



HAL
open science

Sur les effets non-hydrostatiques en eaux profondes : application à la simulation de tsunamis

Fabien Wahl

► **To cite this version:**

Fabien Wahl. Sur les effets non-hydrostatiques en eaux profondes : application à la simulation de tsunamis. Modélisation et simulation. 2015. hal-01286543

HAL Id: hal-01286543

<https://inria.hal.science/hal-01286543>

Submitted on 11 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RAPPORT DE STAGE DE MASTER 2

Sur les effets non-hydrostatiques en eaux profondes : application à la simulation de tsunamis

Fabien WAHL

Master Mathématiques et Applications
spécialité Mathématiques de la Modélisation

sous la direction de Mme Mangeney^{1 2} et M. Sainte-Marie ²

Année universitaire 2014-2015

¹Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, Institut de Physique du Globe de Paris, Seismology group, Paris, France

²ANGE team, Inria, CEREMA, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris, France

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Contexte	2
1.2	Problématique	2
2	Le modèle non-hydrostatique : dérivation et solution analytique	3
2.1	Le système de Navier-Stokes	3
2.2	Equation d'énergie	4
2.3	Le système d'Euler moyenné	5
2.4	Une solution analytique : le soliton	10
3	Simulation de tsunamis	11
3.1	Cas académiques	11
3.2	Cas réel : tsunami survenu au Chili en 2014	14
4	Conclusion	17

1 Introduction

1.1 Contexte

Ce rapport contient les résultats d'un stage de fin d'études de six mois effectué au sein de l'équipe ANGE³ à l'Inria. ANGE est une équipe de recherche commune entre le LJLL⁴, le CEREMA⁵, l'Inria et le CNRS⁶.

Les compétences de l'équipe portent sur la modélisation, l'analyse mathématique et numérique ainsi que la simulation d'écoulements géophysiques. Le travail porte sur des modèles de Navier-Stokes simplifiés de type Saint-Venant modélisant des écoulements à surface libre. Les trois grands axes d'applications sont les écoulements gravitaires (inondation, tsunami, érosion, glissement de terrain, avalanche), l'énergie marine (biomasse, hydrolienne, énergie houlomotrice) et le couplage entre l'hydrodynamique et la biologie. Ainsi l'équipe a établi un modèle non-hydrostatique ou encore un modèle de Saint-Venant multi-couches. Le couplage avec des solides (bouées, icebergs) et plus généralement les écoulements à surface partiellement libre sont également étudiés. La résolution numérique de ces modèles a été implémentée dans le code FRE-SHKISS⁷ qui est développé au sein de l'équipe.

Le travail a été encadré par M. Sainte-Marie, responsable scientifique de l'équipe ANGE et par Mme Mangeney, responsable du groupe de sismologie à l'IPGP⁸.

1.2 Problématique

Le mot « tsunami » vient du japonais signifiant « vague qui se propage dans l'océan ». Les tsunamis sont majoritairement générés par un séisme, un déplacement soudain de la topographie au fond de la mer, qui est dû au mouvement des plaques tectoniques. Un glissement de terrain peut également en être l'origine. Les tsunamis représentent un risque majeur pour les populations et les infrastructures côtières, comme les ports ou les digues. Des modèles pour simuler les vagues engendrées par un séisme sont d'un intérêt majeur pour améliorer les systèmes d'alerte déjà mis en place dans les régions à risque et pour renforcer les infrastructures permettant ainsi de protéger au mieux les côtes des éventuels dégâts d'une vague.

Hypothèse 1 (Hypothèse d'eaux peu profondes). *On définit $\epsilon = \frac{h}{\lambda}$ où h et λ sont deux longueurs caractéristiques dans les directions verticale respectivement horizontale et on suppose $\epsilon \ll 1$.*

Dans ce travail, on s'intéresse à la modélisation de la propagation d'une vague et plus précisément, on aimerait savoir ce qui se passe quand l'hypothèse 1 n'est plus vérifiée. Souvent des modèles hydrostatiques sont utilisés dans lesquels la pression en un point est définie comme l'accélération de la pesanteur multiplié par la hauteur d'eau au dessus de ce point. Ces modèles simplifiés négligent la partie non-hydrostatique de la pression, définie comme la différence entre la pression hydrostatique et la pression réelle. Dans la suite, on établit un modèle non-hydrostatique et on le compare à un modèle classique de type Saint-Venant. En eaux profondes, des effets non-hydrostatiques apparaissent et on cherche à en décrire l'impact sur l'amplitude et

³Analyse Numérique, Géophysique et Ecologie

⁴Laboratoire Jacques-Louis Lions

⁵Centre d'Expertise sur les Risques, l'Environnement, la Mobilité et l'Aménagement

⁶Centre National de la Recherche Scientifique

⁷FREe Surface Hydromatics using KInetic SchemeS

⁸Institut de Physique du Globe de Paris

la forme des vagues. Dans la première section, nous présenterons la dérivation du modèle à partir des équations de Navier-Stokes et nous identifierons une solution analytique. Dans la deuxième section, nous présenterons des résultats numériques afin de comparer le modèle au modèle de Saint-Venant.

La dérivation du modèle a été reprise de [4], alors que les travaux sur la solution analytique ainsi que la partie sur la simulation de tsunamis constitue le travail personnel réalisé pendant le stage.

2 Le modèle non-hydrostatique : dérivation et solution analytique

Ici on établit un modèle non-hydrostatique en utilisant une relation de fermeture sur l'énergie, comme c'est le cas dans [4].

2.1 Le système de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes Rappelons ici les équations de Navier-Stokes incompressible en dimension 2, ainsi que les conditions limites pour ces dernières.

En notant les directions horizontale et verticale x respectivement z , le vecteur vitesse $\mathbf{u} = (u, w)^T$ avec u et w les composantes horizontale respectivement verticale, l'accélération de la pesanteur g , la pression du fluide p et la densité du fluide ρ_0 , on a les équations de Navier-Stokes suivantes pour tout $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $z_b(x, t) \leq z \leq \eta(x, t)$ où z_b représente la topographie et η l'élévation de la surface libre

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g + \frac{\partial \Sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_{zz}}{\partial z}. \end{cases}$$

En considérant un fluide newtonien, on a comme tenseur de viscosité

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \Sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \Sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, & \Sigma_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

avec μ la constante de viscosité et on définit le tenseur des contraintes $\Sigma_T = -pI_d + \Sigma$.

On définit la hauteur d'eau $H = \eta - z_b$, voir figure 1.

Conditions aux limites La normale extérieure au fluide à la surface libre \mathbf{n}_s et la normale intérieure au fluide au fond \mathbf{n}_b sont données par

$$\mathbf{n}_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_b = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial z_b}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

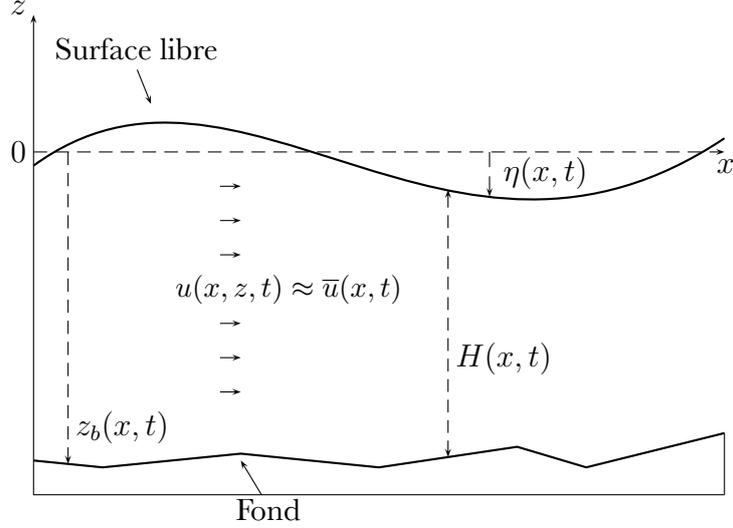


Fig. 1 : Notations

A la surface libre On a la condition cinématique

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - w_s = 0 \quad (1)$$

où l'indice s indique la valeur de la quantité désignée à la surface libre.

En considérant la viscosité de l'air négligeable, la continuité des contraintes à la surface libre nous donne la condition dynamique

$$\Sigma_T \mathbf{n}_s = -p_s(x, t) \mathbf{n}_s, \quad (2)$$

où $p_s(x, t) = p^a$ avec p^a une constante donnée représentant la pression atmosphérique.

Au fond En considérant que le fond dépend également du temps, la condition cinématique au fond est

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} - w_b = 0, \quad (3)$$

où l'indice b indique la valeur de la quantité désignée au fond.

On considère une loi de friction au fond sous la forme

$$\Sigma_T \mathbf{n}_b - (\mathbf{n}_b \cdot \Sigma_T \mathbf{n}_b) \mathbf{n}_b = \kappa \mathbf{v}_b,$$

avec $\mathbf{v}_b = \mathbf{u}_b - (0, \frac{\partial z_b}{\partial t})^T$ et κ un coefficient positif de friction.

Conditions initiales Il est nécessaire de définir des conditions initiales pour les variables u, w, H et z_b , i.e. $u(x, 0) = u_0(x)$, $w(x, 0) = w_0(x)$, $H(x, 0) = H_0(x)$ et $z_b(x, 0) = z_b^0(x)$.

2.2 Equation d'énergie

Le système de Navier-Stokes admet une énergie

$$E = E(z; u, w) = \frac{u^2 + w^2}{2} + gz$$

qui donne l'équation d'énergie suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{\eta} E dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{\eta} \left[u(E+p) - \mu \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right] dz \\ = -2\mu \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] dz + (p|_b - p^a) \frac{\partial z_b}{\partial t} - \kappa u_b. \end{aligned}$$

Le système d'Euler En négligeant les effets visqueux, on obtient le système d'Euler

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g, \end{cases} \quad (4)$$

complété avec des conditions initiales et les conditions limites (1) et (3) ainsi que (2). Le système d'Euler admet une énergie

$$E = E(z; u, w) = \frac{u^2 + w^2}{2} + gz$$

qui donne l'équation d'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{\eta} E dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{\eta} u(E+p) dz = (p|_b - p^a) \frac{\partial z_b}{\partial t}. \quad (5)$$

2.3 Le système d'Euler moyenné

En partant du système d'Euler, on établira un système d'Euler moyenné selon la verticale. On note $\langle f \rangle$ la moyenne selon la verticale, i.e.

$$\langle f \rangle(x, t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, z, t) dz.$$

Dans un premier temps, on considère que le fond ne dépend pas du temps, i.e. $\frac{\partial z_b}{\partial t} = 0$.

On suppose la densité de l'eau ρ_0 constante égale à 1 et on introduit la fonction indicatrice pour la région du fluide

$$\phi(x, z, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \mid z_b < z < \eta\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le système d'Euler moyenné selon la verticale s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi u \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi u \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi u^2 \rangle + \langle \phi \frac{\partial p}{\partial x} \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi w \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi u w \rangle + \langle \phi \frac{\partial p}{\partial z} \rangle = -\langle \phi g \rangle, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi z \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi z u \rangle = \langle \phi w \rangle. \end{array} \right. \quad (6)$$

Montrons comment obtenir ce système.

Avec les définitions précédentes, on a $\langle \phi \rangle = H$ et $\langle \phi z \rangle = \frac{\eta^2 - z_b^2}{2}$.

Le système d'Euler (4) s'écrit sous forme conservative

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \phi u}{\partial t} + \frac{\partial \phi u^2}{\partial x} + \frac{\partial \phi u w}{\partial z} + \phi \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \phi w}{\partial t} + \frac{\partial \phi u w}{\partial x} + \frac{\partial \phi w^2}{\partial z} + \phi \frac{\partial p}{\partial z} = -\phi g. \end{array} \right. \quad (7)$$

En partant de ce système et en considérant les conditions cinématiques à la surface libre et au fond, on obtient après des calculs élémentaires les trois premières équations de notre système.

En effet pour la première équation, en partant de

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi w}{\partial z} = 0,$$

on calcule

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi w}{\partial z} \right\rangle = 0$$

et on permute dérivée et intégrale grâce à la règle de Leibniz. En introduisant les conditions cinématiques (1) et (3), on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \phi \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi u \rangle = 0.$$

Les deux autres équations s'obtiennent exactement par les mêmes manipulations en partant des deux autres équations du système (7).

La dernière équation s'obtient en appliquant la formule de Stokes

$$\left\langle \int_{z_b}^z \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi w}{\partial z} \right) dz \right\rangle = \left\langle z \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi w}{\partial z} \right) \right\rangle = 0$$

et comme précédemment on obtient avec les mêmes manipulations la dernière équation de (6). On décompose la pression p en sa partie hydrostatique et sa partie non-hydrostatique, i.e.

$$p = g(\eta - z) + p_{nh},$$

Le système devient dès lors, en utilisant également (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi u \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi u \rangle + \frac{\partial}{\partial x} (\langle \phi u^2 \rangle + g \langle \phi(\eta - z) \rangle + \langle \phi p_{nh} \rangle) = -(g \langle \phi \rangle + p_{nh}|_b) \frac{\partial z_b}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi w \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi u w \rangle = p_{nh}|_b, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi z \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi z u \rangle = \langle \phi w \rangle. \end{array} \right. \quad (8)$$

Considérons l'équation d'énergie (5). Elle devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \phi E \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi u (E + p) \rangle = 0.$$

On a 4 équations et 4 inconnues, à savoir $\langle \phi \rangle$, $\langle \phi u \rangle$, $\langle \phi w \rangle$ et $\langle \phi p_{nh} \rangle$, et il faudra des relations de fermeture pour $\langle \phi u^2 \rangle$, $\langle \phi u w \rangle$, $\langle \phi z u \rangle$ et $p_{nh}|_b$.

Soient u' et w' les déviations de u et w par rapport à leur valeurs moyennes, alors on a

$$\phi u = \phi \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} + \phi u', \quad \phi w = \phi \frac{\langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle} + \phi w'.$$

Remarquons que par définition $\langle \phi u' \rangle = \langle \phi w' \rangle = 0$.

En suivant [7], on étudie le problème de minimisation

$$\min_{u', w'} \langle \phi E(z; u, w) \rangle.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \langle \phi u^2 \rangle &= \frac{\langle \phi u \rangle^2}{\langle \phi \rangle} + 2 \langle \phi u u' \rangle + \langle \phi (u')^2 \rangle \\ &= \frac{\langle \phi u \rangle^2}{\langle \phi \rangle} + \langle \phi (u')^2 \rangle \end{aligned}$$

De la même façon

$$\langle \phi w^2 \rangle = \frac{\langle \phi w \rangle^2}{\langle \phi \rangle} + \langle \phi (w')^2 \rangle.$$

La solution du problème de minimisation est

$$\min_{u', w'} \langle \phi E(z; u, w) \rangle = \langle \phi E \left(z; \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle}, \frac{\langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) \rangle = \frac{\langle \phi u \rangle^2 + \langle \phi w \rangle^2}{2 \langle \phi \rangle} + g \langle \phi z \rangle,$$

Le principe de minimisation d'énergie conduit à

$$u = \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} \text{ et } w = \frac{\langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle}.$$

On obtient ainsi les relations de fermeture associées à une minimisation de l'énergie

$$\langle \phi u^2 \rangle = \frac{\langle \phi u \rangle^2}{\langle \phi \rangle}, \langle \phi u w \rangle = \frac{\langle \phi u \rangle \langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle} \text{ et } \langle \phi z u \rangle = \langle \phi z \rangle \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle}. \quad (9)$$

En remplaçant ces relations dans (8), on a le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi u \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi u \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\langle \phi u \rangle^2}{\langle \phi \rangle} + g \langle \phi (\eta - z) \rangle + \langle \phi p_{nh} \rangle \right) = -(g \langle \phi \rangle + p_{nh}|_b) \frac{\partial z_b}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi w \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi w \rangle \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} = p_{nh}|_b, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi z \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi z \rangle \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} = \langle \phi w \rangle. \end{array} \right. \quad (10)$$

Mais il reste à trouver la relation de fermeture pour la partie non-hydrostatique de la pression. On va montrer dans la proposition suivante que le seul choix possible est

$$p_{nh}|_b = 2 \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle}{\langle \phi \rangle}. \quad (11)$$

Proposition 1. *Les solutions du système d'Euler (7), (2) et (5) complété avec les conditions cinématiques à la surface libre (1) et au fond (3) et qui satisfont les relations (9) et (11) sont également solutions du système*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi u \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi u \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\langle \phi u \rangle^2}{\langle \phi \rangle} + g \langle \phi (\eta - z) \rangle + \langle \phi p_{nh} \rangle \right) = - \left(g \langle \phi \rangle + 2 \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) \frac{\partial z_b}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi w \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi w \rangle \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} = 2 \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle}{\langle \phi \rangle}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi z \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \phi z \rangle \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} = \langle \phi w \rangle. \end{array} \right. \quad (12)$$

De plus, ce système d'Euler moyenné selon la verticale admet, pour des solutions régulières, une équation d'énergie sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \phi E \left(z; \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle}, \frac{\langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} \left(\phi E \left(z; \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle}, \frac{\langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) + \langle \phi p_{nh} \rangle \right) \rangle = 0. \quad (13)$$

Démonstration. Il faut prouver que dans le système (10), la relation (11) est nécessaire pour avoir l'équation d'énergie (13).

En partant de la deuxième équation de (10) et en la multipliant par $\frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle}$, on obtient pour les termes hydrostatiques (i.e. termes également présents dans le système classique de Saint-Venant)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \phi u \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\langle \phi u \rangle^2}{\langle \phi \rangle} + g \langle \phi (\eta - z) \rangle \right) + g \langle \phi \rangle \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} = \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi E \left(z; \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle}, 0 \right) \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} \phi E \left(z; \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle}, 0 \right) \rangle. \quad (14)$$

Pour les termes non-hydrostatiques restants, on a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} \langle \phi p_{nh} \rangle + p_{nh|b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle \langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} - \langle \phi p_{nh} \rangle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} + p_{nh|b} \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle \langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} - \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle}{\langle \phi \rangle} \frac{\partial \langle \phi u \rangle}{\partial x} + \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle \langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle^2} \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x} + p_{nh|b} \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} \frac{\partial z_b}{\partial x}. \end{aligned} \quad (15)$$

En multipliant la troisième équation de (10) par $\frac{\langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle}$ et en utilisant la première équation de (10), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\langle \phi w \rangle^2}{2 \langle \phi \rangle} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\langle \phi u \rangle \langle \phi w \rangle^2}{2 \langle \phi \rangle^2} = \frac{\langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle} p_{nh|b}. \quad (16)$$

Vu l'identité

$$\langle \phi z \rangle = \frac{\langle \phi \rangle}{2} (\langle \phi \rangle + 2z_b),$$

en combinant la deuxième et la dernière équation de (10),

$$\langle \phi w \rangle = -\frac{\langle \phi \rangle}{2} \frac{\partial \langle \phi u \rangle}{\partial x} + \frac{\langle \phi u \rangle}{2} \frac{\partial (\langle \phi \rangle + 2z_b)}{\partial x}, \quad (17)$$

et (15) se réécrit

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \langle \phi p_{nh} \rangle + p_{nh|b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle \langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} + 2 \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle}{\langle \phi \rangle^2} \langle \phi w \rangle + \left(p_{nh|b} - 2 \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} \frac{\partial z_b}{\partial x}. \quad (18)$$

En additionnant (14), (16) et (18), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi E \left(z; \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle}, \frac{\langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} \left(\phi E \left(z; \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle}, \frac{\langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) + \langle \phi p_{nh} \rangle \right) \right\rangle \\ &= \left(p_{nh|b} - 2 \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) \left(\frac{\langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle} + \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} \frac{\partial z_b}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

En utilisant (17), on a

$$\frac{\langle \phi w \rangle}{\langle \phi \rangle} + \frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} \frac{\partial z_b}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \langle \phi u \rangle}{\partial x} + \frac{\langle \phi u \rangle}{2 \langle \phi \rangle} \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x} = -\frac{\langle \phi \rangle}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\langle \phi u \rangle}{\langle \phi \rangle} \right),$$

et ainsi le côté droit de (19) s'annule si et seulement si $p_{nh|b} = 2 \frac{\langle \phi p_{nh} \rangle}{\langle \phi \rangle}$. \square

Le modèle non-hydrostatique En notant $\bar{f} = \frac{\langle \phi f \rangle}{\langle \phi \rangle}$, le système (12) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(H\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}^2 + \frac{g}{2}H^2 + H\bar{p}_{nh}) = -(gH + 2\bar{p}_{nh})\frac{\partial z_b}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(H\bar{w}) + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}\bar{w}) = 2\bar{p}_{nh}, \\ H\bar{w} = -\frac{H}{2}\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} + \frac{H\bar{u}}{2}\frac{\partial(H + 2z_b)}{\partial x}. \end{array} \right. \quad (20)$$

Les solutions régulières de (20) satisfont l'équation d'énergie

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{u}(\bar{E} + \frac{g}{2}H^2 + H\bar{p}_{nh}) \right) = 0,$$

où

$$\bar{E} = \frac{H(\bar{u}^2 + \bar{w}^2)}{2} + \frac{gH(\eta + z_b)}{2}.$$

Si on considère que z_b peut varier dans le temps, le système (20) reste inchangé et l'équation d'énergie devient

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{u}(\bar{E} + \frac{g}{2}H^2 + H\bar{p}_{nh}) \right) = (gH + 2\bar{p}_{nh})\frac{\partial z_b}{\partial t}.$$

L'avantage est que le modèle présente seulement des dérivées du premier ordre et le processus de dérivation est assez naturel. De plus, il présente une expression simple pour le terme de topographie.

Un schéma numérique pour la résolution du modèle non-hydrostatique a été implémenté dans FRESHKISS. On ne détaillera pas ce schéma et ses propriétés dans ce rapport, mais ils sont détaillés dans [2] et [1].

2.4 Une solution analytique : le soliton

Dans cette section, on s'intéresse à une solution particulière du modèle (20), à savoir le soliton qui se propage dans le domaine sans se déformer, voir [5, 4, 3].

Proposition 2. *Le soliton défini par*

$$\left\{ \begin{array}{l} z_b = z_0, \\ H = H_0 + a \left(\operatorname{sech} \left(\frac{x - c_0 t}{l} \right) \right)^2, \\ \bar{u} = c_0 \left(1 - \frac{d}{H} \right), \\ \bar{w} = -\frac{ac_0 d}{lH} \operatorname{sech} \left(\frac{x - c_0 t}{l} \right) \operatorname{sech}' \left(\frac{x - c_0 t}{l} \right), \\ \bar{p}_{nh} = \frac{ac_0^2 d^2}{2l^2 H^2} \left((2H_0 - H) \left(\operatorname{sech}' \left(\frac{x - c_0 t}{l} \right) \right)^2 + H \operatorname{sech} \left(\frac{x - c_0 t}{l} \right) \operatorname{sech}'' \left(\frac{x - c_0 t}{l} \right) \right), \end{array} \right. \quad (21)$$

pour tout $(z_0, d, l, H_0) \in \mathbb{R}^4$ avec $l > H_0 > 0$,

$$c_0 = \frac{l}{d} \sqrt{\frac{gH_0^3}{l^2 - H_0^2}} \text{ et } a = \frac{H_0^3}{l^2 - H_0^2}$$

est solution de (20).

Démonstration. voir [4] □

Simulations On veut comparer les résultats numériques avec la solution analytique (21) et déterminer l'ordre de convergence sur ce cas test. En choisissant $H_0 = 1$ m, $l = \sqrt{3}$ m et $d = 1$ m, on a $a = \frac{1}{2}$ m et $c_0 = \sqrt{\frac{3g}{2}}$ m.s⁻¹. On prend un canal de longueur 55 m divisé en 11000 intervalles et on initialise avec le soliton (21) dans le canal afin que le soliton n'influence pas les conditions aux bords. La figure 2 montre les différentes grandeurs, à savoir la hauteur d'eau, la vitesse selon la horizontale et la verticale, et la pression totale aux temps 0 s, 1, 5 s, 3 s et 4, 5 s ainsi que la solution analytique au temps 4, 5 s. Les deux solutions semblent très proches l'une de l'autre. Une différence entre les deux solutions n'est pas visible sur la figure. La figure 3 montre l'ordre de convergence examiné au temps $T = 4, 5$ s sur 5 maillages de 550, 1500, 3000, 5500 et 11000 intervalles. L'ordre de convergence sur ce cas test est 1.

On veut montrer que la forme du soliton est préservée pour le modèle non-hydrostatique et qu'elle ne l'est pas pour le modèle de Saint-Venant. Avec les mêmes paramètres que dans le cas test précédent et avec le maillage de 11000 intervalles, la figure 4(a) montre l'évolution de la forme de la vague pour le modèle non-hydrostatique. Les vagues ont été translatées pour pouvoir comparer leur forme. La forme de la vague est bien préservée. La figure 4(b) montre la même simulation pour le système classique de Saint-Venant. Le soliton (21) n'est pas solution du modèle de Saint-Venant et il n'est pas étonnant de voir la vague se déformer et tendre vers un choc.

On veut analyser la forme de la vague en temps longs. Avec les mêmes paramètres que ci-dessus et avec un maillage plus grossier de 250 intervalles, la figure 5 montre l'évolution de la vague lors de la propagation à différents temps pour le modèle non-hydrostatique. Les vagues ont été translatées pour pouvoir comparer leur forme. Lors de la propagation de la vague, on perd continuellement la forme et il n'y a pas de stabilisation à un moment donné. On aperçoit une perte de la forme initiale en temps longs dans le code, alors que la solution analytique prévoit qu'on la garde.

3 Simulation de tsunamis

Un tsunami est généré par un séisme, le déplacement vertical et horizontal du fond de la mer, qui génère ainsi des vagues. Ceci se traduit mathématiquement par le fait que le fond z_b varie en fonction du temps. Ici, on se restreint à un simple déplacement vertical du fond de la mer. On ne considère pas de système mécanique modélisant le mouvement des plaques tectoniques.

3.1 Cas académiques

Dans les cas test suivants, on veut comparer le modèle non-hydrostatique au modèle de Saint-Venant et décrire les effets non-hydrostatiques qui apparaissent avec le modèle (20).

Déplacement du fond vers le haut ou le bas En partant d'un fond plat (i.e. $z_b = \text{cte}$), on génère un tsunami avec un déplacement vertical du fond dans le temps

$$z_b(x, t) = z_b(x, 0) + \left(A e^{a(x - \frac{t}{b})^2} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

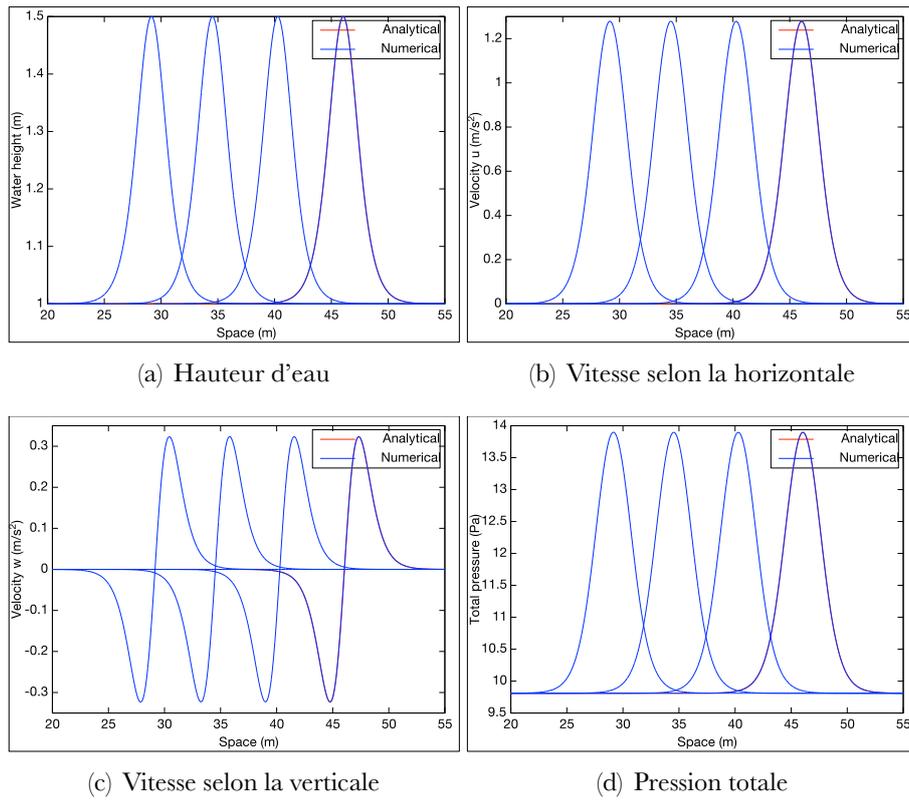


Fig. 2 : Propagation du soliton aux temps 0 s, 1, 5 s, 3 s et 4, 5 s ainsi que la solution analytique au temps 4, 5 s.

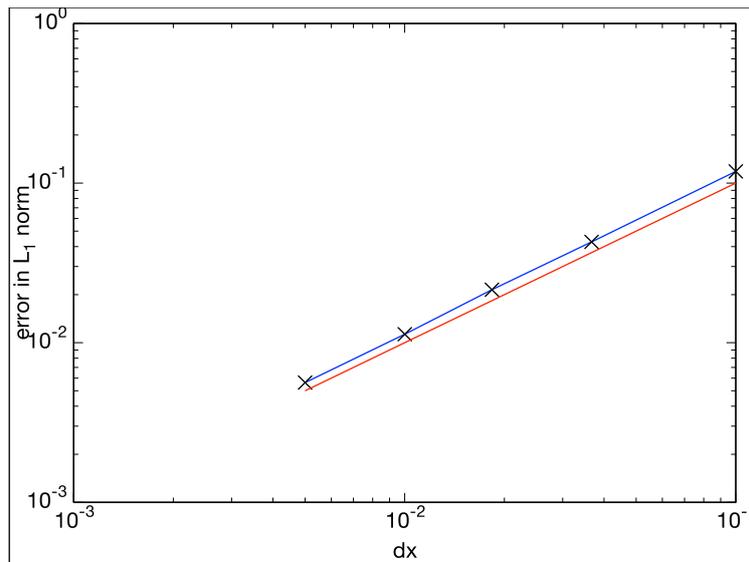


Fig. 3 : Ordre de convergence : courbe de convergence vers la solution analytique en bleu et droite de pente 1 en rouge

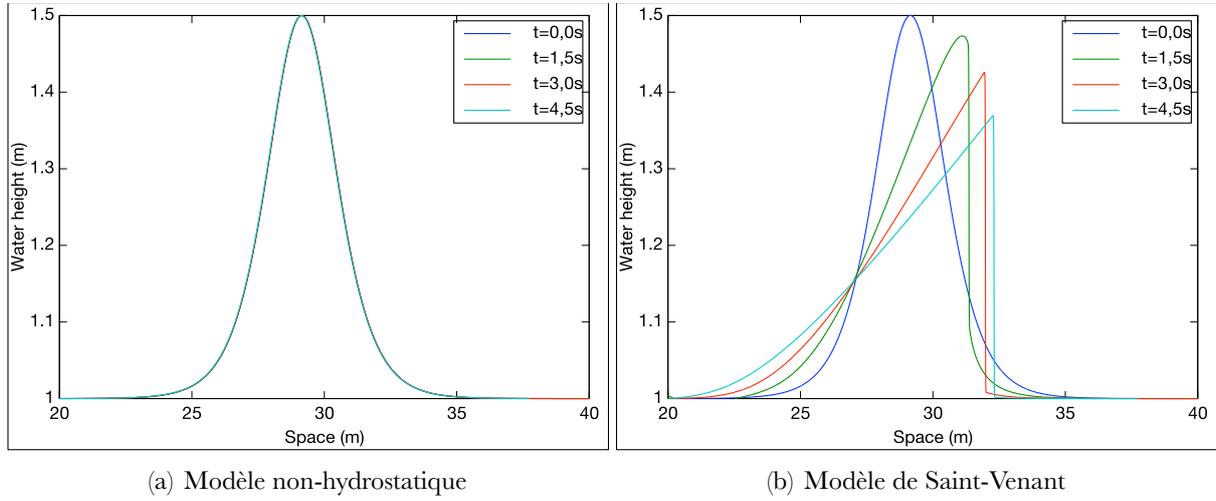


Fig. 4 : Vagues à différents temps translées pour comparer leur forme au cours de la propagation

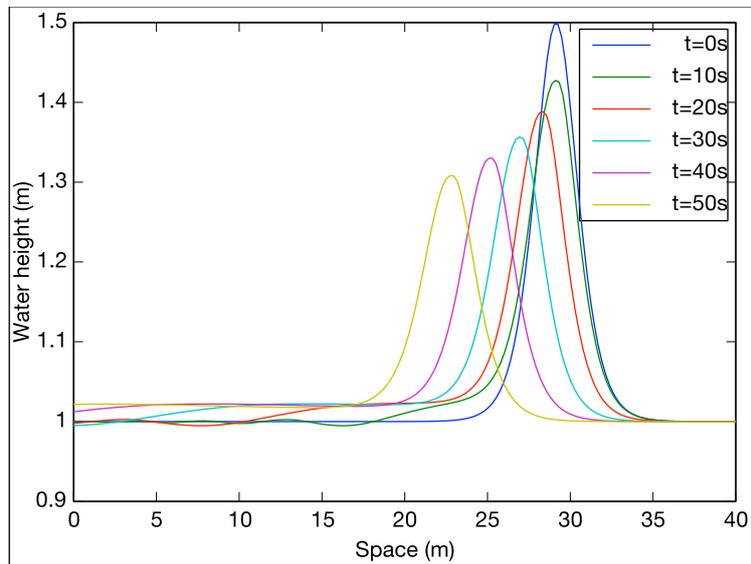


Fig. 5 : Vagues à différents temps translées pour comparer leur forme pour le modèle non-hydrostatique sur un maillage grossier à 250 intervalles

où a , b et τ sont des paramètres réels, A est l'amplitude de l'élévation et L est la longueur du canal.

On part avec la surface libre de l'eau au repos et on génère un déplacement vertical du fond d'amplitude maximale égale à 10 m au milieu d'un canal de 500 km, comme montré sur la figure 6. On prend $a = -10^{-7}$ et $\tau = 20$. Le domaine est divisé en 1000 intervalles. On regarde au kilomètre 150 l'évolution de la hauteur d'eau dans le temps et on la compare avec le système de Saint-Venant classique. La figure 7 montre l'évolution de la hauteur d'eau avec différentes hauteurs d'eau initiales. A faible hauteur d'eau, le modèle non-hydrostatique et le modèle de Saint-Venant ne présentent pas de majeures différences et on observe des effets non-hydrostatiques lorsque la hauteur d'eau augmente, sous forme de vagues de plus haute fréquence après la première vague. De plus, la hauteur de la première vague diminue dans le cas non-hydrostatique par rapport au modèle de Saint-Venant classique et les deux vagues sont déphasées dans le temps.

On refait la même expérience, mais en baissant le fond du canal au lieu de l'augmenter (i.e. $A = -10$ m). Les résultats sont encore les mêmes dans ce cas là, voir figure 8.

Une explication serait la perte de l'hypothèse 1 lorsque la hauteur d'eau augmente et le modèle de Saint-Venant est *a priori* pas un bon modèle dans ce cas.

Vague initiale dans le canal Dans cette section, on ne fera pas entrer de vague dans le canal, mais on part d'une configuration où la vague se trouve déjà au milieu du canal et on fait évoluer le système sans vitesse initiale. On prend comme surface libre initiale une vague de la forme

$$\eta(x, 0) = H_0 + Ae^{a(x-\frac{L}{2})^2}$$

où H_0 représente la hauteur d'eau initiale, A l'amplitude maximale de la vague, L la longueur du canal et a un paramètre réel. On reste dans un canal à fond plat de longueur 500 km qu'on divise en 1000 intervalles et on regarde au kilomètre 150 l'élévation de la surface libre en fonction du temps. Ici, on prend $A = 10$ m et $a = -10^{-7}$. La figure 9 montre cette configuration pour différentes hauteurs d'eau initiales. On observe les mêmes phénomènes que lors de la création de la vague par un séisme.

3.2 Cas réel : tsunami survenu au Chili en 2014

Dans cette partie, on s'intéressera au séisme survenu au Chili en 2014 [6] et on essaiera de reproduire ce séisme et de comparer nos simulations à des données récoltées grâce à des bouées situées au large de la côte et mesurant la hauteur de la surface libre de la mer à des intervalles réguliers⁹. De plus, on vérifiera si les résultats obtenus dans la partie précédente s'observent également dans ces cas réels.

Comparaison entre bouée et simulation Pour avoir des cas plus concrets, on utilise la topographie de la Terre¹⁰ et on fait une coupe pour avoir une topographie 1D.

La figure 10 montre le déplacement vertical du fond de la mer lors du tremblement de terre survenu au Chili en 2014¹¹ ainsi qu'une fonction qui représente ce déplacement. Dans notre simulation, on fait bouger le fond dans le temps pour obtenir l'élévation représentée sur la figure

⁹Données accessibles sur le site <http://www.ndbc.noaa.gov>

¹⁰Sur le site <http://maps.ngdc.noaa.gov/viewers/wcs-client/> la topographie pour toute la Terre peut être récupérée.

¹¹Données obtenues de la part de M. Vallée (IPGP), R. Grandin (IPGP) et S. Allgeyer (Australian National University)

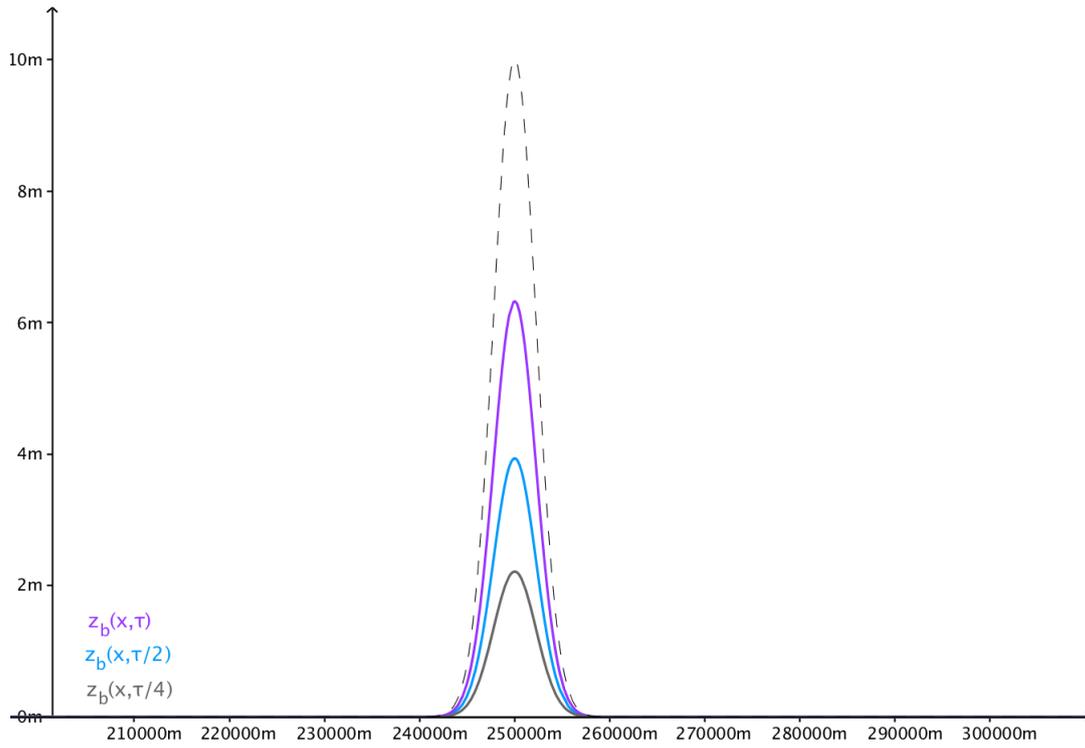
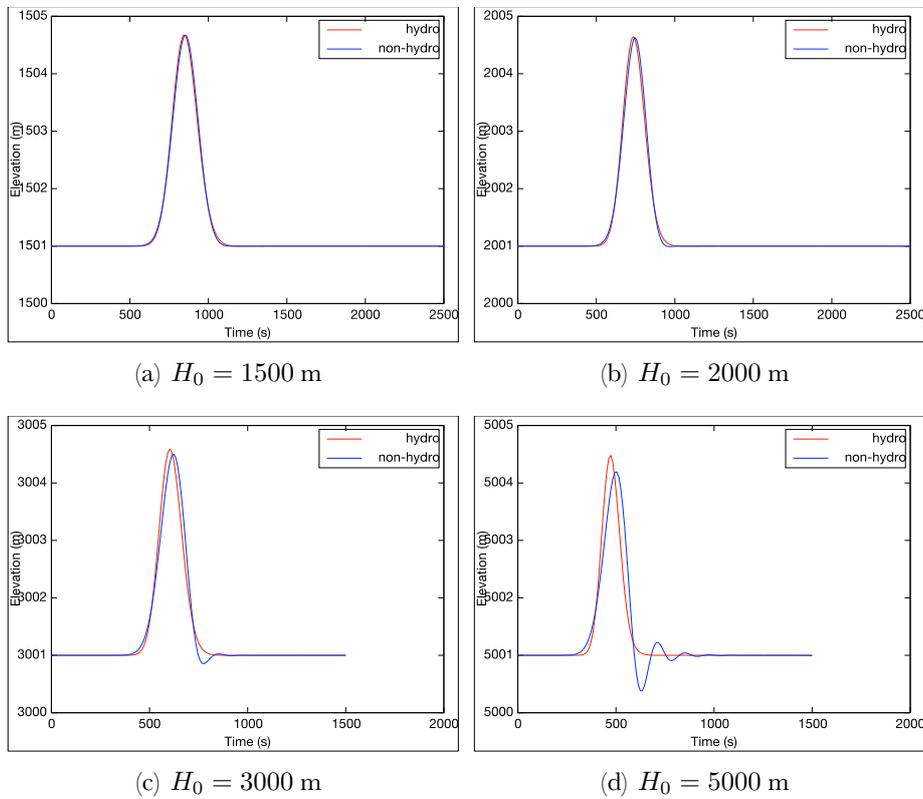


Fig. 6 : Elévation du sol aux temps $\frac{\tau}{4}$ s, $\frac{\tau}{2}$ s et τ s, ainsi que l'élévation limite en pointillé



(a) $H_0 = 1500$ m

(b) $H_0 = 2000$ m

(c) $H_0 = 3000$ m

(d) $H_0 = 5000$ m

Fig. 7 : Déplacement du fond vers le haut pour différentes hauteurs d'eau initiales regardé au kilomètre 150

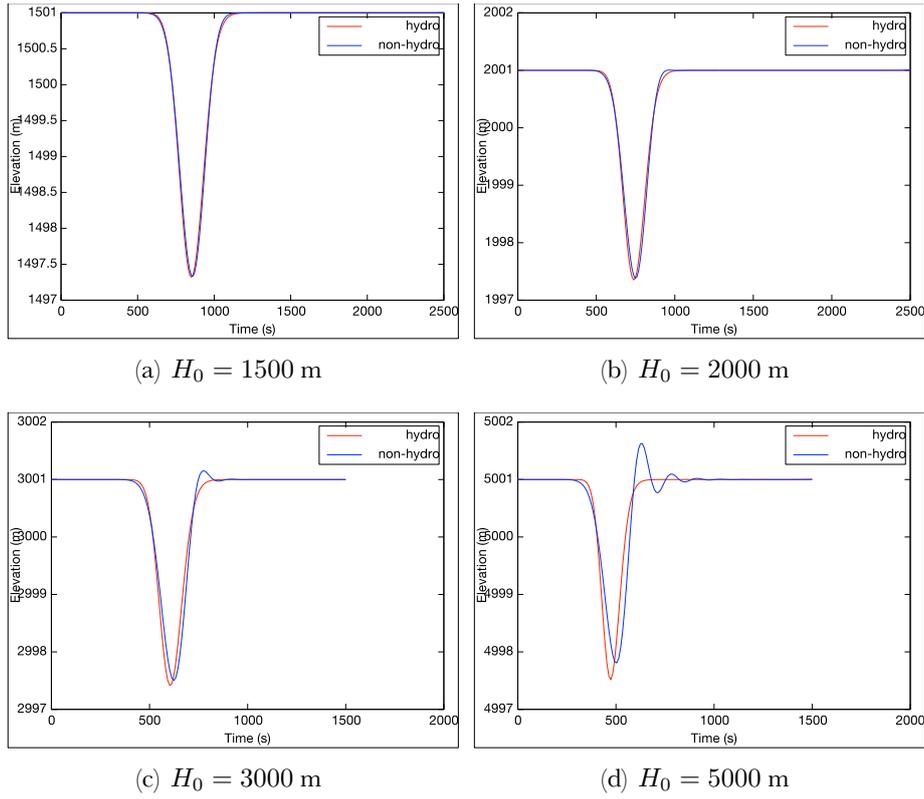


Fig. 8 : Déplacement du fond vers le bas pour différentes hauteurs d'eau initiales regardé au kilomètre 150

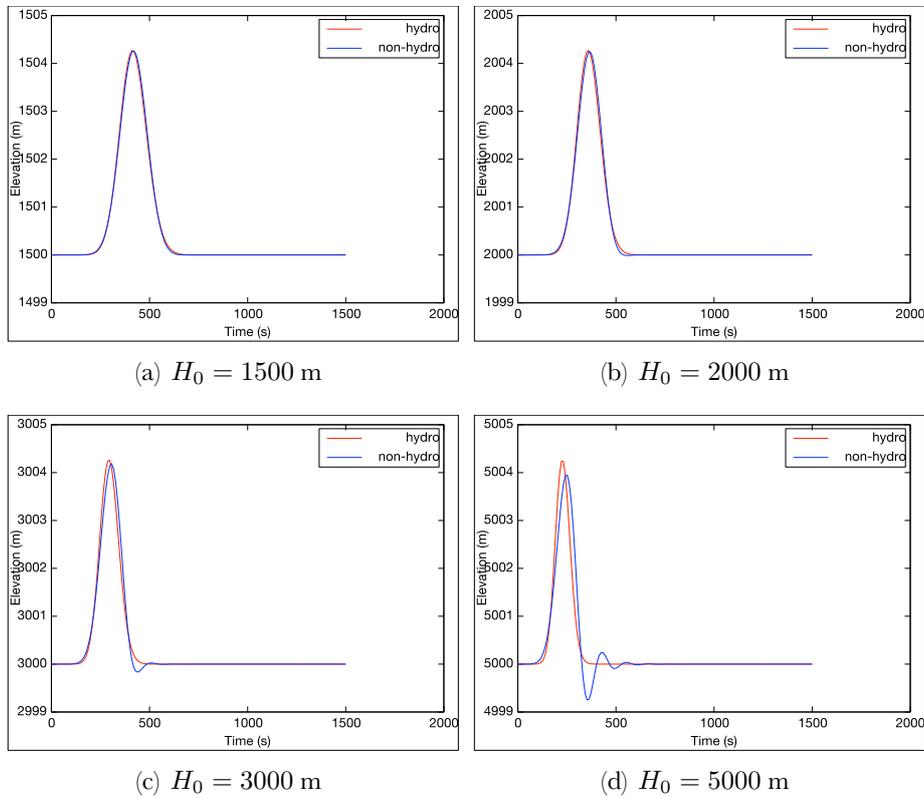


Fig. 9 : Surface libre initiale de la forme $\eta(x, 0) = H_0 + Ae^{a(x-\frac{L}{2})^2}$ et sans vitesse initiale pour différentes hauteurs d'eau initiales regardé au kilomètre 150

10(b). Ainsi la fonction représentant le fond est

$$z_b(x, t) = z_b(x, 0) + \left(A e^{a \left(x - \frac{L}{\alpha} \right)^2} - B e^{b \left(x - \frac{L}{\beta} \right)^2} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

où $A = 1$ m, $a = -4.5 \times 10^{-9}$, $\alpha = 2,77$, $B = 0,3$ m, $b = -7 \times 10^{-10}$, $\beta = 3,14$, $T = 35$ et $L = 865000$ m sont des paramètres réels avec A et B les amplitudes d'élévation respectivement d'abaissement et L la longueur du canal. Le nombre d'intervalles est pris égal au nombre de points définissant la topographie qui est égal à 493. Le canal est au repos à l'état initial et on génère un tsunami à partir de la bathymétrie réelle avec la fonction définie ci-dessus. La bouée se situe à $\frac{2}{3}$ de L et l'épicentre à $\frac{1}{3}$ de L pour éviter des réflexions au bord du canal.

Le canal ayant une longueur de 865 km, la courbure de la Terre n'est plus négligeable, mais à ce stade il est impossible de l'intégrer dans le modèle. On compare ici les données DART¹² avec des simulations en 1D. Vu que les vagues sont des phénomènes au moins 2D et que les variations de la densité de l'eau ou encore la mécanique des plaques tectoniques ne sont pas prises en compte dans les simulations, les résultats sont à analyser avec prudence.

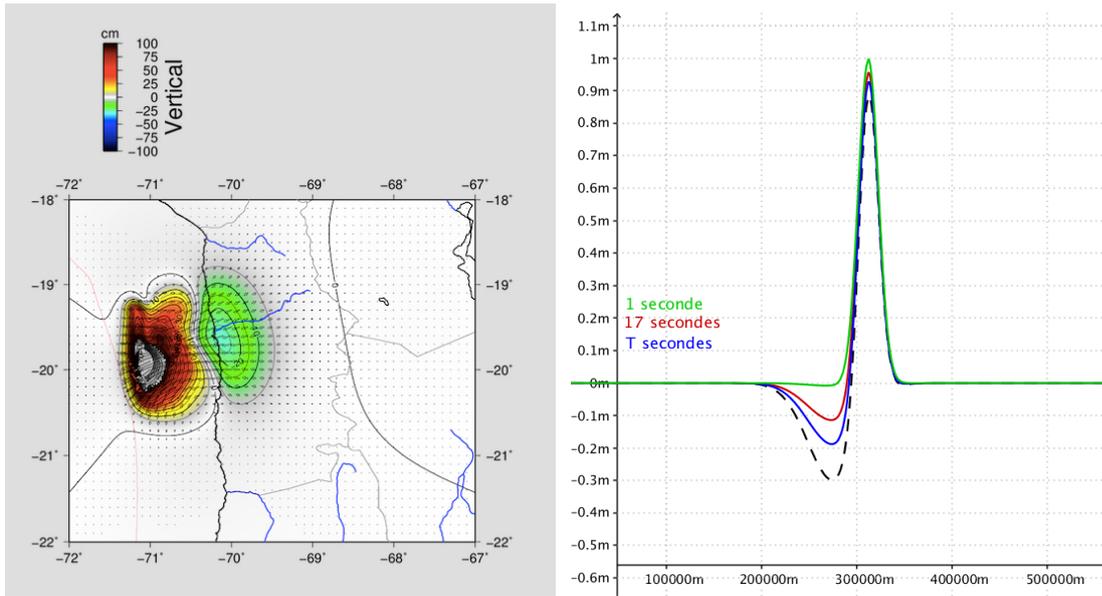
La figure 11 compare les données de la bouée 32401 (voir figure 12) aux simulations avec les modèles non-hydrostatique et de Saint-Venant. Sur la figure 13 sont représentés les spectrogrammes du signal hydrostatique et du signal non-hydrostatique. Les premières variations de la hauteur d'eau sont dues aux ondes sismiques et la première vague est correctement approchée. Les vagues secondaires ne sont pas du tout approchées et on ne retrouve nullement les données DART. On ne retrouve pas d'améliorations au niveau de l'approximation des données DART avec le modèle non-hydrostatique par rapport au modèle Saint-Venant, bien que les spectrogrammes montrent des vagues secondaires de plus haute fréquence dans le cas non-hydrostatique.

Comparaison entre les modèles hydrostatique et non-hydrostatique On vérifie si en augmentant la hauteur d'eau initiale, on observe les mêmes phénomènes que lors des cas académiques. Pour cela, on refait la même expérience que précédemment avec des hauteurs d'eau initiales différentes et on regarde comment évolue la première vague. On fait les simulations avec des profondeurs moyennes de 4357 m, 4649 m, 5535 m et 5997 m. La figure 14 montre la première vague pour les 4 cas différents. On observe à nouveau que l'amplitude du non-hydro diminue en augmentant la hauteur d'eau initiale et qu'il y a un déphasage des deux vagues. De même, des vagues secondaires de plus haute fréquence apparaissent dans les cas d'eau plus profonde. Pour mieux lire ces vagues secondaires de plus haute fréquence, on trace les spectrogrammes correspondants au signal du modèle non-hydrostatique et au modèle de Saint-Venant, voir figure 15. On y voit les fréquences plus hautes dans le cas non-hydrostatique de ces vagues secondaires. La figure 16 montre l'évolution de la forme des vagues dans le cas non-hydrostatique et dans le cas Saint-Venant. On voit une diminution des amplitudes maximale et minimale ainsi qu'un déphasage dû à une vitesse plus élevée pour des hauteurs d'eau plus élevées, mais l'allure générale ne change pas dans les deux cas. Les vagues secondaires de plus haute fréquence qu'on peut observer dans des profondeurs d'eau importantes pour le modèle non-hydrostatique, ne changent pas l'allure générale de la vague et ne permettent pas d'améliorer l'approximation des données DART.

4 Conclusion

On a dérivé un modèle non-hydrostatique et on a identifié une solution analytique, à savoir un soliton se déplaçant dans un canal sans se déformer. On a utilisé ce modèle pour simuler des

¹²Deep-ocean Assessment and Reporting of Tsunamis



(a) Données mesurées : déplacement vertical du fond de la mer lors du tremblement de terre survenu au Chili en 2014
 (b) Fonction mathématique modélisant le déplacement vertical du fond aux temps 1 s, 17 s et T s ainsi que l'élévation limite en pointillé

Fig. 10 : Variation verticale de la bathymétrie lors du séisme survenu au Chili en 2014

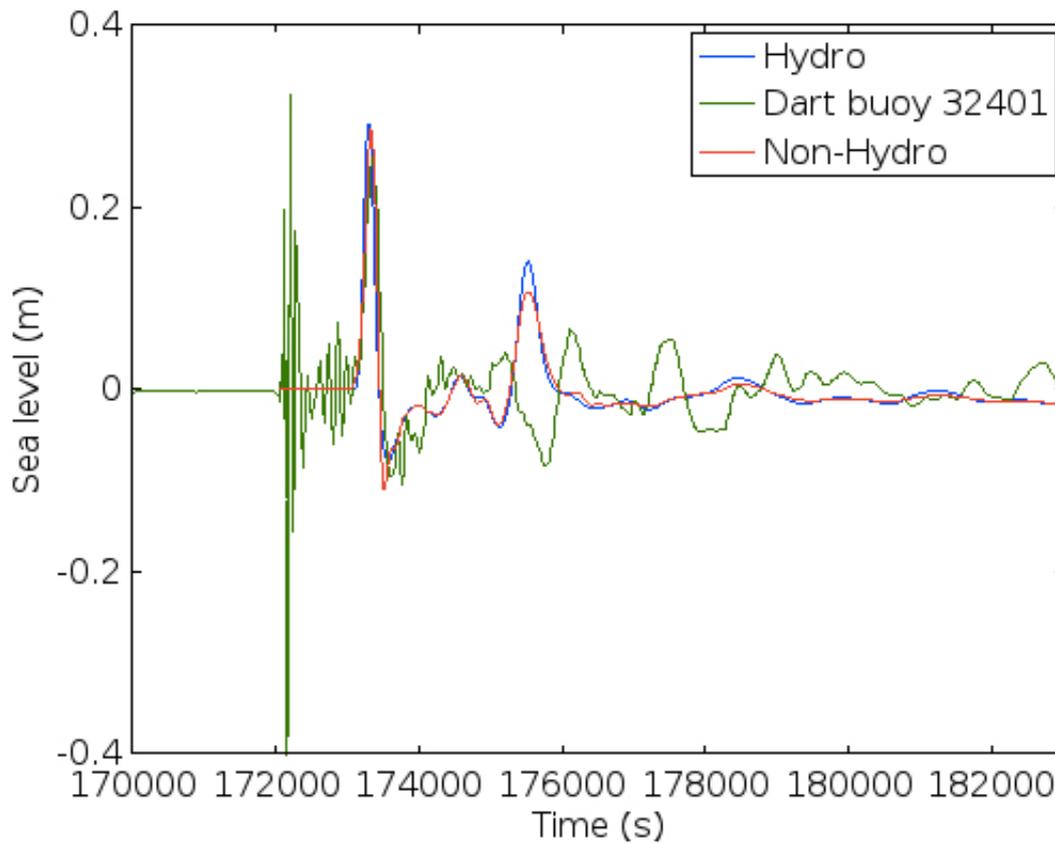


Fig. 11 : Comparaison des données DART avec les simulations hydro et non-hydro

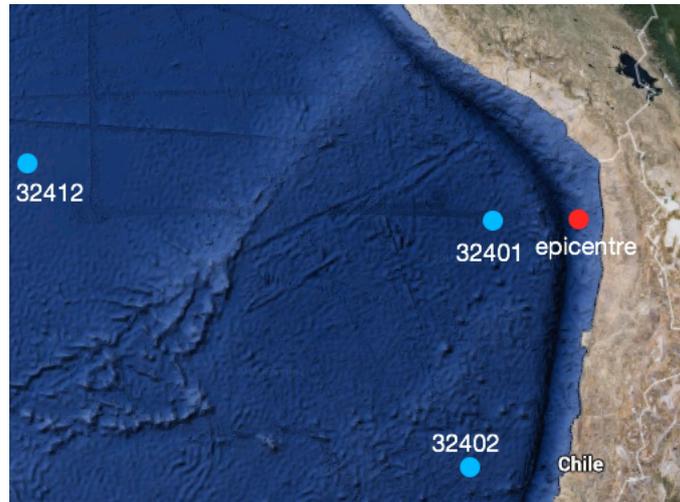
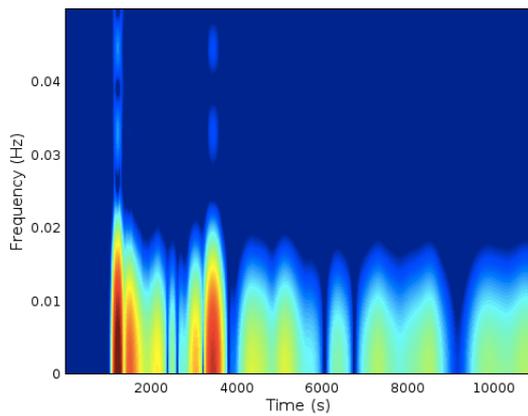
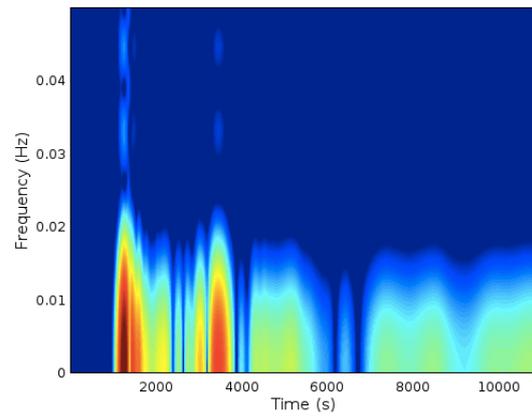


Fig. 12 : Carte avec les bouées 32401, 32402 et 32412 au large du Chili et l'épicentre du séisme de 2014



(a) Spectrogramme du signal hydrostatique



(b) Spectrogramme du signal non-hydrostatique

Fig. 13 : Spectrogrammes des deux signaux

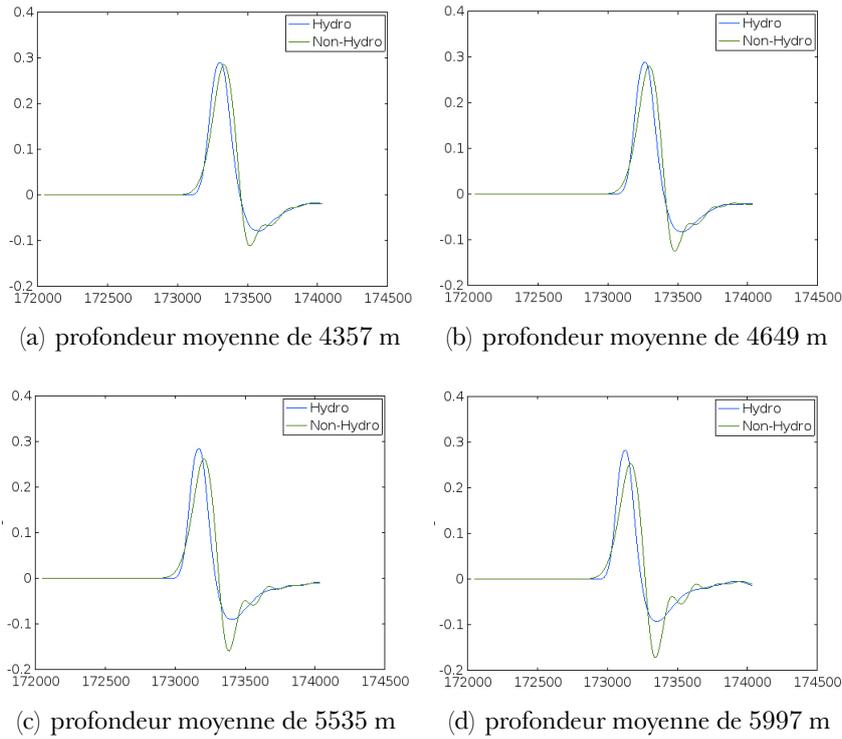
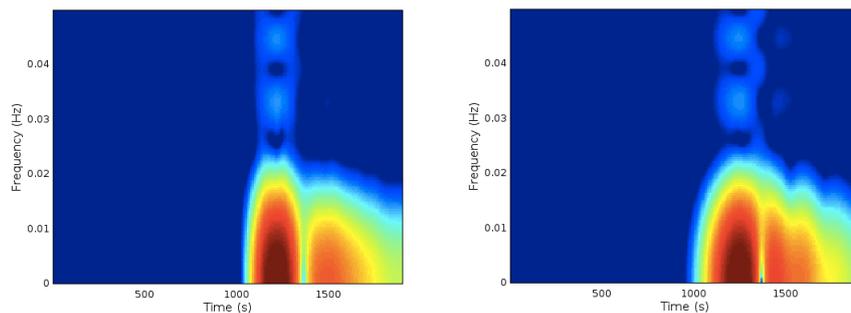


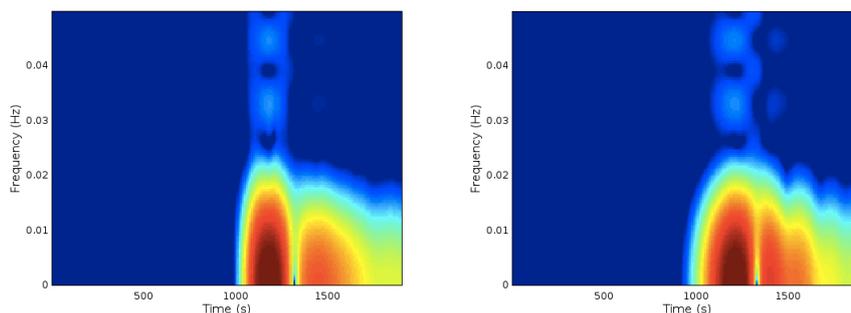
Fig. 14 : Simulations avec différentes hauteurs d'eau initiales : surface libre en fonction du temps pour les modèles non-hydrostatique et de Saint-Venant

tsunamis et on l'a comparé au système de Saint-Venant et à des données réelles. En particulier, on a étudié le comportement en eaux profondes quand le système de Saint-Venant perd *a priori* sa validité. Dans des cas académiques, on observe des effets non-hydrostatiques dans des eaux plus profondes, sous forme d'une diminution de l'amplitude maximale de la première vague, d'un déphasage du modèle non-hydrostatique par rapport au modèle de Saint-Venant et de l'apparition de vagues de plus haute fréquence derrière la première vague. Lorsque l'hypothèse 1 n'est plus justifiée, on voit les limites du modèle de Saint-Venant. Néanmoins, bien qu'on observe les mêmes phénomènes dans des cas réels, l'approximation des données réelles de la bouée 32401 lors du tsunami survenu au Chili en 2014 n'est pas améliorée. La première vague est bien approchée et on observe une différence au niveau de l'amplitude de la deuxième vague, mais les écarts entre le modèle de Saint-Venant et les données DART ne semblent pas être dus aux effets non-hydrostatiques. Une amélioration est le couplage du modèle avec un modèle mécanique représentant le déplacement des plaques tectoniques. Dans les simulations de ce rapport, la source sismique a été remplacée par le simple fait que la fonction z_b modélisant la bathymétrie varie dans le temps, ce qui simplifie considérablement le mouvement tectonique. Il faut également noter que les simulations négligeaient les variations de la densité de l'eau ou encore le caractère bidimensionnel d'une vague. Il semble être nécessaire de passer en dimension 2 pour pouvoir vérifier ces observations.

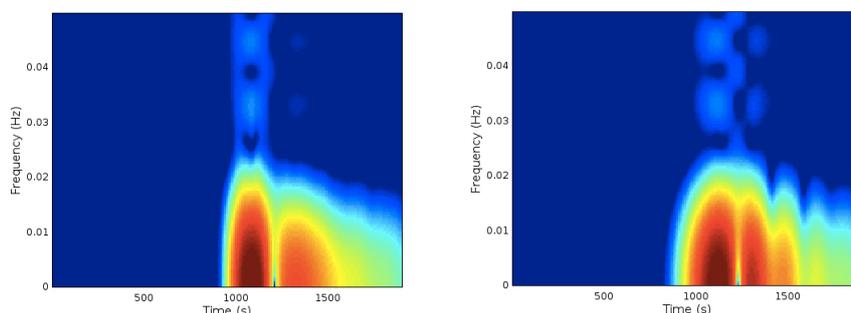
Une solution analytique pour valider les effets non-hydrostatiques observés dans la section 2 serait intéressante et permettrait de mieux comprendre et d'analyser ces phénomènes.



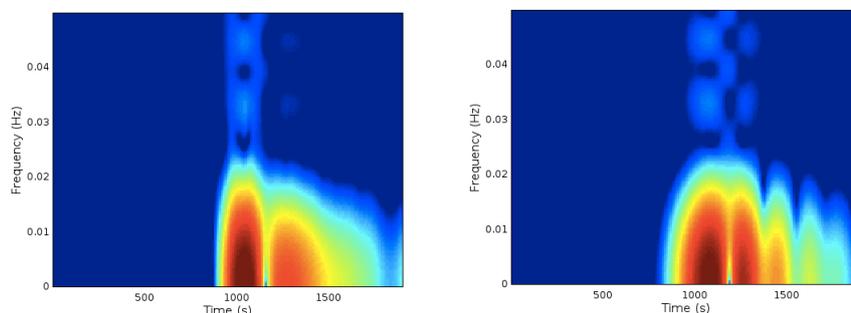
(a) H pour une profondeur moyenne de 4357 m (b) NH pour une profondeur moyenne de 4357 m



(c) H pour une profondeur moyenne de 4649 m (d) NH pour une profondeur moyenne de 4649 m



(e) H pour une profondeur moyenne de 5535 m (f) NH pour une profondeur moyenne de 5535 m



(g) H pour une profondeur moyenne de 5997 m (h) NH pour une profondeur moyenne de 5997 m

Fig. 15 : Spectrogrammes des signaux non-hydrostatiques(NH) et hydrostatiques(H) dans les 4 cas : à savoir pour des profondeurs moyennes de 4357 m, 4649 m, 5535 m et 5997 m

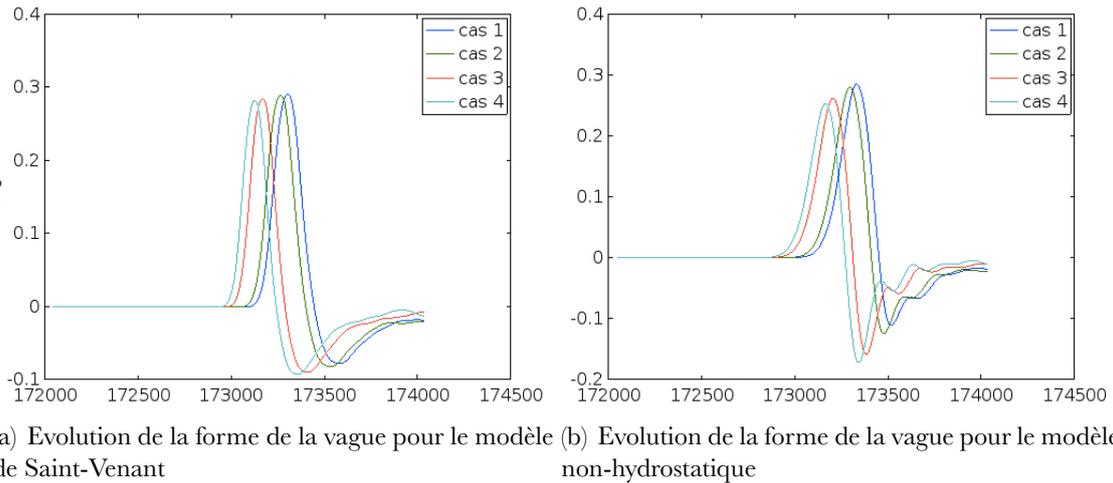


Fig. 16 : Simulations avec le modèle non-hydrostatique et le modèle de Saint-Venant avec différentes hauteurs d'eau initiales : surface libre en fonction du temps pour des profondeurs moyennes de 4357 m, 4649 m, 5535 m et 5997 m

Références

- [1] Nora Aïssiouene, Marie-Odile Bristeau, Edwige Godlewski, and Jacques Sainte-Marie. A combined finite volume - finite element scheme for a dispersive shallow water system. <hal-01160718v2>, 2015.
- [2] Nora Aïssiouene, Marie-Odile Bristeau, Edwige Godlewski, and Jacques Sainte-Marie. A robust and stable numerical scheme for a depth-averaged Euler system. <hal-01162109v2>, 2015.
- [3] Marie-Odile Bristeau, Nicole Goutal, and Jacques Sainte-Marie. Numerical simulations of a non-hydrostatic Shallow Water model. *Computers & Fluids*, 47 :51–64, 2011.
- [4] Marie-Odile Bristeau, Anne Mangeney, Jacques Sainte-Marie, and Nicolas Seguin. An energy-consistent depth-averaged Euler system : derivation and properties. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 20(4) :961–988, June 2015.
- [5] David Lannes and Fabien Marche. A new class of fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi models for efficient 2D simulations. *Journal of Computational Physics*, 282 :238–268, 2015.
- [6] Thorne Lay, Han Yue, Emily E. Brodsky, and Chao An. The 1. April 2014 Iquique, Chile, Mw 8.1 earthquake rupture sequence. *Geophysical Research Letters*, 41 :3818–3825, 2014.
- [7] C. David Levermore. Entropy-based moment closures for kinetic equations. *Proceedings of the International Conference on Latest Developments and Fundamental Advances in Radiative Transfer (Los Angeles, CA, 1996)*, 26 :591–606, 1997.