



**HAL**  
open science

## Parameters identification: an application to the Richards equation

Pierre Ngnepieba, François Xavier Le Dimet, Alexis Boukong, Gabriel  
Nguetseng

► **To cite this version:**

Pierre Ngnepieba, François Xavier Le Dimet, Alexis Boukong, Gabriel Nguetseng. Parameters identification: an application to the Richards equation. *Revue Africaine de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées*, 2002, Volume 1, 2002, pp.127-157. 10.46298/arima.1833 . hal-01261699

**HAL Id: hal-01261699**

**<https://inria.hal.science/hal-01261699>**

Submitted on 25 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

.....

# Identification de paramètres □ une application à l'équation de Richards

Pierre Ngnepieba\* — François Xavier Le Dimet\* — Alexis Boukong\*\*  
— Gabriel Nguetseng\*\*\*

Université Joseph Fourier  
Projet IDOPT, LMC-IMAG (UJF) BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France  
{Pierre.Ngnepieba, François-Xavier.Ledimet}@imag.fr

\*\* Université de Dschang, Faculté d'Agronomie et de Sciences Agricoles  
BP 222 Dschang, Cameroun

\*\*\* Université de Yaoundé 1, Faculté des Sciences - BP 812 Yaoundé, Cameroun  
ngnets@uycdc.uninet.cm

.....

**RÉSUMÉ.** La modélisation inverse est devenue une approche fréquemment utilisée pour l'estimation des paramètres en hydrogéologie. Fondamentalement cette technique est basée sur les méthodes de contrôle optimal qui nécessitent des observations et un modèle pour le calcul des dérivées du premier ordre. Le modèle adjoint du modèle de Richards est construit pour obtenir le gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres de contrôle. Les paramètres hydrodynamiques sont pris comme paramètres de contrôle; leurs valeurs optimales sont trouvées en minimisant la fonction coût ceci en utilisant un algorithme de minimisation de type descente quasi-Newton. Cette approche est utilisée pour l'identification des paramètres hydrodynamiques sur un modèle d'écoulement souterrain en zone non saturée, ainsi que les études de sensibilité du modèle.

**ABSTRACT.** Inverse modeling has become a standard technique for estimating hydrogeologic parameters. These parameters are usually inferred by minimizing the sum of the squared differences between the observed system state and the one calculated by a mathematical model. Since some hydrodynamics parameters in Richards model cannot be measured, they have to be tuned with respect to the observation and the output of the model. Optimal parameters are found by minimizing cost function and the unconstrained minimization algorithm of the quasi-Newton limited memory type is used. The inverse model allows computation of optimal scale parameters and model sensitivity.

**MOTS-CLÉS** □ modèle adjoint, fonction coût, infiltration cumulée, infiltration cumulée observée, identification, contrôle optimal.

**KEYWORDS:** adjoint model, cost fonction, cumulative infiltration, observed cumulative infiltration, identification, optimal control.

---

## 1. Introduction

Le processus physique de l'eau pénétrant dans le sol à partir de sa surface est généralement connu sous le nom d'infiltration. L'infiltration est une composante primordiale dans le cycle hydrologique. Il y a un lien étroit entre la quantité d'eau infiltrée dans le sol et son processus de redistribution dans les zones non saturées. Cette redistribution d'eau dépend des conditions d'humidité, de la pression d'eau et de la perméabilité en zone non saturée.

L'écoulement de l'eau dans le sol est caractérisée par des paramètres qui prennent en compte le type de sol (paramètres hydrodynamiques), la condition initiale et les conditions aux limites du sol considéré. Or ces paramètres sont, dans la plupart des cas, très peu connus car le complexe sol-eau ne présente pas de propriétés et de conditions d'équilibre stable. Ceci est dû à sa très grande variabilité spatio-temporelle. L'étude du problème d'identification des paramètres hydrodynamiques entre dans le cadre ce travail.

Notre approche est centrée sur l'assimilation variationnelle de données fondée sur la théorie du contrôle optimal J. L. Lions [18], Le Dimet et Talagrand [6] par opposition aux techniques d'assimilation de données stochastiques (filtre de Kalman [29]). Lesquelles techniques ont, depuis de nombreuses années pris une importance considérable en géophysique et se sont montrées très efficaces soit pour tester les modélisations des processus physiques pour une bonne compréhension des phénomènes, soit pour déterminer les états du système étudié pour une amélioration de la prévision numérique.

Le travail est organisé comme suit : dans la section 2, nous présentons la physique liée au problème ceci afin de pouvoir définir le modèle et poser le problème d'identification, ensuite, nous présentons dans un cadre plus général le principe de l'assimilation variationnelle de données en utilisant la technique de contrôle optimal qui sera utilisée pour définir le système d'optimalité dans le cadre continu et discret. Dans la section 3 nous présentons les résultats numériques sur deux types de données : des données d'infiltration analytiques simulées à partir du modèle direct afin de tester la capacité du modèle inverse à identifier les paramètres connus, en particulier ceux qui ont servi à générer les données. Ensuite, nous utiliserons les données d'un Andosol récoltées sur un site de l'ouest du Cameroun. Dans la section 4 nous discuterons du coût de méthode.

---

## 2. Méthodologie

Le but de notre étude est l'identification des paramètres hydrodynamiques dans un modèle hydrologique monodimensionnel d'infiltration de l'eau dans le sol. Avant la résolution mathématique du problème, regardons la physique liée au modèle hydrologique que nous considérerons.

## 2.1. Equations générales de l'écoulement en une dimension d'espace

La description mathématique de l'écoulement vertical est obtenue en considérant d'une part l'équation dite de continuité (1) qui exprime la conservation de la masse d'eau dans un volume élémentaire représentatif du sol. Elle s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (1)$$

où  $\theta$  est la teneur en eau volumique (volume d'eau par volume de sol),  $q$  est la densité de flux volumique,  $t$  est le temps et  $z$  est la profondeur mesurée positivement vers le bas, et d'autre part l'équation (2) de conservation de la quantité de mouvement (équation de DARCY, 1856) :

$$q = K(\theta) \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (2)$$

où  $H$  est la charge hydraulique.

La loi de Darcy permet de décrire les écoulements dans un milieu poreux saturé : elle exprime la proportionnalité entre le flux d'eau, ou vitesse de filtration  $q$  traversant une colonne et l'opposé du gradient de charge hydraulique. Bien qu'elle fut conçue à l'origine pour les écoulements en milieux saturés, elle fut étendue par Richards en 1931 à l'écoulement en zone non saturée en stipulant que la constante de proportionnalité  $K$  appelée conductivité hydraulique est fonction de la teneur en eau du sol.

La combinaison de ces deux équations donne l'équation de la dynamique qui à une dimension prend la forme (équation de Richards (3))

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) \left( \frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right], \quad (3)$$

dans laquelle  $h$  est la pression relative par rapport à la pression atmosphérique de l'eau exprimée en hauteur d'eau et  $H$  définie par  $H = h(\theta) - z$ .

L'introduction du coefficient de diffusivité (Childs et Collis-Georges en 1950),

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta}, \quad (4)$$

permet d'exprimer l'équation (3) sous la forme de  $\theta$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right]. \quad (5)$$

L'équation (5) est appelée équation de Fokker-Planck. Cette équation ne peut-être utilisée en milieu saturé. En effet lorsqu'une partie du sol est saturée (teneur en eau à saturation

naturelle  $\theta = \theta_s = cte$ ), la pression de l'eau dans le sol continue à augmenter, donc la diffusivité devient infinie. Pour un milieu non-saturé, l'équation (3) est exprimée en fonction de la pression effective de l'eau  $h$  en introduisant le concept de capacité capillaire (Richards en 1931)

$$C(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h}, \quad (6)$$

et l'équation (3) prend la forme de :

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(h) \left( \frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right]. \quad (7)$$

Cette équation, dite de Richards, est une équation aux dérivées partielles non-linéaire. Les fonctions  $C(h)$  et  $K(h)$  sont définies de façon empirique par [14] :

$$C(h) = \begin{cases} \frac{\theta_s(2-n)}{h_g} \left( \frac{h}{h_g} \right)^{n-1} \left[ 1 + \left( \frac{h}{h_g} \right)^n \right]^{\frac{2}{n}-2}, & \text{si } h < 0. \\ C(h) = 0, & \text{si } h \geq 0 \text{ (cas saturé)}. \end{cases} \quad (8)$$

$$K(h) = \begin{cases} K_s \left[ 1 + \left( \frac{h}{h_g} \right)^n \right]^{m(\frac{2}{n}-1)}, & \text{si } h < 0. \\ K(h) = K_s, & \text{si } h \geq 0 \text{ (cas saturé)}. \end{cases} \quad (9)$$

Les différents paramètres désignent respectivement :

- $\theta_s$  la teneur en eau à saturation naturelle,
- $K_s$  la conductivité hydraulique à saturation inaturelle,
- $m$  et  $n$  les paramètres liés à la structure du sol,
- $h_g$  le point d'inflexion de la courbe de rétention  $h = f(\theta)$  définie par

$$f(x) = \theta_s \left[ 1 + \left( \frac{x}{h_g} \right)^n \right]^{\frac{2}{n}-1}.$$

La relation (9) peut également s'exprimer en fonction de la teneur eau  $\theta$  par

$$K(\theta) = K_s \left( \frac{\theta}{\theta_s} \right)^m.$$

En combinant les deux modèles de description du sol, l'équation de la dynamique et les conditions initiales et aux limites on obtient soit une équation en  $\theta$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right] \\ \theta(0, z) = \theta_{ini}(z) \\ \theta(t, 0) = \theta_{surf}(t) \\ \theta(t, Z) = \theta_{fond}(t) \end{cases} \quad (10)$$

soit une équation en  $h$  :

$$\begin{cases} C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(h) \left( \frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right] \\ h(0, z) = h_{ini}(z) \\ h(t, 0) = h_{surf}(t) \\ h(t, Z) = h_{fond}(t) \end{cases} \quad (11)$$

Nous choisirons pour la suite l'équation (11) pour la raison donnée précédemment. L'équation (11) est entièrement définie si l'on connaît la conductivité hydraulique  $K$  et la capacité capillaire  $C$  comme fonctions de la pression  $h$  ou de la teneur en eau  $\theta$ . Or ces deux grandeurs ( $K$  et  $C$ ) ne sont déterminées que si les paramètres hydrodynamiques ci-dessous sont connus :

$$K_s, \theta_s, h_g, m \text{ et } n \quad (12)$$

La caractérisation des sols requiert la détermination de ces cinq paramètres qui interviennent dans le modèle de Richards à travers les fonctions (8) et (9). Les paramètres  $n$  et  $m$  sont des paramètres de forme et  $K_s$ ,  $\theta_s$  et  $h_g$  sont des paramètres d'échelle. Haverkamp et al 1998 [14] ont montré que les paramètres de forme sont fortement liés à la texture du sol alors que les paramètres d'échelle dépendent principalement des propriétés structurales du sol.

L'équation (10) (resp. (11)) est une équation aux dérivées partielles de type parabolique quasilinearé pouvant se mettre sous la forme générale décrite dans [1]. Pour  $(t, z) \in [0, T] \times \Omega$ ,  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^-$  (resp. un ouvert borné de  $\mathbb{R}^+$ ), la solution de l'équation (10) (resp. (11)) peut-être cherchée dans un sous ensemble de l'espace des fonctions  $L^2(0, T; H)$ ,  $H$  étant l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)$ .

Différentes solutions analytiques de (10) ou (11) ont été proposées dans la littérature. Pour plus de détails, consulter [25], [23], [9] ou [1] pour les équations paraboliques quasilinearés de forme plus générale.

### 2.1.1. Infiltration

L'infiltration décrit le processus de l'eau pénétrant dans le sol à partir de sa surface. Plusieurs facteurs influencent le taux d'infiltration. Parmi ces facteurs, nous pouvons citer les propriétés du sol telles que sa porosité, sa conductivité hydraulique et son taux d'humidité initial dépendant des conditions limites et de la condition initiale.

De façon générale, pour une condition initiale variable  $\theta(0, z) = \theta_{ini}(z)$ , l'infiltration cumulée ( $I_{cal}$  en dimension un de l'espace, exprimée en centimètre par unité de surface) est définie par :

$$I_{cal}(t) = \int_0^Z q(t, z) dz, \quad (13)$$

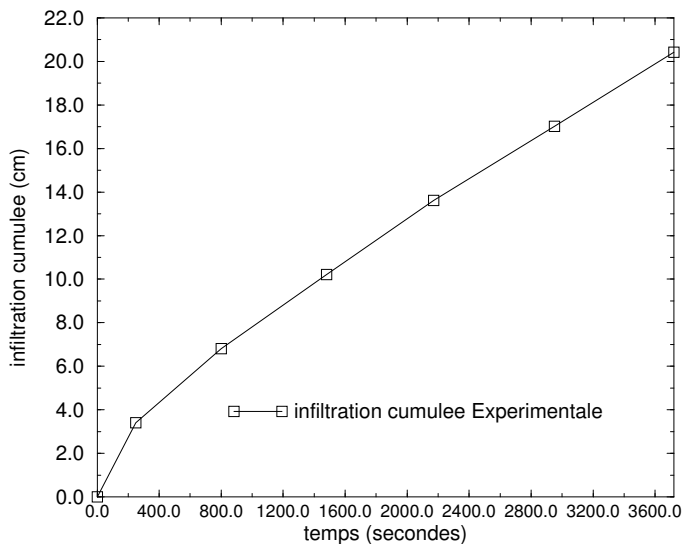
$q(t, z)$  étant le taux d'infiltration.

Nous choisissons une condition initiale constante  $\theta_{ini} = cte$ , dans ce cas l'infiltration cumulée est définie par :

$$I_{cal}(t) = \int_0^Z (\theta(t, z) - \theta_{ini}) dz \quad (14)$$

où  $Z$  désigne la profondeur de sol considéré,  $\theta(t, z)$  solution de (10) ou (11).

Ce type de mesure est choisi pour sa simplicité. Les mesures de  $\theta$  sont très longues, difficiles et coûteuses alors que la mesure de l'infiltration cumulée se fait simplement en posant un cylindre de faible diamètre (pour les mesures à une dimension) sur le sol et en versant de l'eau à l'intérieur. On mesure ensuite le temps que met le sol pour absorber une hauteur  $x$  d'eau. Cela nous donne à chaque temps  $t$  la quantité d'eau absorbée par le sol. En général, les paramètres (12) sont estimés de façon empirique à partir des mesures



**Figure 1.** Infiltration cumulée expérimentale

d'infiltration sur le terrain, car on dispose d'instruments permettant de mesurer la quantité d'eau en fonction du temps (14).

Si l'on dispose des mesures de terrain  $I_{obs}(t_j)$  aux instants  $t_j$ ,  $j = 0, \dots, M$ , on peut naturellement se poser la question :

Quel est le jeu de paramètres (12) pour lequel l'infiltration cumulée  $I_{cal}(t)$  calculée par (14) est «la plus proche possible» de l'infiltration mesurée  $I_{obs}(t)$  aux instants  $t_j$  ?

Pour répondre à cette question, on construit la fonctionnelle d'écart (fonction coût) entre l'infiltration calculée et l'infiltration mesurée :

$$\begin{aligned} J(U) &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=0}^M (I_{cal}(t_j) - I_{obs}(t_j))^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \int_0^Z (\theta(t, z) - \theta_{ini}) dz - I_{obs}(t) \right]^2 \cdot \delta(t - t_j) dt, \end{aligned} \quad (15)$$

où  $\delta(t - t_j)$  représente la masse de Dirac concentrée autour du point  $t_j$ ,  $\Delta t$  l'intervalle de temps entre les différentes observations ( $\Delta t$  sera également le pas de discrétisation temporelle qu'on définira au paragraphe 2.3).

Le problème revient donc à trouver le vecteur de paramètres :

$$U^* (K_s^*, \theta_s^*, h_g^*, m^*, n^*) \quad (16)$$

tel que

$$J(U^*) = \inf_{U \in \mathcal{P}} J(U) \quad (17)$$

où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des vecteurs de paramètres admissibles.

Une caractérisation de  $U^*$  (dans le cas où la fonctionnelle  $J$  est différentiable) est donnée par l'équation d'Euler-Lagrange :  $\nabla J(U^*) = 0$ ,  $\nabla J$  étant le gradient de  $J$ .

### 2.1.2. Condition d'optimalité, modèle adjoint

Largement développées pour être utilisées dans la modélisation de l'environnement en géosciences, les méthodes de contrôle optimal peuvent être aussi utilisées pour rechercher le vecteur de paramètre optimal qui ajustera au mieux la sortie du modèle et les observations. Nous présentons ci-dessous le développement théorique dû à Le Dimet 1982 [5], Le Dimet et Talagrand 1986 [6] etc. Cette technique est utilisée pour identifier les paramètres hydrodynamiques qui interviennent dans le modèle (11).

### 2.1.3. Principe

Dans la théorie du contrôle optimal, le modèle peut être généralement décrit par une équation de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X, U), & X \in \mathbb{R}^n, \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (18)$$



où  $X$  est la variable d'état appartenant à un espace de Hilbert  $\mathcal{X}$  de dimension finie que l'on identifie à  $\mathbb{R}^n$ ,  $t$  le temps,  $U$  un vecteur de paramètres appartenant à un espace de Hilbert  $\mathcal{P}$  qu'on appellera aussi un ensemble de paramètres admissibles,  $F$  est un opérateur différentiel non-linéaire de  $\mathcal{X} \times \mathcal{P}$  dans  $\mathcal{X}$  qu'on supposera différentiable.

Désignons par  $\mathcal{O}$ , l'espace de Hilbert des observations et par  $C$  l'opérateur de projection de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{O}$ . Dans les applications numériques  $\mathcal{O}$ , est un espace de dimension finie.

Nous supposons que pour  $U \in \mathcal{P}$ , le problème de Cauchy (18) admet une solution unique.

On définit une fonctionnelle d'écart entre la solution  $X$  du modèle (18) et une observation  $X_{obs}$  de  $\mathcal{O}$  par :

$$J(U) = \frac{1}{2} \int_0^T \|C.X(U) - X_{obs}\|_{\mathcal{O}}^2 dt \quad (19)$$

On pose alors le problème de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } U^* \in \mathcal{P} \text{ tel que :} \\ J(U^*) = \inf_{U \in \mathcal{P}} J(U) \end{array} \right. \quad (20)$$

Le problème (20) possède une solution unique si la fonctionnelle  $J$  est strictement convexe, semi-continue inférieurement et si :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) \rightarrow +\infty$$

Dans le cas général, lorsque  $J$  est différentiable, une condition nécessaire pour que  $U^*$  soit une solution de (20) est donnée par l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\nabla J(U^*) = 0$$

où  $\nabla J$  est le gradient de  $J$  par rapport à  $U$ .

La détermination de  $\nabla J$  permet de mettre en œuvre des méthodes d'optimisation locales de type descente.

Soit  $u \in \mathcal{P}$ , la dérivée de Gâteaux (dérivée directionnelle dans la direction  $u$ ) du modèle direct (18) donne le modèle *linéaire tangent* (21) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{X}}{dt} = \left[ \frac{\partial F}{\partial X} \right] \cdot \hat{X} + \left[ \frac{\partial F}{\partial U} \right] \cdot u, \\ \hat{X}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

où  $\left[ \frac{\partial F}{\partial X} \right]$  et  $\left[ \frac{\partial F}{\partial U} \right]$  représentent respectivement l'opérateur Jacobien de  $F$  par rapport à  $X$  et par rapport à  $U$ .

La dérivée directionnelle  $\hat{J}$  de la fonction coût  $J$  dans la direction de  $u$  est donnée par :

$$\hat{J}(U, u) = \int_0^T \left\langle C.X(U) - X_{obs}, C.\hat{X} \right\rangle dt. \quad (22)$$

Le gradient de  $J$  sera obtenu en exhibant la linéarité de  $\hat{J}$  par rapport à  $u$ . Introduisons,  $P$  variable adjointe de même dimension que  $X$ ,  $P$  sera définie ultérieurement, nous effectuons le produit scalaire (convenablement choisi) de chacun des membres de la première équation du système linéaire tangent (21) par la variable  $P$ , et nous intégrons le résultat obtenu sur l'intervalle  $[0, T]$ . Cela donne :

$$\int_0^T \left\langle \frac{d\hat{X}}{dt}, P \right\rangle dt = \int_0^T \left\langle \left[ \frac{\partial F}{\partial X} \right] \hat{X}, P \right\rangle dt + \int_0^T \left\langle \left[ \frac{\partial F}{\partial U} \right] u, P \right\rangle dt$$

En intégrant par parties le premier membre et en transposant le second, on trouve :

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{X}(T), P(T) \right\rangle - \left\langle \hat{X}(0), P(0) \right\rangle &= \int_0^T \left\langle \frac{dP}{dt}, \hat{X} \right\rangle dt = \\ &= \int_0^T \left\langle \left[ \frac{\partial F}{\partial X} \right]^T P, \hat{X} \right\rangle dt + \int_0^T \left\langle \left[ \frac{\partial F}{\partial U} \right]^T P, u \right\rangle dt \end{aligned}$$

et en vertu de la condition initiale de (21) :

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{X}(T), P(T) \right\rangle &= \int_0^T \left\langle \frac{dP}{dt}, \hat{X} \right\rangle dt = \\ &= \int_0^T \left\langle \left[ \frac{\partial F}{\partial X} \right]^T P, \hat{X} \right\rangle dt + \int_0^T \left\langle \left[ \frac{\partial F}{\partial U} \right]^T P, u \right\rangle dt \end{aligned}$$

Si on définit  $P$  comme la solution de l'équation (*modèle adjoint*) :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} + \left[ \frac{\partial F}{\partial X} \right]^T .P = C^T . (C.X - X_{obs}), \\ P(T) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

alors la dérivée directionnelle de la fonction coût s'écrit :

$$\widehat{J}(U, u) = \left\langle u, - \int_0^T \left[ \frac{\partial F}{\partial U} \right]^T . P dt \right\rangle = \langle u, \nabla J \rangle, \quad (24)$$

et le gradient de la fonction coût par rapport à  $U$  est donné par :

$$\nabla J(U) = - \int_0^T \left[ \frac{\partial F}{\partial U} \right]^T . P dt. \quad (25)$$

Ainsi donc, pour obtenir le gradient de la fonction coût  $J$ , il suffit de résoudre le modèle direct (18), de le faire suivre de la résolution rétrograde du modèle adjoint (23) et enfin, d'appliquer la formule (25).

## 2.2. Application à un modèle hydrologique

La théorie développée ci-dessus est appliquée à notre modèle physique d'infiltration de l'eau dans le sol en zone non saturée. En partant de l'équation (11) et suivant étape par étape la méthodologie développée dans le paragraphe (2.1.3), nous trouvons le *système d'optimalité* dans le cadre continu constitué du modèle direct, du modèle adjoint et enfin les composantes du gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres de contrôle  $K_s, h_q, \theta_s, m$  et  $n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(h) \left( \frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right], \\
 h(0, z) = h_{ini}(z) \\
 h(t, 0) = h_{surf}(t) \\
 h(t, Z) = h_{fond}(t)
 \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 -\frac{\partial}{\partial t} (C \cdot P) + \left[ \frac{\partial C}{\partial h} \right] \cdot \left( P \cdot \left[ \frac{\partial h}{\partial t} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \frac{\partial P}{\partial z} \right] + \left[ \frac{\partial K}{\partial h} \right] \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \left[ \frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right] \right) = \\
 (I_{cal} - I_{obs}) \frac{\partial I_{cal}}{\partial h} \delta(t - t_i), \quad i = 0, \dots, (N-1), \\
 \\
 P(t = T, z) = 0 \\
 P(t, z = 0) = 0 \\
 \\
 P(t, z = Z) = 0
 \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \nabla J(U) = - \int_0^T \int_0^Z \left( \left[ \frac{\partial C}{\partial U} \right] \cdot \left( P \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \left[ \frac{\partial K}{\partial U} \right] \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right) \right) dt dz \\
 \\
 + \sum_{i=0}^N \int_0^Z (I_{cal}(t) - I_{obs}(t)) \left[ \frac{\partial I_{cal}}{\partial U}(t) \right] \delta(t - t_i) dz \\
 \\
 + \int_0^T \left[ \frac{\partial h_{ini}}{\partial U} \right] \left( K \frac{\partial P}{\partial z} \right) \Big|_{z=Z} dt = 0.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (26)$$

### 2.3. Mise en œuvre numérique

Les versions discrètes des modèles direct et adjoint sont implémentées. La discrétisation du modèle direct (11) est réalisée en utilisant un schéma aux différences finies en espace et un schéma d'Euler explicite en temps. Si  $Z$  désigne la profondeur du sol considérée et  $T$  le temps pendant lequel le modèle direct est intégré, alors les pas de discrétisation sont  $\Delta z = \frac{Z}{N}$ ,  $z_i = i \times \Delta z$ ,  $i = 0, \dots, N$  pour la profondeur et  $\Delta t = \frac{T}{M}$ ,  $t_j = j \times \Delta t$ ,  $j = 0, \dots, M$  pour le temps, où  $N$  et  $M$  sont convenablement choisis. Le vecteur d'inconnues à résoudre à chaque pas de temps  $j$  est  $H^j$ ;  $H_i^j = h_i^j$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ .

Cette méthode donne le système (modèle direct discret) suivant :

$$A(H^{j-1}, U) \cdot H^j = F(H^{j-1}, U), \quad j = 1, \dots, M, \quad H^0 = H_{ini} \quad (27)$$

qu'il faut résoudre à chaque pas de temps  $j$ , où  $A$  est une matrice symétrique tridiagonale d'ordre  $(N-1)$  définie par :

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= -\left(K_{i+\frac{1}{2}}^{j-1} + K_{i-\frac{1}{2}}^{j-1} + \frac{\Delta z^2}{\Delta t} C_i^{j-1}\right), \\ A_{i,i+1} &= K_{i+\frac{1}{2}}^{j-1}, \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (28)$$

Les développements du modèle adjoint et du gradient de la fonction coût sont donnés en annexe (voire section 6).

## 2.4. Algorithme

L'algorithme de minimisation utilisé dans les méthodes de descente de type gradient nécessite les étapes fondamentales suivantes :

**Etape 0 :** Choisir un vecteur de paramètre pour l'initialisation (*first guess*)

**Etape 1 :** Calculer le gradient de la fonction coût en utilisant la démarche développée précédemment

**Etape 2 :** Déterminer la direction de descente fonction du gradient

**Etape 3 :** Mettre à jour le vecteur de paramètre par :  $U_{k+1} = U_k + \rho_k D_k$

**Etape 4 :** Vérifier le critère de convergence : retourner à l'étape 0 avec le nouveau vecteur de paramètre sinon.

La méthode adjointe nous fournit le gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres hydrodynamiques (paramètres de contrôle) à l'étape 1. Cependant, pour réaliser les étapes 2, 3 et 4, l'approche BFGS quasi-Newton à mémoire limitée, Liu et Nocedal [19] est utilisée dans le code de minimisation MIQN3 de Gilbert et Lemaréchal [11]. Ce code résout le problème de minimisation sans contrainte de la forme  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  et ne nécessite aucune connaissance sur la matrice Hessienne de la fonction. En fait l'algorithme BFGS utilise les variations du gradient entre les itérations pour mettre à jour une approximation de la matrice Hessienne dont on a besoin pour déterminer la direction de descente à l'étape 2. L'utilisateur contrôle en amont la mémoire de stockage indispensable pour son application.

### 3. Résultats numériques

#### 3.1. Vérification du gradient

Dans le processus d'optimisation, il est indispensable de calculer correctement le gradient de la fonction coût par rapport à la variable de contrôle afin de trouver la bonne direction de descente. L'exactitude du calcul du gradient agit sur la vitesse de la convergence de la minimisation et sur la valeur correcte du paramètre de contrôle optimal. Ainsi, avant d'entamer la phase d'optimisation proprement dite, on va vérifier l'exactitude du calcul du gradient de la fonction coût qui est obtenu par la méthode adjointe.

Pour tester le gradient, Courtier [4] a montré que le test efficace est fondé sur le développement de Taylor de la fonctionnelle  $J$ . On écrit le développement de Taylor au point  $U + \alpha q$  dans le voisinage de  $U$  avec une perturbation  $\alpha q$ , choisie de sorte que  $q$  direction fixée soit de norme 1, ensuite on fait tendre  $\alpha$  vers 0. Ainsi pour,

$$J(U + \alpha q) = J(U) + \alpha \langle \nabla J(U), q \rangle + \frac{\alpha^2}{2} \langle \nabla^2 J(U) q, q \rangle + o(\alpha^2),$$

l'exactitude du gradient de la fonction coût est calculé en estimant :

$$\zeta(\alpha) = \frac{J(U + \alpha q) - J(U)}{\alpha \cdot \langle \nabla J(U), q \rangle},$$

et nous devons avoir :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \zeta(\alpha) = 1.$$

Le tableau 1 ci-dessous montre que le gradient a été bien calculé, car il se stabilise autour de la racine de la précision machine (compris entre la convergence et les erreurs d'arrondi, le calcul étant fait en double précision).

#### 3.2. Expériences avec les données synthétiques

Nous allons dans la suite, avant de passer aux données de terrain d'un Andosol de la localité de Mbouda située à l'ouest du Cameroun, utiliser les données que nous avons générées par le modèle direct en utilisant une formule analytique (sorptivité, paramètre de la fonction d'infiltration de Philip [25]) comme observations. Le pas de temps est de 10 secondes et le pas en hauteur de 1 centimètre. Ces données analytiques (non bruitées) seront échantillonnées toutes les 10 secondes, ensuite seront sous échantillonnées toutes les 300 secondes et enfin toutes les 720 secondes, de façon à se mettre dans le cadre des données collectables sur le plan physique. L'utilisation de ces données analytiques permet

| $\alpha$  | $\zeta(\alpha)$ | $\alpha$  | $\zeta(\alpha)$ |
|-----------|-----------------|-----------|-----------------|
| $2^{-11}$ | 1.386047463     | $2^{-31}$ | 1.000000345     |
| $2^{-13}$ | 1.095920988     | $2^{-33}$ | 1.000000069     |
| $2^{-15}$ | 1.023945769     | $2^{-35}$ | 0.999999978     |
| $2^{-17}$ | 1.005984309     | $2^{-37}$ | 1.000000029     |
| $2^{-19}$ | 1.001495931     | $2^{-39}$ | 0.999999986     |
| $2^{-21}$ | 1.000373960     | $2^{-41}$ | 0.999999814     |
| $2^{-23}$ | 1.000093475     | $2^{-43}$ | 0.999994405     |
| $2^{-25}$ | 1.000023354     | $2^{-45}$ | 1.000007456     |
| $2^{-27}$ | 1.000005824     | $2^{-47}$ | 0.999929147     |
| $2^{-29}$ | 1.000001441     | $2^{-49}$ | 0.999522488     |

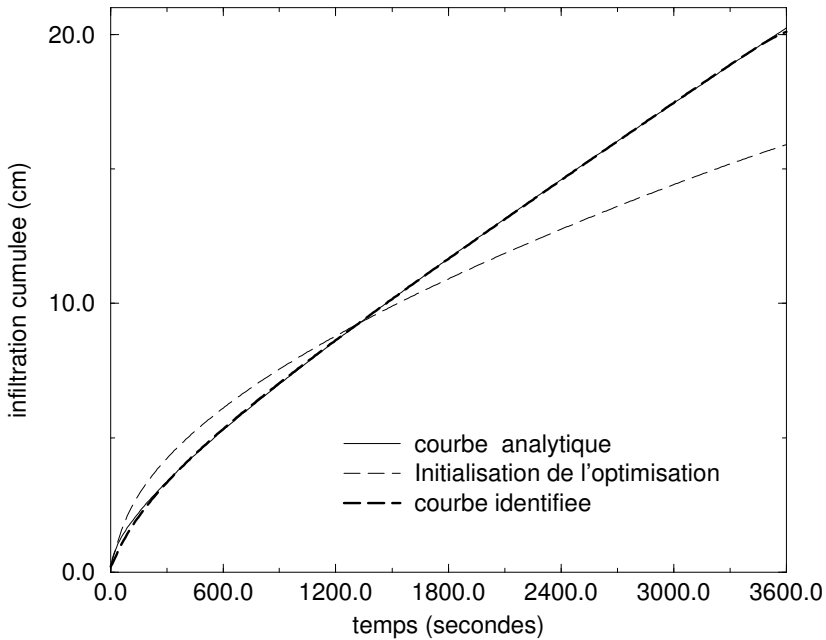
**Tableau 1.** Test de précision du gradient

de voir la capacité de notre modèle à reconstituer les paramètres notamment ceux qui ont servi à générer les données. Ces trois expériences sont réalisées avec la donnée initiale  $\theta_{ini} = 0.0816 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  et la contrainte en surface  $h_{surf} = 0 \text{ cm}$ . On constate à travers les figures 2, 4 et 6 que les courbes d'infiltrations identifiées coïncident parfaitement avec les courbes de données analytiques. Par ailleurs les courbes 3, 5 et 7 traduisent la convergence de notre processus d'identification.

La grande difficulté lors de la mise en œuvre de l'algorithme décrit au paragraphe 2.4 se situe au niveau du choix de l'initialisation de l'optimisation. Pour notre étude, la fonctionnelle à minimiser n'étant pas quadratique (Figure 9), un temps «très considérable» est consacré à la recherche du point de départ (*first guess*) de l'optimisation comme le prouve le tableau 2. Les paramètres optimaux (Tableau 2) dépendent par conséquent fortement de cette initialisation.

|            | A         |           | B         |           | C         |           | référence |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|            | ident     | init      | ident     | init      | ident     | init      |           |
| $K_s$      | $5.82E-3$ | $1.76E-3$ | $4.50E-3$ | $1.78E-3$ | $4.78E-3$ | $1.80E-3$ | $4.28E-3$ |
| $h_g$      | -17.10    | -16.5     | -17.10    | -17.29    | -17.10    | -17.4     | -16.40    |
| $\theta_s$ | 0.69      | 0.68      | 0.68      | 0.69      | 0.68      | 0.69      | 0.312     |
| $m$        | 6.09      | 6.12      | 6.11      | 6.12      | 6.41      | 6.42      | 6.73      |
| $n$        | 2.47      | 2.65      | 3.19      | 3.2       | 2.65      | 2.63      | 2.79      |

**Tableau 2.** Paramètres identifiés (*ident*) et initialisations (*init*) de la minimisation. Les légendes A, B, C correspondent respectivement au cas des données d'infiltration échantillonnées tous les pas de temps, échantillonnées toutes les 300 secondes et échantillonnées toutes les 720.

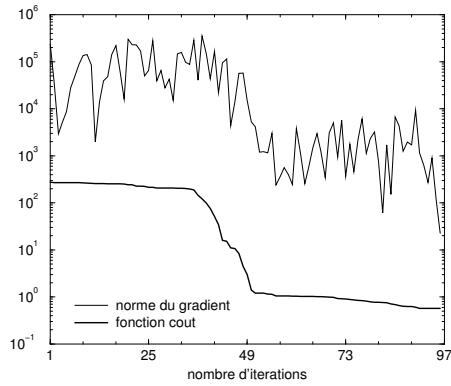


**Figure 2.** Infiltration cumulée identifiée : données analytiques échantillonnées toutes les 10 secondes

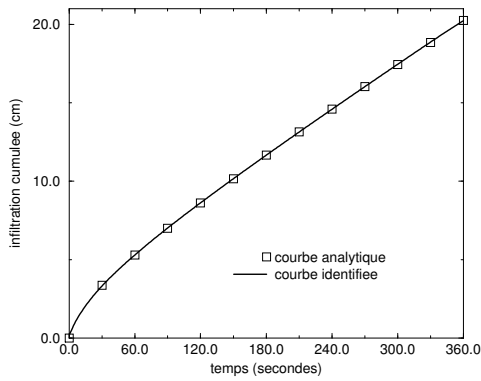
Au cours de ces expériences de minimisation, nous avons noté que les paramètres qui ont une plus grande influence sur la fonction coût (ceux pour lesquels le gradient de la fonction coût est élevé) sont  $K_s$  et  $\theta_s$  (Figures 8). A titre d'exemple, dans le cas des données analytiques, une variation de  $10^{-7}$  peut produire un écart de gradient de l'ordre de  $10^3$ . Mais ceci n'est pas une difficulté pour le code. Les autres paramètres sont plus stables.

La décroissance relativement faible de la fonction coût et de la norme de son gradient (Figures 3, 5 et 7) peut se justifier par les fortes non-linéarités : non seulement le modèle (c'est-à-dire les équations), mais en plus la dépendance de la fonction coût par rapport aux paramètres. La fonctionnelle à minimiser n'est évidemment pas quadratique, et donc on ne peut trouver que de minima locaux, qui à leur tour dépendent du point de départ de la minimisation.

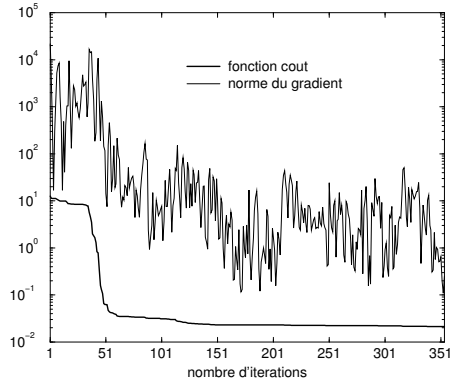




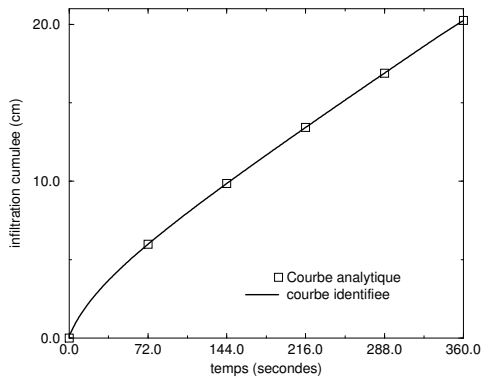
**Figure 3.** Minimisation : données analytiques échantillonnées toutes les 10 secondes



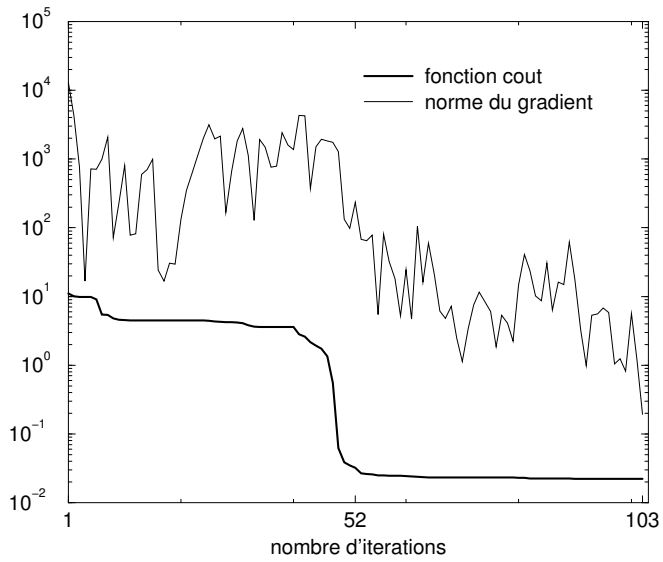
**Figure 4.** Infiltration cumulée identifiée : données analytiques échantillonnées toutes les 300 secondes



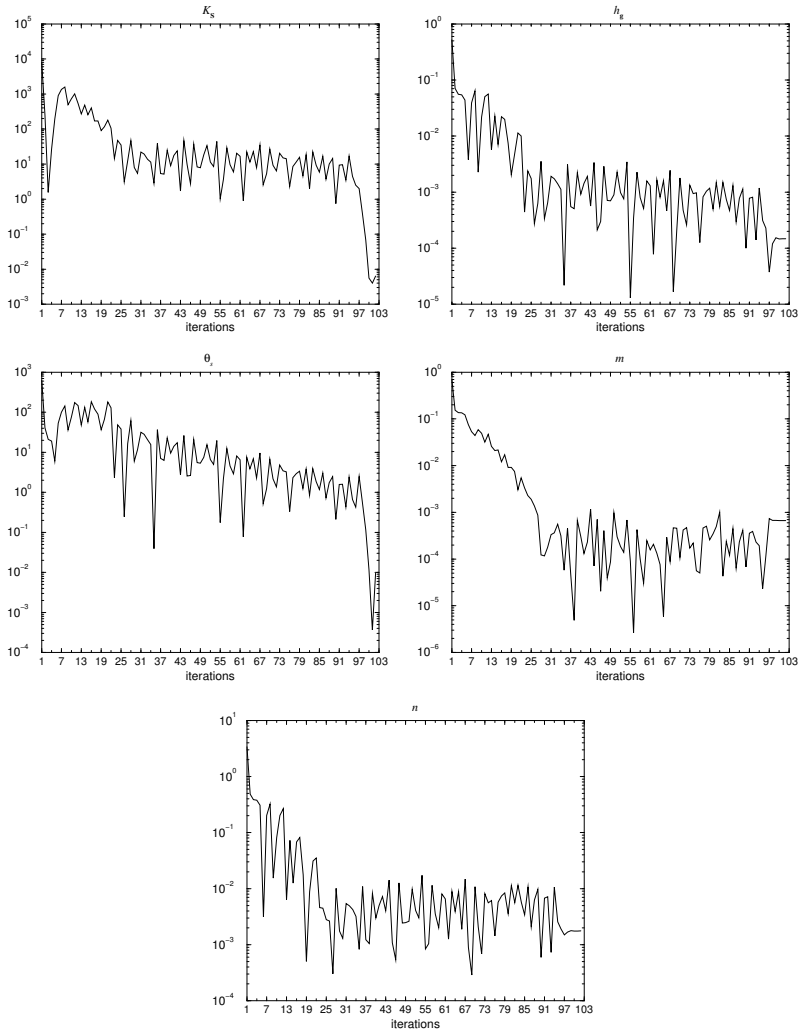
**Figure 5.** Minimisation : données analytiques échantillonnées toutes les 300 secondes



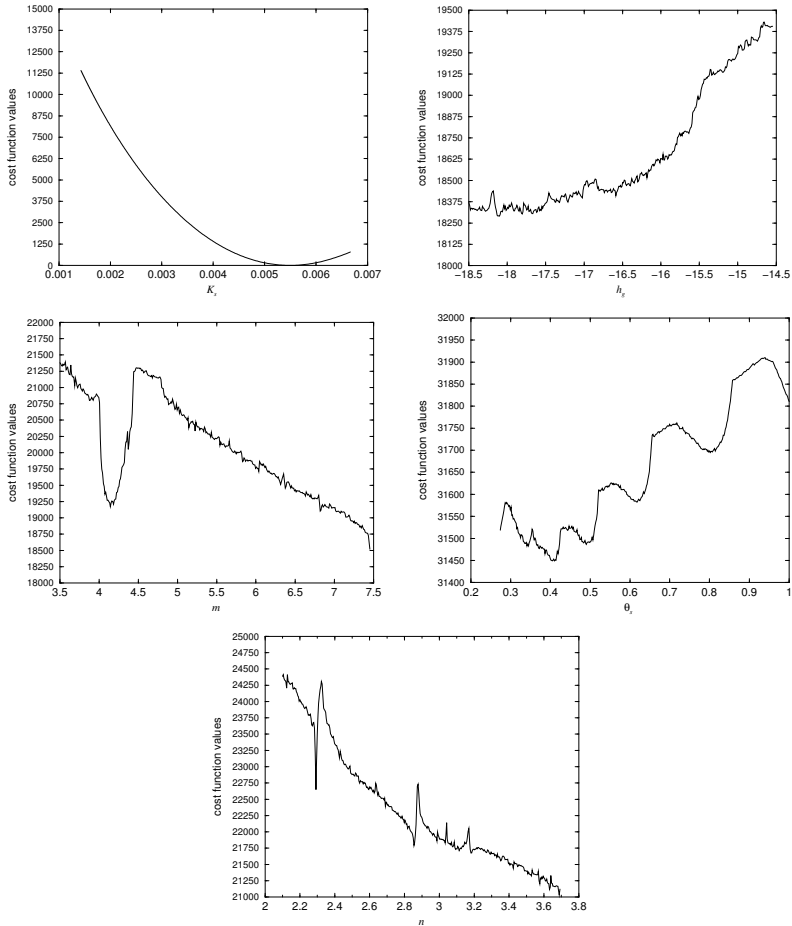
**Figure 6.** Infiltration cumulée identifiée : données analytiques échantillonnées toutes les 720 secondes



**Figure 7.** *Minimisation : données analytiques échantillonnées toutes les 720 secondes*



**Figure 8.** Gradient de la fonction coût par rapport à chaque composante du vecteur de paramètres : données analytiques échantillonnées toutes les 720 secondes

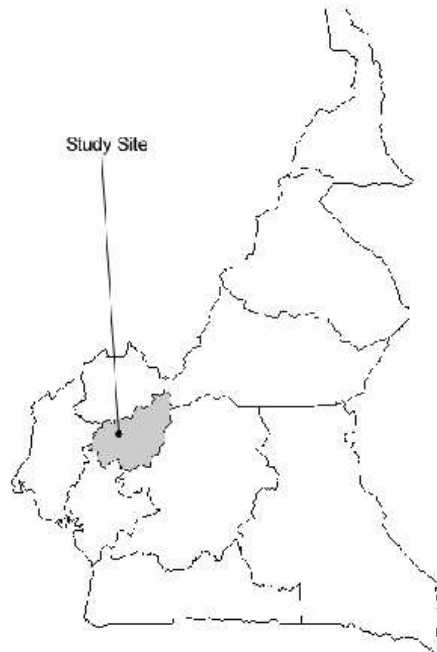


**Figure 9.** Coupe de la fonction coût  $J(K_s, h_g, \theta_s, m, n)$  au voisinage de l'initialisation : données analytiques échantillonnées toutes les 10 secondes

Nous allons dans la suite, après avoir décrit le site d'étude, utiliser les données de terrain (Andosol) avec la donnée initiale  $\theta_{ini} = 0.425 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  et la contrainte à la surface  $h_{surf} = 0 \text{ cm}$ .

### 3.3. Expériences avec les données de terrain

#### 3.3.1. Site d'étude

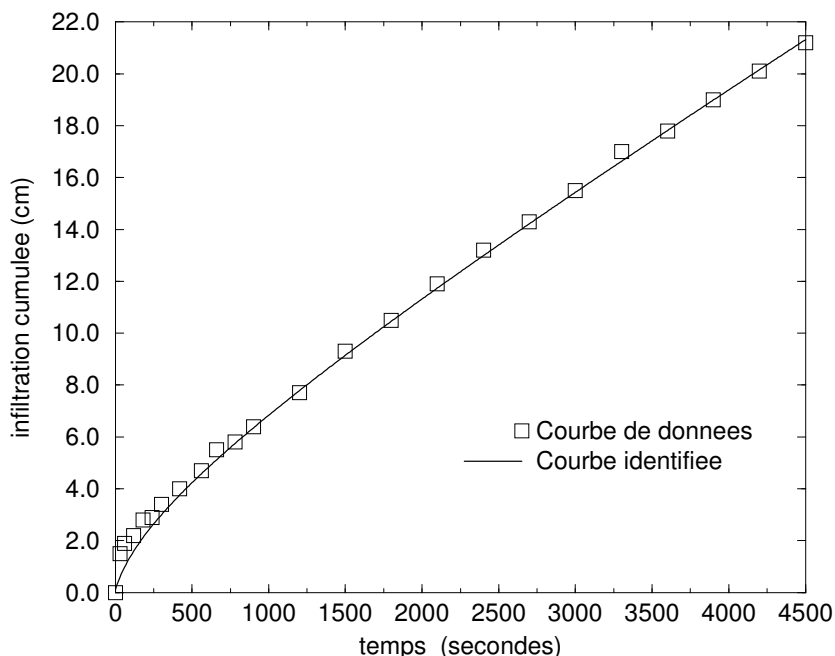


**Figure 10.** Site d'étude

L'environnement du site d'étude a été décrit par Fonteh et al 1998 [10]. C'est un Andosol situé entre les latitudes  $5^0$  et  $7^0$  Nord de l'équateur et entre les longitudes  $8^0$  et  $12^0$  Est. Le domaine d'étude est localisé dans le village Poneké à 6 kilomètres de la ville de Mbouda dans le département des Bamoutos dans la grande région agro-écologique de l'ouest du Cameroun. Il est délimité au Nord par la ville de Bemenda, à l'Est par la ville de Bamendji, au Sud-Ouest par la ville de Dschang et au Sud-Est par la ville de Bafoussam. Selon les auteurs, le sol sur le site expérimental est un Andosol avec un horizon superficiel d'épaisseur variant de 25 à 90 cm, de faible densité surfacique ( $0.8\text{g}/\text{cm}^3$ ), ce qui donne

une forte porosité (0.68)% et un taux d'infiltration élevé. La structure du sol est fine et modérément friable.

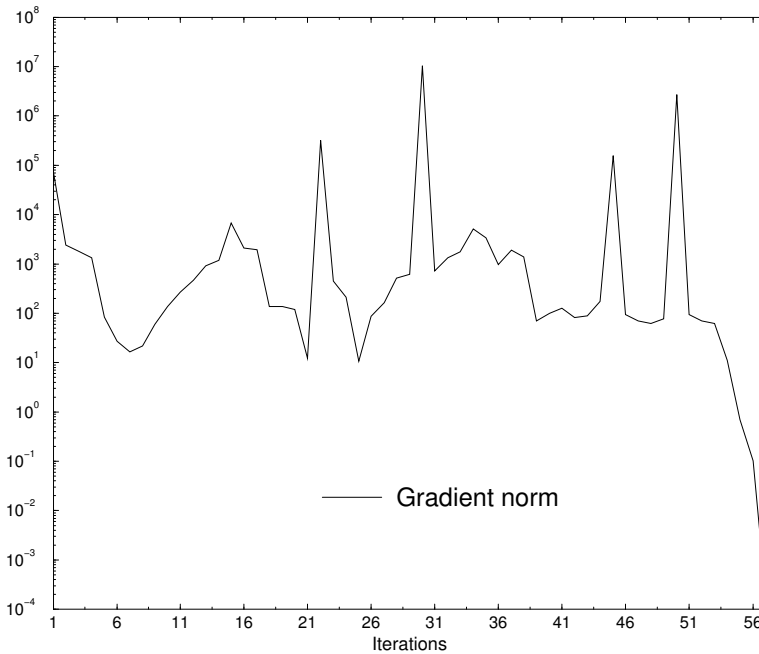
Pour les données expérimentales (site de Ponéké) nous avons trouvé les résultats suivants :  $K_s = 3.742707 \times 10^{-5} m/s$ ,  $h_g = -0.170999m$ ,  $\theta_s = 0.648969 cm^3/cm^3$ ,  $m = 6.120047$ ,  $n = 3.20019$ . Il est important de noter que dans cette expérience, nous n'avions aucune connaissance *a priori* des paramètres.



**Figure 11.** Infiltrations cumulées simulées et observées : données de terrain

Les infiltrations observées et simulées coïncident parfaitement d'après la figure 11. Ceci traduit le fait que le vecteur de paramètres optimal dans la mesure du possible, ajuste au mieux les infiltrations cumulées. Par ailleurs, la norme du gradient évolue sensiblement au cours des itérations figure 12. Les figures 11 et 12 traduisent la convergence de notre processus d'identification.

La forme de la fonction coût est essentiellement parabolique (13) avec les valeurs minimales centrées autour de  $K_s = 3.74270 \times 10^{-5} m/s$ ,  $h_g = -0.170999m$ ,  $\theta_s = 0.64896 cm^3/cm^3$ ,  $m = 6.12004$ ,  $n = 3.20019$ .



**Figure 12.** Norme du gradient au cours des itérations : données de terrain

Les graphes ci-dessous (13) représentent les courbes de la fonction coût en dimension 2 selon une coupe au voisinage du vecteur de paramètre optimal.

La forme relativement plate de la fonction coût, au voisinage de l'optimum est facilement discernable en traçant les courbures de la fonction coût suivant certaines directions du paramètre (Figure 13).

---

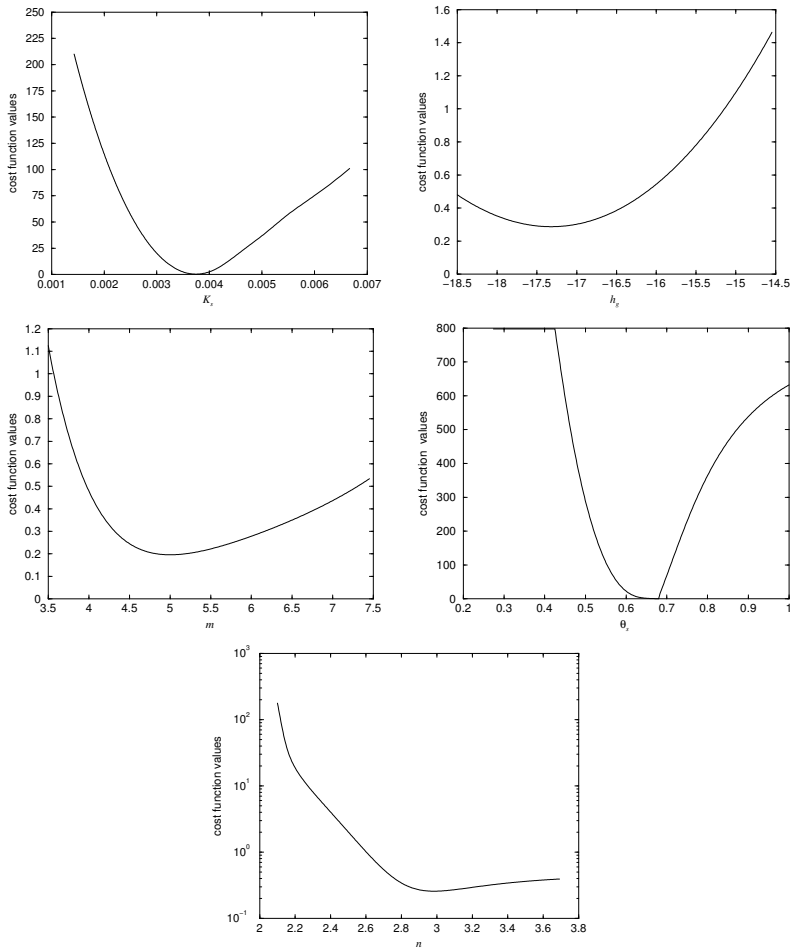
## 4. Coût de la méthode

Pour résoudre le problème d'identification on a utilisé une méthode itérative qui nécessite à chaque itération :

- d'intégrer le modèle direct et le modèle adjoint pour déterminer le gradient de la fonction coût.

- de calculer la direction de descente. Le calcul pour une méthode de type gradient conjugué est peu onéreux.





**Figure 13.** Coupe de la fonction coût  $J(K_s, h_g, \theta_s, m, n)$  pour  $K_s = 3.7427 \times 10^{-5}$ ,  $h_g = -0.17099$ ,  $\theta_s = 0.64896$ ,  $m = 6.12004$  et  $n = 3.2001$

– de calculer le pas de descente. Ce problème a priori simple (minimisation d’une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) peut se révéler très coûteux car il peut nécessiter plusieurs intégrations du modèle.

La convergence des méthodes itératives dépend aussi de deux autres facteurs :

– Le point de départ des itérations (first guess). Ce choix (s’il est possible) est particulièrement important en raison de la non-convexité du problème ce qui est le cas dans les études réalisées. Le système d’optimalité n’est qu’une condition nécessaire d’optimalité.

L'algorithme peut converger vers un minimum local. Pour des problèmes non-convexes il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante d'optimalité globale.

– du critère d'arrêt. Celui-ci doit être choisi, pour autant que cela soit possible, sur des considérations physiques.

Désignons par  $C_0$  (CPU secondes) le coût d'intégration du modèle direct dans l'intervalle  $[0, T]$ . Chaque itération dans notre procédure de minimisation nécessite l'intégration du modèle direct et celle du modèle adjoint respectivement afin de mettre à jour les composantes du gradient de la fonction coût. Comme le coût d'intégration du modèle adjoint est identique au coût de l'intégration du modèle direct, le coût de notre méthode est de  $2 \times N_I \times C_0$ , où  $N_I$  est le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre l'optimum,  $N_I$  est pris dans notre contexte au sens large, c'est-à-dire qu'on y inclut le nombre total de simulations (nombre d'évaluation de la fonction coût ainsi que son gradient). Quelques exemples de temps sont données dans le tableau 3.

|                  | A        | B       | C       |
|------------------|----------|---------|---------|
| $C_0$ (secondes) | 188.7976 | 181.077 | 179.589 |

**Tableau 3.** Temps mis pour atteindre l'optimum. A, B et C correspondent respectivement aux cas des données analytiques échantillonnées toutes les 10 secondes, échantillonnées toutes les 300 secondes et échantillonnées toutes les 720 secondes

On constate sur ce tableau 3, que l'on gagne peu avec les données échantillonnées. En effet, dans l'ensemble des cas traités, le pas de discrétisation temporelle a été maintenu à la valeur  $\Delta t = 10$  secondes afin d'assurer la stabilité numérique de l'intégration.

## 5. Conclusion

Dans cet article, le modèle direct simulant l'infiltration et la pression de l'eau dans le sol a été inversé. Nous avons développé une méthode efficace pour la détermination du jeu de paramètres optimal à partir de données synthétiques et de données de terrain d'une localité agropastorale située à l'ouest du Cameroun. Le gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres hydrodynamiques est obtenu en intégrant de façon rétrograde le modèle adjoint : ceci permet d'éviter la très large demande en calcul et stockage qu'aurait demandé une différentiation numérique, particulièrement pour les systèmes possédant un très grand nombre de paramètres. Les fortes non-linéarités (le modèle et la fonction coût) n'ont pas empêché de reconstituer le vecteur de paramètres optimal suivant le type de données à notre disposition.

Pour l'andosol, les erreurs relatives mesurées entre les valeurs réelles et celles obtenues par la simulation de la teneur en eau à saturation ( $0.7200 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3$ ) et le taux d'in-

filtration ( $13.29\text{cm}^3/h$ ) sont respectivement 5.57 et 1.31%. La teneur en eau à saturation du sol est souvent utilisée par certains auteurs pour prédire leur zone de capacité. Comme l'erreur relative commise en utilisant la sonde à neutron peut aller jusqu'à 10%, les valeurs obtenues par la simulation pour les données de terrain peuvent être acceptables. Selon Mathieu et Lozet [20], le taux d'infiltration variant entre 10% et 20% peut-être considéré comme non significatif. Ainsi les valeurs obtenues par les simulations sont bonnes. Cette méthode de détermination des paramètres hydrodynamiques des sols de ce type s'avère satisfaisante notamment avec le gain de temps ainsi réalisé.

## **Remerciements**

Le premier auteur a bénéficié des précieuses discussions avec R. Haverkamp et H. E. Ngodock sur les aspects physiques et numériques respectivement. Nous remercions J.-C. Gilbert et C. Lemaréchal de l'INRIA pour nous avoir fourni le code de minimisation M1QN3 de la bibliothèque Modulopt. Ce travail a bénéficié du soutien financier de l'agence française Aire Développement à travers le projet Calcul Parallèle de l'Université de Yaoundé 1.

## 6. Annexe

### 6.1. Détermination pratique du système adjoint

Pour la détermination de l'adjoint associé à notre problème de contrôle optimal, la meilleure méthode consiste à construire une approximation des équations d'état et de la fonction coût  $J$ , à définir un Lagrangien discret et des équations adjointes discrètes et à calculer un gradient discret. Le gradient ainsi obtenu est exact pour le problème approché qui est effectivement résolu et l'optimisation n'en est plus que efficace [2]. Dans le cas contraire, on risque d'observer une divergence de l'algorithme de minimisation. Ci-dessus, on présente cette approche permettant de déterminer le modèle adjoint et le gradient de la fonction coût  $J$ .

### 6.2. Condition d'optimalité : cadre discret

- Pour le modèle direct discret (voire paragraphe 2.3) :

$$\begin{cases} A(H^{j-1}, U) \cdot H^j = F(H^{j-1}, U), & j = 1, \dots, M, \\ H^0 = H_{ini} \end{cases}$$

où le second membre  $F(H^{j-1}, U) \in \mathbb{R}^{N-1}$  et un vecteur défini par :

$$\begin{cases} F_1 = -K_{\frac{1}{2}}^{j-1} h_0^j + \Delta z \left( K_{\frac{3}{2}}^{j-1} - K_{\frac{1}{2}}^{j-1} \right) - \frac{\Delta z^2}{\Delta t} C_1^{j-1} h_1^{j-1}, \\ F_i = \Delta z \left( K_{i+\frac{1}{2}}^{j-1} - K_{i-\frac{1}{2}}^{j-1} \right) - \frac{\Delta z^2}{\Delta t} C_i^{j-1} h_i^{j-1}, & i = 2, \dots, N-2, \\ F_{N-1} = -K_{N-\frac{1}{2}}^{j-1} h_N^j + \Delta z \left( K_{N-\frac{1}{2}}^{j-1} - K_{N-\frac{3}{2}}^{j-1} \right) - \frac{\Delta z^2}{\Delta t} C_{N-1}^{j-1} h_{N-1}^{j-1}, \end{cases}$$

avec  $K_{i+\frac{1}{2}}^{j-1} = K_{i+\frac{1}{2}}(h^{j-1}, U) = \sqrt{K(h_i^{j-1}, U) \times K(h_{i+1}^{j-1}, U)}$  et  $C_i^{j-1} = C(h_i^{j-1}, U)$ ,  
 $i = 0, \dots, N-1$ , les coefficients  $C$  et  $K$  étant donnés par les relations (8) et (9) ;

- la fonction coût discrète :

$$J(U) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=0}^M (I_{cal}(t_k) - I_{obs}(t_k))^2,$$

$I_{cal}(t_k)$  étant obtenu en faisant une approximation de (14) par la formule des trapèzes :

$$I_{cal}(t_k) = \Delta z \left[ \frac{1}{2}(\theta_{surf} - 2\theta_{ini} + \theta_{fond}) + \sum_{i=1}^{N-1} (\theta_i^k - \theta_{ini}) \right],$$

on définit le Lagrangien  $\mathcal{L}$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H, U, P) &= \Delta t \Delta z \langle A(H^{j-1}, U)H^j, P^j \rangle - \Delta t \Delta z \langle F(H^{j-1}, U), P^j \rangle \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=0}^M (I_{cal}(t_j) - I_{obs}(t_j))^2, \end{aligned}$$

$H, U$  et  $P$  étant considérées comme des variables indépendantes.

En dérivant  $\mathcal{L}$  par rapport à  $H$  nous obtenons le *modèle adjoint* :

$$\begin{cases} A(H^{j-1}, U) \cdot P^j = \mathcal{F}(H^j, U) \cdot P^{j+1} - \mathcal{A}(H^j, U) \cdot P^j - \mathcal{D}^j, & (j = (M-1), \dots, 1) \\ P^M = 0 \end{cases}$$

où  $\mathcal{F}(H^j, U)$  et  $\mathcal{A}(H^j, U)$  sont des matrices définies respectivement par :

$$\mathcal{F}(H^j, U)_{lk} = \frac{\partial F_l(H^{j-1}, U)}{\partial h_k^j} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(H^j, U)_{lk} = \sum_{s=1}^{N-1} \frac{\partial A_{ks}(H^j, U)}{\partial h_l^j} \cdot h_s^{j+1}$$

$\mathcal{D}^j$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^{N-1}$  défini par :  $\mathcal{D}_l^j = \sum_{k=1}^{N-1} (I_{cal}(t_j) - I_{obs}(t_j)) \cdot \frac{\partial f(h_k^j)}{\partial h_l^j}$

( $l = 1, \dots, N-1$ ).

On a d'autre part la relation fondamentale liant le gradient de la fonction coût par rapport à  $U$ ,  $\frac{\partial J}{\partial U}$  et la dérivée du Lagrangien par rapport aux paramètres de contrôle :

$$\nabla J(U) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} \Big|_{\text{au point stationnaire.}}$$

La dérivation de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $U$  donne le gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres de contrôle :

$$\nabla_{K_s} J(U) = \Delta t \Delta z \left[ \sum_{j=1}^M \left( \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=k-1}^{k+1} \frac{\partial A_{ks}(H^{j-1}, U)}{\partial K_s} \cdot H_s^j \cdot P_k^j \right) + \sum_{j=1}^M \left( \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial F(H^{j-1}, U)}{\partial K_s} \cdot P_k^j \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{h_g} J(U) &= \Delta t \Delta z \left[ \sum_{j=1}^M \left( \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=k-1}^{k+1} \frac{\partial A_{ks}(H^{j-1}, U)}{\partial h_g} \cdot H_s^j \cdot P_k^j \right) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{j=1}^M \left( \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial F(H^{j-1}, U)}{\partial h_g} \cdot P_k^j + \sum_{k=1}^{N-1} (I_{cal}(t_j) - I_{obs}(t_j)) \cdot \frac{\partial f(H_k^j)}{\partial h_g} \right) \right] \quad (29) \\
 \nabla_{\theta_s} J(U) &= \Delta t \Delta z \left[ \sum_{j=1}^M \left( \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=k-1}^{k+1} \frac{\partial A_{ks}(H^{j-1}, U)}{\partial \theta_s} \cdot H_s^j \cdot P_k^j \right) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{j=1}^M \left( \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial F(H^{j-1}, U)}{\partial \theta_s} \cdot P_k^j + \sum_{k=1}^{N-1} (I_{cal}(t_j) - I_{obs}(t_j)) \cdot \frac{\partial f(H_k^j)}{\partial \theta_s} \right) \right] \\
 \nabla_m J(U) &= \Delta t \Delta z \left[ \sum_{j=1}^M \left( \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=k-1}^{k+1} \frac{\partial A_{ks}(H^{j-1}, U)}{\partial m} \cdot H_s^j \cdot P_k^j \right) + \sum_{j=1}^M \left( \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial F(H^{j-1}, U)}{\partial m} \cdot P_k^j \right) \right] \\
 \nabla_n J(U) &= \Delta t \Delta z \left[ \sum_{j=1}^M \left( \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=k-1}^{k+1} \frac{\partial A_{ks}(H^{j-1}, U)}{\partial n} \cdot H_s^j \cdot P_k^j \right) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{j=1}^M \left( \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial F(H^{j-1}, U)}{\partial n} \cdot P_k^j + \sum_{k=1}^{N-1} (I_{cal}(t_j) - I_{obs}(t_j)) \cdot \frac{\partial f(H_k^j)}{\partial n} \right) \right].
 \end{aligned}$$

---

## 7. Bibliographie

- [1] CHAVENT G., LEMONNIER P., « Identification de la non-linéarité d'une équation parabolique quasilineaire », *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 2, n° 2, 1974.
- [2] CHAVENT G., *Identification of functional parameters in partial differential equations*, In Identification of Parameters in Distributed Systems, Pergamon, 1974.
- [3] CHOW V. T., MAINDMENT D. R., MAYS L. W., MC Graw. Series in water Resources and Environmental Engineering 1988.
- [4] COURTIER P., « Application du contrôle optimal à la prévision numérique en météorologie », Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1987.
- [5] LE DIMET F.-X., « A general formalism of variational analysis », Report OK n° 73091 22, CIMMS, Norman, OK, 1982.
- [6] LE DIMET F.-X., TALAGRAND O., « Variational assimilation of meteorological theoretical aspects » *Tellus*, vol. 8, n° A, 1986, p. 97-110.
- [7] LE DIMET F.-X., « Optimal control methods and data assimilation », Lecture notes, International summer school on data assimilation in meteorology and oceanography, Toulon, France 1993.
- [8] LE DIMET F.-X., « Determination of the adjoint of a numerical weather prediction model », Tech. Rep FSU-SCRI-88-78, FSU, FSU. Tallahassee, Florida 1996.
- [9] ESPINOZA R. D., « Infiltration », *The Handbook of Groundwater Engineering*, chapter 6., 1998.
- [10] FONTEH M., BOUKONG A., TANKOU C., « Soil and water management of dry season green peas *Pisium sativum* production in the western Highlands of Cameroon », Technical Report, University of Dschang, 1998.
- [11] GILBERT J.-C., LEMARÉCHAL C., « The modules M1QN2, N1QN2, M1QN3 and N1QN3 (Version 1.2.b) », INRIA, 1992.
- [12] GREEN W. H., AMPT G. A., « Studies on soil physics, I, Flow of air and water through the soil », *J. Agric. Sci.*, vol. 4., 1911, p. 1-24.
- [13] GROENEVELT P. H., PARLANGE J.-Y., « Thermodynamic stability of swelling soils », *Soil Sci.*, vol. 118., 1974, p. 1-5.
- [14] HAVERKAMP R., BOURAOUI F., ZAMMIT C., ANGULO-JARAMILLO R., « Soil properties and moisture movement in the unsaturated zone », *The Handbook of Groundwater Engineering*, chapter 5, 1998.
- [15] HAVERKAMP R., ZAMMIT C., BOURAOUI F., FUENTES C., SAADI Z., SANDER, « A physically-based approach for estimating water retention curve parameters », *Soil Sci. Am. J.*, 1999, (Submitted).
- [16] HILLEL D., *L'eau et le Sol, principes et processus physiques*. Vander-édition 1974.
- [17] KITANIDIS P. K., « Geostatistics : interpolation and inverse problems », *The Handbook of Groundwater Engineering*, chapter 12, 1998

- [18] LIONS J. L., *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par les équations aux dérivées partielles*, Dunod Paris, 1968.
- [19] LIU D. C., NOCEDAL J., « On the limited BFGS method for large scale optimization », *Mathematical Programming*, vol. 45, 1989, p. 503-528,
- [20] LOZET J., MATHIEU C., *Dictionnaire de la science du sol*, Lavoisier, Tec et Dec, 1986.
- [21] NGNEPIEBA P., LE DIMET F.-X., BOUKONG A., NGUETSENG G., « Inverse problem formulation for parameter determination using the adjoint method », *Proceeding of CARI 2000*, 16-19 octobre 2000, ANTANANARIVO (Madagascar) p. 195-202.
- [22] PARLANGE J.-Y., « Theory of water movement in soils : 1. One dimensional absorption », *Soil Sci.*, vol. 111, n° 2, 1971a, p. 134-137.
- [23] PARLANGE J.-Y., LISLE I., BRADDOCK R.D., SMITH R. E., « The three parameter infiltration equation », *Soil Sci.* vol. 133, 1982, p. 337-341.
- [24] PARLANGE J.-Y., HAVERKAMP R., TOUMA J., « Infiltration under ponded conditions : 1. Optimal analytical solution and comparaison with experimental observations », *Soil Sci.* vol. 139, 1985, p. 305-311.
- [25] PHILIP J. L., « The theory of infiltration : 1. The infiltration equation and its solutions », *Soil Sci.* vol. 83, 1957a, p. 345-357.
- [26] PHILIP J. L., « Hydrostatics and hydrodynamics in swelling soils », *Water Resour Res.*, vol. 5, 1969a, p. 1070-1077.
- [27] PHILIP J. R., « Failing head ponded infiltration », *Water Resources Research*, August 1992, vol. 28, n° 8, 1992, p. 53-67.
- [28] SMILES V, ROSENTHAL M. J., « The movement of water in swelling material », *Aust. J. Soil Res.*, vol. 6, 1968, p. 248,1968.
- [29] TALAGRAND O., « Assimilation of observations : an introduction », Lecture notes, International summer school on data assimilation in meteorology and oceanography, Toulon, France 1993.



