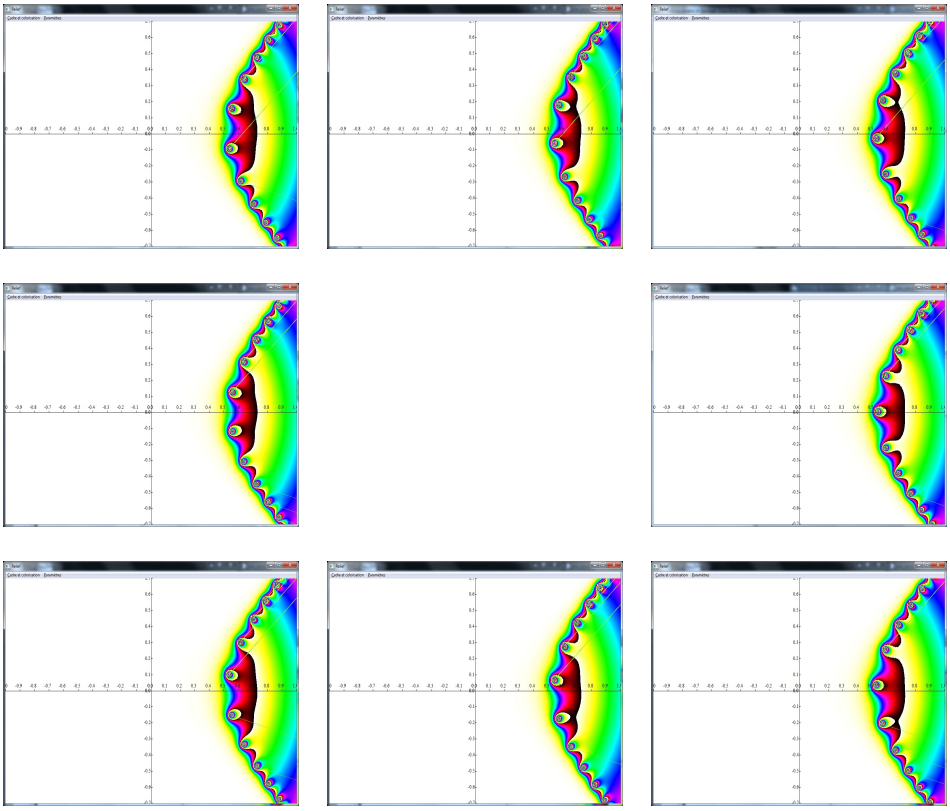


Figure 3 – Reprise de la figure 2 avec $a = \pm 0.001 \pm 0.001i$ et $\varepsilon = 0.02$

6.2. $a \simeq n$ entier non nul

Le même phénomène de déplacement des pôles se produit quand a tourne autour d'une valeur entière, à distance exponentiellement petite. Pour démontrer cela proprement à partir du cas précédent, il me semble que le changement d'inconnues (4) est suffisant. En effet, si les pôles non infinitésimaux de y se décalent, les zéros non infinitésimaux de x qui sont les mêmes points font de même, et les pôles de x doivent en faire autant.

En conséquence, l'application qui à a associe un pôle de $\tilde{x}$ est complexe multiforme, chaque lacet autour d'une valeur entière donnant une monodromie. Quand le lacet est

exponentiellement petit, la monodromie consiste à décaler les pôles non infiniment petits. Quand le lacet n'est plus exponentiellement petit, le décalage des pôles se produit aussi.

7. Dynamique des pôles, cas général

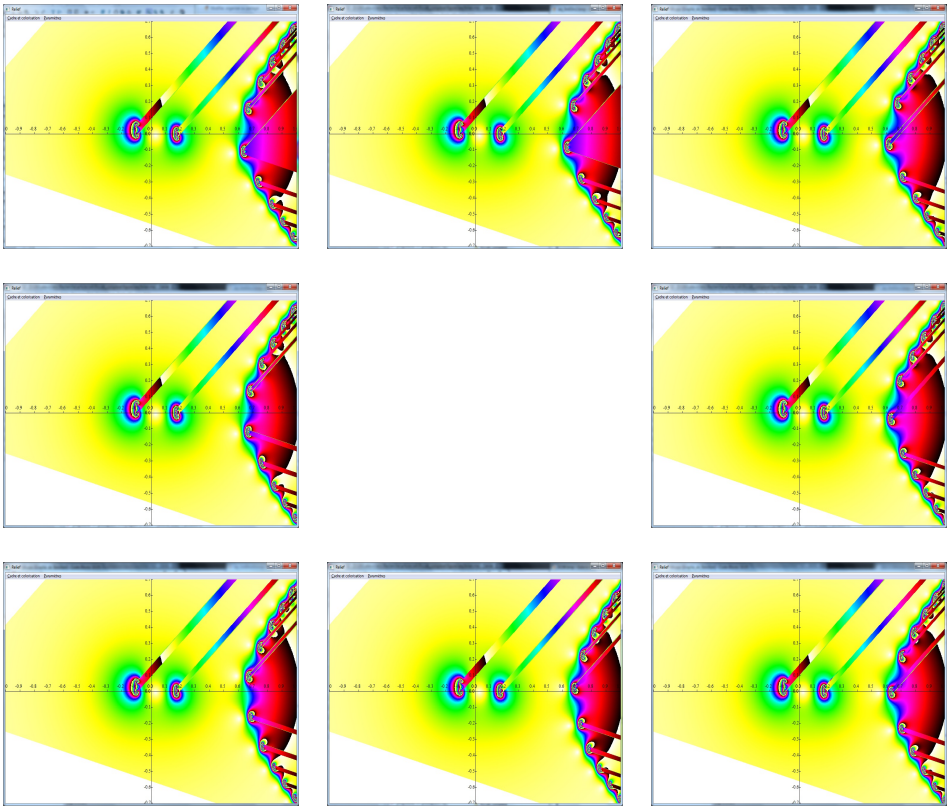


Figure 4 – Equation (6) avec $a = (1.96 \pm 0.01) - (0.2 \pm 0.01)i$ et $\varepsilon = 0.02$.

Le même phénomène se produit, la démonstration se faisant probablement en utilisant le zoom, comme dans la démonstration du théorème 3. J.-L. Callot a déjà conjecturé ce résultat dans [7] ; A. Fruchard et R. Schäfke le justifient théoriquement dans [12] et [13].

Je donne une illustration numérique du résultat sur la figure 4. Il faut cependant remarquer que l'énoncé lui-même devient beaucoup plus difficile à établir. En effet, chaque pôle de l'équation de Riccati est remplacé par un groupe de singularités qui introduisent de la non uniformité. La figure montre clairement ces groupes de singularités (ici deux singularités logarithmiques). Suivre chaque singularité individuellement sans se perdre dans les feuillets relève de la haute voltige, je le crains.

En utilisant les méthodes de [13], on peut calculer le développement asymptotique en $\sqrt{\varepsilon}$ de la singularité a^* de la fonction indicatrice qui à a associe les singularités de la solution considérée. Pour cette valeur a^*, la ligne de singularités part à l'infini. Il s'agit ici (les calculs sont assez fastidieux) de $a^* = 2 - i\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{e}} + \pounds\varepsilon$. Pour la valeur $\varepsilon = 0.02$ utilisée, cela donne une approximation $a^* \sim 2 - 0.215i$.

8. Projets de recherche

Dans cette conclusion, je veux préciser dans quelle situation le théorème 3 pourrait être bien utile.

D'abord, il faut démontrer que, pour un système du type

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varepsilon\dot{x} & = & tx - x^2 - a\varepsilon + P(t,x,y,\varepsilon) \\ \varepsilon\dot{y} & = & -y + Q(t,x,y,\varepsilon) \end{array} \right. \qquad [7]$$

(où P et Q satisfont des conditions du même type que celles du lemme 9), le théorème 3 peut être adapté. La difficulté est que, bien que le relief de y soit extrêmement simple et régulier, la composante y d'une solution a une singularité dès que x en a une.

Je veux ensuite étudier une équation du type

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varepsilon\dot{x} & = & tx - y + \varepsilon \\ \varepsilon\dot{y} & = & (t + \frac{3}{10})x + ty \end{array} \right. \qquad [8]$$

où, le long de l'axe réel, le champ rapide (obtenu en considérant t comme un paramètre et non comme une variable) présente successivement un nœud stable, une transition nœud-foyer (le point bleu), un foyer stable, une bifurcation de Hopf (le point vert) puis un foyer instable. La question est de mesurer le retard à la bifurcation de Hopf. Le relief de cette équation est défini sur un revêtement à deux feuillets (d'où deux déterminations correspondant à chacune des valeurs propres du système rapide), singulier au point de transition nœud-foyer (bleu en $t = -3/10$). La figure montre le relief sur un feuillet, celui sur l'autre feuillet étant conjugué.

L'étude classique du retard à la bifurcation permet de traiter les trajectoires longeant la courbe lente ($x = 0$) entre les points bleu et jaune. Au-delà, l'étude est plus délicate car le temps pendant lequel une solution longe la courbe lente nulle dépend non seulement de la valeur initiale de t mais aussi de la position de (x, y) par rapport à la variété stable forte du nœud rapide. Pour cette équation très particulière où des calculs explicites peuvent être

faits avec la fonction d'Airy, le problème a été résolu dans l'article [2]. Pour un système générique dont le relief a le même type de géométrie, les travaux sont en cours.

Le but de l'article d'aujourd'hui est d'avoir un critère simple empêchant une trajectoire de longer la courbe lente sur les deux montagnes du point critique (rouge sur la figure 5) afin d'obliger les trajectoires réelles à quitter le halo de zéro au moins avant le point dessiné en noir sur la figure.

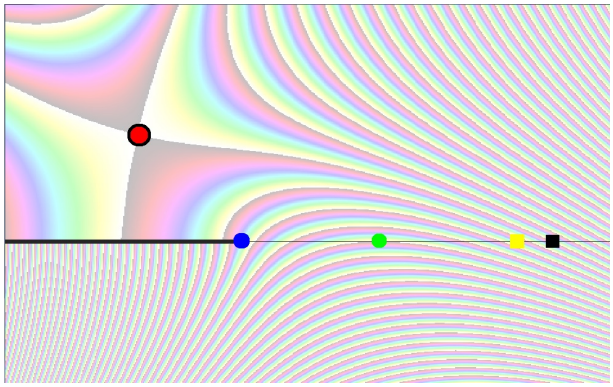


Figure 5 – Le relief de la courbe sage nulle de l'équation (8)

9. Bibliographie

[1] E. BENOÎT, « Canards et enlacements », *Publications de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, vol. 72, 1990, p. 63-91.

[2] E. BENOÎT, « Bifurcation delay - the case of the sequence : stable focus - unstable focus - unstable node », *Discrete and Continuous Dynamical Systems série S*, vol. 2, n° 4, 2009, p. 911-929.

[3] E. BENOÎT, J.-L. CALLOT, F. DIENER, M. DIENER, « Chasse au canard », *Collectanea Mathematica*, vol. 31-32, n° 1-3, 1981, p. 37-119.

[4] E. BENOÎT, A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, G. WALLET, « Solutions surstables des équations différentielles lentes-rapides à point tournant », *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, vol. VII, n° 4, 1998, p. 627-658.

[5] J.-L. CALLOT, « Solutions visibles de l'équation de Schrödinger », in M. DIENER, G. WALLET, editors, « Mathématiques finitaires et Analyse Non Standard, 1985 », *Publications mathématiques de l'Université Paris 7*, vol. 31, n° 1, 1989, p. 105-119.

[6] J.-L. CALLOT, « Champs lents-rapides complexes à une dimension lente », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, vol. 26, 1993, p. 149-173.

[7] J.-L. CALLOT, « Sur la piste des canards imaginaires », In « Colloque Trajectorien à la mémoire de Georges Reeb et Jean-Louis Callot - Obernai », *IRMA, Strasbourg*, 1995, p. 191-204.

[8] J.-L. CALLOT, « Calcul infinitésimal complexe », In « Colloque Trajectorien à la mémoire de Georges Reeb et Jean-Louis Callot - Obernai », *IRMA, Strasbourg*, 1995, p. 205-229.

[9] F. DIENER, G. REEB, « Analyse Non Standard », Collection Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1989.

[10] A. FRUCHARD, « Complex analysis », In « Nonstandard analysis in practice », *Springer Verlag*, 1995, p. 23-50.

[11] A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, « On the singularities of solutions to singular perturbation problems », *Journal of Physics*, vol. 22, 2005, p. 56-66.

[12] A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, « Composite asymptotic expansions and turning points of singularly perturbed ordinary differential equations », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, série I*, vol. 348, 2010, p. 1273-1277.

[13] A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, « Développements asymptotiques combinés et points tournants d'équations différentielles singulièrement perturbées », *HAL*, https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00461542v2, 2010.

[14] A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, « Composite asymptotic expansions », *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2066, Springer, 2013.

[15] C. LOBRY, G. WALLET, « La traversée de l'axe imaginaire n'a pas toujours lieu là où l'on croit l'observer », in M. DIENER, G. WALLET, editors, « Mathématiques finitaires et Analyse Non Standard, 1985 », *Publications mathématiques de l'Université Paris 7*, vol. 31, n° 1, 1989, p. 45-51.

[16] A. I. NEISHTADT, « On stability loss delay for dynamical bifurcations », *Discrete and Continuous Dynamical Systems, serie S*, vol. 2, n° 4, 2009, p. 897-909.

[17] A. ROBINSON, « Non Standard Analysis », North Holland, 1974.

[18] J. Z. SU, « Delayed oscillation phenomena in the Fitzhugh Nagumo equation », *Journal of Differential Equations*, vol. 105, n° 1, 1993, p. 180-215.