

2007 International Conference in Honor of Claude Lobry

Sur le retard à la bifurcation

Augustin Fruchard ^{a,*} — Reinhard Schäfke ^b

^a Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications
Faculté des Sciences et Techniques, Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière, F-68093 Mulhouse cedex, France

* Corresponding author : Augustin.Fruchard@uha.fr

^b Institut de Recherche Mathématique Avancée
U.F.R. de Mathématiques et Informatique
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France
schafke@math.u-strasbg.fr



RÉSUMÉ. Nous donnons un aperçu non exhaustif du problème du retard à la bifurcation, depuis son apparition en France à la fin des années 1980 jusqu'aux contributions les plus récentes. Le problème et les résultats sont présentés d'une part pour les équations différentielles et d'autre part pour les systèmes dynamiques discrets.

ABSTRACT. We give a non-exhaustive overview of the problem of bifurcation delay from its appearance in France at the end of the 80ies to the most recent contributions. We present the bifurcation delay for differential equations as well as for discrete dynamical systems.

MOTS-CLÉS : retard à la bifurcation, bifurcation dynamique, canard, perturbation singulière, surstabilité, bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf, équation différentielle complexe.

KEYWORDS : bifurcation delay, dynamic bifurcation, canard, singular perturbation, overstability, Poincaré-Andronov-Hopf bifurcation, ordinary differential equation in the complex plane.



1. Introduction.

1.1. Le problème.

En théorie des bifurcations, on peut distinguer les bifurcations *statiques* et *dynamiques*. La théorie des bifurcations statiques, classiquement la plus répandue, consiste à étudier le portrait de phase d'un système dynamique dépendant d'un paramètre et à décrire les différences qualitatives de comportement du système suivant les valeurs de ce paramètre. La théorie des bifurcations dynamiques consiste quant à elle à étudier un système analogue, mais où le paramètre μ est considéré comme une nouvelle variable qui évolue lentement au cours du temps. Il se trouve que le comportement de ce nouveau système peut présenter un diagramme de bifurcation très différent du système "statique".

Pour fixer les idées, considérons l'exemple d'une famille de champs de vecteurs dépendant d'un paramètre réel μ et présentant une bifurcation de type Hopf (voir la partie 3 pour des détails). Précisément, supposons que chaque champ de cette famille a un point stationnaire dépendant continûment du μ , attractif si μ est inférieur à une valeur critique μ_0 et répulsif si $\mu > \mu_0$. Dans certaines situations, le comportement du système où μ varie lentement présente un *retard à la bifurcation* : une solution partant avec $\mu < \mu_0$ va naturellement commencer par rejoindre puis longer la courbe des points fixes, puisque ces points fixes sont attractifs. Cependant, lorsque la valeur critique de μ_0 est atteinte et que la courbe des points fixes devient répulsive, au lieu de quitter cette courbe pour rejoindre par exemple une famille de cycles attractifs la solution continue à longer la courbe de points fixes pendant un temps qui semble anormalement long.

Ce problème du retard à la bifurcation a intéressé un grand nombre de physiciens et mathématiciens dans les années 1985 à 1995. Un point fort a été un Colloque organisé à Luminy dans la semaine du 5 au 10 mars 1990, à la suite duquel ont été édités des Actes [4]. Par la suite le sujet a mobilisé moins d'intervenants. Il n'en demeure pas moins que des progrès substantiels ont été accomplis sur certaines questions qui n'avaient pas été résolues à cette époque. Surtout, de nouvelles questions pertinentes qui n'avaient pas été posées sont apparues et ont été en partie résolues.

1.2. A propos du contenu de l'article.

Nous donnons un aperçu très personnel du problème du retard à la bifurcation, essentiellement l'apport de l'école non standardiste française autour de Georges Reeb. Nous ne décrivons pratiquement pas les travaux antérieurs, en particulier ceux de physiciens [35, 42] ou de l'école russe [43, 46]. Pour bien mettre en perspective l'état d'esprit du groupe non standardiste, nous présentons d'abord la théorie des canards dans la partie 2. Cette théorie mériterait à elle seule un article complet de présentation. Nous n'en donnons qu'une présentation brève et incomplète, avec un petit nombre de références. On trouvera dans [15] et [49] une liste plus complète de références. En outre nous ne présentons qu'un aspect restrictif des canards. Ni l'étude séries formelles et des développements en ε -ombres, ni l'approche par les éclatements ne sont abordés ici.

Le problème du retard à la bifurcation est présenté et expliqué en partie 3. Cette présentation s'inspire en grande partie des exposés que Claude Lobry avait donnés au tournant des années 1990 et de son chapitre introductif [38]. On trouvera aussi dans [39]

une excellente présentation de ce problème, ainsi que des références. De nombreuses références, en particulier d'auteurs russes, peuvent aussi être trouvées dans [9]. Nous avons souvent repris dans cette partie 3 les mêmes exemples que dans les articles initiaux [52, 53, 41, 39] ; c'est le cas du paradigme (13) et de sa version complexe (23) et (24). La thèse de Guy Wallet [55] contient une étude complète du paradigme complexe, utilisant une estimation d'une intégrale oscillante. Ce paradigme a aussi été étudié en connexion avec la question de la sommation de séries divergentes dans [14]. Le système (21) est déjà dans [46] sous une forme très voisine.

Dans les parties 3.6 et 3.7, nous donnons un aperçu des résultats plus récents. En particulier nous présentons le fait que, dans le cas d'équations scalaires analytiques par rapport au petit paramètre ε , il n'y a pas de butée non triviale.

Enfin dans la partie 4, nous présentons le problème du retard à la bifurcation dans le cas des systèmes dynamiques discrets. Certaines preuves du cas continu peuvent s'adapter, mais bien souvent de nouveaux outils sont nécessaires. Par ailleurs des phénomènes spécifiques du domaine discret apparaissent, notamment en présence de points super-stables. Le problème de retard dans le cas des systèmes discrets a bien sûr une importance en lui-même. Il peut aussi jouer un rôle dans l'étude numérique du problème de retard pour une équation différentielle. En effet, une discrétisation d'une équation différentielle aboutit à un système discret. Il se peut alors que les retards observés proviennent plutôt du système discret lui-même que du système continu de départ.

Certains résultats présentés dans cet article sont énoncés sans preuves, certains sont démontrés de manière incomplète. Dans ce dernier cas, nous avons fait le choix d'éviter des développements trop techniques et de bien indiquer les lacunes. En général, nous n'avons présenté de preuve que lorsque nous estimions que la preuve aidait à la compréhension du résultat. De ce point de vue, cet article ne peut pas constituer une référence complète sur le problème du retard à la bifurcation mais seulement une introduction à ce domaine de recherche.

Dans la plupart des situations, nous n'avons présenté ou démontré les résultats que sur des exemples, mais ces résultats ont souvent été généralisés dans les articles cités dans la bibliographie. Par conséquent, nous avons pris la liberté de fournir parfois une preuve *ad hoc* pour l'exemple, preuve qui ne se transpose pas forcément dans le cas général.

L'article est écrit dans le contexte de l'analyse non standard [45], en utilisant la théorie axiomatique IST d'Edward Nelson [44]. Cependant nous insistons sur le fait qu'une connaissance de l'analyse non standard n'est pas du tout nécessaire pour comprendre l'article. Elle ne sert qu'à donner un fondement solide à notre discours, mais celui-ci peut tout à fait être, ou bien lu sur un plan heuristique, ou bien traduit aisément dans le formalisme de l'asymptotique classique. Pour le lecteur qui n'est pas familier avec l'analyse non standard, nous donnons dans l'appendice un bref descriptif.

2. Les canards de l'équation de van der Pol forcée.

2.1. L'équation originelle.

L'équation de van der Pol [50]

$$\varepsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \quad (1)$$

$\varepsilon > 0$ i-petit, est un exemple typique d'équation du second ordre qui présente des *oscillations de relaxation*, i.e. un cycle limite avec des parties lentes et rapides. Ce cycle apparaît clairement dans le *plan de Liénard* [36], qui est le plan x, y où $y = \frac{x^3}{3} + x + \varepsilon \dot{x}$. On aboutit ainsi au système différentiel

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x \\ \dot{y} &= -x. \end{cases} \quad (2)$$

Le champ de vecteurs associé

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(y - \frac{x^3}{3} + x \right), -x \right)$$

est un exemple typique de *champ de vecteurs lent-rapide* : il comporte une *courbe lente*, qui est la cubique d'équation

$$y = C(x) = \frac{x^3}{3} - x,$$

et en-dehors d'un voisinage de l'ordre de ε de cette cubique, la première composante du champ est infiniment grande (*i-grande*) alors que la seconde reste limitée. Un examen de la figure 1 permet de déduire le comportement des trajectoires. Considérons par exemple une orbite de (2) partant d'un point standard (x_0, y_0) en-dehors de la cubique, par exemple $x_0 > 0, y_0 > C(x_0)$. Cette orbite commence par suivre d'abord une portion quasi-horizontale à droite de (x_0, y_0) avec une vitesse i-grande jusqu'à atteindre la cubique, puis suit cette cubique avec une vitesse limitée jusqu'au minimum $M = (1, -\frac{2}{3})$. Ensuite l'orbite est i-proche du segment horizontal reliant M à l'autre point de la cubique de même ordonnée, i.e. $N = (-2, -\frac{2}{3})$, puis suit la cubique à nouveau jusqu'à $-M = (-1, \frac{2}{3})$, puis le segment horizontal $[-M, -N]$, à nouveau la cubique de $-N$ à M , et ainsi de suite.

Une justification complète de ces affirmations peut se faire en construisant des ensembles invariants (appelés aussi pièges à trajectoires) adaptés au système (2). Il est aussi possible d'utiliser la théorie générale d'Andrei Nikolaevich Tikhonov [48]. Cette théorie décrit le comportement des trajectoires d'un systèmes lent-rapide de la forme

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} &= f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} &= g(x, y, \varepsilon) \end{cases}, \quad (3)$$

avec $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, m$ et n arbitraires. Essentiellement, la théorie de Tikhonov démontre l'énoncé suivant. Supposons qu'une partie de la *sous-variété lente* S d'équation $f(x, y, 0) = 0$ est le graphe d'une fonction $x = \xi(y), y \in Y$. Supposons que pour chaque valeur de $y \in Y$ le point $\xi(y)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système rapide $x' = f(x, y, 0)$, et que cette stabilité asymptotique est uniforme par rapport à y . Alors pour toute condition initiale (x_0, y_0) où $y_0 \in Y$ et x_0 est appréciablement dans le bassin d'attraction de $\xi(y_0)$ (pour la dynamique rapide), la trajectoire du système complet (3) partant de (x_0, y_0) joint rapidement le halo de $\xi(y_0)$ en étant i-proche d'une trajectoire du système rapide (avec $y \simeq y_0$), puis reste dans le halo de S en étant i-proche d'une trajectoire du système lent restreint à S , donné par $\dot{y} = g(\xi(y), y, 0)$. Pour une description très complète et très générale utilisant l'analyse non standard, on peut consulter [40]. Pour une approche classique, on pourra aussi voir le chapitre 39 de [56].

Pour en revenir à notre étude du système (2), une analyse similaire des différents cas montre ainsi que toutes les orbites — excepté le point stationnaire à l'origine — rejoignent

le halo du quadrilatère curviligne $(M, N, -M, -N)$ composé de segments horizontaux et de portions de la cubique, décrit sur la figure 1. Pour abrégé, et puisque nous y verrons des *canards*, nous appelons l’enveloppe convexe de ce quadrilatère la *mare*.

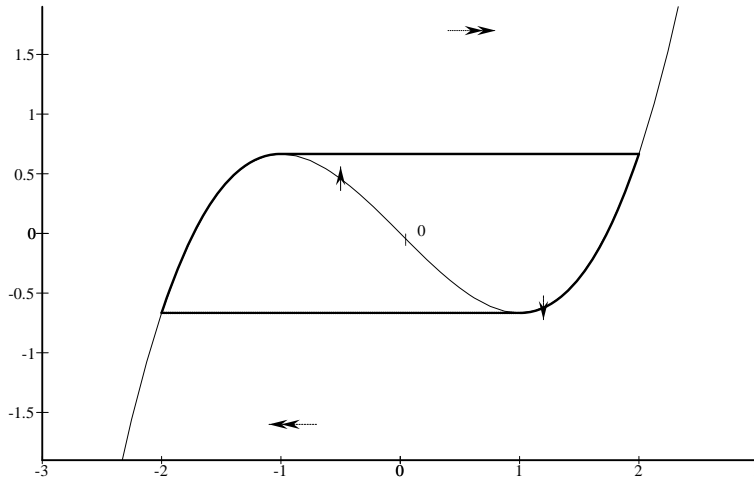


Figure 1. La mare de l’équation de van der Pol dans le plan de Liénard.

Il est classique de montrer qu’il existe un unique cycle limite, qui est i-proche du bord de cette mare et qui est attractif, c.f. par exemple [16].

2.2. L’équation de van der Pol forcée.

A la fin des années 1970, sous l’impulsion de Georges Reeb, un groupe de jeunes chercheurs, Jean-Louis Callot, Francine et Marc Diener, Albert Troesch, Emile Urlacher, puis Eric Benoît et Imme van den Berg, basés à Strasbourg pour certains, Oran et Tlemcen pour d’autres, s’étaient donné comme programme de recherche de développer des méthodes de l’analyse non standard [45, 44] pour l’étude de problèmes de perturbation singulière. Georges Reeb a notamment proposé d’introduire un paramètre de contrôle $a \in \mathbb{R}$ dans l’équation de van der Pol d’origine :

$$\varepsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = a. \tag{4}$$

L’étude de cette équation a amené ce groupe à la découverte de solutions surprenantes, qu’ils ont baptisées “canards” [5, 6, 7, 11, 20, 21] et que nous allons décrire ci-dessous.

Tout d’abord, notons que pour une raison de symétrie de l’équation par la transformation $x \mapsto -x, a \mapsto -a$, on peut restreindre l’étude à $a \geq 0$. Par ailleurs, dans le plan de Liénard, le système devient

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x \\ \dot{y} &= a - x. \end{cases} \tag{5}$$

Une étude locale classique ($\varepsilon > 0$ fixé, i-petit ou non) montre les faits suivants.

• Il y a un unique point stationnaire, le point $A = (a, \mathcal{C}(a))$, dont la matrice jacobienne multipliée par ε , $\varepsilon J = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & 1 \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$, a pour polynôme caractéristique $P = x^2 + (a^2 - 1)x + \varepsilon$. Il s'ensuit que A est

- un noeud répulsif si $0 \leq a \leq \sqrt{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}$,

- un foyer répulsif si $\sqrt{1 - 2\sqrt{\varepsilon}} < a < 1$,

- un foyer attractif si $1 < a < \sqrt{1 + 2\sqrt{\varepsilon}}$

- et un noeud attractif si $\sqrt{1 + 2\sqrt{\varepsilon}} \leq a$.

• Pour $a = 1$, il y a au point A une bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf (en abrégé PAH, voir la partie 3.1 pour une brève description) : si $a \geq 1$ alors A est attractif et asymptotiquement stable, si $a < 1$, a proche de 1, alors il y a un cycle limite attractif, de taille d'ordre $\sqrt{1 - a}$. Il faut noter que cette analyse est *purement locale* et que le voisinage dans lequel la bifurcation PAH a lieu dépend *a priori* de ε . Il se trouve que tout se passe dans un voisinage de taille de l'ordre de ε autour de $a = 1$.

• Pour chaque $a \in [0, 1[$, $\varepsilon > 0$, il y a un seul cycle ; de plus ce cycle dépend continûment de a .

Une étude “*macrolocale*” non standard montre que la taille du cycle dépend du paramètre a de manière très sensible :

• lorsque $a \lesssim 1$ il y a un “grand” cycle, i-proche du quadrilatère de la figure 1 ;

• si $a < 1$, a suffisamment proche de 1, alors la bifurcation PAH nous dit qu'il y a un petit cycle, i-proche du minimum de la cubique $(1, -\frac{2}{3})$. Pour cela a doit être nécessairement i-proche de 1.

Ceci nous permet de montrer qu'il existe des valeurs de a pour lesquelles le cycle longe la partie centrale — répulsive — de la cubique. Ces cycles sont appelés *cycles canards*.

En effet, considérons un point P à l'intérieur de la mare de la figure 1 et non i-proche du bord. L'indice d'un petit cycle autour de ce point est 0 alors que celui d'un grand cycle est 1. Si aucun cycle ne passait par P , alors la fonction qui, à une valeur a , associe l'indice du cycle autour de P serait continue, à valeurs entières et prendrait les valeurs 0 et 1, ce qui est impossible. Ainsi il existe au moins un cycle passant par P . Un tel cycle est, ou bien de la forme d'un des cycles canards de la figure 2, ou bien un “grand canard” longeant la cubique sur toute sa portion centrale. Notons que ces cycles apparaissent pour des valeurs de a nécessairement i-proches de 1. Dans la suite nous supposons que a est i-proche de 1.

Le mot “canard” a été choisi en raison de la ressemblance de certains de ces cycles avec des canards, par exemple celui à gauche de la figure 2. Par ailleurs le mot “canard” signifie aussi une information non vérifiée dans la presse [Petit Robert 1984] (et par extension désigne aussi un mauvais journal ; ce sens du mot canard provient du mot allemand “Ente”, qui est la prononciation allemande des initiales anglaises N.T. : “not testified”). En effet, ces canards sont difficiles à observer numériquement. Les premières simulations,

effectuées par Albert Troesch et Emile Urlacher, ont été faites avec $\varepsilon = \frac{1}{100}$ et la précision des calculs de l'ordre d'une dizaine de décimales n'a pas permis d'en voir. Nous verrons plus bas (proposition 2.2) que ces canards n'existent que pour des valeurs de a dans un "intervalle" de longueur de l'ordre de 10^{-30} lorsque $\varepsilon = \frac{1}{100}$. En conséquence ces simulations auraient nécessité une précision d'une trentaine de décimales, qui n'était pas disponible dans les langages de programmation de l'époque.

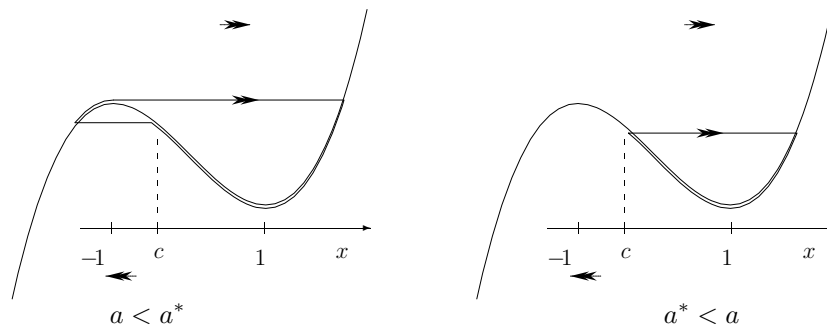


Figure 2. Schémas de cycles canards : à gauche avec tête, à droite sans tête. La notation a^* désigne une valeur "à grand canard", pour laquelle le cycle longe la cubique sur toute sa portion répulsive, de -1 à 1 .

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des cycles canards, mais on peut donner la définition générale suivante. La proposition qui suit montre qu'il suffit de prouver l'existence d'un canard dans ce sens général pour en déduire que le cycle lui-même est un canard pour la même valeur du paramètre.

Définition. Un *canard* est une trajectoire qui longe une portion attractive de la courbe lente, puis une portion répulsive.

Proposition 2.1. On suppose qu'il existe une trajectoire canard de (5). Alors toute trajectoire entrant dans le halo de la cubique à une abscisse d'entrée $x_e > 1$ est un canard. En particulier, le cycle lui-même est un cycle canard. De plus, si x_e est suffisamment proche de 1, alors cette deuxième trajectoire longe la cubique sur un intervalle $[x_s, x_e]$, avec $x_s < 1 < x_e$, qui satisfait la relation entrée-sortie $F(x_s) = F(x_e)$ où

$$F(x) = \int_1^x f(\xi) d\xi \text{ et } f(x) = (x - 1)(x + 1)^2. \tag{6}$$

PREUVE (incompète). On montre d'abord qu'une trajectoire (x, y) entrant dans le halo de la cubique à une abscisse d'entrée $x_e > 1$ et longant la cubique jusqu'à $x_s \in [-1, 1]$ est nécessairement en-dessous de la cubique, sauf éventuellement dans les halos de x_e et x_s . Précisément, on peut montrer qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ avec $\tilde{x}_e = x(t_1) \simeq x_e$, $\tilde{x}_s = x(t_2) \simeq x_s$ et $y(t) < \frac{x(t)^3}{3} - x(t)$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$. Il s'ensuit que $\dot{x} < 0$ sur $[t_1, t_2]$, ce qui permet d'éliminer le temps en écrivant l'équation dans les variables x et y uniquement. Ainsi $y(t)$ peut s'écrire comme une fonction de $x(t)$. Par abus de notation, nous utiliserons la même lettre y pour désigner cette fonction. La fonction y est solution de l'équation suivante sur l'intervalle $]\tilde{x}_e, \tilde{x}_s[$

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \frac{a - x}{y - \frac{x^3}{3} + x} \tag{7}$$

Notons que ce changement de temps de t à x inverse le sens des orbites. Les termes “attractif, répulsif, entrée, sortie, etc.” qui suivent sont à présent relatifs au nouveau temps x . Rappelons aussi que nous avons supposé a i-proche de 1.

A ce stade, il est approprié de passer dans le plan de phase x, u en utilisant la variable $u = \dot{x}$ au lieu de y . Le lien entre u et y est donné par $y = \frac{x^3}{3} - x + \varepsilon u$. Ceci nous conduit à l'équation

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = 1 - x^2 + \frac{a - x}{u}. \tag{8}$$

Cette équation présente une courbe lente d'équation $u = u_0(x) = -\frac{1}{1+x}$, attractive pour $-1 < x < 1$ et répulsive pour $x > 1$ (et pour $x < -1$, mais nous ne considérerons pas ce cas). Remarquons aussi que la fonction $u(x)$ permet de récupérer les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ solutions de (5).

Etant donnée une solution y de (7) et la solution u correspondante de (8), il est évident que $y(x) \simeq \mathcal{C}(x)$ lorsque $u(x) \simeq u_0(x)$. Il se trouve que la réciproque est presque vraie, mais ce n'est pas évident : on peut montrer que, si $y \simeq \mathcal{C}$ sur un intervalle $I =]b, c[$, alors $u \simeq u_0$ appréciablement à l'intérieur de I . Nous omettons la preuve de cette affirmation ici ; cette preuve est délicate et nécessite des pièges à trajectoire judicieusement choisis.

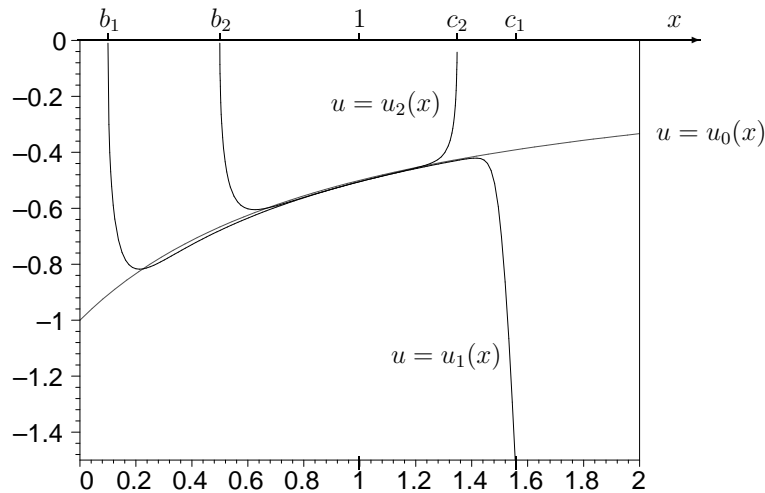


Figure 3. Deux solutions canards de (8). Ici $\varepsilon = 0,05$ et $a = 0,993490933$.

Notons y_1 la solution de (7) correspondant à la trajectoire canard donnée par l'énoncé et notons u_1 la solution de (8) correspondante. Notons b_1 et c_1 les abscisses d'entrée et sortie du halo de la courbe lente (dans le temps x , donc $b_1 < 1 < c_1$). Notons de même y_2 et u_2 les solutions correspondant à la deuxième trajectoire et b_2, c_2 les abscisses d'entrée et sortie (les notations de l'énoncé sont donc $x_e = c_2 > 1$ et $x_s = b_2$) ; voir la figure 3. La théorie de Tikhonov mentionnée précédemment (ou la construction de pièges à trajectoires ad hoc) permet de montrer qu'il existe $\tilde{c}_2 \simeq c_2$ tel que $u_2(x)$ est i-proche de $u_0(x)$ pour tout $x \in]1, \tilde{c}_2[$ vérifiant $x \gtrsim 1$. Il nous faut montrer que ceci reste vrai pour $x \simeq 1$ et pour certains $x \lesssim 1$. Pour cela, posons $v = u_1 - u_2$. Alors v est définie sur un

intervalle ouvert I , pas nécessairement standard, contenant un certain $[\beta, \gamma]$, où β et γ vérifient $\beta \simeq \max(b_1, b_2)$ et $\gamma \simeq \min(c_1, c_2)$. De plus v est solution sur I de l'équation

$$\varepsilon \frac{dv}{dx} = -\frac{a-x}{u_1(x)u_2(x)}v. \tag{9}$$

Bien sûr, les fonctions u_1 et u_2 sont reliées à v , mais on peut aussi considérer l'équation (9) comme une équation linéaire en v avec des coefficients u_1 et u_2 qu'on suppose connus. Sur tout intervalle $[b, c] \subset [\beta, \gamma]$ (où les solutions u_1 et u_2 sont donc i-proches de u_0) on a $-\frac{a-x}{u_1(x)u_2(x)} = f(x) + \mathcal{O}$ avec f définie dans (6), d'où

$$v(b) = v(d) \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} (F(b) - F(d) + \mathcal{O}) \right\}, \tag{10}$$

F définie dans (6).

A présent, supposons que l'abscisse d'entrée de u_2 satisfait $b_2 > b_1$. Alors on peut construire $\tilde{b}_2 \simeq b_2$ tel que u_1 et u_2 sont i-proches de u_0 sur $[\tilde{b}_2, \gamma]$ et tel que $u_2(\tilde{b}_2)$ n'est pas exponentiellement proche de $u_1(\tilde{b}_2)$. D'après (10), on a donc $F(\tilde{b}_2) \gtrsim F(\gamma)$. Ainsi $b_2 \leq \delta$, où δ est le nombre standard défini par $\delta \leq 1$ et $F(\delta) = F(\circ\gamma)$. Puisque $\circ\gamma = \min(c_1, c_2) > 1$, on a $\delta < 1$; ceci montre que la trajectoire de u_2 est un canard longeant la cubique au moins sur l'intervalle $[\max(b_1, \delta), c_2]$.

Si $c_2 = x_e$ est assez proche de 1 alors $\circ\gamma = x_e$ et $\max(b_1, \delta) = \delta$ donc $b_2 \leq \delta$. Si u_2 était i-proche de u_0 appréciablement à gauche de δ , alors le même raisonnement montrerait que u_2 serait i-proche de u_0 appréciablement à droite de x_e , en contradiction avec la définition de x_e . Ainsi l'abscisse d'entrée de u_2 (dans le temps x , donc l'abscisse de sortie dans le temps t) est bien la valeur δ vérifiant la relation entrée-sortie. \square

Remarques. 1. Comme le montre (10), la différence v entre le canard de référence u_1 et un canard local u_2 a un signe constant, ce qui signifie que les canards locaux entrent et sortent du halo de la courbe lente du même côté. En revanche, lorsque a n'est pas une valeur à grand canard, il est possible d'avoir des canards entrant et sortant des deux côtés de la courbe lente. C'est le cas du canard u_1 sur la figure 3.

2. Une alternative à l'écriture de l'équation (9) sous forme linéaire est d'utiliser la *loupe exponentielle*, introduite par Eric Benoît : on pose $W = v^{[\varepsilon]}$, où le crochet signifie que W a le signe de v , et on aboutit à l'équation

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{a-x}{u_1(x)u_2(x)}W. \tag{11}$$

Les arguments sont identiques : lorsque u_1 et u_2 sont i-proches de u_0 , on peut considérer cette équation comme une perturbation régulière de l'équation

$$\frac{dW_0}{dx} = f(x)W_0, \tag{12}$$

dont les trajectoires sont les multiples de $e^{F(x)}$, f et F données par (6), c.f. figure 4. Cette approche permet de visualiser sur le portrait de phase de l'équation (12) l'exponentielle petite de $u_1 - u_2$ et la relation entrée sortie.

3. Plutôt que d'étudier les cycles canards, il est apparu plus simple à l'usage d'étudier les valeurs du paramètre a pour lesquelles d'autres solutions, appelées *solutions distinguées*,

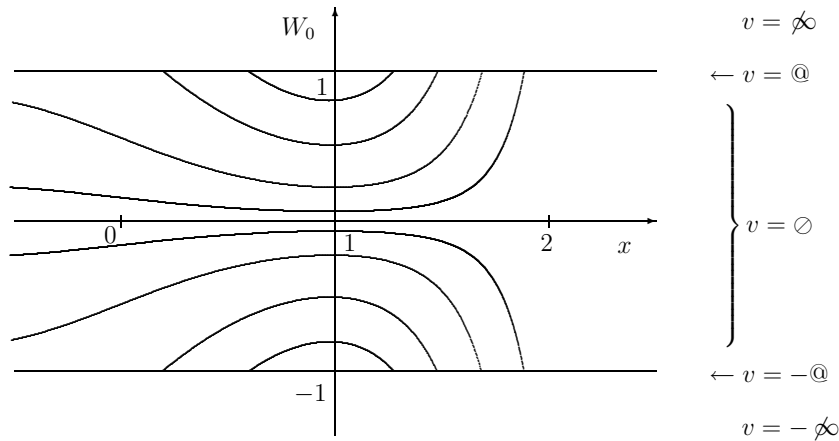


Figure 4. Le champ dans les variables x, W_0 . A droite la correspondance entre les variables W et v . sont des canards. Précisément, on montre que pour tout (ε, a) il existe une unique solution y^+ de (7) asymptotique à \mathcal{C} lorsque $x \rightarrow +\infty$.

2.3. Les canards ont la vie brève.

Considérons a^* une valeur à grand canard, autrement dit, une valeur du paramètre pour laquelle le cycle longe toute la portion répulsive de la cubique, de -1 à 1 .

On peut montrer le résultat suivant.

Proposition 2.2. Soit a une autre valeur à canard. Alors le cycle longe la cubique jusqu'à une abscisse $c \in]-1, 1[$ si et seulement si $|a - a^*| = \exp(-(F(c) + \emptyset)/\varepsilon)$, où F est donnée dans (6).

Ainsi la plage des valeurs à canard est exponentiellement petite. Si on interprète le paramètre a comme un temps, cela signifie que les canards apparaissent pour une période de durée très brève. Nous ne donnons pas de preuve de ce résultat car nous détaillerons un résultat similaire dans un contexte simplifié dans la prochaine partie. On trouve la preuve dans l'article original [7] ou dans le livre en préparation [33].

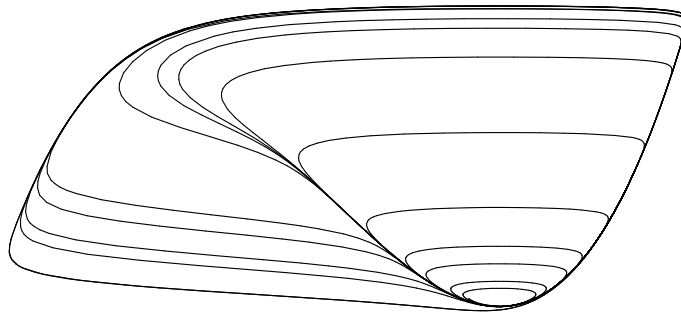


Figure 5. *Quinze cycles de l'équation de van der Pol forcée pour $\varepsilon = 0,05$ et pour les valeurs de a données dans le tableau suivant.*

0,9	0,9934909324	0,993491
0,99	0,99349093249	0,9935
0,993	0,99349093250	0,9936
0,99348	0,99349093251	0,995
0,99349	0,9934909326	0,998

La colonne de gauche correspond aux valeurs de a donnant les cinq cycles canard voisins d'un grand cycle, celles du milieu aux cinq voisins d'un grand canard, et celle de droite aux cinq voisins d'un petit cycle. Pour ε fixé (comme ici), les cycles semblent inclus les uns dans les autres, mais ce n'est qu'une impression : il n'y a pas de monotonie en ce qui concerne les cycles (sauf pour les petits cycles d'après la théorie de bifurcation PAH, c.f. partie 3.1). En revanche, il y a une forme de monotonie pour les solutions distinguées introduites à la fin de la partie 2.2. Précisément, notons $]b(\varepsilon, a), +\infty[$ l'intervalle maximal de définition de la solution distinguée $y^+ = y^+(\cdot; \varepsilon, a)$ de (7) ; en d'autres termes $b(\varepsilon, a)$ est l'abscisse du premier point d'intersection de la trajectoire correspondante de (5) avec la cubique. On montre que, si $a_1 < a_2$ alors les solutions distinguées correspondantes y_1^+ et y_2^+ sont définies au moins sur $]b(\varepsilon, a_2), +\infty[$ et satisfont $y_1 < y_2$ sur cet intervalle. C'est un des avantages de l'étude des solutions distinguées plutôt que des cycles.

2.4. Le paradigme.

Dans cette partie nous allons décortiquer le mécanisme des canards sur l'exemple suivant

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = xy + \varepsilon a, \tag{13}$$

où le paramètre de contrôle a est supposé limité. La valeur du paramètre $a = a^* = 0$ est une valeur à grand canard ; le grand canard est donné par $y \equiv 0$.

Proposition 2.3. *Les valeurs à canard sont exactement les valeurs de a exponentiellement petites. Précisément on a les cas suivants.*

- Si $\varepsilon \ln |a|$ est i -grand négatif (ou si $a = 0$), alors toute orbite de (13) entrant dans le halo de la courbe lente $y = 0$ à une abscisse standard $x_e < 0$ en sort à l'abscisse $x_s = -x_e$.

- Si $\varepsilon \ln |a|$ est appréciable négatif, i.e. si $|a|$ est de la forme $\exp\left(-\frac{l+\mathcal{O}}{\varepsilon}\right)$, avec l standard positif, alors le portrait de phase présente des butées en $-x^*$ et x^* , avec $x^* = \sqrt{2l}$: une orbite entrant dans le halo de la courbe lente à une abscisse $x_e \in]-x^*, 0[$ en sortira à l'abscisse $x_s = -x_e$. En revanche une orbite entrant dans le halo de la courbe lente à une abscisse strictement inférieure à $-x^*$ en sortira à l'abscisse x^* . De manière symétrique, pour tout standard $x_s \geq x^*$, il existe des orbites entrant dans le halo de la courbe lente à l'abscisse $-x^*$ et en sortant à l'abscisse x_s .
- Si $\varepsilon \ln |a|$ est i-petit, alors il n'y a pas de canard.

PREUVE. Soit y une solution entrant dans le halo de la courbe lente à une abscisse standard $x_e < 0$. Par symétrie, on peut supposer que cette entrée se fait par le haut. Ainsi, il existe $x_0 \simeq x_e$ tel que $y(x_0) = 1$. La formule de la variation de la constante donne

$$y(x) = e^{(x^2 - x_0^2)/(2\varepsilon)} + a I(x) \quad (14)$$

$$\text{avec } I(x) = \int_{x_0}^x e^{(x^2 - u^2)/(2\varepsilon)} du.$$

Dans le cas où $x_0 \leq x \leq 0$, on a $0 \leq I(x) \leq I(0) \leq \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}} \simeq 0$, donc $y(x)$ est i-petit dès que $(x^2 - x_0^2)/(2\varepsilon)$ est i-grand négatif, en particulier lorsque $x_e \lesssim x \leq 0$.

Dans le cas où $x \geq 0$, $I(x)$ est de la forme $I(x) = \sqrt{\varepsilon} e^{x^2/(2\varepsilon)} \textcircled{a}$. Il s'ensuit que, lorsque $|x| \lesssim \sqrt{-2\varepsilon \ln |a|}$ le terme $a I(x)$ est i-petit et lorsque $|x| \gtrsim \sqrt{-2\varepsilon \ln |a|}$ ce terme est i-grand.

- Si $\varepsilon \ln |a|$ est i-grand négatif ou si $a = 0$, alors le terme $a I(x)$ est i-petit pour tout x limité, donc $y(x)$ est i-petit lorsque $(x^2 - x_0^2)/(2\varepsilon)$ est i-grand négatif, en particulier lorsque $x_e \lesssim |x| \lesssim -x_e$, et $y(x)$ est i-grand lorsque $|x| \gtrsim |x_e|$. L'abscisse de sortie est donc bien $x_s = -x_e$.
- Si $\varepsilon \ln |a| \simeq -l$ avec l standard positif, alors le terme $a I(x)$ est i-petit pour tout x tel que $|x| \lesssim x^* := \sqrt{2l}$ et ce terme est i-grand lorsque $|x| \gtrsim x^*$. Si $|x_e| < x^*$, on a donc $y(x)$ i-petit lorsque $|x| \lesssim |x_e|$ et $y(x)$ i-grand lorsque $|x| \gtrsim |x_e|$ et l'abscisse de sortie est encore $x_s = -x_e$. En revanche, si $|x_e| > x^*$, on a $y(x)$ i-petit lorsque $x_e \lesssim x \lesssim x^*$ et i-grand lorsque $x \gtrsim x^*$. L'abscisse de sortie est donc cette fois $x_s = x^*$.

Pour voir que la situation $|x_e| = x^*$ peut donner lieu à des abscisses de sortie arbitraires entre x^* et l'infiniment grand positif, suivant les valeurs de x_0 , il suffit d'utiliser la symétrie $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$ dans (13).

- Si $\varepsilon \ln |a|$ est i-petit, alors le terme $a I(x)$ est i-grand dès que $x \gtrsim 0$, si bien que l'abscisse de sortie est $x_s = 0$. □

Remarque. Une deuxième méthode de preuve est d'utiliser une modification de la loupe exponentielle d'Eric Benoît, due à Jean-Louis Callot. La preuve n'est pas plus simple que la précédente, mais elle se visualise peut-être mieux, c.f. figure 6. On suppose à nouveau $a \geq 0$ pour fixer les idées.

On pose $W = y^{[\varepsilon]}$, où le crochet signifie que W a le signe de y , et on aboutit à l'équation (*a priori* pour $W \neq 0$ seulement, mais les choses se prolongent sans problème sur la droite $W = 0$)

$$\frac{dW}{dx} = \left(x + \varepsilon \left(\frac{a^\varepsilon}{W} \right)^{[1/\varepsilon]} \right) W. \tag{15}$$

Le terme $\left(\frac{a^\varepsilon}{W}\right)^{[1/\varepsilon]}$ est exponentiellement grand (positif ou négatif) lorsque $|W| \lesssim a^\varepsilon$ et exponentiellement petit lorsque $|W| \gtrsim a^\varepsilon$. On en déduit la description suivante :

- dans la zone $|W| \lesssim a^\varepsilon$, les trajectoires sont quasi-verticales,
- dans les zones $W \lesssim -a^\varepsilon$ et $W \gtrsim a^\varepsilon$ ces trajectoires sont i-proches des trajectoires de l'équation $\frac{dW}{dx} = xW$, qui sont les courbes d'équations $W = \text{const.exp}\{x^2/2\}$ (pour faire court, nous appellerons *exparaboles* ces images de paraboles par l'exponentielle),
- dans le halo des droites $|W| = a^\varepsilon$ le champ varie rapidement, mais on vérifie qu'il est appréciablement transverse dans les halos des deux demi-droites $\Delta_1 = \{(x, W) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, W = a^\varepsilon\}$ et $\Delta_3 = \{(x, W) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0, W = -a^\varepsilon\}$. Le long de la demi-droite $\Delta_2 = \{(x, W) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0, W = a^\varepsilon\}$, les trajectoires restent piégées. Précisément, si une solution $W(x)$ est telle que $W(x_0) \simeq a^\varepsilon$ pour un certain $x_0 \lesssim 0$, alors W est définie et i-proche de a^ε pour tout x tel que $x_0 \leq x \lesssim 0$. De même les trajectoires restent piégées le long de la demi-droite $\Delta_4 = \{(x, W) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, W = -a^\varepsilon\}$ en inversant le temps. Ici dans cet exemple linéaire, le comportement

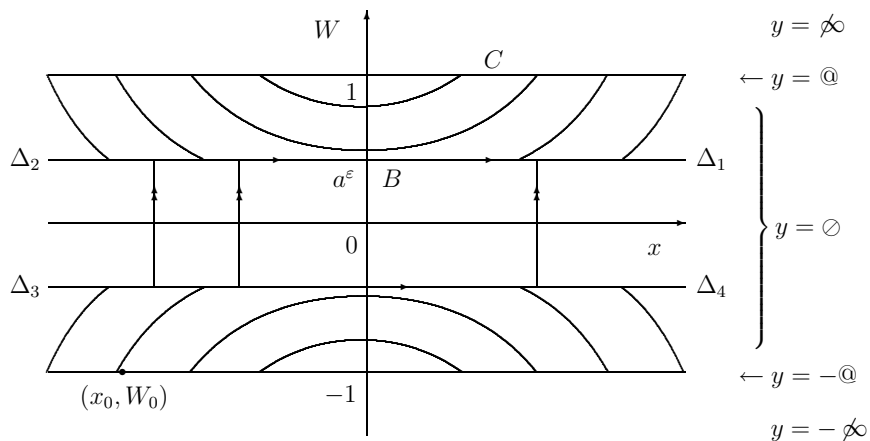


Figure 6. Le champ dans les variables x, W , où $W = y^{[\varepsilon]}$ est solution de (15). A droite la correspondance entre les variables W et y .

des solutions W dans les zones $|W| \gtrsim a^\varepsilon$ est de longer des arcs d'exparabole, y compris dans les zones $|W| \gtrsim 1$ qui correspondent à y exponentiellement grand, mais ce n'est plus le cas lorsqu'il y a des termes non linéaires. Nous limiterons donc volontairement la description du comportement des trajectoires à $|W| \leq 1$. Tout ceci permet d'avoir la description suivante des trajectoires de l'équation (13), c.f. figure 6.

Soit $x_0 \lesssim 0$ et y_0 appréciable. Supposons $y_0 < 0$ pour fixer les idées. Notons y_1 la solution de (13) de condition initiale $y_1(x_0) = y_0$ et notons W_1 la solution correspondante de (15). On a donc $W_1(x_0) \simeq -1$. La solution W_1 commence par longer un arc

d'exparabole, et plusieurs cas peuvent se produire, suivant que cet arc coupe ou non les demi-droites Δ_3 et Δ_4 . Pour simplifier l'écriture, notons $x_a = \sqrt{-2\varepsilon \ln a}$.¹

- Si $-x_a \leq x_0$, alors cet arc d'exparabole reste appréciablement en-dessous de Δ_3 et Δ_4 , et la solution longe toujours cet arc. Dans les variables x, y , on a ainsi $y \simeq 0$ lorsque $x_0 \leq x \leq -x_0$ et y i-grand lorsque $|x| \gg |x_0|$. La solution est donc dans le halo de la courbe lente pour $x_0 \leq x \leq -x_0$ et quitte ce halo à l'abscisse de sortie $-x_0$; la relation entrée-sortie est symétrique.
- Si $x_0 \leq -x_a$, alors la solution commence par longer un arc d'exparabole jusqu'au halo de la demi-droite Δ_3 , puis longe un segment vertical joignant les demi-droites Δ_3 et Δ_2 , reste piégée dans le halo de Δ_2 jusqu'au halo du point $B = (0, a^\varepsilon)$, puis longe l'arc d'exparabole passant par ce point, jusqu'au point $C = (x_a, 1)$, correspondant au point de sortie du halo de la courbe lente dans les variables x, y : l'abscisse de sortie est toujours x_a et la sortie se fait toujours du côté $y > 0$.
- Le cas limite $x_0 \simeq -x_a$ peut donner lieu à toutes les abscisses de sortie supérieures ou égales à x_a , aussi bien du côté $y > 0$ que du côté $y < 0$. Les abscisses de sortie strictement supérieures à x_a concernent des solutions en x, W qui longent une partie (répulsive) de Δ_4 avant de longer un arc d'exparabole (si la sortie est du côté $y < 0$) ou un segment vertical puis un arc d'exparabole (si la sortie est du côté $y > 0$).

2.5. Résumé.

Il faut retenir de ce phénomène canard des systèmes du plan les faits suivants.

1) C'est un phénomène extrêmement sensible, qui dépend du paramètre de contrôle a de l'équation de manière exponentiellement sensible par rapport au petit paramètre ε . En d'autres termes, si l'équation dépend réellement de a (une certaine hypothèse dite de transversalité doit être satisfaite), alors deux valeurs à canards a_1 et a_2 satisfont nécessairement une majoration de la forme $|a_1 - a_2| \leq \exp(-c/\varepsilon)$.

2) Le fait, pour une trajectoire donnée, d'être un canard dépend finalement assez peu de la condition initiale : à partir du moment où une trajectoire est un canard, les autres trajectoires s'organisent autour d'elle selon une relation entrée-sortie.

3) Si la présence de canards est exceptionnelle concernant une équation donnée, en revanche elle est inéluctable pour une famille d'équations dépendant d'un paramètre de contrôle a , moyennant une hypothèse de transversalité par rapport à a .

3. Bifurcations de type Hopf statique et dynamique.

3.1. La bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf.

La bifurcation PAH se voit aisément sur l'exemple suivant (encore un "paradigme")

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (16)$$

1. Le lien entre x_a et le x^* de la preuve est $x^* = \circ x_a$.

où les variables x et y sont réelles et μ est un paramètre fixé. En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= -1 \end{cases}$$

d'où il ressort que

- si $\mu < 0$, alors l'origine 0 est un point stationnaire attractif,
- si $\mu > 0$, alors 0 est répulsif et accompagné d'un cycle attractif qui est le cercle de rayon $\sqrt{\mu}$.

Il se trouve que ce scénario de bifurcation a lieu dans une situation générale, moyennant des hypothèses appropriées. Considérons un système différentiel du plan dépendant d'un paramètre μ

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(\mu, x, y) \\ \dot{y} &= g(\mu, x, y). \end{cases} \quad (17)$$

avec f et g de classe C^3 . Supposons que ce système est muni d'un point stationnaire $(x_0(\mu), y_0(\mu))$ dépendant continûment de μ et dont la stabilité change pour une valeur μ_0 . Plus précisément, supposons que la matrice

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} (\mu, x_0(\mu), y_0(\mu))$$

a deux valeurs propres $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu)$ complexes conjuguées, telles que $\text{Im } \lambda_j(\mu_0) \neq 0$ et $(\mu - \mu_0) \text{Re } \lambda_j(\mu) > 0$ si $\mu \neq \mu_0$. Ainsi le point stationnaire est attractif si $\mu < \mu_0$ et répulsif si $\mu_0 < \mu$. Sous une hypothèse générique additionnelle, on montre qu'il y a, pour μ assez proche de μ_0 :

- ou bien un cycle répulsif de taille de l'ordre de $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ pour $\mu < \mu_0$,
- ou bien un cycle attractif de taille de l'ordre de $\sqrt{\mu - \mu_0}$ pour $\mu_0 < \mu$.

L'hypothèse additionnelle est qu'une certaine expression donnée par les dérivées d'ordre supérieur de f et g ne s'annule pas en $(\mu_0, P(\mu_0))$; cependant nous ne la précisons pas plus car nous n'aurons pas besoin de faire cette hypothèse dans la suite de l'article.

3.2. Bifurcation dynamique.

Considérons à présent le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \\ \dot{\mu} &= \varepsilon \end{cases} \quad (18)$$

où, comme dans la partie précédente, $\varepsilon > 0$ est i-petit. Les motivations pour l'étude d'un tel système sont multiples. Tout d'abord dans la littérature, la description qui est faite de la bifurcation de PAH comporte bien souvent des termes "dynamiques". Citons par exemple l'ouvrage d'Arnol'd [1] ; la plupart des références classiques sur le sujet comportent des descriptions analogues :

Lorsque μ passe par 0, la perte de stabilité s'accompagne de la naissance d'un cycle limite stable dont le rayon croît comme $\sqrt{\mu}$. En d'autres termes, l'état stationnaire perd sa stabilité et il apparaît un régime périodique stable (...)

Pour le lecteur non familier avec l'énoncé précis de la bifurcation PAH, ce type de description heuristique peut être mal interprété et laisser croire que le paramètre μ varie lentement avec le temps.

Par ailleurs il est naturel, dans une étude des bifurcations numérique ou expérimentale, de modifier lentement le paramètre de bifurcation μ une fois un équilibre (stationnaire ou périodique) atteint, plutôt que de recommencer l'expérience depuis le même point de départ pour différentes valeurs de μ . Par exemple certaines expériences de physique portant sur le doublement de fréquence d'oscillations dans des cuves de mercure en rotation peuvent requérir des temps de l'ordre de la semaine avant que l'équilibre ne soit atteint.

Enfin, dans la réalité, on observe effectivement des bifurcations, par exemple un dispositif physique se mettant à vibrer lorsqu'un paramètre dépasse une valeur critique (la vitesse d'écoulement d'un fluide par exemple). Une modélisation en termes de bifurcation dynamique peut s'avérer plus adéquate que la modélisation statique habituelle.

L'expérimentation numérique montre que les solutions de (18) n'ont pas du tout le comportement correspondant à la description heuristique de la bifurcation PAH, c.f. figure 7. En ce qui concerne le paradigme (18), une explication théorique est possible et contenue

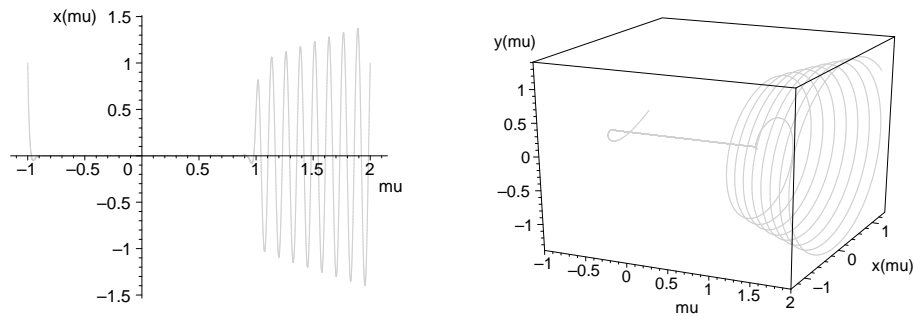


Figure 7. La solution du système (18) de condition initiale $x(-1) = 1$, $y(-1) = 0$, avec $\varepsilon = \frac{1}{50}$ et $-1 \leq \mu \leq 2$, à gauche dans le plan (μ, x) , à droite en perspective.

dans le résultat suivant.

Proposition 3.1. Soit μ_1 un nombre réel limité appréciablement négatif et soit (x_1, y_1) un point limité de \mathbb{R}^2 non i -proche de l'origine. Alors l'orbite de (18) partant de (μ_1, x_1, y_1) longe la courbe lente $x = y = 0$ depuis l'abscisse d'entrée $\mu_e = \circ\mu_1$ jusqu'à l'abscisse de sortie $\mu_s = -\mu_e$.

En d'autres termes, nous avons une relation entrée-sortie symétrique autour du grand canard $x(\mu) = y(\mu) = 0$.

PREUVE. Tout d'abord, avec μ pour nouveau temps, i.e. avec $' = \frac{d}{d\mu}$, ce système a les mêmes orbites que

$$\begin{cases} \varepsilon x' &= \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ \varepsilon y' &= -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (19)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, le système (19) devient

$$\begin{cases} \varepsilon r' &= \mu r - r^3 \\ \varepsilon \theta' &= -1 \end{cases} \quad (20)$$

et la condition initiale de l'énoncé devient $r(\mu_1) = r_1 := \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = @$. Il reste à montrer que $r(\mu)$ est i-petit lorsque $\mu_1 \lesssim \mu \lesssim -\mu_1$ et que $r(\mu)$ est i-proche de $\sqrt{\mu}$ lorsque $-\mu_1 \lesssim \mu$.

Dans le cas de notre exemple, ceci peut se faire par exemple en intégrant l'équation de Bernoulli donnant r puis par une estimation d'une intégrale de type Laplace. On obtient ainsi, pour $\mu \geq \mu_1$

$$r(\mu) = \exp \left\{ \frac{\mu^2 - \mu_1^2}{2\varepsilon} \right\} \left(r(\mu_1)^{-2} + \int_{\mu_1}^{\mu} \frac{2}{\varepsilon} e^{(x^2 - \mu_1^2)/\varepsilon} dx \right)^{-1/2} \leq r(\mu_1) \exp \left\{ \frac{\mu^2 - \mu_1^2}{2\varepsilon} \right\}.$$

On en déduit que $r(\mu)$ est i-petit pour tout μ tel que $|\mu| \lesssim |\mu_1|$. Pour $\mu \gtrsim -\mu_1$, on a

$$\frac{2}{\varepsilon} \int_{\mu_1}^{\mu} \exp \left\{ \frac{x^2 - \mu_1^2}{\varepsilon} \right\} dx = \frac{1}{\mu} \exp \left\{ \frac{\mu^2 - \mu_1^2}{\varepsilon} \right\} (1 + \circ)$$

et le terme $r(\mu_1)^{-2}$ est négligeable devant ce terme exponentiellement grand, si bien que

$$r(\mu) = \exp \left\{ \frac{\mu^2 - \mu_1^2}{2\varepsilon} \right\} \left(r(\mu_1)^{-2} + \frac{1}{\mu} e^{(\mu^2 - \mu_1^2)/\varepsilon} (1 + \circ) \right)^{-1/2} = \sqrt{\mu} (1 + \circ).$$

□

Remarque. L'inconvénient de la preuve ci-dessus est qu'elle ne se généralise pas à des systèmes où l'équation ne s'intègre pas explicitement. Cependant il est possible de démontrer le même résultat sans intégrer l'équation. Heuristiquement, on peut se convaincre du résultat en remarquant d'une part que $r(\mu)$ est i-petit pour certains μ i-proches de μ_1 (en fait, dès que $\frac{\mu - \mu_1}{\varepsilon}$ est i-grand) et d'autre part que le terme r^3 de la première équation de (20) est négligeable dès que $r(\mu)$ est i-petit. On peut montrer ainsi que, pour tout μ tel que $r(\mu)$ est i-petit, on a

$$r(\mu) = r_1 \exp \left\{ \frac{\mu^2 - \mu_1^2 + \circ}{2\varepsilon} \right\}.$$

Le principe de majoration *a priori* montre que $r(\mu)$ est i-petit si $\mu_1 \lesssim \mu \lesssim -\mu_1$. Un raisonnement par l'absurde et ce même principe montrent que $r(\mu)$ n'est pas i-petit si $-\mu_1 \lesssim \mu$. Un raisonnement analogue en inversant le sens du temps montre que $r(\mu)$ est i-proche de l'autre courbe lente $\sqrt{\mu}$ si $-\mu_1 \lesssim \mu$.

3.3. Les tourbillons de Claude Lobry et Guy Wallet.

Ajoutons un terme perturbatif, par exemple un terme d'ordre ε sur la première ligne :

$$\begin{cases} \varepsilon x' &= \mu x + y - x(x^2 + y^2) + \varepsilon a \\ \varepsilon y' &= -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (21)$$

où a est un paramètre de contrôle additionnel. A première vue, nous sommes à nouveau dans une situation typique des canards : le système semble dépendre sensiblement du paramètre de contrôle (une certaine “transversalité” semble satisfaite) et la valeur $a = 0$ est une valeur à grand canard ($x = y = 0$ est le grand canard). Lorsque a est fixé non nul, à cause de l’extrême sensibilité des canards et puisqu’ici il s’agit d’une perturbation non exponentiellement petite du système (19), *a priori* il n’y a aucune raison d’observer encore des canards. Lorsque Claude Lobry et Guy Wallet ont présenté cet exemple aux chasseurs de canards, leur première intuition était qu’il ne devrait pas y avoir de canard si a n’est pas exponentiellement petit. Pourtant l’expérience dément cette première intuition, comme le montre la figure 8.

Des expérimentations numériques plus détaillées (confirmées par la théorie par la suite) aboutissent aux conclusions suivantes.

- On observe encore un retard, avec une relation entrée-sortie localement symétrique : les trajectoires partant de μ_0 avec $-1 \lesssim \mu_0 \lesssim 0$ entrent dans le halo de la courbe lente $x = y = 0$ pour $\mu \simeq \mu_0$ et en sortent pour $\mu \simeq -\mu_0$. C’est le cas des solutions de la figure 8 gauche.
- On voit aussi une butée : les trajectoires partant de $\mu_0 \lesssim -1$ entrent dans le halo de la courbe lente pour $\mu \simeq \mu_0$ et en sortent pour $\mu \simeq 1$. C’est le cas de la figure 8 droite.
- Symétriquement, pour tout $\mu_s \gtrsim 1$, il existe des trajectoires partant de $\mu_0 \simeq -1$ qui entrent dans le halo de la courbe lente pour $\mu \simeq \mu_0$ et en sortent pour $\mu \simeq \mu_s$.

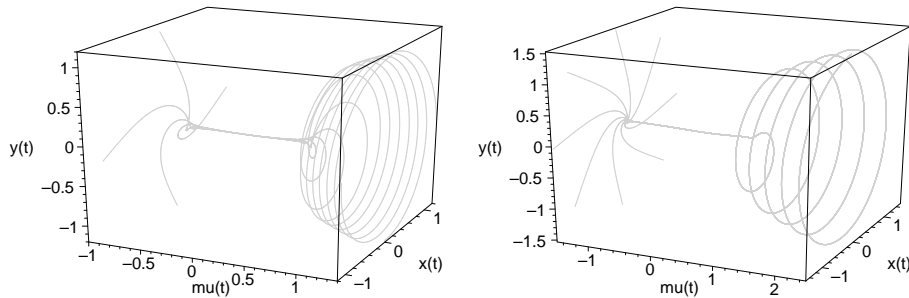


Figure 8. A gauche, quatre solutions du système (21) de conditions initiales $x(\mu_0) = \cos(k\pi/2)$, $y(\mu_0) = \sin(k\pi/2)$, $k = 0, \dots, 3$, avec $\varepsilon = \frac{1}{20}$, $\mu_0 = -0,8$ et $-1 \leq \mu \leq 1,4$. Ces solutions ont une relation entrée-sortie symétrique et se séparent les unes des autres après avoir quitté le halo de la courbe lente $x = y = 0$. A droite, huit solutions du système (21) de conditions initiales $x(\mu_0) = r \cos(k\pi/4)$, $y(\mu_0) = r \sin(k\pi/4)$, $k = 0, \dots, 7$, avec $\varepsilon = \frac{1}{20}$, $r = 1,5$, $\mu_0 = -1,5$ et $-1,5 \leq \mu \leq 2,5$. Ces solutions restent collées les unes aux autres après leur sortie du halo de la courbe lente.

Pour simplifier l’exposé, nous nous intéressons dans la suite de l’article à des versions linéaires des systèmes (16), (19) et (21). Commençons par le système correspondant à (16)

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x + y \\ \dot{y} &= -x + \mu y \end{cases}$$

qui possède un unique point stationnaire à l’origine, foyer attractif si $\mu < 0$, centre si $\mu = 0$ et foyer répulsif si $\mu > 0$.

Il se trouve que l'hypothèse générique de PAH n'est pas satisfaite sur cet exemple. D'une certaine façon, les orbites périodiques de taille $\propto \sqrt{|\mu|}$ du cas générique correspondent aux orbites périodiques qui remplissent le plan $\mu = 0$. Une image très simplifiée du scénario de PAH consiste à passer du cas linéaire au cas générique en tordant ce plan $\mu = 0$ en une surface constituée de cycles. L'hypothèse générique revient justement à supposer que la courbure de cette surface est non nulle au point $(0, P(0))$ (ici $\mu_0 = 0$), ce qui fait que la surface est proche d'un parabolôïde et tangente au plan $\mu = 0$. Son intersection avec un plan $\mu = c$, c proche de 0 est vide pour un signe de μ et un cycle de taille $\propto \sqrt{|c|}$ pour l'autre signe.

La version dynamique, correspondant à (19), devient

$$\begin{cases} \varepsilon x' &= \mu x + y \\ \varepsilon y' &= -x + \mu y \end{cases} \quad (22)$$

avec $' = \frac{d}{d\mu}$. En coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{cases} \varepsilon r' &= \mu r \\ \varepsilon \theta' &= -1 \end{cases}$$

ce qui conduit à $r(\mu) = r(0)e^{\mu^2/\varepsilon}$. Le système qui nous intéresse est celui avec le terme perturbatif correspondant à (21) (avec $a = 1$ pour paramètre de contrôle)

$$\begin{cases} \varepsilon x' &= \mu x + y + \varepsilon \\ \varepsilon y' &= -x + \mu y \end{cases} \quad (23)$$

Nous allons voir que ses solutions se comportent de manière analogue à celles du système (21) : un retard, une relation entrée-sortie symétrique au voisinage de $\mu = 0$ et des butées en $\mu = -1$ et $\mu = 1$. Le but de la prochaine partie est d'expliquer ce comportement.

3.4. La méthode des reliefs de Jean-Louis Callot.

Sur l'exemple du système (23), la méthode est particulièrement simple et éclairante. Elle consiste à utiliser le plan complexe. On pose $z = x + iy$, ce qui conduit à l'équation

$$\varepsilon z' = (\mu - i)z + \varepsilon. \quad (24)$$

On peut remarquer en passant qu'il s'agit d'une version complexe de notre paradigme de la partie 2.4 avec x remplacé par $\mu - i$. La formule de variation de la constante permet de calculer explicitement ses solutions. Pour toute solution z et tous points μ_0, μ , on obtient

$$z(\mu) = \exp \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} ((\mu - i)^2 - (\mu_0 - i)^2) \right\} z(\mu_0) + \int_{\mu_0}^{\mu} \exp \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} ((\mu - i)^2 - (u - i)^2) \right\} du. \quad (25)$$

Un point essentiel dans la méthode des reliefs est de considérer aussi la variable indépendante μ comme une variable complexe. Toutes les solutions de (24) sont entières, donc l'intégrale dans (25) ne dépend pas du chemin d'intégration d'après la théorie de Cauchy. Le principe de la méthode est de choisir un autre chemin du plan complexe joignant μ_0 et μ à la place du segment. Considérons une solution z i-petite en un point μ_0 et étudions les points μ où cette solution est i-petite. La formule (25) donne la majoration

$$|z(\mu)| \leq \exp \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} (R(\mu) - R(\mu_0)) \right\} |z(\mu_0)| + \int_{\mu_0}^{\mu} \exp \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} (R(\mu) - R(u)) \right\} |du| \quad (26)$$

où

$$R(\mu) = \operatorname{Re} \left(\frac{(\mu-i)^2}{2} \right) ; \tag{27}$$

ici $\int_c f(u) |du| = \int_0^1 f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$ si c est un chemin complexe paramétré par $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ et si f est une fonction à valeurs réelles positives sur c . Ainsi s'introduit naturellement un ingrédient essentiel : la *fonction relief* R . Il est utile de voir son graphe $\{(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, R(z)) ; z \in \mathbb{C}\}$ comme un relief en trois dimensions.

Comme $z(\mu_0)$ est i -petit par hypothèse, la formule (26) montre tout de suite que $z(\mu)$ est limitée s'il est possible de choisir un chemin dans le plan complexe joignant μ_0 à μ tel que $R(\mu) \leq R(u)$ pour tout u sur ce chemin. Si $R(u)$ décroît appréciablement le long du segment, un petit calcul montre que $z(\mu)$ aussi est i -petit. En d'autres termes, on a le résultat suivant.

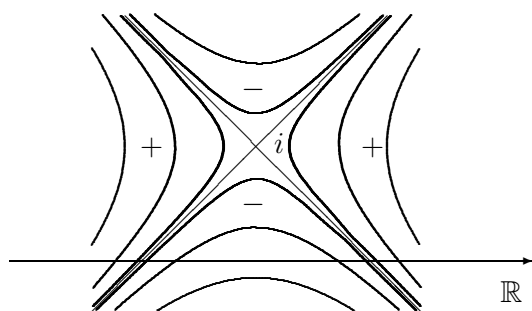


Figure 9. Le relief associé à l'équation (24). Ce sont les courbes de niveau $R(x) = \text{constante}$, où R est donné par (27). Les signes + et - désignent les montagnes et les vallées.

Proposition 3.2. Soit μ_1, μ réels, (x_1, y_1) i -proche de 0 et γ un chemin complexe de μ_1 à μ sur lequel R décroît appréciablement. Alors la solution (x, y) de (23) de condition initiale $x(\mu_1) = x_1, y(\mu_1) = y_1$ reste i -proche de 0 sur l'intervalle $[\mu_1, \mu]$ si $\mu_1 < \mu$, respectivement $[\mu, \mu_1]$ si $\mu < \mu_1$.

Ceci explique le retard à la bifurcation, les relations entrée-sortie et en partie les butées mentionnées à la fin du paragraphe précédent. Considérons par exemple une solution (x, y) de (23) de condition initiale $x(\mu_1) = x_1, y(\mu_1) = y_1$, où μ_1 est un nombre réel négatif appréciable et où (x_1, y_1) est appréciable. La théorie de Tikhonov permet de montrer que cette solution est i -proche de la courbe lente $x = y = 0$ tant que celle-ci est attractive, donc pour $\mu_1 \lesssim \mu \lesssim 0$; en revanche cette théorie ne permet pas de décrire ce qui se passe à partir de $\mu = 0$. Un examen de la figure 9 montre que, si $\mu \lesssim \min(1, -\mu_1)$, alors il existe un chemin complexe d'un point $\tilde{\mu}_1 \gtrsim \mu_1, \tilde{\mu}_1$ suffisamment proche de μ_1 , à μ sur lequel R décroît appréciablement et la proposition 3.2 s'applique. Ceci montre le retard.

Si $-1 \lesssim \mu_1 \lesssim 0$, alors la solution (x, y) ne peut pas rester i -proche de la courbe lente en un point $\mu_2 \gtrsim -\mu_1$, autrement la même proposition 3.2 (appliquée en prenant μ_2 pour condition initiale) montrerait qu'elle est i -proche de la courbe lente en μ_1 , ce qui est contraire à l'hypothèse. Ceci montre la relation entrée-sortie symétrique pour $-1 \lesssim \mu \lesssim 1$.

Si $\mu_1 \lesssim -1$, alors la solution $(x(\mu), y(\mu))$ est i -proche de la courbe lente si $\mu \lesssim 1$, mais on peut montrer qu'elle ne peut pas rester i -proche de la courbe lente au-delà de 1.

La raison est qu'il n'existe pas de solution de (24) qui reste i -petite dans un voisinage complexe de $\mu = i$. Ainsi, la butée se situe au point de l'axe réel (ici en $\mu = 1$) qui est au même niveau que le col au point $\mu = i$ pour le relief donné par R .

Dans le cas général, concernant une version "dynamique" du système (17), on peut énoncer le résultat sous la forme suivante.

Théorème 3.3. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \varepsilon x' &= f(\mu, x, y) \\ \varepsilon y' &= g(\mu, x, y) \end{cases} \quad (28)$$

avec $\varepsilon \simeq 0, x, y \in \mathbb{R}, f$ et g standard.

On fait les hypothèses suivantes.

(H1) Le système pour $\varepsilon = 0$ a un point stationnaire $P(\mu) = (x_0(\mu), y_0(\mu))$, continu par rapport à μ .

(H2) La matrice des dérivées partielles

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} (\mu, x_0(\mu), y_0(\mu))$$

a deux valeurs propres $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu)$ complexes conjuguées, telles que $\text{Im } \lambda_j(\mu_0) \neq 0$ et $(\mu - \mu_0)\text{Re } \lambda_j(\mu) > 0$ si $\mu \neq \mu_0$

(H3) Les fonctions f et g sont analytiques au voisinage de $(\mu_0, P(\mu_0)) \in \mathbb{C}^3$.

Alors il existe un intervalle ouvert standard I contenant μ_0 et une solution (x, y) paramétrée par μ sur I telle que pour tout $\mu \in I$

$$x_\varepsilon(\mu) \simeq x_0(\mu) \text{ et } y_\varepsilon(\mu) \simeq y_0(\mu)$$

De plus, l'orbite partant d'un point standard (μ_1, x_1, y_1) , avec $\mu_1 < \mu_0, \mu_1$ suffisamment proche de μ_0 et (x_1, y_1) suffisamment proche de $P(\mu_1)$, suit la courbe lente $x = x_0(\mu), y = y_0(\mu)$ de μ_1 à μ_2 , où $\mu_2 > \mu_0$ est donné par la relation entrée-sortie

$$R(\mu_1) = R(\mu_2) \text{ avec } R(\mu) = \text{Re} \left(\int_{\mu_0}^{\mu} \lambda_j(t) dt \right) \quad (29)$$

3.5. Commentaires.

1. Ce résultat peut être attribué à Anatoly I. Neishtadt [43]. Dans [10], Jean-Louis Callot en donne une preuve élégante basée sur sa méthode des reliefs. Dans ce même article est apparue l'expression *solution distinguée* pour désigner une solution qui longe la courbe lente sur toute une montagne du relief. C'est l'analogue complexe des solutions distinguées de la remarque 3 à la fin de la partie 2.2.

2. L'existence d'une solution proche de la courbe lente dans un voisinage de μ_0 est un cas particulier d'un résultat plus ancien, dû à Yasutaka Sibuya et qu'on peut trouver dans [47], partie 5, 1 ; voir aussi [56]. Cela vient du fait que la matrice $A(\mu)$ n'a pas de valeur propre s'annulant au voisinage de μ_0 . En revanche son interprétation en termes de retard

à la bifurcation est plus récente.

3. En pratique, un choix approprié d'intervalle I peut être fait directement à partir de f et g en examinant le relief constitué des courbes de niveau de R donné dans (29). Le plus grand intervalle I possible peut généralement être déterminé en fonction des singularités et des zéros de λ_j .

4. Comme nous l'avons vu dans l'étude de l'exemple (23), pour prouver l'existence d'une solution "canard" (i.e. longeant la courbe lente sur un intervalle contenant μ_0 dans son intérieur) il semble indispensable de considérer la variable μ dans le plan complexe : ce n'est qu'en faisant un détour en-dehors de l'axe réel qu'on peut trouver un chemin descendant le relief. En revanche, la relation entrée-sortie peut s'obtenir en restant dans un cadre réel, par exemple en passant en coordonnées polaires autour de cette solution canard. On trouvera dans [52] une étude détaillée de la relation entrée-sortie dans un cadre très général.

5. A propos de la preuve, contrairement à l'exemple (23), f et g n'ont pas de raison *a priori* d'être la partie réelle et la partie imaginaire d'une même fonction holomorphe de la variable $z = x + iy$; c'est déjà le cas pour l'exemple (21). Cela implique qu'il faut étudier un système lent-rapide avec deux variables rapides x et y complexes.

6. La méthode des reliefs de Jean-Louis Callot a été aussi utilisée pour l'étude des canards de l'équation de van der Pol forcée dans [32], en combinaison avec une idée de Claude Lobry dans [38] et avec le point fixe. Dans ce contexte, la fonction relief R est simplement la partie réelle de F , où F est donnée dans (6). Le passage au complexe permet aussi de considérer des valeurs de a , dites *valeurs à grands canards*, pour lesquelles les solutions distinguées de deux montagnes contiguës coïncident, par exemple les deux montagnes M_N ("Nord") et M_E ("Est") de la figure 10. Dans l'exemple de van der Pol forcée, le passage au complexe est le seul moyen de joindre deux montagnes en évitant le point tournant -1 .

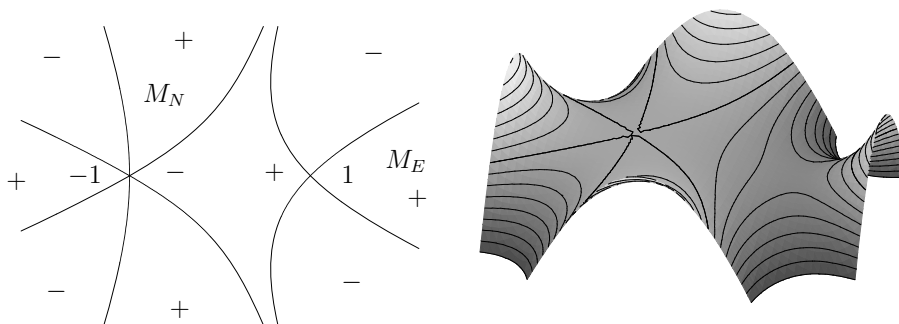


Figure 10. Le relief de l'équation de van der Pol forcée, associé à $R = \text{Re } F$ où F est donnée dans (6). A gauche, les courbes de niveau $R(x) = \frac{4}{3}$ and $R(x) = 0$ séparant les montagnes et les vallées des cols -1 et 1 . A droite, une vue en perspective avec $-3.5 \leq \text{Re } x \leq 1, -1.5 \leq \text{Im } x \leq 1.5, -6 \leq R(x) \leq 4$.

7. Il est aussi très fructueux de considérer le petit paramètre ε comme une variable complexe et d'étudier l'analyticité des objets (valeurs à grands canards, solutions distinguées) en fonction de ε dans des secteurs $S = \{\varepsilon \in \mathbb{C} ; |\varepsilon| < \varepsilon_0, \alpha < \arg \varepsilon < \beta\}$. Bien sûr, ce point de vue s'éloigne du point de vue non standard où ε est considéré comme

constant, mais il permet d'utiliser les puissants outils de l'asymptotique Gevrey pour obtenir des résultats concernant par exemple la développabilité en ε des solutions et des valeurs à canards, la sommabilité des solutions formelles, etc. Par exemple l'explication du fait qu'une sommation "au plus petit terme" donne une valeur à grand canard nécessite de considérer ε complexe, c.f. [33].

8. *Point tournant et surstabilité.* A priori une butée provient d'un des points critiques μ_c de la fonction relief R , i.e. un point où $\lambda_j(\mu_c) = 0$. Un tel point μ_c est appelé *point tournant*.

En général, il n'existe pas de solution proche de la courbe lente dans tout un voisinage de μ_c , mais exceptionnellement une telle solution peut exister. On dit alors qu'il y a *surstabilité*. C'est exceptionnel pour un système fixé, mais pas pour une famille à paramètre. De même que pour les canards, sous une condition de transversalité, la surstabilité est inéluctable. Ceci se voit bien sur le paradigme (13) de la partie 2.4, que nous réécrivons ci-dessous par commodité

$$\varepsilon \frac{dy}{d\mu} = \mu y + \varepsilon a. \tag{30}$$

Les formules et les preuves de la partie 2.4 restent valables dans le cadre complexe. Ceci implique que le point tournant $\mu = 0$ est surstable si et seulement si a est exponentiellement petit.

La notion de surstabilité a été introduite par Guy Wallet dans [53] comme extension des canards au champ complexe. Par la suite ces premiers résultats ont été complétés et généralisés dans [8, 12, 54].

3.6. Equations analytiques par rapport à ε .

On considère à présent une équation de la forme

$$\varepsilon y' = f(\mu)y + \varepsilon P(\mu, y, \varepsilon) \tag{31}$$

avec f standard analytique dans un voisinage complexe de $[a, b]$, où $a < 0 < b$, f réelle sur l'axe réel, telle que $f(0) = 0$ et $f' > 0$ sur $[a, b]$, et avec P standard analytique dans un voisinage complexe de $[a, b] \times \{0\} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^3$.

La recherche d'une solution formelle $\hat{y} = \sum_{n \geq 0} y_n(\mu)\varepsilon^n$, avec y_n standard, aboutit à l'équation de récurrence

$$y_0 = 0, \quad y_{n+1} = \frac{1}{f}(y'_n - p_n)$$

où $p_n = p_n(\mu)$ est le coefficient en ε^n dans le développement de Taylor par rapport à ε de $P(\mu, y_1\varepsilon + \dots + y_n\varepsilon^n, \varepsilon)$. Ce coefficient dépend donc de P et de y_1, \dots, y_n . On dira que \hat{y} est *régulière* si y_n est sans singularité en $\mu = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, il faut donc qu'à chaque étape $y'_n - p_n$ s'annule en $\mu = 0$. Cela conduit à une infinité de conditions sur f et P .

Il se trouve qu'il y a un lien étroit entre la surstabilité et l'existence d'une solution formelle régulière. Dans [30], il est montré le résultat suivant.

Théorème 3.4. *Considérons l'équation (31) avec les hypothèses précédentes sur f et P .*

Alors les énoncés suivants sont équivalents.

1. Pour ε i -petit, il existe une solution limitée dans le halo de $\mu = 0$.
2. Il existe une solution formelle $\hat{y} = \sum_{n \geq 0} y_n(\mu) \varepsilon^n$ avec des coefficients y_n standard et analytiques en $\mu = 0$.
3. Pour ε i -petit, il existe une solution y infiniment petite sur $[a, b]$ tout entier.

Ce résultat montre deux choses. D'une part, il donne une condition nécessaire et suffisante de nature algébrique sur les coefficients f et P (en réalité une infinité de conditions) pour l'existence de solutions surstables. D'autre part, il montre qu'il n'y a pas de phénomène de butée pour les équations analytiques en ε : dès qu'il existe une solution surstable dans le halo de $\mu = 0$, il existe aussi une solution surstable "globale" sur $[a, b]$ tout entier. En revanche, il n'y a pas unicité de cette solution surstable. En particulier il n'est pas possible de considérer la somme usuelle de la série \hat{y} car celle-ci est en général divergente. Ce résultat trouve une application dans le problème de la résonance d'Ackerberg-O'Malley [37, 30].

Pour nous convaincre que l'hypothèse d'analyticité par rapport à ε est indispensable, le plus simple est de considérer à nouveau le paradigme (30), où on écrit a comme une fonction de ε . Nous avons vu que, si a n'est pas exponentiellement petit, alors il n'y a pas de surstabilité. Cependant, si a a un développement en ε -ombre égal à 0, autrement dit si $|a| < \varepsilon^n$ pour tout entier n standard, alors il existe une solution formelle, donnée par $y_n \equiv 0$ pour tout n . Par conséquent, la valeur $a = \exp(-1/\sqrt{\varepsilon})$ montre que l'énoncé 2 du théorème 3.4 n'implique pas l'énoncé 1. Par ailleurs, d'après la proposition 2.3, si $a = \exp(-1/\varepsilon)$, alors les solutions sur l'axe réel présentent des butées en $\mu = -1$ et $\mu = 1$, ce qui montre que 1 n'implique pas 3.

3.7. Travaux en cours.

Ils concernent le cas d'un point tournant multiple, autrement dit lorsque $f'(0) = 0$. Dans [30] est présenté un résultat analogue au cas d'un point tournant simple :

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. Il existe une solution formelle.
2. Pour ε i -petit, il existe une solution i -petite dans un voisinage complexe de $x = 0$.
3. Pour ε i -petit, il existe une solution i -petite dans un voisinage complexe de tout l'intervalle $[a, b]$.
4. Pour ε i -petit, il existe une solution réelle dont toutes les dérivées d'ordre standard sont limitées sur un intervalle ouvert contenant 0.
5. Pour ε i -petit, il existe une solution réelle dont toutes les dérivées d'ordre standard sont limitées sur $[a, b]$.

Néanmoins il peut y avoir des canards dont une des dérivées d'ordre standard prend des valeurs i -grandes dans le halo de 0. Dans cette situation, il est encore possible mais plus délicat de montrer qu'il n'y a pas de butée, c.f. les travaux de Peter De Maesschalck et Freddy Dumortier [17, 18, 19]. Dans [31], nous proposons aussi une condition nécessaire et suffisante analogue à la condition 2 du théorème 3.4. Pour cela, nous avons mis au point des développements combinés de la forme

$$\hat{y} = \sum_{n \geq 0} \left(a_n(\mu) + g_n\left(\frac{\mu}{\eta}\right) \right) \eta^n$$

avec $\eta = \varepsilon^{1/p}$. Dans une direction voisine, mentionnons enfin les travaux de Thomas Forget [26].

4. Systèmes dynamiques discrets.

4.1. Introduction.

Le phénomène de retard à la bifurcation a aussi été observé dans le contexte des bifurcations de systèmes dynamiques discrets. Le premier article à notre connaissance où le problème a été posé est [35], sur l'exemple des applications quadratiques que nous décrirons en 4.2.

Considérons un système discret défini par l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n)$$

où la variable x et le paramètre μ sont réels et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. Supposons que ce système présente une courbe de points fixes $x = g_0(\mu)$ (i.e. $f(\mu, g_0(\mu)) = g_0(\mu)$) suffisamment régulière elle aussi et comportant une valeur de bifurcation μ^* de doublement de période. Précisément, on suppose que, lorsque $\mu < \mu^*$, le point fixe $x = g_0(\mu)$ est attractif et lorsque $\mu > \mu^*$, le point fixe $x = g_0(\mu)$ est répulsif et accompagné d'une orbite de période 2 attractive à une distance de l'ordre $\sqrt{\mu - \mu^*}$ de part et d'autre du point fixe, c.f. figure 11. Cette bifurcation de doublement de période est un analogue de la bifurcation PAH pour les systèmes dynamiques discrets. Elle a lieu par exemple si la fonction f est de classe C^3 , satisfait $-1 < \frac{\partial f}{\partial x}(\mu, g_0(\mu)) < 0$ pour $\mu < \mu^*$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(\mu, g_0(\mu)) < -1$ pour $\mu > \mu^*$, ainsi que les hypothèses génériques que $\frac{\partial^2 f_2}{\partial \mu \partial x}$ et $\frac{\partial^3 f_2}{\partial x^3}$ ne s'annulent pas au point $(\mu^*, g_0(\mu^*))$, où $f_2 : (\mu, x) \mapsto f(\mu, f(\mu, x))$.

Considérons à présent le système où le paramètre μ est remplacé par une variable μ_n qui change lentement à chaque itération. Autrement dit, on introduit un petit paramètre $\varepsilon > 0$ et on considère le système discret *lent-rapide* suivant

$$\begin{cases} \mu_{n+1} &= \mu_n + \varepsilon \\ x_{n+1} &= f(\mu_n, x_n) \end{cases} \quad (32)$$

La courbe des points fixes du système statique $x \mapsto f(\mu, x)$ joue maintenant le rôle d'une courbe lente analogue à celle du cas continu. Dans ce contexte, on montre que, si la fonction f est analytique au voisinage du point de bifurcation $(\mu^*, g_0(\mu^*))$, alors l'orbite continue à longer la courbe lente devenue répulsive sur un intervalle appréciable au lieu de rejoindre la courbe attractive correspondant aux orbites de période 2. Il se trouve que l'hypothèse d'analyticité est essentielle : des contre-exemples existent avec f de classe C^∞ seulement. Il est possible de faire une preuve de ce résultat sans sortir du cadre réel. Cependant, une telle preuve ne montre l'existence d'un retard que localement et les bornes des intervalles ne sont pas optimales. L'utilisation de l'analyse complexe permet d'obtenir de meilleures bornes et fait apparaître un phénomène de butée analogue au cas continu, c.f. plus bas.

Les premiers résultats publiés [2, 3, 27] étaient de nature locale. Deux méthodes ont été mises au point de manière indépendante; toutes deux reposent sur la construction

d'une courbe *quasi-invariante*, c'est-à-dire une courbe d'équation $x = \varphi(\mu)$ satisfaisant l'équation aux différences associée à (32) à exponentiellement petit près. La première méthode [27] est une adaptation au cas discret d'une technique due à A.I. Neishtadt [43], qui consiste à effectuer un grand nombre (de l'ordre de $1/\varepsilon$) de changements de variables. La seconde méthode, due à Claude Baesens, est une analyse Gevrey de la solution formelle [2, 3]. Elle a été améliorée et généralisée par Abir El Rabih dans [24] au cas où x est une variable vectorielle. L'amélioration principale est l'utilisation des normes de Nagumo. Dans la même direction, mentionnons l'article [25], qui contient une étude des systèmes avec un paramètre de contrôle additionnel. Nous décrivons le contenu de ces articles dans la partie 4.6.

Des résultats de nature globale n'ont concerné au départ que le cas très restrictif des systèmes affines en x , *i.e.*

$$f(\mu, x) = a(\mu)x + b(\mu),$$

c.f. [28]. Ils reposent sur une adaptation de la méthode des reliefs de Jean-Louis Callot. Il se trouve que deux fonctions reliefs entrent en jeu : ce sont les parties réelles de primitives des deux déterminations principales du logarithme de la fonction a (rappelons que a prend des valeurs négatives sur l'axe réel). Précisément, en notant \ln la détermination principale du logarithme complexe sur $\mathbb{C} \setminus (-i\mathbb{R}^+)$, les deux reliefs sont donnés par

$$\begin{aligned} R_0 : \mu &\mapsto \operatorname{Re} \left(\int_{\mu^*}^{\mu} \ln a(u) du \right) \text{ et} \\ R_1 : \mu &\mapsto R_0(\mu) + 2\pi \operatorname{Im}(\mu - \mu^*). \end{aligned} \quad (33)$$

Il est montré dans [28] qu'il existe une solution discrète longeant la courbe lente d'une abscisse x_0 à une abscisse $x_n = x_0 + n\varepsilon$ (avec n de l'ordre de $1/\varepsilon$) s'il est possible de joindre x_0 à x_n par deux chemins, l'un descendant le relief R_0 et l'autre le relief R_1 . Comme dans le cas continu, des butées apparaissent sur les lignes de niveau provenant des cols de ces reliefs, qui sont des valeurs de x où $a(x) = 1$.

Ce n'est que longtemps après que sont apparus des résultats de nature globale pour des systèmes non linéaires généraux [29, 23]. La méthode dans [29] repose sur une linéarisation de l'équation autour de la courbe lente, qui fait apparaître la fonction $a : \mu \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\mu, g_0(\mu))$ et les deux reliefs précédents, puis sur le théorème du point fixe, ce qui nécessite de construire un opérateur linéaire résolvant l'équation affine et ayant de bonnes propriétés. Dans [23], la méthode est généralisée pour aborder des équations avec paramètre de contrôle. Dans cette situation, trois reliefs sont nécessaires. Le contenu de l'article [23] est brièvement décrit dans la partie 4.5.

4.2. Exemple.

Plutôt que de présenter plus en détails la théorie générale, nous avons choisi de présenter ce phénomène de retard sur l'exemple de la fameuse famille des applications quadratiques

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (\mu, x) \mapsto \mu x(1 - x),$$

autrement dit de regarder l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n). \quad (34)$$

Il est d'usage de ne considérer cette famille que pour $x \in [0, 1]$ et donc pour $\mu \in [0, 4]$, mais dans cet article nous la considérerons sur \mathbb{R}^2 en entier.

Le *diagramme de bifurcation statique* est constitué d'une première courbe des points fixes $x = 0$, attractive pour $-1 < x < 1$ et répulsive pour $|x| > 1$. Une autre courbe de points fixes est donnée par

$$x = g_0(\mu) := 1 - \frac{1}{\mu}, \tag{35}$$

attractive si $1 < x < 3$ et répulsive si $|x - 2| > 1$. Une première valeur de bifurcation est $\mu = 1$, pour laquelle les deux courbes de points fixes inversent leur stabilité. Une deuxième bifurcation apparaît sur la courbe $x = g_0(\mu)$ pour la valeur $\mu = 3$, où apparaît un dédoublement de période : pour $\mu > 3$, le système présente une orbite périodique de période 2, c'est-à-dire deux valeurs $x_1 \neq x_2$ rangées de part et d'autre de la courbe des points fixes, qui satisfont $x_j = \mu x_i(1 - x_i)$ si $i \neq j$. C'est surtout cette bifurcation qui nous intéressera dans la suite de l'article. On trouve que x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 - \frac{1+\mu}{\mu}x + \frac{1+\mu}{\mu^2} = 0$, d'où

$$x_{1,2} = \frac{1}{2\mu} \left(\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)} \right). \tag{36}$$

Cette orbite est attractive si le produit des dérivées partielles par rapport à x est inférieur à 1 en module, i.e. $-1 < \mu^2(1 - 2x_1)(1 - 2x_2) < 1$, c'est-à-dire $3 < \mu < 1 + \sqrt{6} \approx 3,45$. Pour des valeurs de μ supérieures apparaissent d'autres bifurcations : d'abord une cascade de dédoublements de période, puis d'autres comportements plus chaotiques, c.f. figure 11.

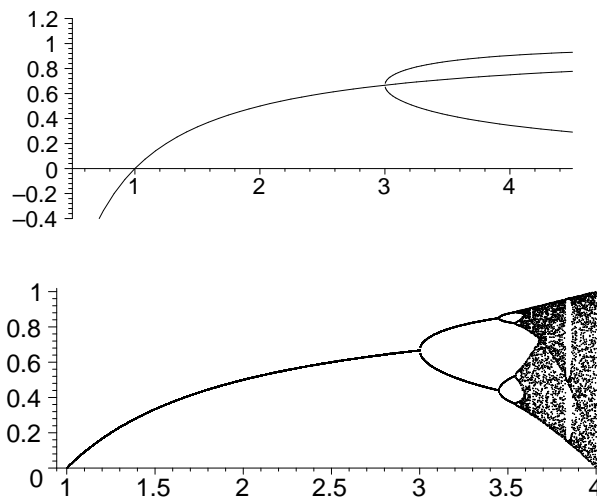


Figure 11. En haut, les deux courbes de points fixes et la courbe des orbites de période 2 de (34). En bas le diagramme complet de bifurcation statique.

Pour la *bifurcation dynamique*, on considère le système

$$\begin{cases} \mu_{n+1} &= \mu_n + \varepsilon \\ x_{n+1} &= \mu_n x_n(1 - x_n) \end{cases} \tag{37}$$

On notera F l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 correspondante, i.e.

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (\mu, x) \mapsto (\mu + \varepsilon, \mu x(1 - x)). \tag{38}$$

Examinons la première bifurcation. Dans le cas “dynamique” où μ varie, l’étude de cette bifurcation ne contient pas toute la difficulté du cas général mais mérite d’être faite car la fonction relief analogue à (33) s’introduit de manière naturelle.

Considérons par exemple la trajectoire par F d’un point de la forme (μ_0, x_0) avec $0 < \mu_0 < 1$ et $x_0 > 0$ pas trop grand, par exemple $0 < x_0 < 1$. Pour N tel que $\mu_N \not\leq 1$ et $n \in \{0, \dots, N\}$, puisque $x_{n+1} = \mu_n x_n (1 - x_n) < \mu_n x_n$, très vite (dès que $n\varepsilon$ est appréciable) x_n prend des valeurs exponentiellement petites, si bien que lorsque μ_n atteint et dépasse la valeur 1, il faudra un certain temps avant que x_n ne “sorte” des exponentiellement petits et ne reprenne finalement des valeurs appréciables. Ceci explique le retard à la bifurcation. Pour faire simple, nous dirons qu’une telle orbite est une *orbite à retard*.

Un élément important dans cette explication est que la courbe lente $x = 0$ est elle-même une *courbe invariante*, i.e. constituée d’une réunion d’orbites. Une “loupe exponentielle” permet alors de décrire le comportement des orbites autour de cette courbe invariante. Nous donnons plus de détails dans la partie 4.3.

Examinons à présent la deuxième bifurcation. A priori, rien ne permet de prédire si une orbite entrée dans le halo de la courbe lente $x = g_0(\mu) = 1 - \frac{1}{\mu}$ avant l’abscisse $\mu = 3$ aura ou non un retard, c’est-à-dire continuera ou non à longer la courbe lente après l’abscisse de bifurcation 3. Dans la partie 4.4, nous présentons un résultat dû à Jean-Louis Callot, qui dit qu’il existe des orbites avec retard. Le fait que toutes les orbites susceptibles d’avoir un retard en ont effectivement un, ce que confirme l’expérimentation, a été une question ouverte pendant longtemps.

Une loupe exponentielle autour d’une courbe invariante permettrait de montrer qu’il existe des orbites avec retard, mais la courbe lente $x = g_0(\mu)$ n’est plus invariante par F et rien ne permet d’affirmer *a priori* qu’il en existe une i -proche de cette courbe lente sur un intervalle contenant 3. D’ailleurs, comme le montre la proposition 4.4, il n’est pas plus facile de montrer qu’il existe une courbe invariante que de trouver des orbites à retard.

La figure 12 montre l’orbite du point initial $\mu_0 = 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$, avec la valeur $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. La seule différence parmi les quatre figures est la précision de calcul utilisée. Cette figure illustre bien le fait que ce phénomène de retard a une sensibilité exponentielle. Son caractère “robuste”, i.e. le fait qu’il se présente pour toutes les orbites dans un système ne dépendant pas d’un paramètre de contrôle additionnel, en est d’autant plus inattendu.

Concernant notre exemple de la famille quadratique, les résultats principaux de [29] sont les suivants.

Théorème 4.1. Soit $\mu^* > 2$ déterminé par $\int_1^{\mu^*} \ln |2 - \mu| d\mu = 0$. Il existe une fonction analytique $\varphi :]1, \mu^*[\rightarrow \mathbb{R}$, solution de l’équation aux différences

$$x(\mu + \varepsilon) = \mu x(\mu)(1 - x(\mu)) \quad (39)$$

telle que $\varphi(\mu)$ est i -proche de $g_0(\mu)$ donné par (35) pour tout μ vérifiant $1 \not\leq \mu \not\leq \mu^*$.

Numériquement on trouve $\mu^* \approx 5,59112$. Compte tenu du caractère introductif du présent article, il nous semble hors de propos de donner une preuve du théorème 4.1. Ce résultat a les conséquences suivantes sur le comportement des orbites du système discret (37).

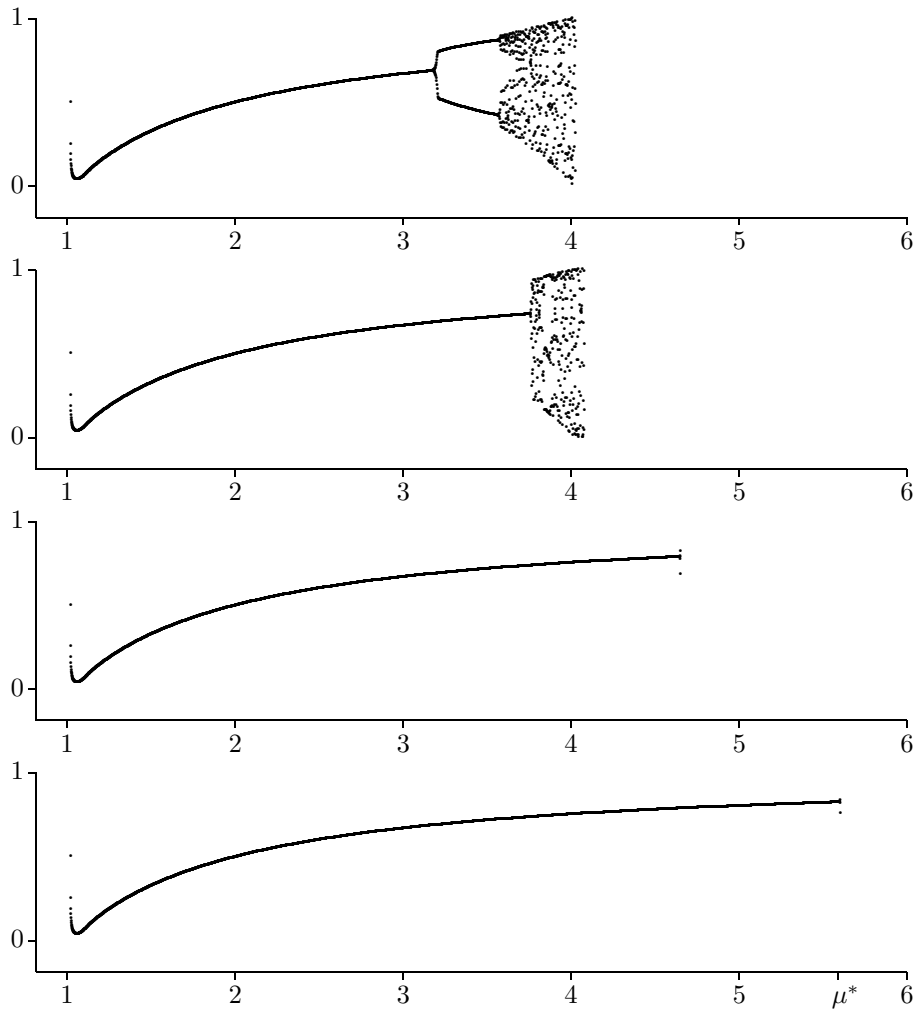


Figure 12. L'orbite du système (37) de condition initiale $\mu_0 = 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$, pour $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, avec des précisions de calcul différentes : successivement 8, 100, 400 et 1000 décimales. La précision n'est suffisante qu'à partir d'environ $\frac{2}{\varepsilon \ln 10} \approx 869$ décimales.

Corollaire 4.2. Soit (μ_0, x_0) une condition initiale standard avec $\mu_0 \in [1, 3[$ et $x_0 \in]0, 1[$, et soit $((\mu_n, x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par (37).

Si $1 \leq \mu_0 \leq 2$, alors cette orbite suit la courbe lente $x = g_0(\mu)$ à partir de $\mu = \mu_0$ et au moins jusqu'à l'abscisse $\ell(\mu_0)$, où la fonction $\ell : [1, 3[\rightarrow]3, \mu^*]$ est définie par

$$\int_{\mu}^{\ell(\mu)} \ln |2 - u| du = 0.$$

Si $\mu_0 \in]2, 3[$ et si $x_0 \neq g_0(\mu_0)$, alors l'abscisse de sortie μ_s est égale à $\ell(\mu_0)$.

La principale différence entre les cas $\mu_0 \leq 2$ et $\mu_0 > 2$ réside dans le "au moins" : dans le premier cas, du fait que le système traverse la valeur superstable $\mu = 2$, le retard

peut éventuellement être allongé par rapport à ce que prévoit la relation entrée-sortie, c.f. remarque 2 ci-dessous après la proposition 4.3.

4.3. Loupe exponentielle et relation entrée-sortie.

Revenons sur la première bifurcation au point $\mu = 1, x = 0$. Nous avons avancé une explication qualitative sur le fait que les orbites de (37) présentent un retard. On peut quantifier ce retard en utilisant une loupe analogue à la loupe exponentielle ayant servi pour le paradigme des canards, c.f. (15). On obtient ainsi le résultat suivant.

Proposition 4.3. *Soit $M_0 = (x_0, \mu_0) \in]0, 1[^2$ standard. L'orbite de M_0 par F entre dans le halo de la courbe lente $x = 0$ à l'abscisse μ_0 et en sort à l'abscisse $\mu_s \in]1, e[$ donnée par la relation entrée-sortie $\int_{\mu_0}^{\mu_s} \ln \mu \, d\mu = 0$.*

IDÉE DE PREUVE. On pose $W_n = \varepsilon \ln x_n$, ce qui donne pour équation de récurrence $W_{n+1} = \varepsilon \ln \mu_n + W_n + \varepsilon \ln(1 - x_n)$, avec pour condition initiale $W_0 = \varepsilon \ln x_0 \simeq 0$ (et avec $\mu_n = \mu_0 + n\varepsilon$). Du fait que x_n prend vite des valeurs exponentiellement petites, une analyse détaillée assure que le terme $\varepsilon \ln(1 - x_n)$ peut être négligé, si bien que la formule donnant W_n est approchée par une somme de Riemann, elle-même approchée par l'intégrale correspondante : si N est tel que x_n est i-petit pour tout n i-grand $n \leq N$, on a

$$W_N = W_0 + \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln \mu_n + \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln(1 - x_n) \simeq \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln \mu_n \simeq \int_{\mu_0}^{\mu_N} \ln \mu \, d\mu. \quad (40)$$

Un raisonnement analogue à celui à la fin de la preuve de la proposition 2.1 permet alors de conclure. □

Remarques. 1. C'est pour simplifier l'énoncé que nous avons supposé x_0 et μ_0 standard. S'ils ne le sont pas, il suffit de remplacer $x_0, \mu_0 \in]0, 1[$ par $0 \leq x_0, \mu_0 \leq 1$ dans les hypothèses et μ_0 par son ombre dans les conclusions.

2. Dans le cas où $\mu_0 \leq 0$, il est possible que l'orbite longe la courbe lente plus longtemps que ne le prévoit la relation entrée-sortie. Ceci est dû au fait que l'orbite traverse une *valeur superstable* pour $\mu = 0$. Si on pose $W_n = \varepsilon \ln |x_n|$, l'estimation (40) s'adapte pour le début :

$$W_N = W_0 + \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln |\mu_n| + \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln(1 - x_n) \simeq \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln |\mu_n| \tau \quad (41)$$

mais, pour pouvoir conclure $W_N \simeq \int_{\mu_0}^{\mu_N} \ln |\mu| \, d\mu$, il est nécessaire de supposer que $\varepsilon \ln \mu_n$ reste i-petit, y compris au moment où μ_n traverse 0. Dans le cas contraire, lorsque μ_0 et ε sont tels que $\mu_0 + n\varepsilon$ est exponentiellement petit pour un certain n , le retard est allongé. C'est un phénomène spécifique des systèmes discrets.

3. Dans le cas général d'un système de la forme (32), muni d'une courbe lente continue $x = g_0(\mu)$, attractive pour $\mu < \mu^*$ et répulsive pour $\mu > \mu^*$, la loupe exponentielle permet de déterminer la relation entrée-sortie (en l'absence de traversée de valeur de superstabilité), à condition d'avoir déjà une orbite à retard. Grâce à cette loupe, on démontre de manière analogue le résultat suivant.

Proposition 4.4. 1. S'il existe une orbite à retard partant d'un point (μ_0, x_0) , alors une orbite partant assez près de la courbe lente et à une abscisse de la forme $\mu_N = \mu_0 + N\varepsilon \lesssim \mu^*$ a aussi un retard. De plus, si μ_N est assez proche de μ^* alors cette deuxième orbite sort du halo de la courbe lente à une abscisse μ_s vérifiant la relation entrée-sortie $\int_{\mu_N}^{\mu_s} a(\mu)d\mu \simeq 0$, où $a : \mu \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\mu, g_0(\mu))$.

2. S'il existe, pour μ dans un voisinage de μ^* , une courbe $x = \varphi(\mu)$ i-proche de la courbe lente et invariante par (32), i.e. telle que $\varphi(\mu + \varepsilon) = f(\mu, \varphi(\mu))$, alors toute orbite partant assez près de la courbe lente à une abscisse $\mu < \mu^*$ présente un retard. Précisément s'il existe φ invariante et i-proche de g_0 sur un intervalle standard $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \mu^* < \beta$ et $\int_{\alpha}^{\beta} a(\mu)d\mu \leq 0$, alors toute orbite entrant dans le halo de la courbe lente à une abscisse $\mu_e \leq \alpha$ en sort à une abscisse $\mu_s \geq \beta$ (ou n'en sort pas du tout).

3. Réciproquement, s'il existe $\alpha < \mu^* < \beta$ standard tels que toute orbite entrant dans le halo de la courbe lente à gauche de α a un retard au moins jusqu'à β , alors il existe une courbe invariante $x = \varphi(\mu)$ i-proche de la courbe lente sur $[\alpha, \beta[$, i.e. $\varphi(\mu) \simeq g_0(\mu)$ pour tout μ vérifiant $\alpha \leq \mu \lesssim \beta$.

IDÉE DE PREUVE. 1. Notons $(\mu_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'orbite à retard et $(\mu_n, \tilde{x}_n)_{n \geq N}$ l'autre orbite. Pour $n \geq N$, on pose $W_n = \varepsilon \ln |\tilde{x}_n - x_n|$; alors $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait une équation de récurrence de la forme $W_{n+1} = W_n + \varepsilon (\ln |a(\mu_n)| + P(\mu_n, x_n, \tilde{x}_n))$ avec $P(\mu_n, x_n, \tilde{x}_n)$ bornée tant que μ_n, x_n et \tilde{x}_n le sont, et $P(\mu_n, x_n, \tilde{x}_n) = \mathcal{O}$ lorsque x_n et \tilde{x}_n sont i-proches de $g_0(\mu_n)$. La suite de la preuve est la même que pour la proposition 4.3.

2. La preuve est similaire en posant $W_n = \varepsilon \ln |x_n - \varphi(\mu_n)|$.

3. On définit φ arbitrairement sur un intervalle de longueur ε , par exemple $\varphi = g_0$ sur $[\mu_0, \mu_0 + \varepsilon[$ avec $\mu_0 = \alpha$, puis on utilise l'équation aux différences $\varphi(\mu + \varepsilon) = f(\mu, \varphi(\mu))$ pour définir φ sur les intervalles $[\mu_0 + n\varepsilon, \mu_0 + (n+1)\varepsilon[$, $n \geq 1$. Puisque toutes les orbites partant d'un point du graphe de φ sur $[\mu_0, \mu_0 + \varepsilon[$ ont un retard au moins jusqu'en β , c'est que ce graphe reste i-proche du graphe de g_0 sur $[\alpha, \beta[$. □

Remarque. Concernant la construction d'une courbe invariante dans le point 3, on peut aussi s'arranger pour obtenir une fonction φ continue, ou même C^∞ . Il est moins clair qu'il existe des fonctions φ analytiques, mais cela n'a pas d'importance pour décrire le comportement des orbites discrètes. Curieusement les méthodes de construction de courbe invariante i-proche de la courbe lente pour μ dans un voisinage de μ^* nécessitent l'utilisation d'analyse complexe et aboutissent à des courbes analytiques, comme nous l'avons vu dans le théorème 4.1.

4.4. Systèmes oscillants du plan.

Dans le cas d'une bifurcation de doublement de période, un argument de Jean-Louis Callot permet de montrer qu'il existe des orbites à retard. Pour simplifier l'exposé de cet argument, nous le présentons sur notre exemple de la famille quadratique, mais le même argument s'adapte à tout système continu du plan de la forme (32) et présentant des oscillations (i.e. $a(\mu^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mu^*, g_0(\mu^*)) = -1$ dans le cas dérivable). A titre de comparaison, le théorème 4.1, qui dans le cas de notre exemple montre que toutes les orbites partant un peu avant le point de bifurcation ont un retard, ne se généralise qu'aux équations analytiques.

Proposition 4.5. *Le système (37) a des orbites à retard autour du point de bifurcation $(3, \frac{2}{3})$.*

IDÉE DE PREUVE (Jean-Louis Callot). Soit $M_0 = (\mu_0, x_0)$ avec $1 < \mu_0 < 3$ et par exemple $x_0 = g_0(\mu_0)$. Considérons l'orbite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de M_0 par F donnée par (38) et supposons que cette orbite n'a pas de retard. Pour n tel que $\mu_n < 1 + \sqrt{6}$, puisque l'orbite de période 2 est attractive, M_n est i-proche d'une des deux branches et M_{n+1} est i-proche de l'autre branche.

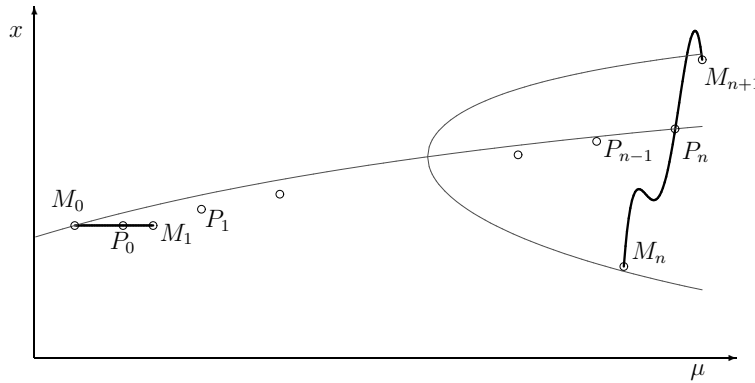


Figure 13. *Construction d'une orbite ayant un retard à partir d'une orbite n'en ayant pas.*

A présent, soit T_0 le segment $[M_0, M_1]$ et soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des itérés de ce segment par F , i.e. $T_{k+1} = F(T_k)$, c.f. figure 13. Alors T_n est le graphe d'une fonction continue sur $[\mu_n, \mu_{n+1}]$ et joignant M_n et M_{n+1} , donc coupant la courbe lente en un point P_n , image par F^n d'un point $P_0 = (\tilde{\mu}_0, \tilde{x}_0) \in T_0$. Puisque la courbe lente est attractive à gauche du point de bifurcation et répulsive à sa droite, l'orbite $(\tilde{\mu}_k, \tilde{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de P_0 longe la courbe lente pour $\mu_k < 3$ et aussi pour $\tilde{\mu}_k > 3$. Une étude plus approfondie, utilisant le fait que f est de classe C^3 , montre que cette orbite est i-proche de la courbe lente aussi pour les k tels que $\tilde{\mu}_k \simeq 3$. □

4.5. Canards discrets.

Dans le cas d'une bifurcation sans oscillations dite *tangente* (c'est-à-dire $a(\mu^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mu^*, g_0(\mu^*)) = 1$ dans le cas dérivable), le retard à la bifurcation n'a généralement pas lieu pour un système fixé. En revanche il peut avoir lieu pour une famille de systèmes dépendant d'un paramètre de contrôle supplémentaire. D'un certain point de vue, la bifurcation de dédoublement de période correspond à la bifurcation de Hopf du cas continu, alors que la bifurcation tangente correspond à la situation des canards et à la surstabilité ².

2. On peut voir cette analogie en se rappelant que la stabilité d'un équilibre d'un système différentiel est fonction des parties réelles des valeurs propres (l'équilibre est stable si $\text{Re}(\lambda) < 0$) alors que celle d'un système discret est fonction de leur module (stable si $|\lambda| < 1$). Une valeur de surstabilité correspond dans le premier cas à $\lambda = 0$ et dans le deuxième à $\lambda = 1$. Une valeur de bifurcation sans surstabilité correspond dans le premier cas à $\text{Re}(\lambda) = 0$ et $\lambda \neq 0$ et dans le deuxième à $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$.

Un paradigme de la bifurcation tangente est le système

$$\begin{cases} \mu_{n+1} = \mu_n + \varepsilon \\ x_{n+1} = \mu_n x_n + \alpha \end{cases} \quad (42)$$

où α est un paramètre “de contrôle” réel (i-petit). La courbe lente est l’axe des μ et la valeur de bifurcation est $\mu^* = 1$. Etant donné $M_0 = (\mu_0, x_0)$ avec $0 \lesseqgtr \mu_0 \lesseqgtr 1$ et x_0 appréciable, on constate que l’orbite de M_0 a un retard si et seulement si α est exponentiellement petit. En effet le calcul donne

$$x_n = x_0 \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k + \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{l=k+1}^{n-1} \mu_l$$

et on vérifie que les produits $\prod_{l=k+1}^{n-1} \mu_l$ peuvent s’écrire $\exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\mu_k}^{\mu_n} \ln \mu d\mu + \mathcal{O} \right) \right\}$.

Une analyse de ces termes montre alors que l’orbite de M_0 sortira du halo de la courbe lente à l’abscisse $\mu_s > 1$ si et seulement si le max de $\int_{\mu_0}^{\mu_s} \ln \mu d\mu$ et de $\varepsilon \ln |\alpha| + \int_1^{\mu_s} \ln \mu d\mu$ est égal à 0.

A première vue, une généralisation de cet exemple est une banale adaptation de la théorie dans le cas continu dépourvue de surprises. Cependant un examen plus attentif montre que ce n’est pas le cas et fait apparaître de nouvelles questions. Précisément, considérons un système

$$\begin{cases} \mu_{n+1} = \mu_n + \varepsilon \\ x_{n+1} = f(\mu_n, x_n, \alpha) \end{cases} \quad (43)$$

avec f de classe C^1 (pour simplifier l’exposition), une courbe lente $x = g_0(\mu)$ continue au voisinage d’une valeur de bifurcation tangente μ^* lorsque $\alpha = \alpha^*$, (c’est-à-dire $a(\mu) := \frac{\partial f}{\partial x}(\mu, g_0(\mu), \alpha^*) < 1$ si $\mu < \mu^*$, $a(\mu) > 1$ si $\mu > \mu^*$) et ajoutons une hypothèse de transversalité sur α , par exemple $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\mu^*, g_0(\mu^*), \alpha^*) \neq 0$. Dans ce contexte, une application du théorème des valeurs intermédiaires permet de montrer le résultat suivant.

Etant donné un point de départ (μ_0, x_0) avec $\mu_0 < \mu^$, il existe une valeur de α i-proche de α^* pour laquelle l’orbite partant de (μ_0, x_0) a un retard.*

On peut aussi montrer que les valeurs de α réalisant ce retard sont dans un “intervalle” de largeur exponentiellement petite. Néanmoins, contrairement au cas continu, ces valeurs de α dépendent *a priori* de la condition initiale. Ce premier résultat ne généralise donc pas ce qu’on observe sur le paradigme. En effet l’exemple (42) a la particularité d’avoir une courbe invariante “évidente” pour la valeur $\alpha = 0$: la courbe lente $x = 0$. Il s’ensuit que, quelle que soit l’abscisse de départ $\mu_0 < 0$, ce sont les mêmes valeurs du paramètre pour lesquelles l’orbite aura un retard : les valeurs de α exponentiellement petites.

Revenons au cas général et appelons *courbe canard* une courbe $x = \varphi(\mu)$ invariante par (32), i.e. telle que $\varphi(\mu + \varepsilon) = f(\mu, \varphi(\mu))$, et i-proche de la courbe lente dans un voisinage de μ^* . Dans le cas général, il n’existe pas *a priori* de valeur du paramètre α pour laquelle on aurait une courbe canard, évidente ou non, En d’autres termes, rien ne prouve que la même valeur du paramètre α soit une “valeur à canard” pour toute abscisse de départ $\mu_0 < \mu^*$.

Cette théorie des canards discrets a été développée par Abir El Rabih. Ses résultats montrent qu'effectivement il n'existe pas toujours de courbe canard, et qu'une preuve d'existence nécessite des hypothèses d'analyticité de la fonction f . Dans [23], l'auteur étudie des équations de la forme (43), avec f de la forme $f(\mu, x, \alpha) = \mu x + \varepsilon g(\mu, x, \alpha)$ et avec une hypothèse de transversalité de g par rapport à α . L'article démontre l'existence de courbes canards pour certaines valeurs de α lorsque g est analytique par rapport à μ et x . De plus ce résultat peut être qualifié de "semi-global" : la construction d'une courbe canard utilise trois "reliefs" analogues à ceux de (33) et l'examen de ces reliefs permet de préciser un domaine naturel d'existence de la courbe canard. C'est un domaine accessible dans le sens suivant : pour chacun des trois reliefs R_j , $j = 0, 1, 2$, il existe un point x_j sur la frontière du domaine tel que tout point du domaine peut être joint à partir de x_j par un chemin descendant R_j .

L'article présente aussi un exemple (avec g non analytique en μ) dans lequel il n'y a pas de courbe canard, pour aucune valeur de α . Dans cet exemple, il y a bien des valeurs de α pour lesquelles certaines orbites ont un retard, mais ces valeurs de α dépendent de la condition initiale.

4.6. En dimension supérieure.

Le problème de retard à la bifurcation des systèmes discrets a aussi été étudié dans le cas où x est une variable vectorielle. Mentionnons dans cette direction les travaux d'Abir El Rabih [24] et d'Abir El Rabih et Reinhard Schäfke [25]. L'article [24] contient une étude de systèmes de la forme (avec les notations changées par soucis de cohérence)

$$x(\mu + \varepsilon) = F(\mu, x(\mu))$$

avec l'hypothèse $\frac{\partial F}{\partial x} - I$ et $\frac{\partial F}{\partial x}$ inversibles au point de bifurcation. L'auteur démontre l'existence d'une solution formelle unique et le caractère Gevrey de cette solution. Dans une certaine mesure, il s'agit d'une généralisation à x vectoriel des travaux de C. Beasens [2], avec une amélioration substantielle : l'utilisation des normes de Nagumo simplifie beaucoup les preuves. Les techniques sont analogues à celles de [12], avec en plus l'utilisation d'inverses d'opérateurs aux différences inspirés de ceux de [29]. L'absence de point tournant évite d'avoir à recourir à un paramètre de contrôle supplémentaire et il n'y a pas de canard à proprement parler.

Dans [25], les auteurs étudient des systèmes de la forme $x(\mu + \varepsilon) = F(\mu, x(\mu), \alpha)$ avec $\mu \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}^n$ et un paramètre de contrôle $\alpha \in \mathbb{C}^m$ et l'hypothèse de transversalité $(\frac{\partial F}{\partial x} - I, \frac{\partial F}{\partial \alpha})$ de rang maximal au point de bifurcation. Il s'agit donc d'une étude des véritables canards.

Les deux références [24, 25] apportent des réponses relativement complètes pour des systèmes discrets généraux avec x vectoriel, pour ce qui concerne l'étude locale. En revanche beaucoup de questions restent en suspens pour une étude "semi-globale" dans l'esprit de ce qui est fait dans [23, 29].

A. Appendice : petit lexique d'analyse non standard.

Pour le lecteur qui n'est pas familier avec l'analyse non standard, nous donnons ci-dessous un bref descriptif. Nous tenons à préciser que ce descriptif n'est pas suffisant pour

comprendre d'autres articles utilisant des méthodes non standard. En effet la seule source de non standard dans notre étude est l'introduction d'un nombre infiniment petit ε ; nous n'utilisons donc qu'une infime dose de raisonnements non standard. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à des sources plus complètes, par exemple à l'article introductif [34] ou au livre [22].

L'analyse non standard fait la distinction entre des objets dits *standard*, pouvant être définis en n'utilisant que le vocabulaire classique (justement ceux qui n'ont pas besoin dans leur définition du mot "standard" ou de l'un de ses dérivés "i-grand" ("infiniment grand"), "i-petit" etc.) et des objets dits *non standard*. L'analyse non standard fait l'hypothèse que de tels objets existent.

Des objets non standard particuliers que nous utilisons sont les nombres réels *i-grands*, qui sont plus grands que tout entier standard, et leurs inverses qui sont *i-petits* (symbole \oslash). Un nombre réel est dit *limité* s'il n'est pas i-grand ; un nombre complexe est dit *limité* si son module est limité. Le symbole pour des nombres limités est \mathbb{R} . Le symbole \mathbb{R} signifie *appréciable*, i.e. un nombre qui n'est ni i-petit ni i-grand. Le symbole \simeq signifie *i-proche de*, i.e.

$$x \simeq y \Leftrightarrow x - y = \oslash.$$

La notation $\alpha \lesssim 1$ signifie $\alpha < 1$ et α non i-proche de 1. Elle se lit : " α est appréciablement inférieur à 1". Le *halo* de x est la collection des réels qui sont i-proches de x . Le *halo* d'une partie A de \mathbb{R}^2 est la collection des points de \mathbb{R}^2 , limités ou non limités, qui sont i-proches d'un point de A . Nous aurons aussi besoin de la notion d'*ombre* d'un nombre réel limité : si $x \in \mathbb{R}$ est limité, alors on montre que le halo de x contient un et un seul nombre réel standard. Ce nombre est appelé *l'ombre de x* ; il est noté ${}^{\circ}x$.

Une différence notable entre l'approche non standard et l'approche classique de la perturbation singulière concerne la nature du petit paramètre ε . Dans l'approche classique, c'est un paramètre "variable" et les solutions de (18) sont des familles de fonctions tandis que dans l'approche non standard, ε est fixé i-petit.

Dans cet article, nous sommes amenés à étudier des équations différentielles singulièrement perturbées de la forme

$$\varepsilon y' = \Phi(x, y, \varepsilon) \quad (44)$$

avec Φ standard. Dans ce contexte, une *courbe lente* est le graphe d'une fonction standard y_0 vérifiant $\Phi(x, y_0(x), 0) = 0$. Etant donnés a_0 et b_0 standard, on dit qu'une solution y de (44) *longe la courbe lente de a_0 à b_0* s'il existe a et a' i-proches de a_0 , b et b' i-proches de b_0 tels que $y(a) \neq y_0(a_0)$, $y(b) \neq y_0(b_0)$ et pour tout $x \in [a', b']$, $y(x) \simeq y_0(x)$. Dans cette situation, on dit aussi que la solution *entre dans le halo de la courbe lente à l'abscisse d'entrée a_0 et quitte ce halo à l'abscisse de sortie b_0* .

B. Bibliographie

- [1] V.I. ARNOL'D, *Equations différentielles ordinaires*, MIR, Moscou, 1974.
- [2] C. BAESENS, « Courbes invariantes d'une application lente-rapide analytique et retard à la bifurcation », *C. R. Acad. Sci.*, Série I, vol. 317, 1109-1114, 1993.
- [3] C. BAESENS, « Gevrey series and dynamic bifurcations for analytic slow-fast mappings », *Nonlinearity*, vol. 8, 179-201, 1995.
- [4] E. BENOÎT ED., *Dynamic Bifurcations*, Lect. Notes Math. 1493, 1991.

- [5] E. BENOÎT, « Relation d'entrée-sortie », *C. R. Acad. Sci.*, Série I, n° 293, 293-296, 1981.
- [6] E. BENOÎT, « Tunnels et entonnoirs », *C. R. Acad. Sci.*, Série I, n° 292, 283-286, 1981.
- [7] E. BENOÎT, J.-L. CALLOT, F. DIENER, M. DIENER, « Chasse au canard », *Collect. Math.*, vol. 31, n° 1-3, 37-119, 1981.
- [8] E. BENOÎT, A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, G. WALLET, « Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes-rapides à point tournant », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, vol. 7, n° 4, 627-658, 1998.
- [9] N. BERGLUND, « Dynamic Bifurcations : Hysteresis, Scaling Laws and Feedback Control », *Progress of Theoretical Physics*, Supplement No.139, 325-336, 2000.
- [10] J.-L. CALLOT, « Champs lents-rapides complexes à une dimension lente », *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, vol. 26, 149-173, 1993.
- [11] J.-L. CALLOT, F. DIENER, M. DIENER, « Le problème de la "chasse au canard" », *C. R. Acad. Sci.*, Série I, vol. 286, 1059-1061, 1978.
- [12] M. CANALIS-DURAND, J.-P. RAMIS, R. SCHÄFKE, Y. SIBUYA, « Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations », *J. Reine Angew. Math.*, vol. 518, 95-129, 2000.
- [13] B. CANDELPERGHER, « "Valeurs à canards" pour l'équation : $\varepsilon z'(t) = t(z(t) - f(t)) + a(\varepsilon)$ », prépublication Nice, 1990.
- [14] B. CANDELPERGHER, F. DIENER AND M. DIENER, « Retard à la bifurcation : du local au global », in *Bifurcations of Planar Vector Fields proceedings of the Luminy conference*, JP François and R. Roussarie Ed., *Lect. Notes Math.*, vol. 1455, Springer, Berlin, 1-19, 1990.
- [15] P. CARTIER, « Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard », *Sém. Bourbaki 580*, Astérisque vol. 92-93, Soc. Math. France, 21-44, 1982.
- [16] E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON, *Theory of differential equations*, New York, McGraw-Hill, 1955.
- [17] P. DE MAESSCHALCK, F. DUMORTIER, « Canard solutions at non-generic turning points », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 358, n° 5, 2291-2334, 2006.
- [18] P. DE MAESSCHALCK, « Ackerberg-O'Malley resonance in boundary value problems with a turning point of any order », *Com. Pure Appl. Anal.*, vol. 6, n° 2, 311-333, 2007.
- [19] P. DE MAESSCHALCK, « Gevrey properties of real planar singularly perturbed systems », *J. Differential Equ.*, vol. 238, n° 2, 338-365, 2007.
- [20] F. DIENER, « Les équations $\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x}^{[s]} + x = a$ », *Collect. Math.*, vol. 29, 217-247, 1978.
- [21] F. DIENER ET M. DIENER, « Sept formules relatives aux canards », *C. R. Acad. Sci.*, Série I, vol. 297, 577-580, 1983.
- [22] F. DIENER, G. REEB, *Analyse Non Standard*, Hermann, Paris, 1989.
- [23] A. EL RABIH, « Canards solutions of difference equations with small step size », *J. Difference Equ. Appl.*, vol. 9, n° 10, 911-931, 2003.
- [24] A. EL RABIH, « Existence of local analytic solutions for systems of difference equations with small step size », *Funkcial. Ekvac.*, vol. 48, n° 2, 313-330, 2005.
- [25] A. EL RABIH, R. SCHÄFKE, « Overstable analytic solutions for non-linear systems of difference equations with small step size containing an additional parameter », *J. Difference Equ. Appl.*, vol. 11, n° 3, 183-213, 2005.
- [26] THOMAS FORGET, Thèse de Doctorat, La Rochelle, 2007.
- [27] A. FRUCHARD, « Canards et râteaux », *Ann. Inst. Fourier*, vol. 42, n° 1-2, 825-855, 1992.
- [28] A. FRUCHARD, « Sur l'équation aux différences affine du premier ordre unidimensionnelle », *Ann. Inst. Fourier*, vol. 46, n° 1, 139-181, 1996.

- [29] A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, « Bifurcation delay and difference equations », *Nonlinearity*, vol. 16, 2199-2220, 2003.
- [30] A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, « Overstability and resonance », *Ann. Inst. Fourier*, vol. 53, n° 1, 227-264, 2003.
- [31] A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, « Développements combinés et perturbation singulière », manuscrit, 2008.
- [32] A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, « Exceptional complex solutions of the forced van der Pol equation », *Funkcialaj Ekvacioj*, vol. 42, n° 2, 201-223, 1999.
- [33] A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, « Analytic Theory of Singular Perturbation », Ouvrage en cours de rédaction, 2009.
- [34] V. GAUTHERON, E. ISAMBERT, « Lire l'Analyse Non Standard », *Bull. Belgian Math. Soc.*, supplement "Nonstandard Analysis" 29-49, 1996.
- [35] R. KAPRAL, P. MANDEL, « Bifurcation structure of the nonautonomous quadratic map », *Phys. Review A*, vol. 32, n° 2, 1076-1081, 1985.
- [36] A. LIÉNARD, « Etude des oscillations entretenues », *Revue générale d'électricité*, vol. 23, n° 22, 901-954, 1928.
- [37] C.H. LIN, « The sufficiency of Matkowsky-condition in the problem of resonance », *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 278, n° 2, 647-670, 1983.
- [38] C. LOBRY, « Dynamic Bifurcations », in *Dynamic Bifurcations*, E. Benoît Ed., Lect. Notes Math. vol. 1493, 1-13, 1991.
- [39] C. LOBRY, « À propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des "bifurcations dynamiques" », *Ann. Inst. Fourier*, vol. 42, n° 1-2, 327-351, 1992.
- [40] C. LOBRY, T. SARI, S. TOUHAMI, « On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems », *Electron. J. Diff. Eq.*, vol. 1998, n° 19, 1-22, 1998.
- [41] C. LOBRY, G. WALLET, « La traversée de l'axe imaginaire n'a pas toujours lieu là où l'on croit l'observer », *Mathématique finitaires & analyse non standard*, Publ. Math. Univ. Paris VII n° 31, 45-51, 1989.
- [42] P. MANDEL, T. ERNEUX, « Laser Lorenz equations with a time-dependent parameter », *Phys. Review Letters*, vol. 53, n° 19, 1818-1820, 1984.
- [43] A.I. NEISHTADT, « Persistence of stability loss for dynamical bifurcations », *Differntial'nye Uraveniya*, vol. 23, 2060-2067 et vol. 24, 226-233, 1988.
- [44] E. NELSON, « Internal Set Theory : a new approach to nonstandard analysis », *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 83, n° 6, 1165-1198, 1977.
- [45] A. ROBINSON, *Nonstandard Analysis*, North-Holland, 1967.
- [46] M.A. SHISHKOVA, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 209, n° 3, 573-579, 1973.
- [47] Y. SIBUYA, « Sur réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, vol. 1, n° 7, 527-540, 1958.
- [48] A. N. TIKHONOV, « Systems of differential equations containing a small parameter in the derivatives », *Mat. Sb.*, vol. 31, n° 3, 575-586, 1952.
- [49] A. TROESCH, « Lorsque les canards naissent dans les tourbillons », in M. Diener et G. Wallet éd., *Mathématiques Finitaires et Analyse non Standard*, Luminy 1985, *Publications Mathématiques de l'Université de Paris 7*, vol. 31, n° 2, 67-90, 1989.
- [50] B. VAN DER POL, « Relaxation oscillations », *Philos. Mag.*, vol. 2, n° 7, 978-992, 1926.
- [51] G. WALLET, « Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2 », *Bull. Soc. Math. France*, vol. 122, n° 2, 185-208, 1994.
- [52] G. WALLET, « Entrée-sortie dans un tourbillon », *Ann. Inst. Fourier*, vol. 36, n° 4, 157-184, 1986.

[53] G. WALLET, « Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension un », *Ann. Inst. Fourier*, vol. 40, n° 3, 557-595, 1990.

[54] G. WALLET, « Overstability in Arbitrary Dimension », in *Dynamic Bifurcations*, E. Benoît Ed., Lect. Notes Math., vol. 1493, 57-70, 1991.

[55] G. WALLET, « De la bifurcation retardée à la surstabilité ou du différentiable réel à l'analytique complexe », Thèse d'Etat, Poitiers, 1991.

[56] W. WASOW, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New York, 1965.

Table des matières

1 Introduction.	432
1.1 Le problème.	432
1.2 A propos du contenu de l'article.	432
2 Les canards de l'équation de van der Pol forcée.	433
2.1 L'équation originelle.	433
2.2 L'équation de van der Pol forcée.	435
2.3 Les canards ont la vie brève.	440
2.4 Le paradigme.	441
2.5 Résumé.	444
3 Bifurcations de type Hopf statique et dynamique.	444
3.1 La bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf.	444
3.2 Bifurcation dynamique.	445
3.3 Les tourbillons de Claude Lobry et Guy Wallet.	447
3.4 La méthode des reliefs de Jean-Louis Callot.	449
3.5 Commentaires.	451
3.6 Equations analytiques par rapport à ε	453
3.7 Travaux en cours.	454
4 Systèmes dynamiques discrets.	455
4.1 Introduction.	455
4.2 Exemple.	456
4.3 Loupe exponentielle et relation entrée-sortie.	460
4.4 Systèmes oscillants du plan.	461
4.5 Canards discrets.	462
4.6 En dimension supérieure.	464
A Appendice : petit lexique d'analyse non standard.	464
B Bibliographie	465