



**HAL**  
open science

# Propagation d'ondes élastiques guidées par la surface d'une cavité cylindrique de section arbitraire

Alain Bamberger, Patrick Joly, Michel Kern

► **To cite this version:**

Alain Bamberger, Patrick Joly, Michel Kern. Propagation d'ondes élastiques guidées par la surface d'une cavité cylindrique de section arbitraire. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1987, 304 (3), pp.4. hal-01315578

**HAL Id: hal-01315578**

**<https://inria.hal.science/hal-01315578>**

Submitted on 13 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comptes rendus de  
l'Académie des sciences.  
Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 21/01/1987.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:utilisationcommerciale@bnf.fr).

**ANALYSE MATHÉMATIQUE.** — *Propagation d'ondes élastiques guidées par la surface d'une cavité cylindrique de section arbitraire.* Note de **Alain Bamberger, Patrick Joly et Michel Kern**, présentée par Jacques-Louis Lions.

Nous montrons l'existence d'une suite de modes élastiques guidés par la surface d'une cavité cylindrique. Deux de ces modes se propagent pour toute valeur du nombre d'onde, les autres n'existent qu'au-delà d'un certain seuil.

**MATHEMATICAL ANALYSIS.** — Propagation of elastic surface waves along a cylindrical cavity of arbitrary cross section.

*We prove the existence of a hierarchy of elastic modes guided by the surface of a cylindrical cavity. Two of these modes propagate whatever the wave number. All of the others exists only beyond a certain threshold.*

Nous étudions la propagation d'ondes élastiques, guidées par la surface d'une cavité cylindrique dans un milieu infini. Ces ondes jouent le rôle, pour un problème extérieur, des ondes de Rayleigh pour un demi-espace (cf. Achenbach [1]). Elles se propagent dans la direction des génératrices du cylindre, et leur énergie est localisée au voisinage de la cavité.

Contrairement au cas des guides d'ondes optiques, où la propagation ne peut avoir lieu que s'il existe un contraste de vitesses, nous montrerons que ces ondes de surface existent dans un milieu homogène. Comme pour l'onde de Rayleigh, la propagation est rendue possible par la condition de surface libre.

**POSITION DU PROBLÈME.** — Nous considérons un ouvert connexe  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , dont le complément  $\Omega_0$  est un domaine borné ( $\Omega_0$  est la section droite de la cavité). Nous cherchons des champs de déplacement de la forme :

$$(1) \quad u(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2) e^{i(\omega t - \beta x_3)}$$

c'est-à-dire des champs harmoniques de pulsation  $\omega$ , se propageant dans la direction  $x_3$  avec un nombre d'onde  $\beta$ , à la vitesse  $c = \omega/\beta$ .

A un tel champ, nous associons le tenseur des déformations  $\varepsilon^\beta$ , et le tenseur des contraintes  $\sigma^\beta$ . Dans notre cas,  $\varepsilon^\beta$  est défini par :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}^\beta(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2 \\ \varepsilon_{i3}^\beta(u) = \varepsilon_{3i}^\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_i} - i\beta u_i \right), \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon_{33}^\beta(u) = -i\beta u_3 \end{array} \right.$$

et  $\sigma^\beta$  est relié à  $\varepsilon^\beta$  par la loi de Hooke (loi de l'élasticité linéaire isotrope) :

$$\sigma_{ij}^\beta(u) = \lambda (\text{tr } \varepsilon^\beta(u)) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^\beta(u), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Le milieu étant homogène, les coefficients de Lamé ( $\lambda, \mu$ ) ainsi que la densité  $\rho$  sont constants.

Nous cherchons  $u$  solution des équations de l'élastodynamique linéaire, et vérifiant la condition de surface libre sur le bord de  $\Omega$ :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A(\beta)u)_i = -\frac{1}{\rho} \left( \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^\beta}{\partial x_j}(u) \right) - i\beta \sigma_{i3}^\beta(u) \right) = \omega^2 u_i, \quad i=1,2,3 \\ \sigma(u) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Nous dirons que  $u$  est un mode guidé si  $u$  est une solution non nulle de (3), de carré sommable dans  $\Omega$ . Il s'agit donc d'un problème de valeurs propres pour l'opérateur auto-adjoint positif  $A(\beta)$  qui n'a de solutions que si  $\omega$  et  $\beta$  vérifient une certaine loi appelée « relation de dispersion ».

Notons que, puisque  $\Omega$  est un domaine non-borné, l'existence de valeurs propres n'est pas garantie *a priori*.

Nous définissons, en posant  $V = H^1(\Omega)^3$ :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u, v) = \int_{\Omega} \rho u \bar{v} dx, \quad (u, v) \in V^2 \\ a(\beta; u, v) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^\beta(u) \sigma_{ij}^\beta(\bar{v}) dx, \quad (u, v) \in V^2. \end{array} \right.$$

La formulation variationnelle de (3) est alors:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in V \\ a(\beta; u, v) = \omega^2 (u, v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

LE CAS DU GUIDE CIRCULAIRE. — Dans le cas où la section droite  $\Omega$  est un cercle, des résultats précis ont été obtenus par Boström et Burden [3]. Ils mettent en évidence l'existence d'une suite dénombrable de modes. Le premier de ceux-ci est double, et se propage pour toute valeur de  $\beta$ . Tous les autres n'existent qu'au-delà d'un seuil de coupure  $\beta_m^*$ .

Les vitesses de phase, ainsi que les seuils, sont caractérisés comme solutions d'une équation transcendante. On peut montrer que les seuils tendent vers l'infini, proportionnellement à  $m$ , et que les vitesses de propagation  $c_m(\beta)$  tendent lorsque  $\beta$  tend vers l'infini, vers  $c_R$ , vitesse de l'onde de Rayleigh dans un demi-espace.

Le but de cette Note est la généralisation de ces résultats au cas d'une section droite de forme quelconque. L'outil est l'analyse spectrale des opérateurs auto-adjoints.

ANALYSE SPECTRALE DE  $A(\beta)$ . — Nous caractériserons les valeurs propres de  $A(\beta)$  par le principe de Min-Max (Reed-Simon [4]). Nous définissons, pour  $v_1, \dots, v_{n-1} \in V^{n-1}$ .

$$s_m(\beta) = \sup_{v_1, \dots, v_{n-1}} \inf_{v \in [v_1, \dots, v_{n-1}]^\perp} \frac{a(\beta; v, v)}{(v, v)}$$

[L'orthogonalité est définie par rapport au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ ]. La suite  $s_m(\beta)$  est croissante:

$$s_1(\beta) \leq \dots \leq s_m(\beta) \leq \inf \sigma_{\text{ess}}(A(\beta)) = \sigma_*.$$

Et, si  $s_m(\beta) < \sigma_*$ , alors :

$s_m(\beta)$  est la  $m$ -ième valeur propre de  $A(\beta)$ , comptée avec sa multiplicité.

Un point important de l'étude est la détermination du spectre essentiel de  $A(\beta)$ . Il s'appuie sur une écriture particulière de la forme bilinéaire  $a(\beta)$  :

LEMME 1. — On peut écrire, pour  $v \in V$  :

$$a(\beta; v, v) = \mu\beta^2 |v|^2 - 2\beta \operatorname{Im} \left( \int_{\Gamma} (\bar{v}_1 n_1 + \bar{v}_2 n_2) v_3 d\gamma \right) + \tilde{a}(\beta, v, v)$$

où  $\tilde{a}(\beta)$  est la forme positive définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\beta; v, v) = & \lambda \int_{\Omega} |\operatorname{tr} \varepsilon^{\beta}(v)|^2 dx \\ & + 2\mu \int_{\Omega} \left\{ \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + i \frac{\beta}{2} v_3 \right|^2 + \left| \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + i \frac{\beta}{2} v_3 \right|^2 \right\} dx \\ & + \mu \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla v_3|^2 dx. \end{aligned}$$

L'intérêt de ce lemme est de faire apparaître  $a(\beta) - \mu\beta^2$  comme somme de  $\tilde{a}(\beta)$ , qui est positive, et d'une perturbation compacte dans  $H^1(\Omega)$ .

THÉORÈME 1. — (1) Il existe une constante positive  $\gamma_0 \in ]0, 1[$  telle que :

$$\sigma(A(\beta)) \subset \left] \gamma_0 \frac{\mu}{\rho} \beta^2; +\infty \right[$$

$$(2) \quad \sigma_{\text{ess}}(A(\beta)) = \left[ \frac{\mu}{\rho} \beta^2, +\infty \right[ \Rightarrow \sigma_* = \frac{\mu}{\rho} \beta^2$$

(3)  $A(\beta)$  n'a pas de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel.

Le théorème 1, joint au principe du Min-Max nous permet d'établir les principaux résultats de cette étude :

THÉORÈME 2. — (1)  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ ,  $s_1(\beta) = \omega_1^2(\beta)$  et  $s_2(\beta) = \omega_2^2(\beta)$  sont valeurs propres de  $A(\beta)$ .

(2) Pour tout  $m > 2$ , il existe  $\beta_m^*$  (appelé  $m$ -ième seuil), tel que :  $\forall \beta > \beta_m^*$ ,  $A(\beta)$  admet  $m$  valeurs propres

$$s_1(\beta) = \omega_1^2(\beta), s_2(\beta) = \omega_2^2(\beta), \dots, s_m(\beta) = \omega_m^2(\beta)$$

comptées avec leurs multiplicités.

THÉORÈME 3. — Pour chaque  $\beta$  fixé, l'opérateur  $A(\beta)$  n'a qu'un nombre fini de valeurs propres. De façon équivalente :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m^* = +\infty.$$

En ce qui concerne le comportement à haute fréquence des modes guidés, nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 4 :

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sup c_m(\beta) = \frac{\omega_m(\beta)}{\beta} \leq c_R$$

où  $c_R$  désigne la vitesse de l'onde de Rayleigh dans un demi-espace.

La démonstration des théorèmes 2 et 4 repose sur le choix de champs tests judicieux. Celle du théorème 3 utilise un résultat de comparaison. Ces démonstrations sont détaillées dans Bamberger, Joly, Kern [2].

Nous essayons actuellement de préciser le comportement asymptotique. Notre conjecture est que, dans le cas d'un ouvert régulier, les vitesses admettent pour limite la vitesse de Rayleigh  $c_R$ , alors que dans le cas d'un coin, cette limite est strictement plus petite. Nous nous appuyons pour cela sur des calculs effectués par Wilson [5].

Des prolongements possibles de cette étude consistent à étudier des guides topographiques, utilisés dans la fabrication des lignes à retard. Nous voulons également étudier des phénomènes piezo-électriques, où entre en jeu l'anisotropie du milieu.

Reçue le 8 décembre 1986.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. D. ACHENBACH, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North Holland, 1975.
- [2] A. BAMBERGER, P. JOLY et M. KERN, *Analyse mathématique de la propagation d'ondes guidées par la surface d'une cavité cylindrique de section arbitraire*, Rapport I.N.R.I.A. (à paraître).
- [3] A. BOSTRÖM et A. D. BURDEN, Propagation of elastic surface waves along a cylindrical cavity and their excitation by a point source, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 72, 1982, p. 998-1004.
- [4] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, IV, Academic Press, 1978.
- [5] L. WILSON et O. MORRISSON, Propagation of elastic surface waves along cylinders of general cross section, *J. Math. Phys.*, 16, n° 9, 1975, p. 1795-1805.

I.N.R.I.A., 78153 Le Chesnay Cedex.