



**HAL**  
open science

## Compromis précision-temps de calcul et détection de ruptures

Maxime Brunin, Christophe Biernacki, Alain Celisse

► **To cite this version:**

Maxime Brunin, Christophe Biernacki, Alain Celisse. Compromis précision-temps de calcul et détection de ruptures. 6ème Rencontres des Jeunes Statisticiens, Aug 2015, Le Teich, France. hal-01238276

**HAL Id: hal-01238276**

**<https://inria.hal.science/hal-01238276>**

Submitted on 11 Dec 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Compromis précision-temps de calcul et détection de ruptures

Maxime BRUNIN, Christophe BIERNACKI & Alain CELISSE

Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille 1  
INRIA Lille-Nord Europe, équipe MODAL

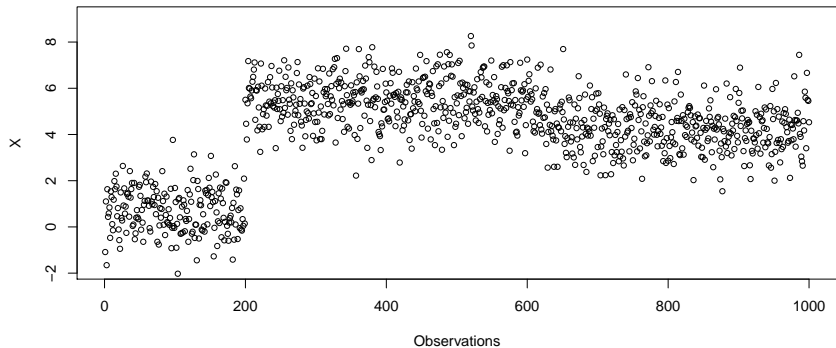
29 août 2015

- 1 Introduction
- 2 Sélection de modèle
- 3 Méthodes existantes
  - Programmation dynamique
  - Segmentation binaire
- 4 Conclusion

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Sélection de modèle
- 3 Méthodes existantes
  - Programmation dynamique
  - Segmentation binaire
- 4 Conclusion

## Exemple de détection de ruptures



## Détection de ruptures

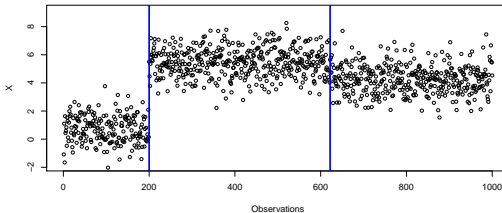
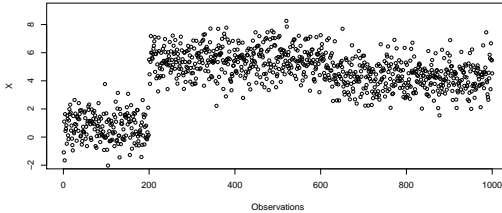
Soit  $\{X_i\}_{i \in [1, n]}$  un signal présentant des changements dans la distribution à différents instants de ruptures  $\{\tau_1^*, \dots, \tau_{D-1}^*\}$ .

### Objectif

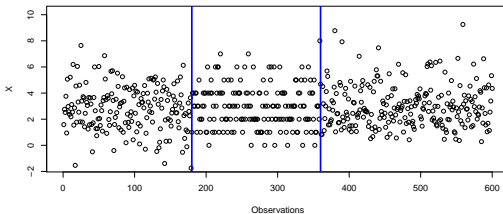
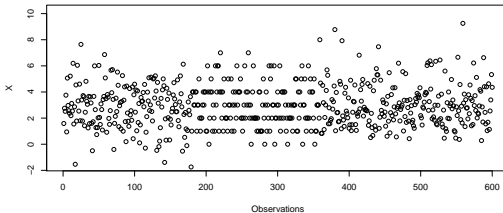
Trouver un estimateur de  $\{\tau_1^*, \dots, \tau_{D-1}^*\}$  à l'aide d'un algorithme.

Classiquement, on réalise de la détection de ruptures dans la moyenne.  
Je m'intéresse à la **détection de ruptures dans la distribution**.

# Détection de ruptures dans la moyenne



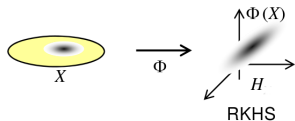
# Détection de ruptures dans la distribution





## Lien entre détection de ruptures dans la moyenne et détection de ruptures dans la distribution

$\mathcal{H}$  RKHS de noyau  $k : \mathcal{X}^2 \mapsto \mathbb{R}$  ( $\Phi(x) = k(x, \cdot)$ ) :



On se place dans un RKHS  $\mathcal{H}$  de noyau  $k$ . On recode le signal initial  $\{X_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  par le signal  $\{Y_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{H}^n$  défini par  $Y_i = k(X_i, \cdot) = k_{X_i}$ . Le modèle s'écrit :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad Y_i = \mu_i^* + \epsilon_i.$$

La détection de ruptures dans la distribution est de la détection de ruptures dans la moyenne dans le RKHS  $\mathcal{H}$  grâce à la propriété :

$$\forall i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \mu_i^* \neq \mu_j^* \Rightarrow P_{X_i} \neq P_{X_j}.$$

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Sélection de modèle
- 3 Méthodes existantes
  - Programmation dynamique
  - Segmentation binaire
- 4 Conclusion

## Notations

- $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{H}^n$  et  $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*) \in \mathcal{H}^n$ .
- $\mathcal{M}$  est l'ensemble des segmentations  $m = \{\tau_i\}_{i \in \llbracket 1, D_m - 1 \rrbracket}$ .
- Soit  $\{\mathcal{S}_m, m \in \mathcal{M}\}$  la famille de modèles avec  $\mathcal{S}_m$  l'ensemble des  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{H}^n$  vérifiant :

$$u_1 = \dots = u_{\tau_1}, u_{\tau_1+1} = \dots = u_{\tau_2}, \dots, u_{\tau_{D_m-1}+1} = \dots = u_n.$$

- Estimateur du risque empirique :  $\hat{\mu}_m = \arg \min_{u \in \mathcal{S}_m} \|Y - u\|_{\mathcal{H}^n}^2$ .

## Objectif

Trouver la meilleure segmentation  $\hat{m}$  parmi l'ensemble des segmentations candidates  $m \in \mathcal{M}$ .

## Critère pénalisé

$\hat{m}$  est défini par :

$$\hat{m} = \arg \min_{m \in \mathcal{M}} \text{crit}(m).$$

L'objectif est de trouver un critère  $\text{crit}(m)$  permettant de quantifier la distance entre  $\mu^*$  et  $\hat{\mu}_m$ .

Certains critères pénalisés fournissent une inégalité oracle :

$$\text{crit}(m) = \|Y - \hat{\mu}_m\|_{\mathcal{H}^n}^2 + \text{pen}(m) \approx \|\hat{\mu}_m - \mu^*\|_{\mathcal{H}^n}^2.$$

$$\|\hat{\mu}_{\hat{m}} - \mu^*\|_{\mathcal{H}^n}^2 \leq \inf_{m \in \mathcal{M}} \{\|\hat{\mu}_m - \mu^*\|_{\mathcal{H}^n}^2 + \text{pen}(m)\} + R_n,$$

$R_n$  est un terme de reste.

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Sélection de modèle
- 3 Méthodes existantes**
  - Programmation dynamique
  - Segmentation binaire
- 4 Conclusion

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Sélection de modèle
- 3 Méthodes existantes
  - Programmation dynamique
  - Segmentation binaire
- 4 Conclusion

# Détection de ruptures par programmation dynamique

Cette méthode, basée sur la programmation dynamique, se décompose en deux étapes :

## 1 Programmation dynamique :

$$\hat{m}_D = \arg \min_{m \in \mathcal{M}(D)} \|Y - \hat{\mu}_m\|_{\mathcal{H}^n}^2.$$

## 2 Sélection de modèle :

$$\hat{D} = \arg \min_{D \in \llbracket 1, D_{max} \rrbracket} \{ \|Y - \hat{\mu}_{\hat{m}_D}\|_{\mathcal{H}^n}^2 + pen(\hat{m}_D) \}.$$

avec :

- $\mathcal{M}(D)$  l'ensemble des segmentations de  $\{1, \dots, n\}$  en  $D$  segments.
- $pen(m) = \frac{CD_m}{n} \left( \log\left(\frac{n}{D_m}\right) + 1 \right)$  avec  $C$  une constante à calibrer par heuristique de pente.

# Compromis précision-temps de calcul

## Précision (Arlot, Celisse et Harchaoui 2012)

Sous les hypothèses suivantes,

- $\exists M > 0, \sup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|Y_i\|_{\mathcal{H}}^2 = \sup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} k(X_i, X_i) \leq M^2$ .
- $\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} v_i \leq v_{max}$  ( $v_i = E[\|\epsilon_i\|_{\mathcal{H}}^2]$ ).
- $\exists 0 < c_{min} < +\infty, \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} v_i \geq \frac{M^2}{c_{min}} =: v_{min} > 0$ .

avec une probabilité supérieure à  $1 - e^{-x}$ , si  $C_1 \geq L_1 c_{min}^2$ , on a le résultat :

$$\frac{1}{n} \|\hat{\mu}_{\hat{m}} - \mu^*\|_{\mathcal{H}^n}^2 \leq 2 \inf_{m \in \mathcal{M}} \left\{ \frac{1}{n} \|\hat{\mu}_m - \mu^*\|_{\mathcal{H}^n}^2 + 2pen(m) \right\} + \frac{C_1 (\log(4) + x) v_{max}}{n}.$$

## Temps de calcul

C'est une méthode exacte dont la complexité est de  $O(D_{max} n^4)$  en temps et  $O(D_{max} n^2)$  en espace.

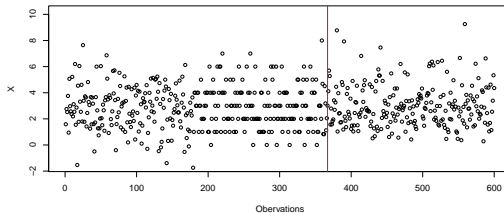
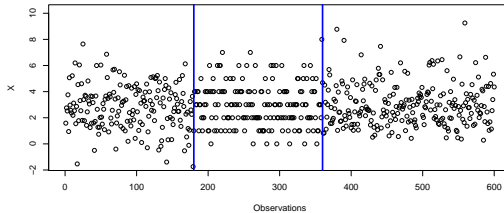


# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Sélection de modèle
- 3 Méthodes existantes
  - Programmation dynamique
  - **Segmentation binaire**
- 4 Conclusion

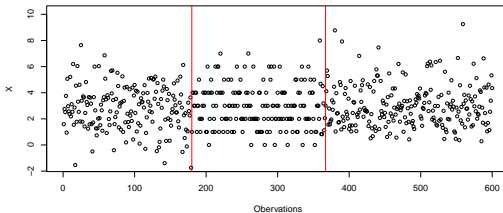
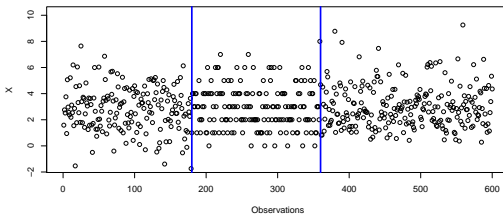
## Exemple itération 1

### Itération 1



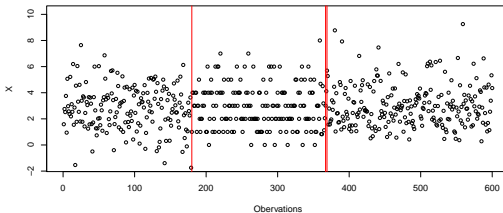
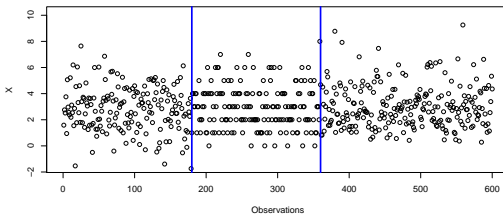
## Exemple itération 2

### Itération 2



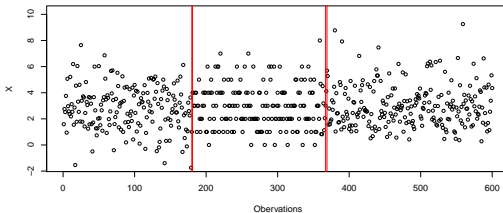
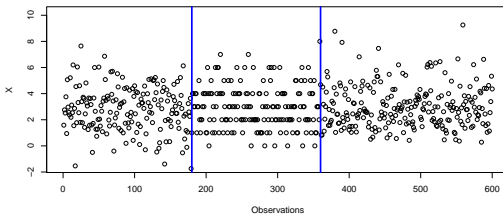
## Exemple itération 3

### Itération 3



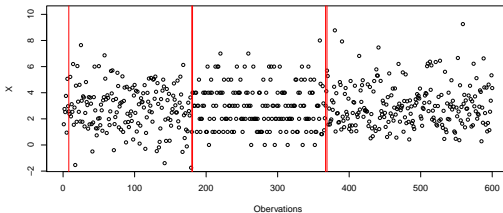
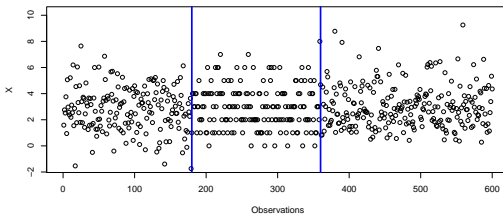
## Exemple itération 4

### Itération 4



## Exemple itération 5

### Itération 5



## Principe

À l'itération  $t$ , on cherche à minimiser le risque en  $\beta$  pour trouver les instants de ruptures :

$$\begin{aligned} R(\beta_1^{(t)}, \dots, \beta_n^{(t)}) &= R(\beta^{(t)}) = \left\| Y - X^{(t)} \beta^{(t)} \right\|_{\mathcal{H}^n}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| Y_i - \sum_{j=1}^n X_{i,j}^{(t)} \beta_j^{(t)} \right\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

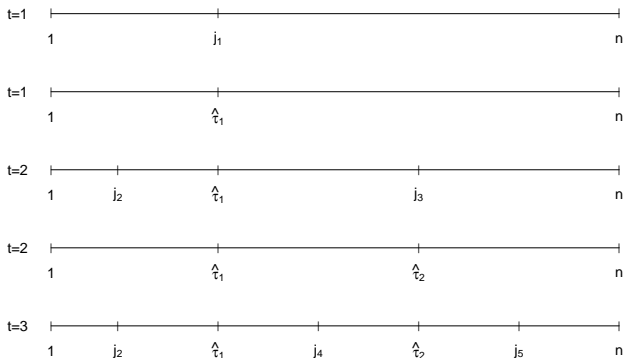
où  $X^{(t)}$  est réactualisée à chaque itération.

On utilise la méthode de descente de coordonnées et la segmentation binaire.

La descente de coordonnées fournit la direction  $j$  minimisant  $R(\beta^{(t)})$  et son minimiseur  $\beta_j \in \mathcal{H}$ .

## Segmentation binaire

$$\text{Critère : } R(\beta_1^{(t)}, \dots, \beta_n^{(t)}) = \left\| Y - X^{(t)} \beta^{(t)} \right\|_{\mathcal{H}^n}^2 = \sum_{i=1}^n \left\| Y_i - \sum_{j=1}^n X_{i,j}^{(t)} \beta_j^{(t)} \right\|_{\mathcal{H}}^2.$$





## Estimateur

A l'itération  $t$ , on récupère une segmentation  $\hat{m}_D$  en  $D = t + 1$  segments :

$$\hat{m}_D = \arg \min_{m \in \mathcal{M}_D(\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_{D-2})} \|Y - \hat{\mu}_m\|_{\mathcal{H}^n}^2,$$

avec  $\mathcal{M}_D(\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_{D-2})$  est l'espace des segmentations en  $D$  segments avec  $D - 2$  instants de ruptures calculés à l'itération  $t - 1$ .

## Compromis précision-temps de calcul

### Temps de calcul

La segmentation binaire à noyau a une complexité de  $O(n^2)$  en temps et  $O(n)$  en espace.

### Précision

La recherche d'un temps d'arrêt  $\hat{D}$  demeure une question.

### Algorithme

La complexité de l'algorithme est  $O(\hat{D}n^2)$  en temps et  $O(\hat{D}n)$  en espace.

## Une piste

Dans le cas,  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ , on a le résultat suivant (Fryzlewicz 2014) :

## Hypothèses

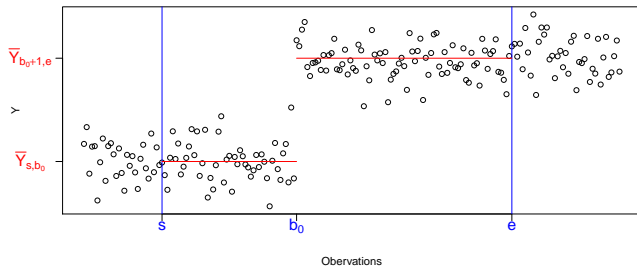
- $\min_{i \in [1, D^*]} |\tau_i^* - \tau_{i-1}^*| \geq \delta_n \geq C_1 n^\alpha$  avec  $C_1 > 0$  et  $\alpha \leq 1$ .
- $\min_{i \in [1, D^*]} |\mu_{\tau_i^*}^* - \mu_{\tau_{i-1}^*}^*| \geq f_n \geq C_2 n^{-\beta}$  avec  $C_2 > 0$  et  $\beta \geq 0$ .
- $\alpha - \frac{\beta}{2} > \frac{3}{4}$ .

## Théorème

Sous des contraintes sur un paramètre de seuil  $\zeta_n$ ,  $P(\mathcal{A}_n) \geq 1 - C_3 n^{-1}$ ,

$$\mathcal{A}_n = \{\hat{D} = D^*, \max_{i \in [1, D^* - 1]} |\hat{\tau}_i - \tau_i^*| \leq C \xi_n\},$$

avec  $\xi_n = n^2 \delta_n^{-2} f_n^{-2} \log(n)$ .

Définition de  $\tilde{Y}_{s,e}^b$ 

Pour  $b \in \llbracket s, e - 1 \rrbracket$ ,

$$\tilde{Y}_{s,e}^b = \sqrt{\frac{(e-b)(b-s+1)}{e-s+1}} (\bar{Y}_{s,b} - \bar{Y}_{b+1,e})$$

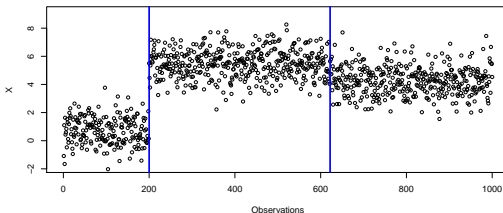
## Algorithme (Fryzlewicz 2014)

```
fonction BinSeg(s,e, $\zeta_n$ )
  si e-s<1 alors
    STOP
  sinon
     $b_0 = \arg \max_{b \in \llbracket s, e-1 \rrbracket} |\tilde{Y}_{s,e}^b|$ 
    si  $|\tilde{Y}_{s,e}^{b_0}| > \zeta_n$ 
      ajouter  $b_0$  à l'ensemble des instants de ruptures estimés
      BinSeg(s,  $b_0$ ,  $\zeta_n$ )
      BinSeg( $b_0 + 1$ , e,  $\zeta_n$ )
    sinon
      STOP
  fin si
fin fonction
```

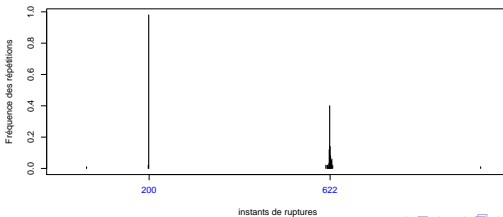
On exécute BinSeg(1,n, $\zeta_n$ ).

## Résultats

Pour 100 répétitions d'un bruit  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ( $n = 1000$ ) :

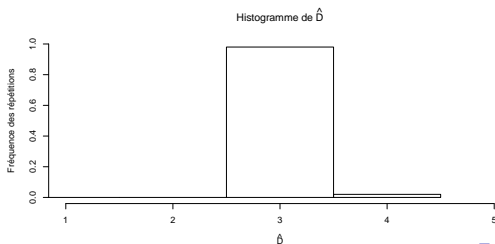
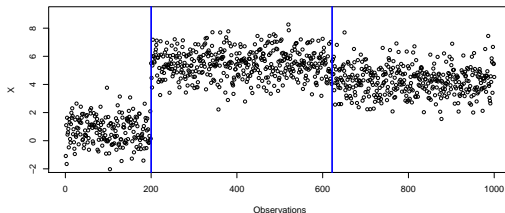


Graphique représentant la fréquence des répétitions en fonction des instants de ruptures



## Résultats

Pour 100 répétitions d'un bruit  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ( $n = 1000$ ) :



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Sélection de modèle
- 3 Méthodes existantes
  - Programmation dynamique
  - Segmentation binaire
- 4 Conclusion



# Conclusion

## Résultats

Algorithme permettant de récupérer des estimateurs des instants de ruptures.

## Perspectives

Trouver le temps d'arrêt de l'algorithme.

## Bibliographie



Arlot, Sylvain, Alain Celisse et Zaid Harchaoui (2012). *Kernel change-point detection*.



Fryzlewicz, Piotr (2014). « Wild binary segmentation for multiple change-point detection ». In : *The Annals of Statistics* 42.6, p. 2243–2281. issn : 0090-5364, 2168-8966. doi : 10.1214/14-AOS1245.

Questions ?