



# Phénomènes d'agglomération de particules en une dimension

Rubenach Théo

## ► To cite this version:

Rubenach Théo. Phénomènes d'agglomération de particules en une dimension. Automates cellulaires et gaz sur réseau [nlin.CG]. 2015. hal-01230040v2

**HAL Id: hal-01230040**

**<https://inria.hal.science/hal-01230040v2>**

Submitted on 30 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Rapport de Stage

## Phénomènes d'agglomération de particules en une dimension

Rubenach Théo

Été 2015 - Réalisé à l'Inria Nancy Grand Est

encadrant : Nazim Fatès

**Présentation** Ce rapport de stage présente un travail sur les phénomènes d'agglomération de particules en une dimension. Nous travaillons sur une ligne discrète et avec des conditions aux bords périodiques. Notre modèle part de la transposition d'un résultat obtenu en deux dimensions : l'existence de transitions de phase ordre-désordre dans des automates cellulaires qui modélisent les phénomènes de formation d'essaims (cf. travaux de Bouré, Chevrier et Fatès).

On étudie ici quels sont les modèles unidimensionnels qui peuvent reproduire les transitions de phase observées sur le modèle bidimensionnel. Nous définissons un cadre d'étude et cherchons à déterminer si l'on observe des transitions de phase dans les phénomènes d'agrégation de particules sur une ligne à bords périodiques.

# Table des matières

|          |                                                             |           |
|----------|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction Générale</b>                                | <b>3</b>  |
| 1.1      | Contexte . . . . .                                          | 3         |
| 1.2      | Ergodicité, transitions de phase et métastabilité . . . . . | 3         |
| 1.3      | Présentation des automates de gaz sur réseau . . . . .      | 4         |
| 1.4      | Le modèle des essaims . . . . .                             | 5         |
| 1.5      | Adaptation en une dimension . . . . .                       | 5         |
| <b>2</b> | <b>TASEP et double TASEP</b>                                | <b>6</b>  |
| 2.1      | Définition du TASEP et du double TASEP . . . . .            | 6         |
| 2.2      | Remarques sur le modèle de double TASEP . . . . .           | 7         |
| <b>3</b> | <b>Définitions et notations formelles</b>                   | <b>8</b>  |
| 3.1      | TASEPs et doubles TASEPs . . . . .                          | 8         |
| 3.2      | Paramètres de mesure . . . . .                              | 9         |
| 3.3      | Règles d'évolution . . . . .                                | 10        |
| <b>4</b> | <b>Implémentation et simulations du Double TASEP</b>        | <b>12</b> |
| 4.1      | Implémentation informatique . . . . .                       | 12        |
| 4.2      | Simulation et pertinence des règles d'évolution . . . . .   | 12        |
| <b>5</b> | <b>Étude de la règle naïve</b>                              | <b>15</b> |
| 5.1      | Critique du modèle . . . . .                                | 17        |
| 5.2      | Étude du régime transitoire . . . . .                       | 20        |
| <b>6</b> | <b>Étude de la règle attractive</b>                         | <b>21</b> |
| <b>7</b> | <b>Étude de la règle sensible</b>                           | <b>22</b> |
| <b>8</b> | <b>Conclusion et pistes de recherche</b>                    | <b>24</b> |

## Remerciements

Ce rapport, fruit d'un travail de six semaines, n'aurait pu voir le jour sans la supervision de mon maître de stage Nazim Fatès, à qui mes remerciements vont en tout premier lieu. Pour avoir eu la patience nécessaire pour me laisser évoluer et découvrir la rigueur nécessaire à la science par moi-même ; pour l'autonomie intellectuelle et matérielle dont j'ai bénéficié ; pour les discussions toujours très enrichissantes que nous avons pu avoir enfin, sur des sujets divers et s'éloignant parfois sensiblement de notre domaine d'étude, merci.

Je remercie également Irène Marcovici, co-créatrice du modèle du double TASEP, pour sa confiance et sa patience envers mon jugement quant au comportement de ce modèle, et pour ses idées pertinentes qui ont facilité l'étude de ce modèle.

Mes remerciements vont de manière plus générale à l'ensemble du personnel de l'Inria, pour l'ambiance de travail agréable et conviviale, et l'excellence du cadre dans lequel j'ai eu la chance d'évoluer.

Je remercie enfin Zacharie Girod, sans la compagnie duquel les repas de midi et les pauses café auraient été bien solitaires.

# 1 Introduction Générale

## 1.1 Contexte

De nombreuses espèces animales se déplacent en essaim (insectes, poissons, oiseaux...), c'est-à-dire que les animaux forment un groupe organisé, où tous les individus se dirigent dans la même direction de façon cohérente. C'est un exemple d'auto-organisation, où chaque individu est aligné avec le reste du groupe sans qu'il ne connaisse l'orientation générale de l'essaim et sans que l'essaim lui-même ne communique avec chacun des animaux le composant.

Une étape intéressante à étudier est alors le passage entre l'état initial, où les animaux sont désorganisés, et l'état organisé, où on peut repérer des motifs au niveau macroscopique. Ce type de changement (du désordre à l'ordre) est nommé transition de phase par analogie avec le phénomène de physique statistique. Un système présentant ce type de phénomène va donc brutalement changer de comportement sans perturbation particulière : à un moment, il va basculer d'un « mode » à un autre ; et ces deux « modes » auront des caractéristiques souvent très différentes. On peut observer ces ruptures de comportement dans de nombreux modèles stochastiques.

Nous avons ici choisi de centrer notre étude sur l'un de ces modèles en particulier : le modèle des essaims, qui sera notre angle d'attaque dans la recherche des caractéristiques nécessaires à l'apparition de transitions de phase. Ce modèle a été largement étudié par Olivier Bouré dans sa thèse<sup>1</sup>, et peut se résumer comme suit : dans ce modèle, des particules se déplacent sur une grille, en ayant une probabilité un peu plus importante de se déplacer dans la même direction que ses voisines. Dans ce modèle, il existe des transitions de phase : une variation continue d'un paramètre produit subitement un changement qualitatif et quantitatif du comportement observé. Dans notre cas, des nuages compacts de particules ou des bandes apparaissent très clairement à partir d'une répartition initiale aléatoire : on a donc un changement qualitatif du comportement.

Dans notre étude, on se penchera en particulier sur un modèle en une dimension proche du modèle des essaims (qui est lui en deux dimensions). On espère donc mettre en évidence l'existence des phénomènes décrits plus haut sur un modèle en une dimension.

Il est intéressant de faire notre étude car si on sait qu'un phénomène de transition de phase nécessite une certaine quantité de "liberté" ou "bruit" dans le comportement du système (traduit notamment par le caractère stochastique des modèles), on ne sait pas quantifier précisément la limite de liberté (si tant est qu'elle existe). Un modèle en une dimension présentant moins de possibilités (et donc moins de liberté) qu'un modèle en deux dimensions, on espère pouvoir caractériser ne serait-ce que partiellement les conditions nécessaires à l'apparition de transitions de phase.

L'objectif poursuivi par notre travail est donc l'étude d'un modèle en une dimension proche de celui des essaims, dans le but de déterminer, d'analyser et éventuellement vérifier les conditions et raisons d'apparition de motifs géométriques ou du moins réguliers (c'est-à-dire étant visiblement différents d'une répartition aléatoire) stables dans le temps au niveau macroscopique, en partant d'un état initial désorganisé.

## 1.2 Ergodicité, transitions de phase et métastabilité

Avant de s'engager plus avant dans l'étude nos modèles, il convient de clarifier ce que nous entendons par "transition de phase". Comme on l'a dit, on a une transition de phase quand le système observé change brusquement de comportement – pas seulement quantitativement mais également qualitativement – à un certain seuil donné. L'exemple le plus courant de ce phénomène est certainement les changements d'états de l'eau : en faisant baisser la température continûment, rien ne se passe jusqu'à 0 °C : l'eau reste liquide. Comment expliquer alors qu'elle se solidifie à 0 °C ? Il y a un effet de seuil qui semble surprenant : un dixième de degré transforme un liquide en solide.

Dans les systèmes qui nous occupent, à savoir les automates cellulaires, on observe également des ruptures de comportement pour des variations de certains paramètres. La règle de la majorité, sur une grille cellulaire carrée (donc en deux dimensions) est un bon exemple d'automate cellulaire dans lequel on observe ce genre de phénomènes. Dans ce modèle, l'état des cellules peut prendre deux valeurs, blanc ou noir. À chaque pas de temps, chaque cellule devient blanche (resp. noire) s'il y a plus de cellules blanches (resp. noires) que de cellules noires (resp. blanches) dans son voisinage. La mise à jour se fait de manière synchrone, mais on introduit un pourcentage de bruit : à chaque mise à jour, un certain nombre de cellules vont aller à l'encontre de la règle. On constate alors que pour des valeurs importantes du bruit (supérieures à vingt-cinq pourcent), le système semble se comporter aléatoirement, et la densité de cellules noires reste aux alentours de cinquante pourcent. En revanche, en dessous de vingt pourcent, une couleur finit par l'emporter et occuper une large majorité de la grille, et cette domination dure un temps extrêmement long (voir figure 1).

---

1. Olivier Bouré. " Le simple est-il robuste ? " : une étude de la robustesse des systèmes complexes par les automates cellulaires. Artificial Intelligence. Thèse de doctorat. Université de Lorraine, 2013. tel-00918545v1

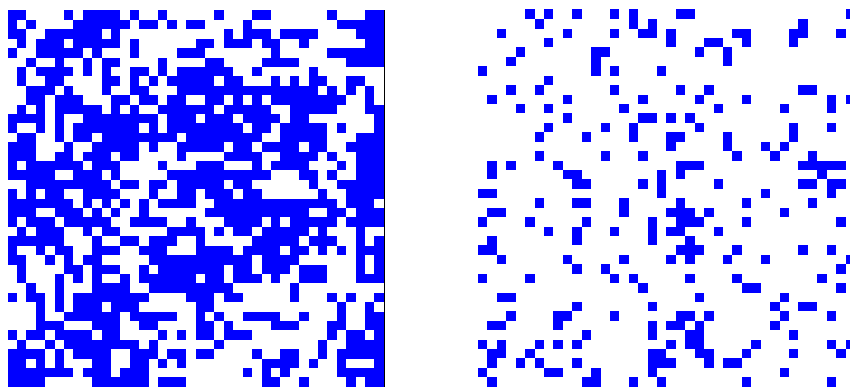


FIGURE 1 – Exemple de changement de comportement : capture d'écran, à  $T = 2000$ , de la grille (taille 40x40) d'un automate cellulaire suivant la règle de la majorité avec un voisinage constitué des quatre cellules les plus proches. À gauche, le pourcentage de bruit vaut 25%. À droite, il vaut 15%. À gauche, les couleurs sont réparties de manière quasi équitable, alors qu'à droite le blanc l'emporte clairement, et ce pour une longue période de temps. L'initialisation se fait de manière aléatoire, avec une densité de cellules noires de 50%.

Le système a donc bien changé de comportement, puisque nous sommes passés d'un comportement ergodique à un comportement non ergodique. L'ergodicité peut se comprendre comme suit : un système ergodique n'a pas de "mémoire", il repassera une infinité de fois par les états qu'il a déjà parcourus si on le laisse évoluer durant un temps infini. Un système non-ergodique possède lui une mémoire ; dans notre cas précis, la couleur dominante à l'étape précédente influe sur les étapes suivantes, et la probabilité de changer de couleur dominante (ou du moins de revenir à l'équilibre) est infinitésimale. Par infinitésimale, on entend qu'il est possible de construire une suite de mises à jour telle qu'on finisse par changer de couleur dominante, mais la probabilité que cette suite de mises à jour se produise est négligeable pour des tailles de grille suffisantes (car cette probabilité diminue très rapidement avec la taille de la simulation).

Pour mieux comprendre le caractère ergodique d'un processus, prenons un exemple simple : un lancer de pièce. Ce processus est ergodique, puisque les lancers passés n'influent pas sur les lancers futurs. On repassera une infinité de fois sur pile et une infinité de fois sur face, car la probabilité de ne faire que des piles (ou que des faces) diminue exponentiellement avec le nombre de lancers.

On peut parfois parler de *métastabilité* : analytiquement parlant, le phénomène (comme la domination de la couleur blanche, par exemple) n'est pas stable puisqu'on peut théoriquement en sortir via des enchaînements de mises à jour précises. On n'observera cependant jamais ces chaînes apparaître durant les simulations (sauf éventuellement en se plaçant aux valeurs limites d'apparition du comportement non-ergodique), ce qui justifie l'appellation de *méta-stabilité*. La raison en est que ces enchaînements de mises à jour ont une probabilité d'apparition qui décroît exponentiellement avec la taille du système. À l'infini, certains états ne seront donc jamais atteints puisque la probabilité limite d'arriver sur ces états est nulle. Le système (de taille infinie) est alors non ergodique. En taille finie cependant, le système est nécessairement ergodique, puisque l'on peut construire explicitement l'enchaînement et que celui-ci a une probabilité d'apparition non nulle.

### 1.3 Présentation des automates de gaz sur réseau

Le système de grille et de particules – le modèle des essaims ne fixant que la manière pour les particules d'évoluer –, et leur manière d'évoluer est appelé un automate de gaz sur réseau. C'est un cas particulier d'automate cellulaire. Un automate cellulaire est constitué de cellules, organisées selon une topologie particulière. L'ensemble des cellules est appelé *grille*, les topologies étant le plus souvent assimilables à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ou  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ . Ces cellules peuvent se trouver dans un certain nombre d'états. À chaque pas de temps, on va mettre à jour l'état de chacune des cellules en fonction de la *fonction d'itération*, qui donne l'état suivant d'une cellule en fonction des états des cellules de son voisinage, le voisinage dépendant du modèle, de la topologie... Dans les automates de gaz sur réseau, on dispose d'une grille de cellules sur laquelle se déplacent des particules. Une particule pourra se déplacer d'une cellule à une autre cellule voisine, selon une fonction *locale* – c'est à dire qu'elle ne dépend que du voisinage de la cellule – dite fonction de transition. La grille peut être dans le cas général de topologie carrée, hexagonale, elle peut être torique ou non, infinie... Le voisinage d'une cellule est défini de manière unique pour toutes les cellules, éventuellement de façon topologique (appartenance à une sphère de rayon donné, par exemple). Notons que le voisinage peut inclure

ou non la cellule elle-même. La fonction de transition enfin ne dépend que de l'état du voisinage, c'est-à-dire de l'état des cellules du voisinage.

Dans notre cas, nous considérerons une grille cellulaire de forme rectangulaire, torique, et un voisinage de 4 voisins (les cellules juste au-dessus, juste en-dessous, juste à droite et juste à gauche).

Afin de représenter la circulation des particules, on définit une cellule comme un ensemble de quatre *canaux*, chaque canal d'une cellule étant relié au canal équivalent d'une cellule de son voisinage. Un canal ne pouvant contenir qu'une seule particule, une cellule pourra contenir au maximum quatre particules.

Une des différences importantes entre les automates cellulaires classiques et les automates de gaz sur réseau réside dans la manière de les mettre à jour : si pour les automates cellulaires classiques, il suffit d'appliquer la fonction de transition locale à toutes les cellules, la mise à jour des automates de gaz sur réseau se décompose en deux étapes :

- ★ L'étape d'interaction. Dans cette phase, les particules de chaque cellule se répartissent dans les différents canaux de la cellule, selon la fonction locale d'interaction (voir figure 2).

- ★ L'étape de propagation. Durant cette deuxième étape, chaque particule se déplace vers une cellule voisine, selon le canal qu'elle avait choisi durant la phase d'interaction.

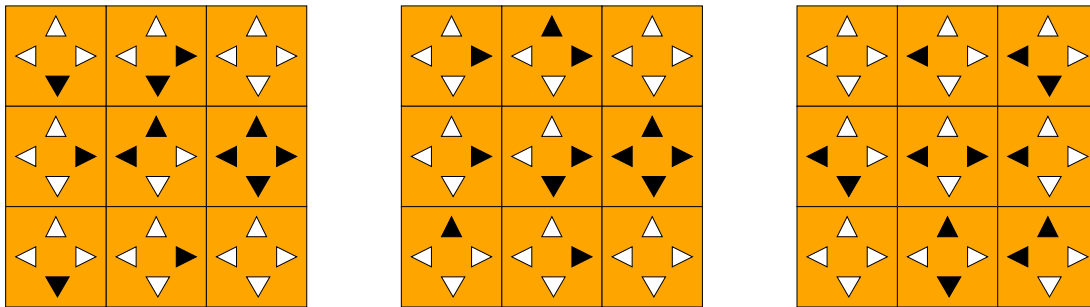


FIGURE 2 – Exemple d'itération de la fonction de transition globale : d'une situation initiale (premier schéma), les particules choisissent – en fonction de la fonction d'interaction – un canal de la cellule dans laquelle elles sont ; c'est la phase d'interaction (schéma 2). Puis elles changent de cellule en suivant le canal choisi (phase de propagation), et on arrive à la configuration représentée sur le schéma 3.

## 1.4 Le modèle des essaims

Le modèle des essaims est une règle d'évolution particulière des automates de gaz sur réseau. On le nomme ainsi en raison des motifs, rappelant des essaims, qui peuvent apparaître sous certaines conditions avec ce modèle. Dans le modèle des essaims, la fonction de transition tend à aligner une cellule avec ses voisins ; en effet, pour une cellule et une configuration donnée, chaque direction va se voir attribuer une certaine probabilité d'être choisie, probabilité qui sera d'autant plus grande que les particules des cellules voisines vont dans cette direction. Les particules auront donc tendance à s'aligner sur la moyenne des directions des particules des cellules voisines.

Un paramètre  $\sigma$ , nommé sensibilité, permet de réguler cette tendance à l'alignement : une valeur de zéro entraînera l'absence de tendance (directions équiprobables), par exemple.

## 1.5 Adaptation en une dimension

A l'aide du logiciel Fiatlux (<http://fiatlux.loria.fr/>), nous avons pu vérifier les résultats prévus et simulés notamment par Olivier Bouré<sup>2</sup> concernant les motifs macroscopiques qui apparaissent dans le modèle des essaims pour certaines valeurs de taille de grille, de sensibilité à l'alignement et de densité de particules. On a en particulier pu lier, comme les résultats présentés dans sa thèse le prévoient, l'apparition de certains motifs macroscopiques – comme des bandes se déplaçant en diagonale, des damiers ou encore des nuages sans forme particulière mais se déplaçant toujours dans la même direction – à des points paramétriques de l'espace (densité de particule, sensibilité d'attraction).

Ces motifs sont *métastables*, c'est-à-dire qu'il existe une probabilité infinitésimale que le motif se détruise (voir paragraphe 1.2). Cette probabilité diminue avec la taille de la grille, ce qui fait qu'à l'échelle de la simulation, on

2. Olivier Bouré. " Le simple est-il robuste ? " : une étude de la robustesse des systèmes complexes par les automates cellulaires. Artificial Intelligence. Thèse de doctorat. Université de Lorraine, 2013. tel-00918545v1

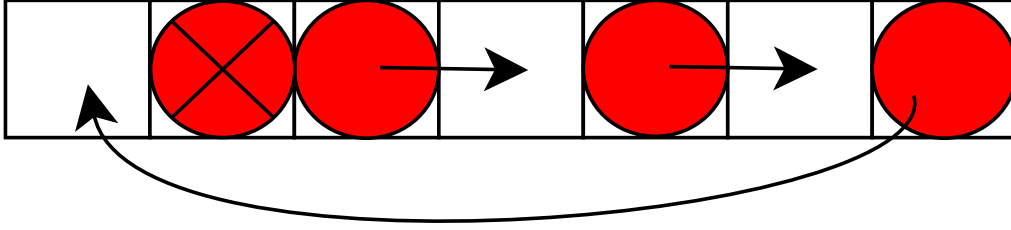


FIGURE 3 – Exemple de TASEP simple torique. À chaque pas de temps du système, on choisit une particule. Dans notre exemple, si la particule est barrée d’une croix, c’est qu’elle ne peut pas bouger, on attend donc le prochain pas de temps. Si la particule peut bouger (avec une flèche), elle se déplace vers la case sur laquelle pointe l’extrémité de la flèche.

n’observe jamais de disparition de motif dès lors qu’on travaille sur une grille pas trop petite (de taille supérieure à 50). Cependant, obtenir des preuves analytiques des phénomènes observés se révèle être ardu, voire impossible, en deux dimensions tout du moins. Aussi avons nous choisi de simplifier ce modèle en réduisant le nombre de dimensions de la grille servant de support à une seule dimension (au lieu de deux au départ). Outre que la simulation est plus rapide et les preuves plus faciles, cela apporte un autre avantage : la proximité du modèle avec le modèle du TASEP – Totally Asymmetric Simple Exclusion Process –, qui a déjà été beaucoup étudié par ailleurs (références à venir).

On espère en étudiant ce modèle pouvoir mettre en évidence l’existence d’attracteurs, c’est-à-dire des ensembles de configurations dans lesquels le système va avoir tendance à rester une fois qu’il y est entré. On se posera également la question de l’existence de transitions de phase, quand le système change brutalement et radicalement de comportement.

## 2 TASEP et double TASEP

### 2.1 Définition du TASEP et du double TASEP

Le principe du TASEP est le suivant : on considère une suite (éventuellement infinie) de cases ou cellules, dont certaines contiennent des particules. Une case ne peut contenir qu’une seule particule. À chaque étape, on choisit une particule, et celle-ci va se déplacer d’une case dans le sens de propagation du TASEP (par exemple vers la droite) si la case cible est vide ; on recommence le tirage sinon (voir figure 3). Ce modèle, notamment dans sa version plus générale (avec une probabilité de se déplacer vers la droite et une probabilité de se déplacer vers la gauche), a été largement étudié, ce qui nous permet d’avoir quelques idées quant aux paramètres qui peuvent être intéressants à étudier et aux comportements que l’on pourrait observer.

**Le double TASEP** Nous proposons ici un modèle que nous nommerons double TASEP. Il est constitué de deux canaux – de même taille – superposés. Chaque canal se comporte comme un TASEP. Les sens de propagation sont opposés. *Par convention, on considérera que le sens de propagation des TASEPs est le suivant : celui du haut va vers la droite, et celui du bas va vers la gauche.*

**Définition :** On appellera (cf. figure 4) :

- *voisin vertical* d’une cellule, la cellule située juste au-dessous ou au-dessus d’elle ;
- *prédécesseur* d’une cellule, la cellule placée juste avant elle (déterminé en fonction du sens de propagation du TASEP) ;
- *successeur* d’une cellule, la cellule placée juste après elle (en fonction du sens de propagation du TASEP toujours).

Il existe, en plus des règles d’évolution classiques du TASEP qui permettent aux particules d’avancer sur leur canal selon les règles du TASEP (cf. 2.1), une interaction entre les deux canaux qui prend la forme suivante : une particule peut *sauter* et changer de canal, selon des conditions (comme par exemple, le fait que la cellule d’arrivée doit être libre) qui dépendront du modèle que l’on souhaite implémenter. On rend ainsi compte de la possibilité pour une particule de changer de direction, comme c’était le cas dans le modèle des essaims. On pourra alors définir plusieurs règles d’évolution en agissant sur les cas dans lesquels on saute, les cas dans lesquels on avance et les cas dans lesquels on choisit l’une des deux actions. Un exemple de règle d’évolution (la règle dite *naïve*, définie au 3.3) est résumée dans la figure 5.

|                    |                     |            |
|--------------------|---------------------|------------|
| Prédeces-<br>-seur | Cellule<br>Courante | Successeur |
|                    | Voisin<br>Vertical  |            |

FIGURE 4 – Définition des relations de voisinage entre cellules

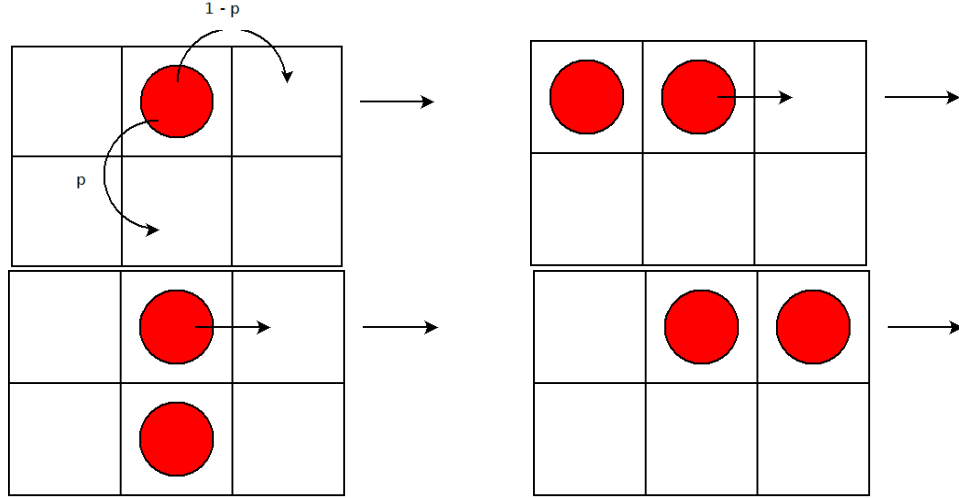


FIGURE 5 – Un exemple : les différents cas possibles pour le mouvement d'une particule dans la règle naïve : la possibilité de changer de canal si le prédécesseur, le successeur et le voisin vertical ne sont pas occupés par une particule ; le mouvement vers l'avant si le voisin vertical ou le prédécesseur est occupé par une particule et enfin le cas où la particule est bloquée. La flèche indique le sens de propagation du canal haut.

## 2.2 Remarques sur le modèle de double TASEP

L'intérêt de ce modèle vis-à-vis du modèle des essaims réside dans sa simplicité, et les avantages de ce modèle sont les suivants : premièrement, on conserve l'idée que deux "nuages" de particules peuvent se croiser et s'interpénétrer sans interaction majeure entre eux, comme on avait pu remarquer sur certains points paramétriques dans le modèle des essaims. On aura alors un nuage sur le TASEP haut et un nuage sur le TASEP bas. On remarque également que nous avons conservé le principe d'exclusion pour les particules : deux particules ne peuvent être dans la même cellule au même moment.

On note cependant quelques désavantages à notre système. Tout d'abord, il peut arriver qu'une particule soit bloquée – si son successeur et son voisin vertical sont occupés. Ce n'est pas possible dans le modèle des essaims, puisque la mise à jour y est faite de manière synchrone. On peut cependant remarquer une similitude avec certains types d'asynchronismes développés par Olivier Bouré dans sa thèse<sup>3</sup>. Cela correspond d'ailleurs davantage à notre modèle, puisque nous réaliserons la mise à jour de manière asynchrone. En effet, une mise à jour synchrone entraînerait une gestion complexe des cas de collision (si une particule veut avancer vers une case et une autre sauter vers cette case, par exemple).

On peut donc déjà se poser quelques questions avant même d'avoir lancé la moindre simulation : ce modèle est-il réellement proche du modèle des essaims, ou s'est-on trop rapprochés du TASEP ? La simplification opérée ne

3. Olivier Bouré. " Le simple est-il robuste ? " : une étude de la robustesse des systèmes complexes par les automates cellulaires. Artificial Intelligence. Thèse de doctorat. Université de Lorraine, 2013. tel-00918545v1

va-t-elle pas détruire la richesse de comportement que l'on cherche à reproduire ? Nous allons maintenant présenter le formalisme que nous utiliserons dans la suite afin de présenter nos réflexions et résultats.

### 3 Définitions et notations formelles

#### 3.1 TASEPs et doubles TASEPs

On désigne par  $\mathcal{E} = \{0, 1\}$  l'ensemble des états d'une cellule d'un TASEP ou d'un double TASEP. Une cellule est dans l'état "1" ou "occupé" si elle contient une particule ; elle est dans l'état "0" ou "libre" sinon.

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des cellules. (Un double TASEP de taille  $n$  a donc deux fois plus de cellules qu'un TASEP simple de même taille.)

**Définition :** On désigne par configuration  $x^t$  d'un TASEP ou double TASEP l'ensemble des états des cellules à un instant  $t$  :

$$x^t = (x_i^t)_{i \in \mathcal{C}}.$$

Un **TASEP** de taille  $n$  torique est entièrement caractérisé par :

- $\mathcal{C} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  une suite de cellules de taille  $n$ ,
- $p \in [0; 1]$  la probabilité pour une particule, si la cellule suivante est libre, d'avancer d'une cellule.

Notons que la probabilité  $p$  n'a d'influence que sur la rapidité d'évolution du système et non sur la forme des distributions de particules.

On considérera par ailleurs le plus souvent que nos TASEPs sont initialisés avec une densité  $\rho \in [0; 1]$  de sites occupés, la répartition en étant aléatoire avec une distribution de Bernoulli de paramètre  $\rho$ .

**Définition :** Un double TASEP de taille  $n$  torique se définit comme

- $\mathcal{C} = C_1 \cup C_2$ , où  $C_1 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $C_2 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sont une suite de cellules, de taille  $n$ , constituant respectivement le premier et second canal,
- $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^6$  le voisinage d'une cellule : à toute cellule on associe son voisinage, qui est un ensemble de 6 cellules,
- $F : \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$  la fonction de transition qui associe à une configuration  $x^t$  la configuration  $x^{t+1}$  obtenue par évolution du système en un *pas de temps*.

**Définition :** On appelle *cellules dynamiques* les cellules dont le successeur est libre. Un exemple de configuration type est présenté sur la figure 6.

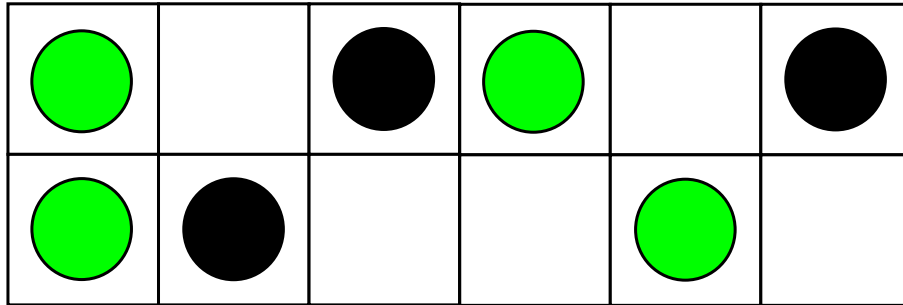


FIGURE 6 – Exemple de configuration : les cellules dynamiques sont en vert, les cellules bloquées sont en noir.

La fonction de transition globale  $F$ , appliquée au système à chaque pas de temps, se décompose en deux étapes :

- Le choix d'une particule pouvant bouger (ce qui revient à sélectionner une cellule dynamique pour certaines règles d'évolution, une cellule occupée pour d'autres),
- L'application de la fonction locale de transition  $f$ , qui détermine quel mouvement va effectuer la particule contenue par la cellule choisie.

On passe ainsi d'une configuration à une autre.

### 3.2 Paramètres de mesure

Il se pose maintenant la question de savoir comment nous allons observer le système. Il est évident qu'une simple représentation visuelle, aussi riche qu'elle soit, ne peut suffire à caractériser le comportement du système de manière suffisamment précise. Aussi nous avons choisi plusieurs paramètres de mesure afin d'avoir une meilleure représentation de notre système.

**Définition :** Pour toute configuration  $x \in \mathcal{E}^C$ , on appelle population d'un TASEP  $i$  et on notera  $\eta_i(x)$  le nombre total de particules que contient ce TASEP.

**Définition :** On appelle densité d'un TASEP (double ou non) de taille  $n$  et on note  $\rho$  le rapport de sa population sur son nombre de cellules :

- pour un TASEP simple,  $\rho = \eta/n$ .
- pour un double TASEP,  $\rho = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2n}$ .

Le premier paramètre que nous définissons, noté  $\Delta$ , permet de mesurer l'équilibre (ou le déséquilibre) existant entre les deux TASEPs en termes de nombre de particules. Il se calcule, pour une configuration donnée  $x \in \mathcal{E}^G$ , comme suit :

$$\Delta(x) = \frac{\eta_1(x) - \eta_2(x)}{\eta_1(x) + \eta_2(x)}$$

Ce paramètre de mesure est compris entre -1 et 1, une valeur de 1 (resp. -1) signifiant que toutes les particules sont sur le TASEP haut (resp. bas), le TASEP bas (resp. haut) étant donc vide.

**Définition :** On appelle agglomérat de particules de taille  $n$  toute suite continue de cellules  $(c_i)_{p \leq i < p+n}$  telle que  $x_{p-1} = 0$ ,  $x_{p+n} = 0$  et  $\forall i \in \{p, \dots, p+n\}, x_i = 1$ , où  $p$  est l'indice de la première cellule de l'agglomérat.

Le deuxième paramètre de mesure est la moyenne quadratique de la taille des agglomérats de particules que l'on trouve dans les TASEPs. Sa formule est la suivante :

$$G(x) = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d_i(x)^2},$$

où  $k$  est le nombre total d'agglomérats et  $d_i(x)$  est la taille du  $i$ -ème l'agglomérat. L'intérêt de ce paramètre est de nous permettre de mesurer l'état d'agglomération des particules dans le double TASEP. En effet, cette formule, via le carré, accorde davantage d'importance aux gros agglomérats que ne le ferait une moyenne arithmétique ordinaire. Nous pensons que cela est pertinent, dans la mesure où les gros agglomérats ont une probabilité d'apparition plus réduite tandis que les petits agglomérats seront présents quelles que soient les conditions de l'expérience. Cependant il conviendra de vérifier notre intuition en comparant, sur une même trajectoire du système, les différences dans l'information transmise par les deux différentes moyennes.

On définit un troisième paramètre de mesure : l'alignement moyen  $\hat{\gamma}$ , dans un but semblable à celui de la moyenne quadratique. Il se définit comme la moyenne arithmétique de l'alignement des cellules occupées :

$$\hat{\gamma}(x) = \sum_{i \in \mathcal{O}} \gamma_i(x),$$

avec  $\mathcal{O}$  l'ensemble des cellules occupées. L'alignement d'une cellule, lui, s'écrit pour une configuration  $x \in \mathcal{E}^C$  et une cellule  $i$  :

$$\gamma_i(x) = \frac{x_{i-2} + x_{i-1} + x_{i+1} + x_{i+2}}{4}.$$

Enfin, un dernier paramètre de mesure nous sera utile : la densité de cellules dynamiques  $\rho_d$ . Elle permet, pour une configuration  $x \in \mathcal{E}^C$  donnée, d'estimer la proportion de particules pouvant bouger. On espère donc ainsi caractériser le degré de dynamisme de la configuration  $x$ . Sa formule est la suivante :

$$\rho_d = \frac{\eta_d(x)}{\eta_1(x) + \eta_2(x)},$$

où  $\eta_d$  est le nombre de particules dynamiques sur l'ensemble du double TASEP.

|   |                     |   |
|---|---------------------|---|
| a | Cellule<br>Courante | e |
| b | c                   | d |

FIGURE 7 – Noms des différentes cellules du voisinage

### 3.3 Règles d'évolution

Nous serons amenés à travailler sur plusieurs règles différentes et à les comparer entre elles. Aussi, dans un but de clarté, est-il intéressant de formaliser les règles régissant l'évolution du mouvement des particules. Nous nommerons ces règles *règles d'évolution*.

Considérons un double TASEP  $\mathcal{T}$ . Soit  $c$  une cellule de  $\mathcal{T}$ . Le voisinage  $V$  de  $c$  à considérer est celui formé par les 6 cellules contiguës à  $c$  (incluant  $c$  elle-même), y compris en diagonale. Quelle que soit la règle d'évolution du double TASEP que nous considérons, elle se résume à deux probabilités  $p_a$  et  $p_s$  : les probabilités, respectivement, d'avancer, et de sauter (sur la cellule voisine verticale, donc). On remarque que dans le cas général, il existe également une probabilité  $p = 1 - p_a - p_s$  non nulle que la particule choisie ne bouge pas. Cependant, dans notre définition de la fonction de transition (voir 3.1), nous avons spécifié que l'on choisissait à chaque étape une cellule pouvant bouger. La probabilité  $p$  n'a du coup pas d'autre effet que de ralentir l'évolution du système, en créant des pas de temps où la configuration restera inchangée. Nous considérerons donc dans la suite qu'elle est nulle, et nous travaillerons avec  $p'_a$  et  $p'_s$  tels que  $p'_a + p'_s = 1$ . Il suffit pour passer d'un cas à l'autre de normaliser  $p_a$  et  $p_s$  pour que leur somme fasse bien 1 :

$$p'_a = \frac{p_a}{p_a + p_s}$$

$$p'_s = \frac{p_s}{p_a + p_s}$$

Cela correspond par ailleurs aux choix d'implémentation effectués sur FiatLux (voir partie 4). Dans la suite, nous travaillerons avec  $p_a$  et  $p_s$  pour ne pas alourdir inutilement les calculs. Il conviendra simplement de garder à l'esprit que ces probabilités sont normalisées ensuite.

Une fois ces définitions posées, définir une règle d'évolution pour le double TASEP revient à fixer  $p_a(a, b, c, d, e)$  et  $p_s(a, b, c, d, e)$ . Il nous faut pour cela pouvoir nommer les cellules de  $V$ . Nous nommerons  $a$  le prédécesseur de la cellule courante,  $b$  le prédécesseur de son voisin vertical,  $c$  le voisin vertical,  $d$  son successeur, enfin le successeur de la cellule courante sera nommé  $e$  (cf. figure 7). Par abus de notation, nous noterons  $a = 1$  pour dire que  $a$  est occupée par une particule (donc que  $c_a = 1$ ),  $a = 0$  sinon. On notera par ailleurs  $\bar{a}$  l'état complémentaire à celui de  $a$  (plein si la cellule est vide et vice versa).

Comme il ne peut y avoir plusieurs particules sur la même cellule – principe d'exclusion –, on remarque que quelle que soit la règle, on aura

$$p_a(a, b, c, d, 1) = 0$$

$$p_s(a, b, 1, d, e) = 0$$

Cependant, comme nous l'avons défini plus haut, ces règles d'évolution ne seront appliquées qu'à des particules pouvant bouger.

Une fois muni de ce formalisme, on définit donc quatre règles qui nous seront utiles par la suite.

★ La règle naïve. Les cas de figure de cette règle d'évolution sont résumés à la figure 5. L'aspect stochastique du modèle des essaims est rendu avec la probabilité  $\beta$  de sauter d'un canal à un autre. On essaie également de recréer la sensibilité à l'alignement  $\sigma$  des particules du modèle des essaims avec l'idée qu'une particule dont le prédécesseur est occupé ne peut qu'avancer (et ne peut sauter) : elle ne changera donc pas de sens. À l'inverse, une particule

isolée et possédant donc ses prédécesseur et successeur libres, pourra sauter et ainsi rejoindre éventuellement une nouvelle zone plus chargée en particules. Il convient cependant de nuancer la similarité entre les deux modèles : alors que dans le modèle des essaims, les particules sont réellement attirées par la direction majoritaire, la règle d'évolution que nous proposons pour le double TASEP ne fait qu'*empêcher* les particules ayant des successeurs et/ou prédécesseurs de changer de TASEP (donc de direction).

$$p_a(a, b, c, d, e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = 1, \\ 1 & \text{si } e = 0 \text{ et } (c = 1 \text{ ou } a = 1), \\ \beta & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$p_s(a, b, c, d, e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = 1 \text{ ou } c = 1 \text{ ou } a = 1, \\ \beta & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Elle s'applique à une particule dynamique, c'est-à-dire une particule dont le successeur est libre. Intuitivement, le principal "défaut" de la règle naïve pouvant empêcher l'apparition d'une frontière claire entre agglomération et état désorganisé est l'absence d'attraction, de la part des particules isolées, pour les agglomérats situés sur l'autre TASEP. En effet, on avait dans le modèle des essaims cette tendance à l'alignement avec les voisins à travers la distribution des poids à chacune des 4 directions, tendance que l'on retrouve dans les règles sensible et attractive (cf. ci-dessous). Or le modèle actuel a relativement tendance à conserver les agglomérats, comme nous l'avons vu lors des simulations. Cela s'explique par la manière dont est définie la fonction de transition : on reste sur le même TASEP si le voisin de devant ou le voisin de derrière est occupé.

On cherche donc, en quelque sorte, à rendre  $\beta$  variable, c'est-à-dire à donner davantage de chances à une particule de rejoindre le TASEP localement plus peuplé que de quitter le TASEP plus peuplé. Pour cela, on va proposer deux modèles alternatifs et un modèle test : une marche aléatoire.

★ La marche aléatoire : chaque particule a une probabilité  $q$  de changer de canal ; elle ne fait rien sinon.

$$p_a = 0$$

$$p_s = q$$

Cette marche aléatoire a pour but de comparer les résultats de nos autres règles, afin d'éventuellement remarquer des similitudes avec le comportement aléatoire. Le cas échéant, on saurait soit que le modèle est proche d'une marche aléatoire, soit que nous n'utilisons les bons paramètres de mesure, par exemple.

★ La règle attractive : cette règle est conçue pour être plus proche du modèle des essaims. On peut cependant se poser la question de savoir s'il est sensé d'appliquer "bêtement" la formule alors que le nombre de directions possibles n'est que de deux. Une particularité de cette règle est qu'elle s'applique à une cellule occupée (c'est à dire à une particule quelconque) et non à une cellule dynamique, le but étant d'augmenter les possibilités de mouvement pour les particules. Cette règle d'évolution, en langage non mathématique, se définit comme suit : à chaque pas de temps, on choisit une particule. Si elle ne peut pas bouger (c'est-à-dire si son successeur et son voisin vertical sont occupés), on ne fait rien. Si l'un des deux mouvements est possible (sauter ou avancer), on effectue ce mouvement. Si les deux mouvements sont possibles, on affecte une probabilité  $p$  à chaque de ces deux directions, et on choisit ensuite l'un des deux mouvements en fonction des probabilités.

$$p_a(a, b, c, d, e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = 1, \\ 1 & \text{si } e = 0 \text{ et } c = 1, \\ e^{\sigma \cdot (n_1 - n_2)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$p_s(a, b, c, d, e) = \begin{cases} 0 & \text{si } c = 1, \\ 1 & \text{si } e = 1 \text{ et } c = 0, \\ e^{\sigma \cdot (n_1 - n_2)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $\sigma$  représente un paramètre permettant de modifier le degré de sensibilité d'une particule à l'occupation des deux canaux autour d'elle, et où  $n_1$  représente la population du canal haut ( $n_1 = a + 1 + e$ ) et  $n_2$  celle du canal bas ( $n_2 = b + c + d$ ). À l'aide de cette règle, on espère obtenir un comportement qui se rapprocherait davantage de celui des essaims, mais cela entraîne par ailleurs un éloignement des règles d'évolution "classiques" du TASEP et du double TASEP. On note que pour cette règle, il existe des configurations dans lesquelles la particule occupée choisie ne peut pas bouger : quand  $c = e = 1$ . Le cas de figure ne peut se produire dans les autres règles puisqu'elles concernent des particules dynamiques donc pour lesquelles  $e = 0$ .

★ Enfin la dernière règle d'évolution : la règle sensible. Cette règle est à mi-chemin entre notre règle usuelle et celle que nous venons de définir, c'est-à-dire que la règle d'évolution est la même que celle de la règle attractive, sauf qu'elle est appliquée à une cellule dynamique (contrairement à la règle attractive). Une formulation moins mathématique en est la suivante : à chaque pas de temps, on choisit une particule dynamique, c'est-à-dire une particule étant dans une cellule dont le successeur est libre. Si un seul mouvement lui est autorisé, on effectue ce mouvement. Sinon, on choisit l'un des deux mouvements de la même manière que pour la règle attractive. Une particule contenue dans une cellule dont le successeur est occupé est donc bloquée, comme c'est le cas dans la règle naïve. Les notations utilisées étant les mêmes que celles de la règle précédente :

$$p_a(a, b, c, d, e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = 1 \\ 1 & \text{si } c = 1, \\ e^{\sigma \cdot (n_1 - n_2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_s(a, b, c, d, e) = \begin{cases} 0 & \text{si } c = 1 \\ 0 & \text{si } e = 1. \\ e^{\sigma \cdot (n_1 - n_2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

## 4 Implémentation et simulations du Double TASEP

### 4.1 Implémentation informatique

**Présentation générale** Fiatlux (<http://fiatlux.loria.fr/>) est un logiciel permettant de simuler le comportement d'automates cellulaires et de structures s'en rapprochant ou pouvant y être assimilées. Il offre la possibilité de paramétrer le système que l'on veut simuler, et d'en avoir un aperçu visuel (lorsque cela est possible), ainsi que d'obtenir une batterie de graphes mesurant l'évolution de paramètres spécifiques à chaque modèle. Il est également possible de modifier certains paramètres du modèle à la volée, ou encore d'enregistrer les conditions d'une expérience (sauvegarde de la graine de nombres aléatoires) afin de pouvoir les relancer à l'identique.

**Implémentation du modèle du double TASEP** On a choisi de se positionner de manière relativement autonome vis-à-vis de la structure de cellules et de grille proposée par Fiatlux. En effet, il aurait fallu réfléchir à un moyen de faire la liaison entre les modèles déjà implémentés dans le logiciel et notre modèle de double TASEP, qui diffère d'un automate en une dimension par le fait qu'il possède deux canaux. Nous avons donc développé nos propres classes de manière indépendante du logiciel, avant de s'y raccorder. Il y a donc fallu choisir de quelle manière il convenait d'implémenter les éléments du double TASEP, de telle sorte que l'on puisse se servir malgré cette autonomie des outils qu'offre FiatLux.

Il a tout d'abord fallu définir ce qu'était un pas de temps pour le système, du point de vue informatique. Au vu de la définition du pas de temps que nous avons donnée plus haut, cela revient à dire qu'à chaque coup d'horloge, on choisira une particule et on effectuera un des mouvements qui lui sont possibles. Cette définition possède l'avantage, en terme de performances, d'éviter d'avoir des baisses importantes de performances pour le programme, voire éventuellement, pour des densités de particules importantes, de le rendre inutilisable. En effet, si on choisissait notre particule au hasard, on risquerait de souvent tomber sur une particule qui ne peut effectuer aucun mouvement ; la simulation en serait donc ralentie.

On va dans un premier temps chercher à répondre à la question : les modèles proposés sont-ils intéressants ? Ont-ils un comportement riche et complexe ? Le cas échéant, y a-t-il transition de phase ?

### 4.2 Simulation et pertinence des règles d'évolution

La première question à se poser est la suivante : ces modèles présentent-ils un réel intérêt, ou sont-ils trop proches du comportement du TASEP simple ? Pour tenter de répondre à cette question complexe, nous avons comparé un résultat classique du TASEP à notre double TASEP et à ses différentes règles d'évolution : l'histogramme des agglomérats. La taille des agglomérats du TASEP simple suit à l'équilibre une distribution géométrique de paramètre  $\rho$ , où  $\rho$  est la densité de particules sur le TASEP. Si on initialise le TASEP de manière aléatoire avec une densité  $\rho$ , la distribution est inchangée au cours du temps. En voici une démonstration simple : Soit  $i$  la première cellule composant un agglomérat. La cellule  $i - 1$  est donc vide. La cellule  $i + 1$  est occupée avec une probabilité  $\rho$ . La probabilité que  $i$  soit isolée (et donc qu'on ait un agglomérat de taille 1) vaut donc  $1 - \rho$ . La probabilité que  $i$

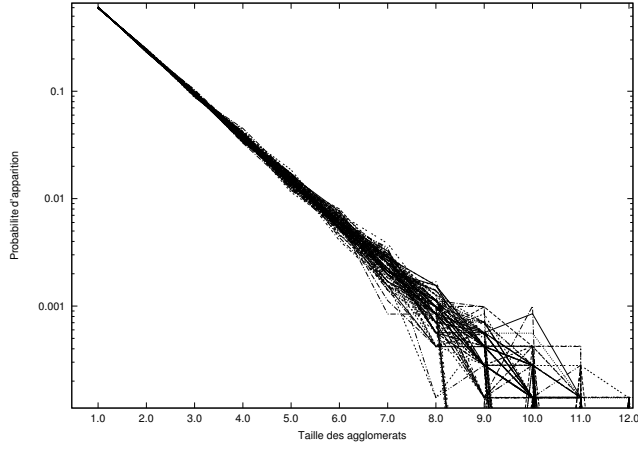


FIGURE 8 – Histogrammes des tailles d’agglomérat d’un TASEP de taille 300, avec une densité de 0.4. L’échelle des ordonnées est logarithmique. Les différentes courbes représentent l’évolution temporelle de la distribution des tailles.

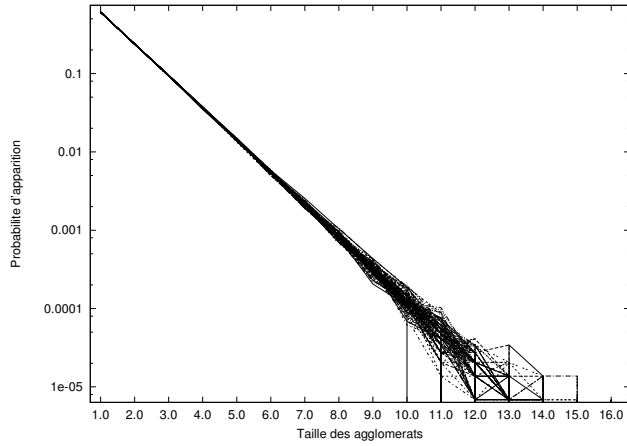


FIGURE 9 – Histogrammes des tailles moyennes d’agglomérat d’un double TASEP de taille 300 suivant la règle attractive, avec une densité initiale de 0.4. L’échelle des ordonnées est logarithmique. Les différentes courbes représentent l’évolution temporelle de la distribution des taille, de  $t = 0$  à  $t = 100000$ ; il y a donc une courbe tous les 1000 pas de temps. Courbes réalisées avec 1000 échantillons.  $\sigma$  vaut 8.

soit la première cellule d’un agglomérat de deux particules est donc  $\rho \cdot (1 - \rho)$ , etc. Par itération du raisonnement, la probabilité  $p_n$  qu’un agglomérat soit de taille  $n$  est :

$$p_n = (1 - \rho) \cdot \rho^n.$$

On retrouve ce résultat sur la figure 8. On remarque que la distribution est une droite en échelle logarithmique, ce qui correspond bien à une distribution géométrique. On constate également l’absence d’évolution temporelle : il n’y a pas de régime transitoire, le degré d’agglomération du système garde globalement sa valeur initiale. Enfin, on peut vérifier que le paramètre de la distribution est environ 0.4 soit la densité initiale, comme prévu par la théorie.

Penchons-nous maintenant sur la règle attractive. Puisque l’on cherche à comparer avec le TASEP simple, on lance une simulation avec des conditions similaires : taille 300, densité initiale de 0.4 par canal. Les histogrammes étant exprimés en probabilité d’apparition, on n’a pas à se soucier du fait d’un double TASEP de taille 300 comporte deux canaux et donc deux fois plus de cellules. Les résultats sont présentés sur la figure 9.

Le résultat est sans appel : nous avons également une distribution géométrique, et de même pente que celle du TASEP simple. Il semble donc que la règle attractive ne change rien à la répartition des particules : c’est exactement comme si on avait deux TASEPs simples sans interaction. Cette règle est donc sans intérêt vis-à-vis de ce que nous recherchons ; cependant il pourrait être intéressant d’étudier les raisons qui font que l’échange entre les deux canaux comme on l’a ici n’a aucun effet sur la dynamique de ceux-ci. Avant de conclure à l’inutilité de cette règle vis-à-vis de notre problème, on étudiera davantage cette règle afin de vérifier qu’il n’existe pas de comportement intéressant qui serait gommé par la taille de l’échantillon statistique ou qui ne serait pas visible sur les histogrammes.

La règle naïve, elle, présente un histogramme bien plus intéressant, comme on peut le voir à la figure 10.

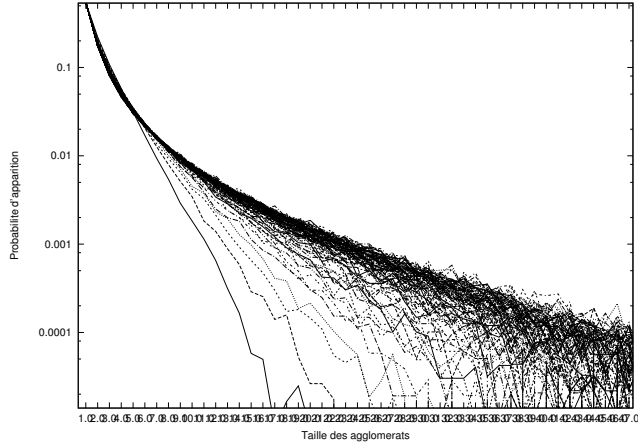


FIGURE 10 – Histogrammes des tailles moyennes des agglomérats d'un double TASEP suivant la règle naïve. Taille 300, densité initiale 0.4, 1000 échantillons, une courbe tous les 1000 pas de temps de 0 à 100000 avec  $\beta = 0.4$ . La première courbe, temporellement parlant, est la plus basse; les suivantes viennent dans l'ordre.

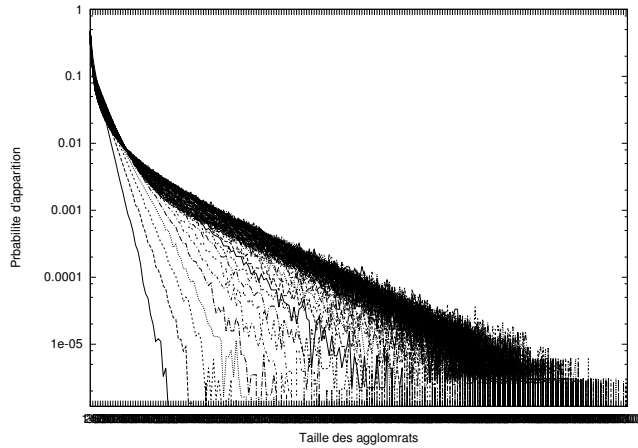


FIGURE 11 – Histogrammes des tailles moyennes des agglomérats d'un double TASEP suivant la règle sensible. Taille 300, densité initiale 0.4, 1000 échantillons, une courbe tous les 1000 pas de temps de 0 à 100000 avec  $\sigma = 8$ . La première courbe, temporellement parlant, est la plus basse; les suivantes viennent dans l'ordre.

L'histogramme du double TASEP avec cette règle n'est pas une droite, en échelle logarithmique. C'est donc que ce système possède une dynamique propre, différente de celle du TASEP, et la différence est non négligeable : il y a une nette tendance à l'agglomération, puisqu'il y a moins de « petits » agglomérats (tailles inférieures à 8) et davantage de gros agglomérats. Une deuxième caractéristique retient notre attention : alors que le TASEP présente un histogramme invariant au cours du temps, ce n'est pas du tout le cas du double TASEP évoluant avec la règle naïve. On peut donc raisonnablement penser qu'il existe un régime transitoire en temps, qu'il va nous falloir quantifier pour pouvoir par la suite soit l'étudier plus avant soit s'en affranchir (en se plaçant alors au-delà pour nos simulations). On peut donc affirmer que le modèle est digne d'intérêt. Outre la question de l'existence du régime transitoire, on peut également se poser la question de l'influence de  $\beta$  sur le système : une haute valeur favorise-t-elle l'agglomération, ou est-ce le contraire ?

Regardons enfin l'histogramme de la règle sensible, sur la figure 11. On note une tendance à l'agglomération plus forte encore que pour la règle naïve, ainsi qu'une variation du degré d'agglomération au cours du temps; là aussi, on peut supposer l'existence d'un régime transitoire, laissant place à un état aggloméré au bout d'un certain temps. Cette règle possède donc également un comportement riche, qu'il va falloir étudier. De même que pour la règle naïve avec  $\beta$ , il convient d'étudier l'effet du paramètre  $\sigma$  sur le comportement du système : dans quelle mesure favorise-t-il l'agglomération ?

Afin de visualiser plus clairement les différents degrés d'agglomération, on trouvera sur la figure 12 un comparatif des quatre histogrammes (TASEP classique, règles naïve, sensible et attractive) au temps 100000, c'est-à-dire au-delà du régime transitoire pour les règles qui en possèdent un. Ce graphe confirme visuellement que la règle attractive ne possède pas de tendance à l'agglomération puisque la courbe reste confondue avec celle du

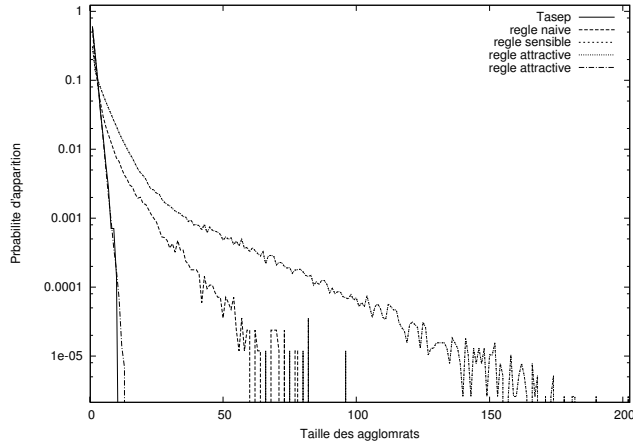


FIGURE 12 – Comparaison des histogrammes des tailles moyennes des agglomérats pour le TASEP classique et le double TASEP avec les trois règles d'évolution : naïve, sensible, attractive. Taille 300, densité 0.4, 1000 échantillons,  $\sigma = 8$ ,  $\beta = 0.4$  pour les règles concernées.

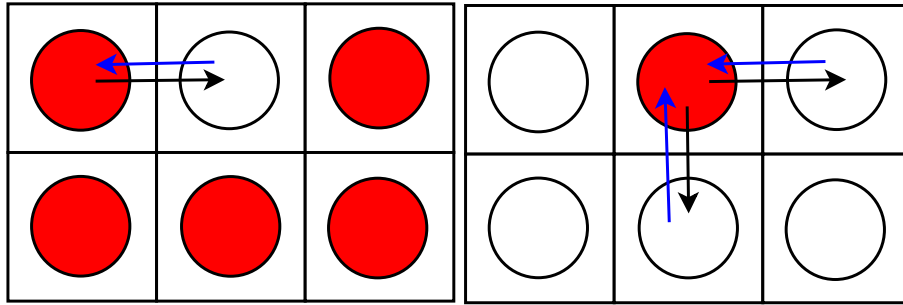


FIGURE 13 – Cas de comportement non symétrique : dans le premier cas de figure, le trou ne peut qu'avancer (flèche bleue). Dans le deuxième cas de figure, qui est le symétrique du premier, la particule peut soit avancer soit sauter (flèches noires). On voit donc que le comportement des trous n'est pas symétrique de celui des particules.

TASEP classique.

Cette première étude nous a donc permis de mieux cadrer nos recherches : on peut déjà raisonnablement éliminer la règle attractive, après s'être assurés de l'absence de comportement intéressant sur des trajectoires uniques. En revanche les règles naïve et sensible présentent des comportements complexes ; il va donc falloir étudier davantage ces deux règles, tant du point de vue statistique qu'individuellement. Cela fera donc l'objet de parties séparées.

## 5 Étude de la règle naïve

**Asymétrie** Une différence consiste en l'asymétrie entre les trous et les particules. En effet, le modèle des essaims est symétrique vis-à-vis de ses cellules occupées et non occupées : les trous s'y comportent comme des particules "négatives". Ce n'est pas le cas avec notre modèle, puisque que l'on peut exhiber –entre autres– le cas suivant présenté à la figure 13).

Cette asymétrie implique qu'il sera nécessaire de parcourir l'ensemble  $[0, 1]$  pour les densités lors des simulations, alors qu'une symétrie aurait pu nous permettre de nous limiter à  $[0, 0.5]$ .

**Deux comportements limites** Le but de ces premières observations est d'essayer de repérer quelques comportements types et éventuellement de donner des estimations des valeurs de densité et de  $\beta$  nécessaires pour obtenir ces comportements. Un deuxième objectif est de "séparer le bon grain de l'ivraie", c'est-à-dire séparer les comportements inhérents au modèle abstrait des comportements induits par la manière dont nous simulons ce modèle. Par exemple, comme l'a fait Olivier Bouré pour le modèle des essaims dans sa thèse<sup>4</sup>, il nous faudra déterminer la taille

4. Olivier Bouré. "Le simple est-il robuste ?" : une étude de la robustesse des systèmes complexes par les automates cellulaires. Artificial Intelligence. Thèse de doctorat. Université de Lorraine, 2013. tel-00918545v1

minimale de double TASEP nécessaire pour gommer suffisamment le caractère discret de notre double TASEP. Un exemple de ces artefacts de simulation est donné ci-dessous.

Un premier phénomène limite intéressant est observé pour des densités de population – sur l’ensemble du double TASEP – supérieures à 0.5. En effet, on se retrouve alors en un temps fini et facilement atteignable dans une configuration où l’un des deux TASEP est entièrement rempli. Au vu des règles de déplacement des particules, cela signifie que le TASEP plein restera immobile puisque les particules qu’il contient ne pourront ni avancer ni sauter sur l’autre TASEP. On a donc un phénomène de blocage partiel. Le problème revient alors à étudier un unique TASEP (celui qui n’est pas plein), ce qui est un problème différent de celui que nous nous sommes posé. L’existence de ce phénomène pour un double TASEP infini n’est pas certaine, et c’est un problème qu’il serait intéressant d’étudier, mais nous ne travaillons qu’avec des tailles relativement petites (inférieures à 5000) du fait des limitations de notre puissance de calcul (ordinateur de bureau). Dans la suite, on ne travaillera donc plus qu’avec des densités – sur l’ensemble du double TASEP – strictement inférieures à 0.5 ; autrement dit, la moyenne arithmétique des densités sur les deux TASEPs ne devra pas dépasser un demi. On évitera ainsi ce phénomène.

Un phénomène de blocage se produit assez régulièrement dans les cas où la densité est proche de 0.5. En effet, on arrive (également en un temps fini « raisonnable ») à une configuration où il ne reste plus qu’un trou sur un TASEP. Encore une fois, comme une particule dont le prédécesseur est occupé ne peut qu’avancer, cela a pour conséquence que les particules de ce TASEP sont "coincées" sur celui-ci : elles peuvent avancer, mais pas sauter puisqu’il faudrait un trou devant et un trou derrière elle. Ce phénomène est dû à la taille finie de la simulation et à son caractère discret ; c’est l’un des artefacts de simulation dont nous évoquons plus haut l’existence.

Mathématiquement, le nombre de trous  $n_t$  minimal pour un canal (c’est-à-dire si toutes les particules sont sur le même canal) pour un double TASEP de taille  $d$  et de densité  $\rho$  est donné par

$$n_t = d(1 - 2\rho).$$

On voit donc que pour  $\rho \geq 0.5$ , on peut avoir un TASEP sans trous et tomber dans le premier cas de figure évoqué dans ce paragraphe. Si  $\rho$  est proche de cette valeur limite d’un demi, on peut observer le deuxième phénomène de blocage.

Pour travailler avec des densités proches de 0.5, il convient donc d’utiliser des TASEPs de taille suffisamment importante, ceci afin d’augmenter le nombre de trous dans le cas où toutes les particules auraient migré sur le même TASEP.

Si l’on observe quelque chose d’intéressant dans ces densités limites, il faudra vérifier que cela est dû à la densité elle-même (inhérente au modèle, quelque soit la simulation effectuée, donc) et pas au nombre de trous (qui est lié à la taille de la simulation) en réalisant plusieurs fois l’expérience avec des tailles de simulation différentes. En effet, comme on l’a dit, on cherche à démontrer l’existence de phénomènes liés au modèle et non pas à la manière dont on simule ce modèle. Pour chaque comportement que l’on souhaite étudier, il faudra donc se poser la question : Ce comportement résiste-t-il à une perturbation des conditions de la simulation ? Si la réponse est oui, on pourra légitimement conclure à une caractéristique du modèle. En revanche, si l’apparition d’un phénomène, quel qu’il soit, est fortement liée aux conditions de la simulation (la taille du double TASEP, par exemple), on en conclura que ce n’est qu’un artefact de simulation.

Il est important de remarquer que les remarques que nous venons de faire, si elles sont tirées d’observations sur la règle naïve, n’en restent pas moins valables sur les autres règles d’évolution.

**Premières tendances** On réalise tout d’abord une série de simulations en faisant varier tous les paramètres afin d’avoir une idée du comportement du système ainsi qu’un aperçu de l’effet de chaque paramètre sur celui-ci. L’affichage en temps réel nous permet de définir deux pistes principales :

Il semble que le système possède deux "attracteurs" qui correspondent chacun à la situation où l’un des deux TASEPs l’emporte clairement sur l’autre, en terme de nombre de particules ; c’est-à-dire que le signe de  $\Delta$  reste inchangé sur de longues périodes. Quand le système est dans l’un de ces attracteurs, il y reste généralement relativement longtemps voire très longtemps (de quelques milliers à plusieurs centaines de milliers d’itérations). Il va donc falloir quantifier ces attracteurs. Un exemple de trajectoire présentant ces attracteurs est visible à la figure 14.

La deuxième tendance générale est l’agglomération. En effet, il semble que les particules se regroupent – jusqu’à un certain point – en *agglomérats*, où les particules sont collées les unes aux autres. Le mouvement se fait alors par propagation d’un trou à travers l’agglomérat. Ces deux caractères du système semblent liés, ce qui correspond à l’intuition : un agglomérat où toutes les particules sont collées ne peut qu’avancer ; ses particules ne peuvent pas changer de TASEP. Ainsi, on peut intuitivement penser que le TASEP qui l’emporte devrait être celui dont les particules sont les plus agglomérées. Cependant la situation s’inverse assez régulièrement et rapidement tout de même, ce qui nous laisse à penser que l’on pourrait être en présence d’un phénomène de métastabilité. On aurait

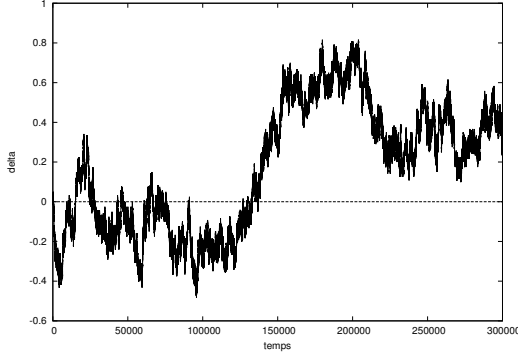


FIGURE 14 – Exemple de variation du paramètre  $\Delta$  pour un double TASEP suivant la règle naïve. Densités initiales valant 0.4 par canal, taille 300,  $\beta = 0.8$ .

alors une probabilité négligeable de sortir des comportements attracteurs constatés, de telle sorte que l'on y reste durant de longs laps de temps.

## 5.1 Critique du modèle

**Pertinence des paramètres de mesure** Si le paramètre  $\Delta$  nous a permis de percevoir ces deux attracteurs et de situer les passages de l'un à l'autre (selon que le paramètre soit positif sur un long moment ou négatif sur un long moment) ou même les moments où le système "oscille" entre les deux – voir figure 15, on constate cependant que l'on échoue à obtenir un résultat aussi clair et lisible concernant le degré de dispersion des particules. Autrement dit, la moyenne quadratique échoue à saisir la différence entre un état désorganisé et un état d'agglomération dans lequel un TASEP l'emporte sur l'autre (figure 15). Cependant, cela provient en partie de la variance de ce paramètre de mesure, qui est par nature très élevée (une particule sautant d'un TASEP à l'autre peut subitement transformer deux agglomérats de taille 10 en un agglomérat de taille 21, ce qui a un gros effet sur la moyenne quadratique). L'alignement et la densité de cellules dynamiques varient eux aussi de manière trop bruitée pour que l'on puisse déduire de l'observation seule de ces paramètres si l'on est dans un attracteur ou pas. En revanche, on constate que ces trois paramètres de mesure ont une valeur moyenne variant de manière visible quand on modifie les paramètres (que ce soit  $\beta$ , la taille ou les densités initiales). On peut donc faire l'hypothèse que  $\Delta$  nous donne de l'information sur l'état du système à un moment donné, alors que les trois autres paramètres nous permettent d'en savoir plus sur le comportement "moyen" du système. On va donc chercher à déterminer les comportements du système en fonction des différents paramètres : Quel est l'effet de  $\beta$  sur l'évolution des particules ? Le système possède-t-il une taille délimitant une sorte de régime transitoire, en dehors duquel le comportement ne subirait plus du tout l'influence de la taille ? Le cas échéant, nous devrions le constater sur tous les paramètres de mesure ; est-ce le cas ? Le système possède-t-il vraiment des attracteurs ?

En effet, ce que l'on a appelé "attracteur" n'est peut-être pas la marque d'un comportement particulier. On peut aller jusqu'à remettre en question l'existence même de ces deux attracteurs : n'est-ce pas plutôt la volonté de trouver quelque chose qui nous pousse à qualifier ainsi le comportement du système ? Pour vérifier ou infirmer cela, nous avons comparé les graphes obtenus pour  $\Delta$  avec notre modèle et avec deux modèles de marche aléatoire : l'une bornée et l'autre non. La marche aléatoire non bornée se résume comme suit : à chaque coup d'horloge, on ajoute un ou on retire un.

La marche aléatoire bornée est élaborée à partir du modèle du double TASEP (voir 3.3) : on part d'une densité 1 sur le canal du haut et une densité nulle sur l'autre, et à chaque étape, on choisit une particule aléatoirement, qui a une probabilité  $\beta$  de changer de canal. On prend alors la mesure de  $\Delta$ . On note que la probabilité n'a été conservée que par analogie avec le modèle du double TASEP initial ; en effet, elle revient à dire qu'on n'effectue une action seulement avec une probabilité de  $\beta$  à chaque coup d'horloge, au lieu d'effectuer une action à chaque coup d'horloge. Il est important de remarquer que cette marche aléatoire est fondamentalement différente de la première. En effet, outre le caractère borné par 1 et  $-1$ , il existe dans cette marche aléatoire une "force de rappel" (par analogie avec un ressort) vers un équilibre situé à  $\Delta = 0$  puisque plus un canal est occupé par rapport à l'autre, plus on aura de chance de choisir une particule de ce canal et donc éventuellement de la faire sauter, réduisant ainsi l'écart en nombre de particules entre les deux canaux. On obtient les résultats de la figure 16.

Comme on le voit sur la figure 16, même si le caractère non borné de la marche aléatoire impose d'être très prudent dans nos comparaisons, le raisonnement que nous avons mené sur le double TASEP quant à l'existence d'attracteurs serait valide sur le modèle de marche aléatoire non bornée... Visuellement, on a l'impression que notre

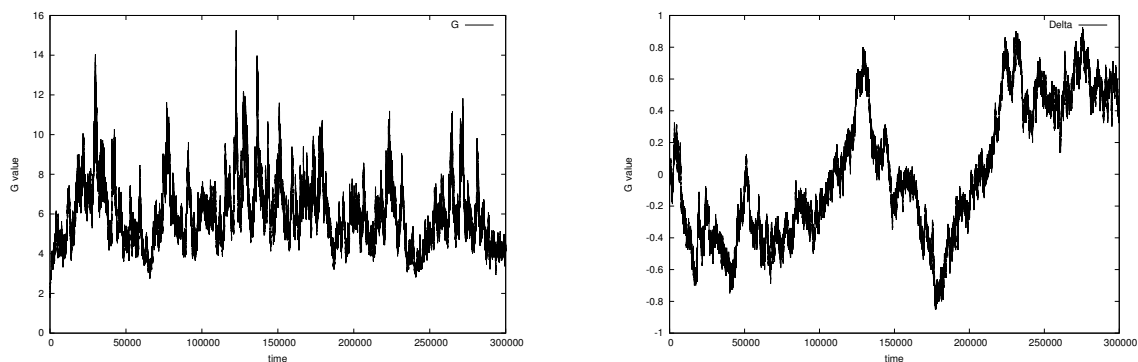


FIGURE 15 – Exemple de graphe pour les paramètres  $G$  et  $\Delta$  : on remarque les longues périodes où  $\Delta$  est de signe constant (graphe de droite). En revanche, il ne semble y avoir aucun lien entre la valeur de  $G$  (graphe de gauche) et la valeur de  $\Delta$ .  $G$  présente des pics (à la création d'un très grand agglomérat probablement) de manière apparemment aléatoire ; il semble difficile d'en tirer de l'information sur un intervalle de temps réduit.

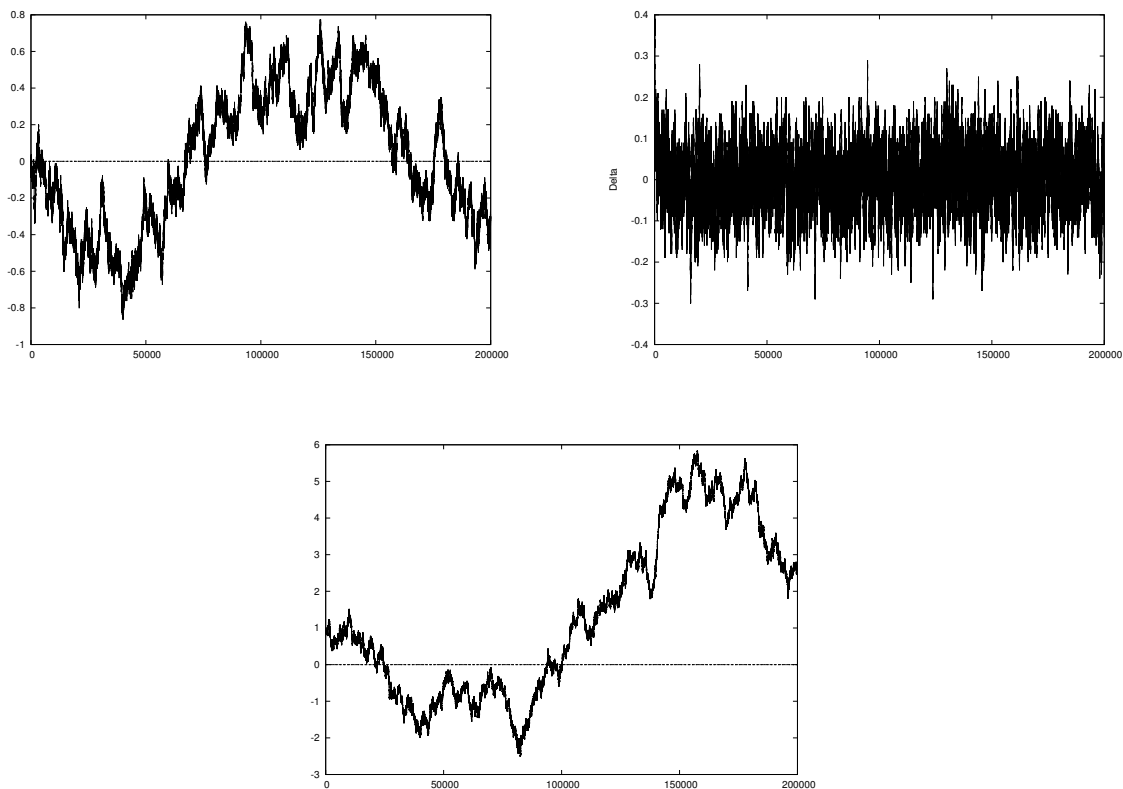


FIGURE 16 – Sur le premier graphe, l'évolution de  $\Delta$ . Sur celui du milieu, la marche aléatoire non bornée, et sur le graphe du bas, la marche aléatoire bornée avec force de rappel.

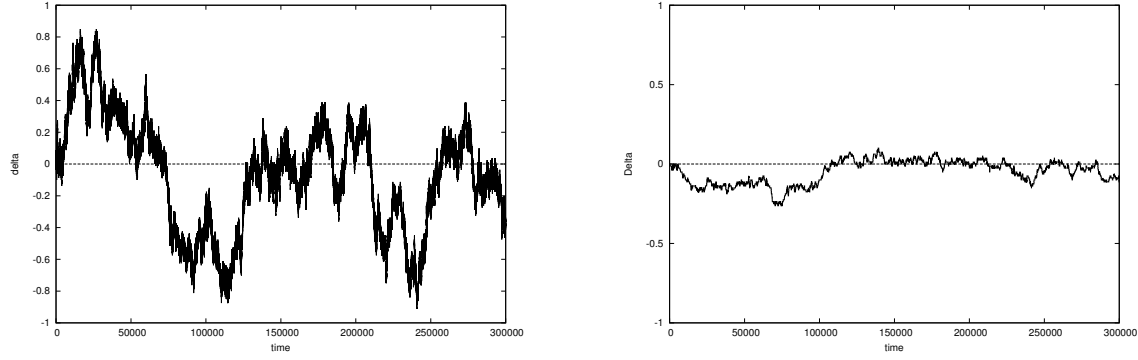


FIGURE 17 – Graphe de  $\Delta$  en fonction du temps montrant l'effet de  $\beta$  sur le comportement du système : on constate qu'une haute valeur augmente fortement le déséquilibre en terme de nombre de particules entre les deux canaux, sans augmenter la durée de vie de ces déséquilibres.

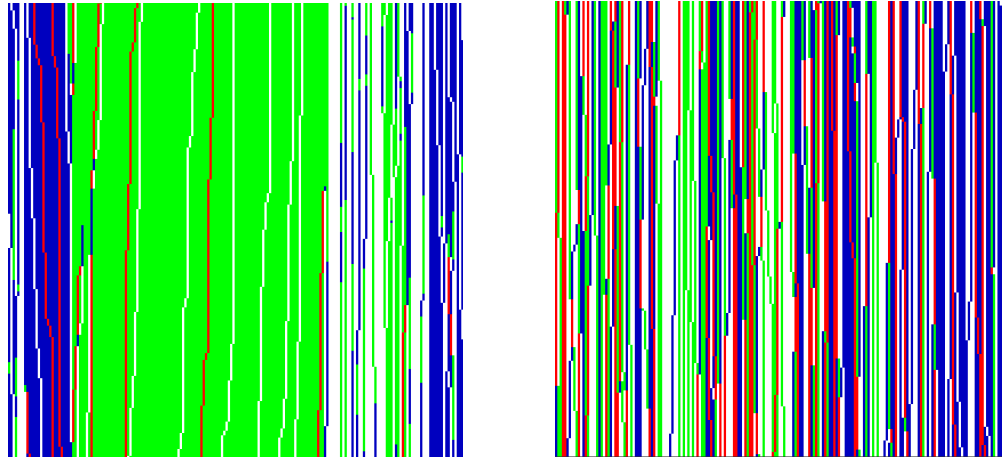


FIGURE 18 – Différences de répartition des particules : diagramme espace-temps du système au bout de 200 000 itérations avec  $\beta$  valant 0.9 à gauche et 0.01 à droite. Les cases représentent chacune un couple de deux cellules : une cellule et son voisin vertical. Les cases rouges signifient que les deux cellules abritent une particule ; les bleues, que seule la cellule du haut est pleine ; les vertes, que seule celle du bas est pleine ; les blanches que les deux cellules sont vides. Le temps défile du bas vers le haut.

modèle du double TASEP est situé "entre les deux" modèles de marche aléatoire. Nous sommes en tout cas loin de pouvoir conclure à l'existence effective de ces attracteurs ; d'autant plus, comme on l'a dit plus haut, que ceux-ci ne sont visibles que via le paramètre  $\Delta$ . Or on peut raisonnablement penser qu'un réel changement de comportement affecterait plusieurs paramètres si ce n'est tous.

On ne peut toutefois pas conclure que les variations mesurées par  $\Delta$  sont aléatoires. En effet, on note une influence de  $\beta$  sur  $\Delta$  : une plus grande valeur de  $\beta$  fait augmenter les déséquilibres, sans pour autant qu'ils durent plus longtemps (voir figure 17). Cet effet de  $\beta$ , différent d'un simple rééchelonnage de l'échelle des temps (comme c'était le cas pour la marche aléatoire), semble indiquer un comportement complexe... Il serait donc intéressant de poursuivre l'étude de ce paramètre.

Un autre effet de  $\beta$  est une tendance à l'agglomération : une haute valeur de  $\beta$  favorise l'apparition de gros agglomérats, c'est à dire d'agglomérats d'une taille jamais observée pour de petites valeurs de  $\beta$ . Un exemple en est donné à la figure 18. On constate donc que si on n'a pas – pour le moment – prouvé analytiquement l'existence d'une tendance à l'agglomération dans le système, on peut la constater visuellement (cf. figure 18. On remarque l'énorme agglomérat pour le diagramme espace-temps de gauche, où  $\beta = 0.9$ .

Le comportement de la règle naïve ne montre donc pas de manière visible une transition de phase comme on pouvait en observer dans le modèle des essaims, où le comportement des particules changeait clairement entre

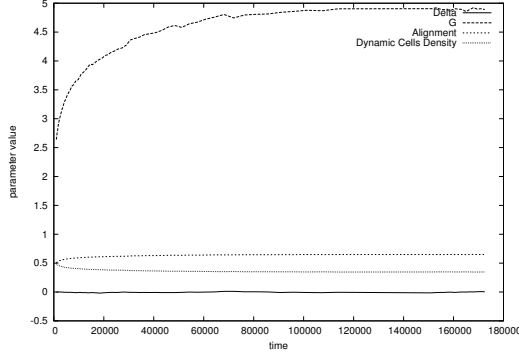


FIGURE 19 – Exemple d'évolution des quatre paramètres de mesure pour un double TASEP évoluant avec la règle naïve. Taille 200,  $\beta = 0.4$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 0.4$ .

la phase désorganisée et la phase en motifs<sup>5</sup>. Ici, rien de tel. Cependant, on note tout de même une tendance à l'agglomération. Nous nous posons donc la question de savoir quels sont les paramètres influents sur le degré d'agglomération. Cependant, avant de pouvoir étudier ce problème, il nous faut savoir dans quel intervalle de temps se placer. Aussi commencerons-nous par étudier le régime transitoire dont nous avons supposé l'existence.

## 5.2 Étude du régime transitoire

Comme l'histogramme de la taille des agglomérats nous l'a montré, la distribution en taille des agglomérats varie avec le temps. Il s'agit donc de savoir tout d'abord si on a un régime transitoire ou si l'on est en présence d'un phénomène plus complexe. Pour cela, on étudie l'évolution des paramètres de mesure sur un grand nombre d'échantillons, afin d'obtenir le comportement moyen en fonction de  $\beta$ , de la taille du double TASEP et des densités initiales.

Tout d'abord, il convient, afin de réduire le nombre de mesures à réaliser, de vérifier sur quels paramètres de mesure se reflète les variations du comportement du système. On réalise donc un premier test avec les quatre paramètres de mesure, afin, dans un premier temps de regarder si tous les paramètres de mesure tendent, après une période transitoire, vers une valeur limite, et dans un second temps de déterminer quel est le paramètre de mesure le plus adapté à l'analyse du régime transitoire. Les résultats sont présentés sur la figure 19. La figure nous permet de vérifier que les quatre paramètres présentent bien cet aspect transitoire, à des degrés différents cependant. On peut donc conclure à l'existence d'un régime transitoire, et nous allons l'analyser. C'est la moyenne quadratique qui présente la variation la plus importante, et nous permettra donc de déterminer plus facilement la durée dudit régime transitoire. C'est le paramètre de mesure que nous choisirons dans la suite.

Une fois cela posé, on va donc étudier comment la taille, les densités et  $\beta$  influent sur l'évolution du double TASEP vers un état aggloméré. Via quelques expériences préliminaires, on remarque qu'en plus d'avoir très probablement un rôle dans la dynamique du système, ces différents paramètres avaient un effet sur la valeur finale de la moyenne quadratique de la taille des agglomérats (paramètre  $G$ ). On cherche alors à déterminer dans quelle mesure ces paramètres influent sur ce que l'on appelle abusivement degré d'agglomération des particules, degré dont  $G$  rend compte.

**Impact de  $\beta$**  On considère un double TASEP de taille 300, présentant une densité initiale de 0.4 sur chaque canal. En faisant varier  $\beta$ , et en regardant la moyenne statistique de  $G$  sur un intervalle de temps situé au-delà du régime transitoire du système, on obtient la courbe présentée à la figure 20.

Cette courbe présente une caractéristique inattendue : son caractère non-monotone. En effet, on constate une augmentation continue et approximativement linéaire de  $G$ , jusqu'à un maximum pour  $\beta \simeq 0.9$ . Ce maximum va à l'encontre de l'intuition : on s'attendrait en effet à ce qu'une haute valeur pour  $\beta$  favorise ou non l'agglomération, mais nous constatons l'existence d'une valeur limite au-delà de laquelle  $G$  décroît, et cette limite n'est pas symétrique. Il serait donc intéressant d'étudier les variations de la valeur en laquelle  $G$  atteint son maximum : est-ce que la taille et les densités initiales ont une influence dessus ?

On constate que la taille n'a aucune influence. En effet, comme on le voit sur la figure 21, le maximum de chaque courbe, bien qu'étant différent, est atteint pour la même valeur.

5. Olivier Bouré. " Le simple est-il robuste ? " : une étude de la robustesse des systèmes complexes par les automates cellulaires. Artificial Intelligence. Thèse de doctorat. Université de Lorraine, 2013. tel-00918545v1

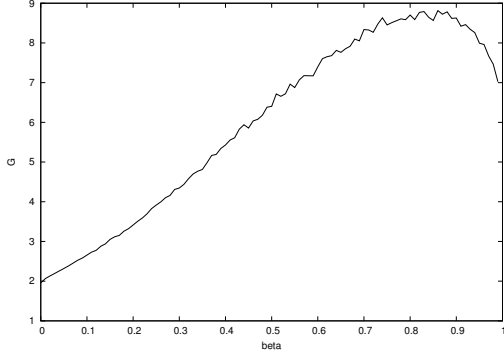


FIGURE 20 – Variation de la valeur finale de  $G$  en fonction de  $\beta$ . Double TASEP de taille 300, densités initiales 0.4 par canal, règle naïve.

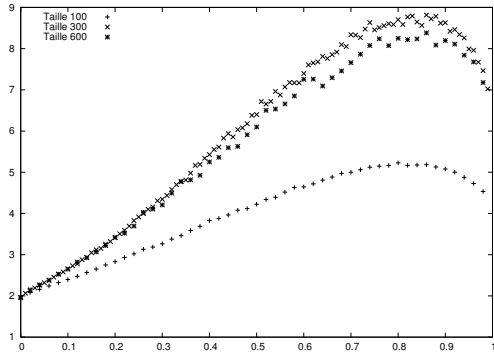


FIGURE 21 – Courbes d'évolution de  $G$  en fonction de  $\beta$  pour des doubles TASEP de tailles différentes (100, 300 et 600).

On constate en revanche que faire varier les densité initiales possède une grande influence sur la forme de cette courbe. Il est certain que les densités influent sur la valeur finale de  $G$ , cependant on s'aperçoit que la valeur de  $\beta$  en laquelle est atteint le maximum de  $G$  varie avec les densités initiales, comme le montre la figure 22.

## 6 Étude de la règle attractive

On travaille maintenant avec la règle attractive, telle que définie au 3.3. L'ensemble des paramètres de mesure reste le même, puisque seule la règle a changé.

Cette nouvelle règle, qui semblait prometteuse lors de sa conception puisque plus proche de la règle d'évolution régissant le modèle des essaims en deux dimensions, se révèle très décevante vis-à-vis de la richesse de son comportement. En effet, les simulations effectuées révèlent un léger régime transitoire, et un effet très léger de  $\sigma$

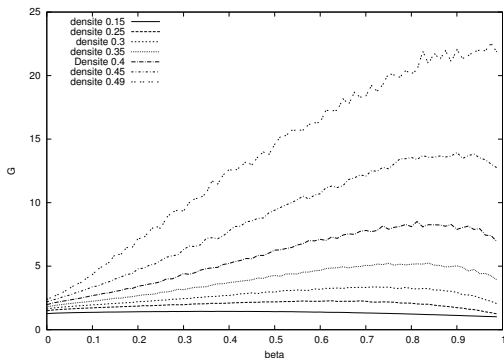


FIGURE 22 – Évolution de  $G$  en fonction de  $\beta$  pour plusieurs densités initiales différentes. Double TASEP de taille 300.

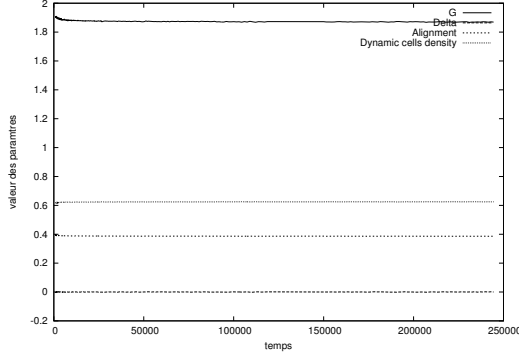


FIGURE 23 – Les quatre paramètres de mesure, sur une période de 250000 pas de temps, d'un double TASEP suivant la règle attractive. On note le très léger régime transitoire. Taille 300, densités initiales de 0.4 par canal

sur le comportement du système, mais pas de réelle tendance à l'agglomération, comme on s'y attendait au vu de l'histogramme de la figure 9.

On remarque, via quelques expériences annexes non présentées ici, que de même que pour les autres règles, faire varier les paramètres du modèle (ici  $\sigma$ ) modifie un petit peu le comportement du système. Mais ces changements sont très légers et donc beaucoup plus difficiles à analyser et quantifier que ceux observés sur les deux autres règles.

Nous avons cependant une hypothèse quant à la raison de cette pauvreté (ou du moins de ce manque d'amplitude) de comportement. En effet, contrairement aux autres règles, nous choisissons ici à chaque pas de temps une cellule occupée (ce qui revient à choisir une particule) quelconque, et non pas une cellule dynamique comme c'est le cas dans la règle naïve et la règle sensible. Si on se trouve dans un état d'agglomération élevé, où un des deux TASEPs l'emporte localement sur l'autre, la particule choisie, appartenant probablement à un agglomérat, ne pourra que sauter puisque son successeur est occupé. Cela entraînera donc la destruction de l'agglomérat. Ce mécanisme empêche donc la formation d'agglomérats, ou plutôt empêche les agglomérats de se maintenir.

## 7 Étude de la règle sensible

Comme nous l'avons vu grâce aux histogrammes au paragraphe 4.2, c'est la règle sensible qui présente la plus forte tendance à l'agglomération parmi les trois règles, pour peu que la sensibilité à l'alignement  $\sigma$  soit « suffisamment » élevée. Il faut donc déterminer quelles sont les valeurs de  $\sigma$  pour lesquelles on assiste au phénomène d'agglomération. On pourra se poser la question de l'influence de la taille et des densités sur la valeur limite de  $\sigma$ .

La figure 24 nous donne un premier aperçu de l'influence de la taille sur le degré d'agglomération. Comme nous l'avons vu lors de l'étude de la règle naïve, la taille du double TASEP favorise l'agglomération jusqu'à un certain point (voir paragraphe 21). C'est également le cas ici, puisque la valeur limite de  $\sigma$  à partir de laquelle les attracteurs survivent pendant une durée non négligeable diminue avec la taille de la simulation. La valeur maximale de la durée de vie que l'on observe sur la figure ne doit pas être prise en compte : elle est due à l'expérience, c'est la durée au bout de laquelle on arrête l'expérience si  $\Delta$  n'a pas changé de signe. On retrouve le caractère métastable que nous avons évoqué au paragraphe 1.2 : avec la taille, tous les paramètres étant égaux par ailleurs, la durée moyenne pendant laquelle on reste dans un attracteur augmente.

On a donc ici un résultat très intéressant. Bien qu'il soit trop tôt pour conclure de manière certaine à l'existence d'une transition de phase, on voit clairement deux comportements différents : quand  $\sigma$  est faible, le déséquilibre entre les canaux ne survit pas : on quitte l'attracteur. En revanche, quand  $\sigma$  est élevé, ce déséquilibre a tendance à se maintenir pendant des temps très longs (la borne temporelle maximale sur cette expérience est de un million, et cette borne est atteinte, en taille 400, quasiment à chaque fois pour  $\sigma \geq 3.5$ ).

Afin de confirmer (ou d'infirmer) l'hypothèse d'une transition de phase, il conviendrait de réaliser un histogramme de la valeur de  $\Delta$  en régime permanent : s'il y a effectivement transition de phase, on obtiendra deux pics, probablement suivant une loi gaussienne ; l'un concentré autour de 1 et l'autre autour de -1 (ce qui correspond aux deux attracteurs "le canal haut l'emporte" et "le canal bas l'emporte").

L'observation des quatre paramètres de mesure (voir figure 25), comme nous l'avons fait pour les deux autres règles sensibles, se révèle également riche en information. On constate un léger régime transitoire sur l'alignement et la densité de cellules, mais le comportement le plus intéressant est celui de la moyenne quadratique, qui présente un pic avant de décroître vers une valeur asymptotique. On note d'ailleurs que cette valeur asymptotique est inférieure à la valeur asymptotique constatée sur la règle naïve. Cela est surprenant, car nous sommes dans les

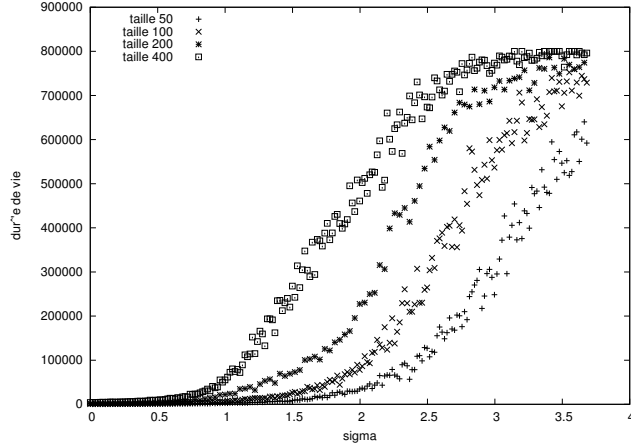


FIGURE 24 – Durée de vie moyenne d'un "attracteur" pour  $\rho = 0.4$  et  $\sigma$  variant entre 0 et 4, pour des doubles TASEPs de tailles 50, 100, 200 et 400, évoluant avec la règle sensible. Par durée de vie, on entend le temps que met le paramètre  $\delta$  à changer de signe pour la première fois, en partant d'une densité de 0.8 dans le canal haut et de 0 dans le canal bas.

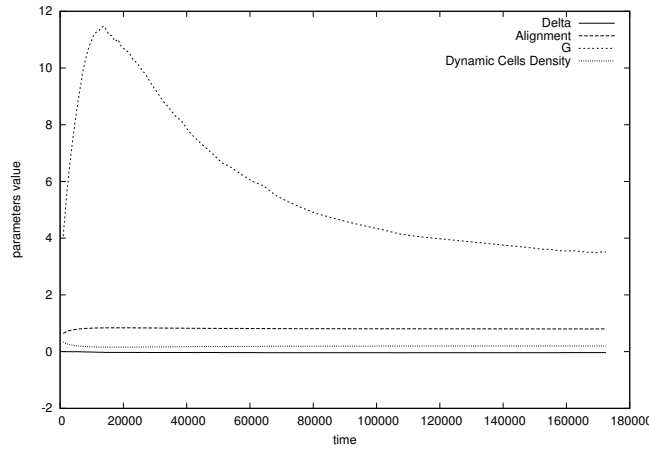


FIGURE 25 – Les quatre paramètres de mesure, sur une période de 250000 pas de temps, d'un double TASEP suivant la règle sensible. On note le pic pour la moyenne quadratique. Taille 300, densités initiales de 0.4 par canal.  $\sigma$  vaut 10.

mêmes conditions; or la comparaison des histogrammes indiquait clairement que la règle sensible avait une plus forte tendance à l'agglomération.

Cela s'explique facilement par l'observation de trajectoires particulières de ce modèle. En effet, on constate alors que le système possède un comportement en trois étapes : on a tout d'abord la distribution initiale. Ensuite, Dans un premier temps, les particules se regroupent en agglomérats sur les deux canaux. On a une distribution assez particulière, où se succèdent des zones quasiment vides et des zones où un agglomérat sur le canal haut "lutte" contre un agglomérat sur le canal bas. Un exemple de cette configuration est présenté sur la figure 26. Dans un second temps, dans les zones de confrontation entre agglomérats, la lutte se solde par l'assimilation d'un des deux agglomérats par l'autre. On arrive finalement à un stade où l'un des deux canaux est vide (ou presque). Les particules ont alors très peu de chances de repasser sur l'autre canal du fait de la haute valeur de  $\sigma$  (voir figure 26). On se retrouve alors avec un système se comportant comme un TASEP simple, qui ne possède pas particulièrement de tendance à l'agglomération. On peut raisonnablement supputer que la valeur limite de  $G$  est la valeur que l'on trouverait sur un TASEP simple de densité  $\rho = 0.8$ .

Cette étude de la règle sensible nous permet de conclure à un comportement radicalement différent des règles étudiées précédemment. En effet, si on retrouve une tendance à l'agglomération semblable à celle observée dans la règle naïve, celle-ci a des conséquences différentes pour la règle sensible. Dans cette dernière, en attendant suffisamment longtemps, l'un des deux canaux du TASEP finit par l'emporter de manière définitive (empiriquement parlant); c'est la troisième étape du comportement présenté à la figure 26.

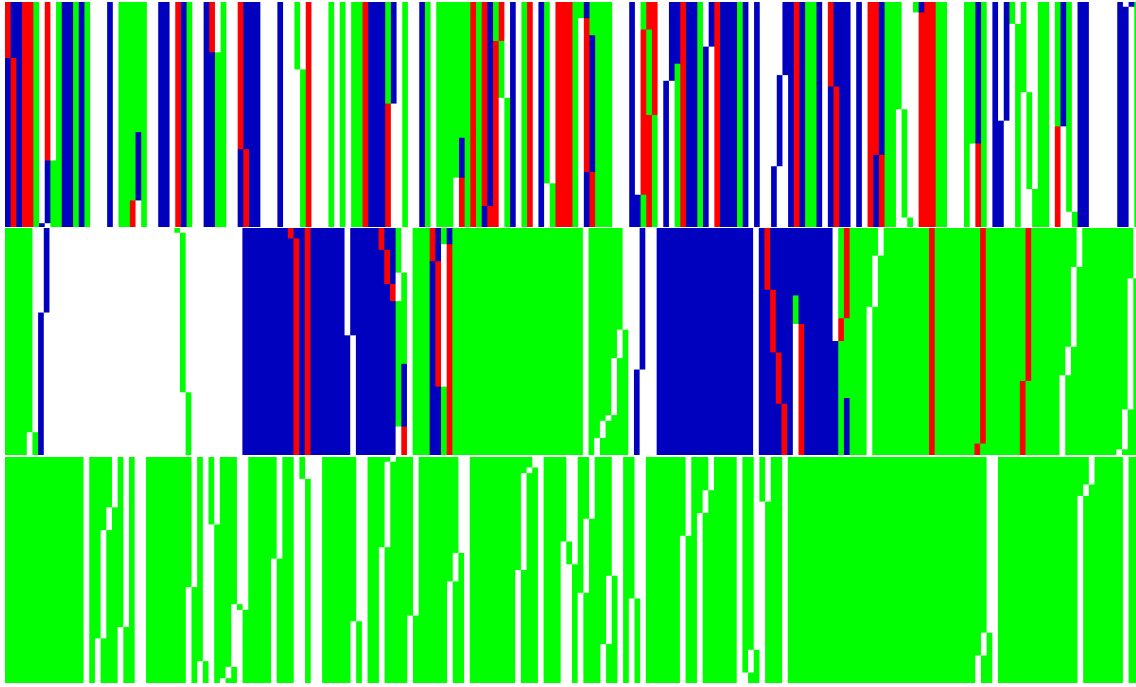


FIGURE 26 – Diagrammes espace-temps des trois étapes du comportement d'un système évoluant selon la règle sensible. Dans l'ordre, l'état initial, puis le regroupement en agglomérats locaux. Enfin l'un des deux canaux l'emporte. Double TASEP de taille 200,  $\rho = 0.4$ ,  $\sigma = 10$ . Le temps défile du bas vers le haut.

## 8 Conclusion et pistes de recherche

L'étude de notre double TASEP s'est donc révélée riche en enseignements. Après avoir exposé le modèle et les règles d'évolutions que nous allons étudier, nous avons pu mesurer la richesse et la complexité qui existe dans le comportement du système. Nous avons vu que la tendance à l'agglomération, indice que le système tend à s'organiser, pouvait dépendre de très légères modifications de la règle d'évolution, comme c'est le cas avec les règles sensibles et attractives.

Nous n'avons en revanche pas pu trancher de manière certaine quant à l'existence de plusieurs phases, dans lesquelles le système aurait un comportement qualitativement différent. Il faudrait pour cela, comme on l'a dit dans l'étude de la règle sensible, étudier la distribution de la valeur moyenne de  $\Delta$ , ce que nous n'avons pas fait par manque de temps. Cela permettrait alors de confirmer l'intuition que nous avons eu, à savoir qu'il existe une transition de phase pour la règle sensible et peut-être (mais de manière moins tranchée) également pour la règle naïve.

Si cette hypothèse était confirmée, il s'agirait d'un exemple de transition de phase, ce qui à notre connaissance tout du moins n'a jusqu'alors pas été observé pour des modèles similaires. Ce résultat serait très intéressant dans la mesure où les possibilités d'un système (en termes de richesse de comportement, de nombre d'états possibles...) sont généralement très réduites en passant de la dimension deux à la dimension une, en raison de la perte d'un "degré de liberté". On pourrait alors se poser des questions telles que : Quelle est la zone de l'espace paramétrique dans lequel on peut observer ces transitions de phase ? Quelle est la dynamique d'évolution pour chacun des types de comportement possible ?

Une autre piste qui serait intéressante à développer est l'influence de  $\beta$  dans la règle naïve ; en effet, la non-monotonie de la courbe indiquant le degré d'agglomération en fonction de ce paramètre est contre-intuitive : pourquoi pour des valeurs particulières de  $\beta$  avons-nous une agglomération maximale ?