



**HAL**  
open science

# Somme des angles d'un triangle et unicité de la parallèle : une preuve d'équivalence formalisée en Coq

Charly Gries, Pierre Boutry, Julien Narboux

## ► To cite this version:

Charly Gries, Pierre Boutry, Julien Narboux. Somme des angles d'un triangle et unicité de la parallèle : une preuve d'équivalence formalisée en Coq. 2015. hal-01228612v1

**HAL Id: hal-01228612**

**<https://inria.hal.science/hal-01228612v1>**

Preprint submitted on 13 Nov 2015 (v1), last revised 19 Dec 2015 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Somme des angles d'un triangle et unicité de la parallèle : une preuve d'équivalence formalisée en Coq.

---

Charly Gries, Pierre Boutry, Julien Narboux

*Laboratoire ICube, UMR 7357 CNRS, Université de Strasbourg  
Pôle API, Bd Sébastien Brant, BP 10413, 67412 Illkirch, France  
charly.gries@etu.unistra.fr, {boutry, narboux}@unistra.fr*

## Résumé

Nous nous intéressons dans cet article au 5<sup>e</sup> postulat d'Euclide. Ce postulat a une importance historique : pendant des siècles, de nombreux mathématiciens de renom ont cru que cet axiome était un théorème qui pouvait être dérivé des quatre premiers postulats d'Euclide. Dans cet article nous présentons la formalisation en Coq de résultats concernant le lien entre l'unicité de la parallèle et le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits. Nous travaillons en logique intuitionniste dans le contexte de l'axiomatique de Tarski. D'une part nous obtenons la preuve formelle de l'équivalence et d'autre part nous clarifions les propriétés de décidabilité nécessaires pour la preuve. Nous étudions également le lien entre l'axiome d'Aristote et la décidabilité de l'intersection entre deux droites.

## 1. Introduction

Nous nous intéressons dans cet article au 5<sup>e</sup> postulat d'Euclide (Fig. 1) :

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Ce postulat a une importance historique parce que pendant des siècles, de nombreux mathématiciens de renom ont cru que cet axiome pouvait être dérivé des quatre premiers postulats d'Euclide. L'histoire est ainsi riche en preuves fausses du postulat des parallèles. En 1763, Georg Simon Klügel a soutenu une thèse présentant une critique et un résumé de 28 tentatives de preuves du postulat des parallèles d'Euclide [Klu63]. Adrien Marie Legendre fait partie de ceux qui ont publié des preuves erronées du postulat d'Euclide. En 1833, un an après la publication par János Bolyai d'un appendice sur la géométrie non-euclidienne, Legendre écrit :

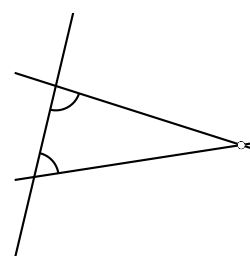


FIGURE 1 – Le 5<sup>e</sup> postulat d'Euclide.

“Il n'en est pas moins certain que le théorème sur la somme des trois angles du triangle doit être regardé comme l'une de ces vérités fondamentales qu'il est impossible de contester, et qui sont un exemple toujours subsistant de la certitude mathématique qu'on recherche sans cesse et qu'on n'obtient que bien difficilement dans les autres branches des connaissances humaines.”

– Adrien Marie Legendre

Les preuves incorrectes supposaient pour la plupart, plus ou moins implicitement, un énoncé équivalent à celui qu'elles voulaient démontrer. Il existe de nombreux énoncés équivalents (dans la contexte de la géométrie neutre<sup>1</sup>) au 5<sup>e</sup> postulat. Nous avons décrit la formalisation en Coq de l'équivalence entre dix versions du postulat des parallèles et l'impact sur la propriété de décidabilité de l'intersection dans un article précédent [BNS15b]. Dans cet article, nous nous intéressons au postulat du triangle qui stipule que la somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$  (ou plutôt à deux droits, nous verrons que cela a une importance). Cette version du postulat des parallèles n'est pas équivalente au 5<sup>e</sup> postulat d'Euclide dans toute géométrie neutre. En effet, comme l'a montré Max Dehn, il existe un modèle (non-archimédien) dans lequel la somme des angles d'un triangle vaut  $\pi$  mais le 5<sup>e</sup> postulat d'Euclide n'est pas vérifié. L'axiome d'Archimède peut s'exprimer de la façon suivante. Étant donné deux segments  $AB$  et  $CD$  tel que  $C$  est différent de  $D$ , il existe un entier  $n$ , et  $n$  points  $A_1, \dots, A_n$  de la droite contenant le segment  $AB$ , tels que  $A_j$  se situe entre  $A_{j-1}$  et  $A_{j+1}$  pour  $1 < j < n$ ,  $A_j A_{j+1}$  est congru à  $CD$  pour  $0 < j < n$ ,  $A = A_1$  et  $B$  se situe entre  $A_1$  et  $A_n$ .

Dans cette formalisation, nous utilisons un axiome, proposé par Marvin Jay Greenberg [Gre10], dont l'expression est purement géométrique et qui peut se déduire de l'axiome d'Archimède. Nous prouvons l'équivalence entre le postulat du triangle et l'unicité de la parallèle en supposant cet axiome. Jean Duprat a prouvé, en utilisant l'axiome d'Archimède, que quand la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, cela implique l'unicité de la parallèle [Dup10] dans une axiomatique pour la géométrie euclidienne à la règle et au compas basée sur la notion d'orientation qu'il a proposé dans [Dup08].

Nos preuves formelles reposent sur les nombreux lemmes décrits dans [SST83] qui sont prouvables sans l'axiome des parallèles et que nous avons formalisés précédemment [Nar07, BN12] à l'aide de l'assistant de preuve Coq. Nous utilisons les tactiques développées précédemment [BNSB14b, BNS15a].

Cette formalisation a un double intérêt. Premièrement, elle permet d'exhiber des preuves dont on pourra dire définitivement qu'elles sont correctes. En effet, l'utilisation d'un assistant de preuve permet d'éviter tout risque d'erreur : preuve utilisant un argument circulaire, étape non justifiée dans une preuve ou incohérence entre plusieurs définitions.

Enfin, la formalisation permet de clarifier quels sont les axiomes nécessaires pour chacune des preuves d'équivalence.

## 2. Le contexte

Toutes nos preuves sont réalisées dans le contexte de la géométrie de Tarski. Nous utilisons les axiomes donnés dans [SST83]. Le lecteur intéressé par une explication et l'histoire de ces axiomes peut consulter la lettre d'Alfred Tarski et Steven Givant à Wolfram Schwabhäuser [TG99]. En table 1, nous listons les axiomes de la géométrie de Tarski neutre c'est-à-dire sans l'axiome des parallèles.

Ce système d'axiomes considère un seul type de base : les points, ainsi que deux prédicats. Le premier d'arité 3 est noté  $A-B-C$  et signifie que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont colinéaires et que  $B$  se situe entre  $A$  et  $C$  ( $B$  peut être égal  $A$  ou à  $C$ ). Le second d'arité 4 est noté  $AB \equiv CD$  et signifie que les segments  $AB$  et  $CD$  ont même longueur.

Nous omettons l'axiome de continuité (l'axiome A11 dans [SST83]) qui n'est pas nécessaire pour ce développement. En effet, dans sa thèse Haragauri Nayaran Gupta [Gup65] a montré que dans le cadre de la géométrie de Tarski il est possible de prouver l'existence du milieu d'un segment sans faire appel aux axiomes de continuité.

---

1. Nous désignons par le terme géométrie neutre l'ensemble des résultats communs entre la géométrie euclidienne et la géométrie hyperbolique. C'est-à-dire qu'il existe des parallèles mais elles ne sont pas forcément uniques. Cela exclut la géométrie sphérique.

---

```

Class Tarski_neutral_dimensionless := {
  Tpoint : Type;
  Bet : Tpoint -> Tpoint -> Tpoint -> Prop;
  Cong : Tpoint -> Tpoint -> Tpoint -> Tpoint -> Prop;
  between_identity : forall A B, Bet A B A -> A=B;
  cong_pseudo_reflexivity : forall A B : Tpoint, Cong A B B A;
  cong_identity : forall A B C : Tpoint, Cong A B C C -> A = B;
  cong_inner_transitivity : forall A B C D E F : Tpoint,
    Cong A B C D -> Cong A B E F -> Cong C D E F;
  inner_pasch : forall A B C P Q : Tpoint,
    Bet A P C -> Bet B Q C ->
    exists x, Bet P x B /\ Bet Q x A;
  five_segment : forall A A' B B' C C' D D' : Tpoint,
    Cong A B A' B' ->
    Cong B C B' C' ->
    Cong A D A' D' ->
    Cong B D B' D' ->
    Bet A B C -> Bet A' B' C' -> A <> B -> Cong C D C' D';
  segment_construction : forall A B C D : Tpoint,
    exists E : Tpoint, Bet A B E /\ Cong B E C D;
  lower_dim : exists A, exists B, exists C, ~ (Bet A B C \/ Bet B C A \/ Bet C A B)
}.

```

---

TABLE 1 – Formalisation du système d'axiomes en Coq .

À ces axiomes, nous ajoutons l'axiome de dimension supérieure, qui exprime le fait que nous nous plaçons dans un espace de dimension 2 :

---

```

Class Tarski_2D `(Tn : Tarski_neutral_dimensionless) := {
  upper_dim : forall A B C P Q : Tpoint,
    P <> Q -> Cong A P A Q -> Cong B P B Q -> Cong C P C Q ->
    (Bet A B C \/ Bet B C A \/ Bet C A B)
}.

```

---

Utiliser l'axiomatique de Tarski possède plusieurs avantages dont les suivants : il y a peu d'axiomes, ils sont assez courts, il est facile de généraliser l'axiomatisation pour des espaces d'autres dimensions, elle présente de nombreuses propriétés métamathématiques telles que la satisfaisabilité ainsi que l'indépendance de la plupart de ses axiomes<sup>2</sup>, et enfin notre équipe à réalisé un développement Coq conséquent fondé sur cette axiomatique. Le travail décrit dans cet article se base ainsi sur les 53000 lignes de preuve des 1200 lemmes formalisant les 13 premiers chapitres de [SST83].

Nous avons montré précédemment que les axiomes de Tarski, en dimension 2 sans continuité, permettent de prouver les axiomes de Hilbert correspondants [BN12].

Il convient de noter que, travaillant dans un contexte intuitionniste, nous avons eu besoin d'introduire l'axiome suivant, qui permet de faire des distinctions de cas sur l'égalité des points :

---

```

eq_dec_points : forall A B : U, A=B \/ ~ A=B.

```

---

2. Timothy Makarios a formalisé avec l'assistant de preuve Isabelle une preuve de l'indépendance de l'axiome d'Euclide par rapport aux autres axiomes de la géométrie de Alfred Tarski [Mak12]. Il utilise le modèle de Klein-Beltrami. Filip Maric et Danijela Petrovic ont formalisé en Isabelle la géométrie du plan complexe [MP14] et envisagé d'étendre leurs résultats pour formaliser différents modèle de géométrie non-euclidienne.

Coq	Notation	Définition
Bet A B C	$A-B-C$	
Cong A B C D	$AB \equiv CD$	
Col A B C	$\text{Col } ABC$	$A-B-C \vee B-A-C \vee A-C-B$
out O A B	$O \dashrightarrow A \dashrightarrow B$	$O \neq A \wedge O \neq B \wedge (O-A-B \vee O-B-A)$
is_midpoint M A B	$A \dashrightarrow M \dashrightarrow B$	$A-M-B \wedge AM \equiv BM$
Per A B C	$\perp ABC$	$\exists C', C \dashrightarrow B \dashrightarrow C' \wedge AC \equiv AC'$
Perp_in P A B C D	$AB \perp_P CD$	$A \neq B \wedge C \neq D \wedge \text{Col } PAB \wedge \text{Col } PCD \wedge (\forall UV, \text{Col } UAB \Rightarrow \text{Col } VCD \Rightarrow \perp UPV)$
Perp A B C D	$AB \perp CD$	$\exists P, AB \perp_P CD$
two_sides A B P Q	$A \xrightarrow[Q]{P} B$	$A \neq B \wedge \neg \text{Col } PAB \wedge \neg \text{Col } QAB \wedge \exists T, \text{Col } TAB \wedge P-T-Q$
one_side A B X Y	$A \xrightarrow[XY]{Z} B$	$\exists Z, A \xrightarrow[X]{Z} B \wedge A \xrightarrow[Y]{Z} B$
coplanar A B C D	$\text{Cp } ABCD$	$\exists X, (\text{Col } ABX \wedge \text{Col } CDX) \vee (\text{Col } ACX \wedge \text{Col } BD X) \vee (\text{Col } ADX \wedge \text{Col } BCX)$
Par_strict A B X Y	$AB \parallel_s XY$	$A \neq B \wedge C \neq D \wedge \text{Cp } ABCD \wedge \neg \exists X, \text{Col } XAB \wedge \text{Col } XCD$
Par A B X Y	$AB \parallel XY$	$AB \parallel_s CD \vee (A \neq B \wedge C \neq D \wedge \text{Col } ACD \wedge \text{Col } BCD)$
le A B C D	$AB \leq CD$	$\exists y, C \dashrightarrow y \dashrightarrow D \wedge AB \equiv Cy$
lt A B C D	$AB < CD$	$AB \leq CD \wedge \neg AB \equiv CD$
Perp2 A B C D P		$\exists X, \exists Y, \text{Col } PXY \wedge XY \perp AB \wedge XY \perp CD$

TABLE 2 – Résumé des prédicats et leur notation.

Cet axiome est utilisé dans la quasi-totalité du développement, directement ou indirectement. À partir de cet axiome nous avons prouvé [BNSB14a] que l'on peut obtenir la décidabilité des autres prédicats définis dans [SST83]. Seule la décidabilité de l'intersection des droites donnée par la définition suivante où  $\text{Col}$  désigne la colinearité ne peut pas être déduite.

---

```

Definition decidability_of_intersection := forall A B C D,
  (exists I, Col I A B /\ Col I C D) \/\
  ~ (exists I, Col I A B /\ Col I C D).

```

---

Nous avons prouvé dans [BNS15b] que certaines versions du postulat des parallèles impliquent la décidabilité de l'intersection. Michael Beeson a étudié l'équivalence entre différentes versions du postulat des parallèles dans le contexte d'une géométrie constructive [Bee15a]. Notre approche est légèrement différente. En effet, Michael Beeson ne suppose pas la décidabilité de l'égalité des points. Cependant il ajoute l'axiome d'intersection cercle-cercle qui est un corollaire de l'axiome de continuité. Dans cet article nous étendons cette étude du rôle de la décidabilité de l'intersection.

### 3. La formalisation des différents prédicats

Nous avons expliqué quelques définitions utiles dans [BNS15b]. Pour faciliter la lecture, nous rappelons ces définitions et leurs notations à la Table 2, suivies des définitions de la relation d'ordre sur les segments et de deux droites ayant une perpendiculaire commune. Dans cette partie, nous décrivons les définitions supplémentaires dont nous avons besoin.

Coq	Notation	Définition
Conga A B C D E F	$\angle ABC \equiv \angle DEF$	$A \neq B \wedge C \neq B \wedge D \neq E \wedge F \neq E \wedge$ $\exists A', \exists C', \exists D', \exists F', B-A-A' \wedge AA' \equiv ED \wedge$ $B-C-C' \wedge CC' \equiv EF \wedge E-D-D' \wedge DD' \equiv BA \wedge$ $E-F-F' \wedge FF' \equiv BC \wedge A'C' \equiv D'F'$
InAngle P A B C	$P \in \angle ABC$	$A \neq B \wedge C \neq B \wedge P \neq B \wedge \exists X, A-X-C \wedge$ $(X = B \vee B-X \rightarrow P)$
lea A B C D E F	$\angle ABC \leq \angle DEF$	$\exists P, P \in \angle DEF \wedge \angle ABC \equiv \angle DEP$
lta A B C D E F	$\angle ABC < \angle DEF$	$\angle ABC \leq \angle DEF \wedge \neg \angle ABC \equiv \angle DEF$
acute A B C		$\exists A', \exists B', \exists C', \perp A'B'C' \wedge \angle ABC < \angle A'B'C'$

TABLE 3 – Résumé des prédicats sur les angles et leur notation.

Pour que le lecteur puisse se convaincre que le théorème prouvé est bien celui attendu, nous fournissons les définitions utilisées en syntaxe Coq.

### 3.1. Prédicats sur les angles

Pour introduire la somme d'angles et étudier ses propriétés, nous avons utilisé les prédicats sur les angles définis dans le chapitre 11 de [SST83]. Leurs définitions et notations sont données à la Table 3. Notons que ces prédicats portent sur des angles non orientés.

### 3.2. Postulats de continuité

Nous souhaitons prouver que quand la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, cela implique l'unicité de la parallèle. Rappelons que Max Dehn, un étudiant de David Hilbert, a démontré que l'on ne peut pas prouver cette implication sans un axiome supplémentaire, comme l'axiome d'Archimède [Deh00].

Un corollaire de l'axiome d'Archimède est suffisante pour notre preuve, il s'agit de la propriété d'Aristote. Étant donné un segment  $s$  et un angle aigu non nul, il est possible de trouver un point sur un côté de l'angle dont la distance à l'autre côté est supérieure à la longueur du segment  $s$  (Fig. 2).

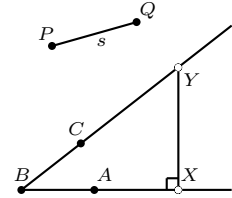


FIGURE 2 – Le postulat d'Aristote.

---

```

Definition aristotle_s_postulate := forall P Q A B C,
  ~ Col A B C -> acute A B C ->
  exists X, exists Y, out B A X /\ out B C Y /\ Per B X Y /\ lt P Q X Y.
    
```

---

Un corollaire important de la propriété d'Aristote a été mis en évidence par Marvin Jay Greenberg [Gre10]. Étant donnés deux points  $P$  et  $Q$ , une demi-droite  $r$  partant de  $Q$  perpendiculairement à  $PQ$  et un angle  $\alpha$  non nul, il est possible de trouver un point  $S$  sur  $r$  tel que  $\angle PSQ < \alpha$  (Fig. 3).

---

Definition greenberg\_s\_postulate := forall P Q R A B C,  
 ~ Col A B C -> acute A B C -> Q <> R -> Per P Q R ->  
 exists S, lta P S Q A B C /\ out Q S R.

---

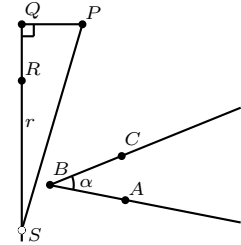


FIGURE 3 – Le postulat de Greenberg.

### 3.3. Postulats des parallèles

Dans cette partie, nous définissons les différentes versions du postulat des parallèles dont nous avons besoin dans cet article. Commençons par le plus connu : le postulat de Playfair, qui stipule l'unicité de la parallèle (Fig. 4<sup>3</sup>).

---

Definition playfair\_s\_postulate := forall A1 A2 B1 B2 C1 C2 P,  
 Par A1 A2 B1 B2 -> Col P B1 B2 -> Par A1 A2 C1 C2 -> Col P C1 C2 ->  
 Col C1 B1 B2 /\ Col C2 B1 B2.

---

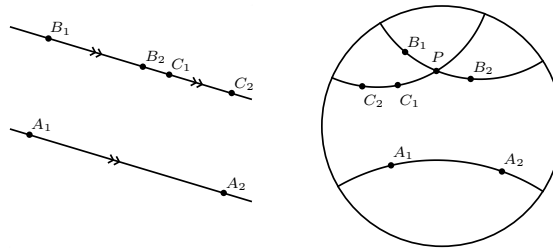


FIGURE 4 – Le postulat de Playfair.

Pour certaines preuves, il est plus aisé d'utiliser une variante du postulat de Playfair, qui semble être un cas particulier mais dont on peut aisément démontrer l'équivalence. On remplace l'hypothèse de parallélisme par l'existence d'une perpendiculaire commune passant par  $P$  (Fig. 5).

---

Definition playfair\_bis := forall A1 A2 B1 B2 C1 C2 P,  
 Perp2 A1 A2 B1 B2 P -> Col P B1 B2 -> Par A1 A2 C1 C2 -> Col P C1 C2 ->  
 Col C1 B1 B2 /\ Col C2 B1 B2.

---

Nous utilisons aussi le postulat des angles alternes-internes, qui stipule que si deux droites sont parallèles, les angles alternes-internes sont égaux (Fig. 6). Notons que la réciproque est vraie en géométrie neutre. Il s'agit du Lemme 6, exposé dans la partie 5.

---

Definition alternate\_interior\_angles\_postulate := forall A B C D,  
 two\_sides A C B D -> Par A B C D -> Conga B A C D C A.

---

3. Pour chaque postulat, nous donnons une illustration en géométrie euclidienne et un contre-exemple dans le disque de Poincaré.

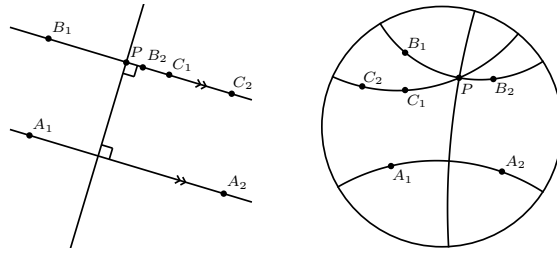


FIGURE 5 – Le postulat alternatif de Playfair.

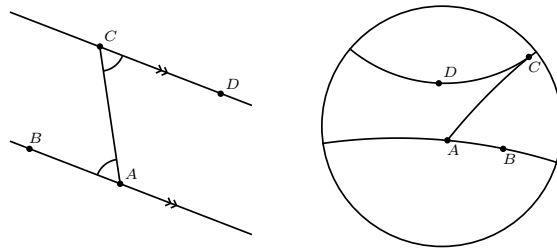


FIGURE 6 – Le postulat des angles alternes-internes.

Enfin, nous avons besoin du postulat de Proclus, qui indique que si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre (Fig. 7). Il est important de rappeler que nous avons démontré dans [BNS15b] que ce postulat implique la décidabilité de l'intersection des droites, contrairement aux précédents.

---

Definition proclus\_postulate := forall A B C D P Q,  
 Par A B C D -> Col A B P -> ~ Col A B Q -> exists Y, Col P Q Y /\ Col C D Y.

---

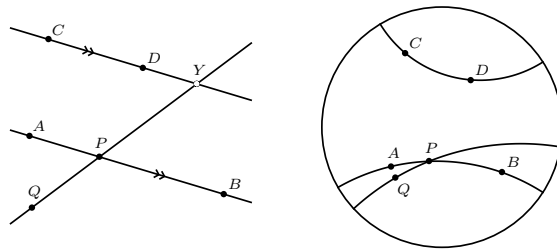


FIGURE 7 – Le postulat de Proclus.

#### 4. Une bibliothèque à propos de la somme d'angles

Pour exprimer le postulat qui stipule que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, il est nécessaire de développer une bibliothèque sur la somme des angles. L'axiomatique que nous



adoptons pour cet article (les axiomes A1-A9 de [SST83] auxquels nous ajoutons la décidabilité de l'égalité des points) est indépendante de l'axiome de continuité [Gup65], contrairement à d'autres approches où la continuité est implicitement utilisée. L'axiomatique de Birkhoff [Bir32], par exemple, suppose l'existence des réels et des fonctions permettant de mesurer les angles et les distances. Dans l'axiomatique de Tarski, il est possible de construire un corps ordonné. En utilisant un axiome de continuité (les coupures de Dedekind), on peut à la fois reconstruire les réels et définir une fonction de mesure des angles. Cependant, nous nous passons de l'axiome de continuité dans cet article. Nous développons donc dans cette partie une définition purement géométrique du concept de somme d'angles.

La somme de deux angles  $\angle ABC$  et  $\angle DEF$ , notée  $\angle ABC + \angle DEF$ , est obtenue en reportant l'angle  $\angle DEF$  de façon adjacente à l'angle  $\angle ABC$ . Le prédicat `Suma` que nous avons introduit permet de définir l'égalité entre un angle  $\angle GHI$  quelconque et la somme des angles  $\angle ABC$  et  $\angle DEF$  :

---

```
Definition Suma A B C D E F G H I :=
  exists J, Conga C B J D E F /\ ~ one_side B C A J /\ Conga A B J G H I.
```

---

Cependant, la somme d'angles non orientés ne préserve pas l'ordre, et n'est pas associative, pour des angles dont la somme est strictement supérieure à deux droits : en géométrie euclidienne, on a par exemple  $170^\circ > 170^\circ + 30^\circ = 160^\circ$  et  $160^\circ = (20^\circ + 170^\circ) + 30^\circ \neq 20^\circ + (170^\circ + 30^\circ) = 180^\circ$ . Nous avons donc introduit un prédicat afin de vérifier si la somme de deux angles est inférieure à deux droits :

---

```
Definition Isi A B C D E F :=
  exists J, Conga C B J D E F /\ ~ one_side B C A J /\ ~ two_sides A B C J.
```

---

Nous avons ainsi pu prouver en Coq que la somme de tels angles préserve l'ordre et qu'elle est associative, ce qui constitue un argument primordial d'une de nos preuves.

Enfin, le prédicat `Trisuma` définit l'égalité entre un angle  $\angle DEF$  et la somme des angles du triangle  $ABC$ , dans l'ordre  $(\angle ABC + \angle BCA) + \angle CAB$  :

---

```
Definition Trisuma A B C D E F :=
  exists G H I, Suma A B C B C A G H I /\ Suma G H I C A B D E F.
```

---

Cette définition n'est pas très lisible ; c'est dû au fait que nous n'adoptons pas une notation fonctionnelle (+) pour la somme d'angles, car cela nécessiterait en Coq d'introduire un axiome supplémentaire de réification des relations fonctionnelles. Nous souhaitons garder le minimum d'axiomes pour les fondements de notre bibliothèque, quitte à introduire ensuite une surcouche plus lisible utilisant des symboles fonctionnels.

Le théorème de l'angle extérieur permet, en géométrie neutre et sans axiome d'Archimède, de considérer la somme des angles d'un triangle sans se soucier de l'ordre des points. En effet, ce théorème affirme que la somme de deux angles d'un triangle est strictement inférieure à deux droits, et nous nous en servons pour établir l'associativité de la somme des trois angles.

Nous pouvons à présent définir un postulat exprimant le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, que nous appellerons postulat du triangle (Fig. 8). Le fait que l'angle est égal à deux droits est exprimé par le fait que l'angle est plat, ce que l'on a montré être équivalent.

---

```
Definition triangle_postulate := forall A B C D E F,
  Trisuma A B C D E F -> Bet D E F.
```

---

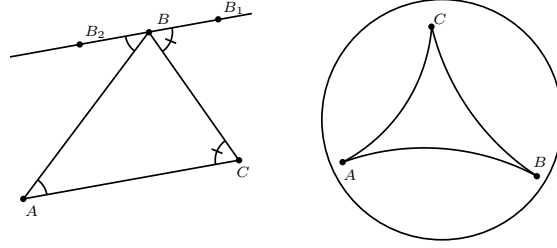


FIGURE 8 – Le postulat du triangle.

## 5. Preuves d'équivalence

Nos preuves reposent sur des lemmes prouvés en géométrie neutre sans utiliser la décidabilité de l'intersection. Nous listons ici ceux qui sont utilisés dans la partie suivante :

**Lemme 1** :  $\forall ABXY, \text{Col } AXY \Rightarrow A \overset{XY}{\parallel} B \Rightarrow A \dashv\!\! \dashv X \leftrightarrow Y$ .

**Lemme 2** :  $\forall ABC, \text{Col } ABC \Rightarrow \neg \text{Col } ABP \Rightarrow \exists Q, AB \perp QC \wedge A \overset{QC}{\parallel} B$ .

**Lemme 3** (isométrie angle-côté-angle) :  $\forall ABCA'B'C', \neg \text{Col } ABC \Rightarrow \angle BCA \equiv \angle B'C'A' \Rightarrow \angle ABC \equiv \angle A'B'C' \Rightarrow AB \equiv A'B' \Rightarrow AC \equiv A'C' \wedge BC \equiv B'C' \wedge \angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ .

**Lemme 4** :  $\forall ABCD, AB \parallel_s CD \Rightarrow A \overset{CD}{\parallel} B$ .

**Lemme 5** :  $\forall A_1A_2B_1B_2C_1C_2, \text{Cp } A_1A_2B_1B_2 \Rightarrow A_1A_2 \perp C_1C_2 \Rightarrow B_1B_2 \perp C_1C_2 \Rightarrow A_1A_2 \parallel B_1B_2$ .

**Lemme 6** (angles alternes-internes) :  $\forall ABCD, A \overset{D}{\parallel} C \Rightarrow \angle BAC \equiv \angle CDA \Rightarrow AB \parallel CD$ .

Nous avons aussi introduit d'autres lemmes, tous prouvables en géométrie neutre sans utiliser la décidabilité de l'intersection. Voici les trois dont nous ferons usage dans les preuves qui suivent ; ils expriment des propriétés concernant la position relative de points par rapport à des droites et des angles :

**Lemme 7** :  $\forall ABCP, B \overset{C}{\parallel} A \Rightarrow B \overset{CP}{\parallel} A \Rightarrow P \in \angle ABC$ .

**Lemme 8** :  $\forall ABCP, B \overset{CP}{\parallel} A \Rightarrow B \overset{AP}{\parallel} C \Rightarrow P \in \angle ABC$ .

**Lemme 9** :  $\forall ABCDIP, C \neq D \Rightarrow \text{Col } ABI \Rightarrow \text{Col } CDI \Rightarrow \neg \text{Col } ABC \Rightarrow \neg \text{Col } ABP \Rightarrow \exists Q, \text{Col } CDQ \wedge A \overset{PQ}{\parallel} B$ .

**Proposition 1.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes en géométrie neutre sans axiome de continuité :*

1. *le postulat alternatif de Playfair*
2. *le postulat de Playfair*
3. *le postulat des angles alternes-internes.*

*Démonstration.*

1  $\Rightarrow$  2 Cette implication n'est pas difficile à formaliser.

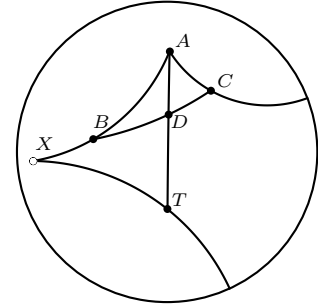
2  $\Rightarrow$  3 La preuve utilise la décidabilité du prédicat Col, que nous avons démontrée précédemment [BNS15b], pour distinguer le cas dégénéré. Dans le cas général, on utilise le postulat des angles alternes-internes pour exhiber un angle droit et on conclut par l'unicité de la perpendiculaire.

3  $\Rightarrow$  1 La preuve se déduit facilement du fait que l'on peut reporter un angle donné d'un côté d'une droite et du Lemme 6. □

**Proposition 2.** *La conjonction du postulat de Greenberg et du postulat du triangle implique le postulat alternatif de Playfair.*

La preuve formelle s'inspire de celle que donne Marvin Jay Greenberg dans [Gre10], mais en diffère par plusieurs aspects.

D'abord, sa définition de l'intérieur d'un angle diffère de la nôtre, donnée à la Table 3 (InAngle) : il dit qu'un point  $T$  est à l'intérieur d'un angle  $\angle BAC$  si d'une part,  $T$  et  $C$  sont du même côté de la droite  $AB$  et d'autre part,  $T$  et  $B$  sont du même côté de la droite  $AC$ . Cette définition correspond aux hypothèses du Lemme 8, présent dans [Gre93] sous le nom de *Crossbar Theorem*. Nous avons prouvé que les deux définitions sont équivalentes.



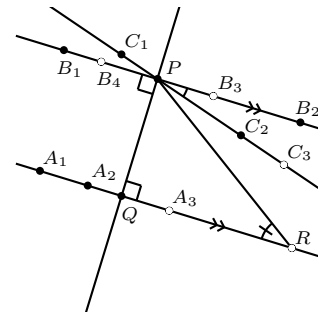
Remarquons que l'on pourrait croire qu'il existe toujours un segment reliant les deux côtés d'un angle en passant par un point  $T$  donné à l'intérieur. Ce n'est vrai qu'en géométrie euclidienne, on ne peut donc pas s'en servir comme définition pour InAngle (voir figure ci-contre). Il s'agit d'ailleurs de la version du postulat des parallèles qui est présente dans [SST83].

Par ailleurs, notre preuve est plus explicite que celle de Greenberg quant à la position relative des points, ce qui nous amène à construire des points supplémentaires avec le Lemme 9 et à utiliser le Lemme 4.

Enfin, Greenberg se sert implicitement de la mesure d'angles pour justifier la préservation de l'ordre par la somme d'angles. Or, la construction d'une telle mesure n'est pas possible sans l'axiome de continuité, comme nous l'avons expliqué dans la partie 4. Notre bibliothèque sur les sommes d'angles permet de combler cette lacune dans la preuve de Greenberg de manière purement géométrique.

*Démonstration.*

Nous voulons prouver que les points  $B_1, B_2, C_1$  et  $C_2$  sont colinéaires, en supposant que les droites  $B_1B_2$  et  $C_1C_2$  ont un point commun  $P$ , que la droite  $B_1B_2$  a une perpendiculaire commune passant par  $P$  avec une droite  $A_1A_2$ , que  $A_1A_2$  est parallèle à  $C_1C_2$ , et que le postulat de Greenberg et le postulat du triangle s'appliquent.



D'abord, on peut déduire du Lemme 5 que les droites  $A_1A_2$  et  $B_1B_2$  sont parallèles. Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que la droite  $C_1C_2$  est distincte de la droite  $B_1B_2$ . On peut aussi supposer  $\neg \text{Col } A_1A_2P$ , car dans le cas contraire  $A_1A_2$  et  $C_1C_2$  seraient des droites parallèles avec un point commun  $P$ , donc confondues, de même que les droites  $A_1A_2$  et  $B_1B_2$ . En considérant l'intersection  $Q$  entre la droite  $A_1A_2$  et sa perpendiculaire commune avec  $B_1B_2$ , on peut alors utiliser le Lemme 9 pour construire un point  $C_3$  sur la droite  $C_1C_2$  tel que  $B_1 \overset{C_3}{\not\sim} B_2$ , puis des points  $A_3$  et  $B_3$  sur les droites respectives  $A_1A_2$  et  $B_1B_2$  tels que  $P \overset{C_3A_3}{\not\sim} Q$  et  $P \overset{C_3B_3}{\not\sim} Q$ . À présent, le Lemme 8 nous apprend que  $C_3 \in \angle QPB_3$ , ce qui fait de  $\angle C_3PB_3$  un angle aigu. Par conséquent, on peut utiliser le postulat de Greenberg pour construire un point  $R$  tel que  $Q \overset{R}{\not\sim} A_3$  et  $\angle PRQ < \angle C_3PB_3$ . Comme  $R$  appartient à la droite  $A_1A_2$ , on peut utiliser le Lemme 4 pour prouver  $P \overset{B_3}{\not\sim} C_3$  et  $P \overset{RC_3}{\not\sim} B_3$ . Par le Lemme 7, on obtient  $C_3 \in \angle RPB_3$ , et donc  $\angle C_3PB_3 < \angle RPB_3$ . Construisons des points  $S, T$  et  $U$  tels que  $S(\triangle PQR) \equiv \angle STU$  et  $B_4$  le

symétrique de  $B_3$  par rapport à  $P$ . On peut remarquer que les angles  $\angle PQR$  et  $\angle B_4PQ$  sont tous deux droits, donc  $\angle PQR \equiv \angle B_4PQ$ , et que  $B_4-P-B_3$ . On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \angle STU &\equiv \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ && \text{car } \mathcal{S}(\triangle PQR) \equiv \angle STU \\ &\equiv \angle B_4PQ + \angle QPR + \angle PRQ && \text{car } \angle PQR \equiv \angle B_4PQ \\ &\equiv \angle B_4PR + \angle PRQ && \text{car } P \overset{B_4}{\parallel} R \text{---} Q \\ &< \angle B_4PR + \angle C_3PB_3 && \text{par préservation de l'ordre} \\ &< \angle B_4PR + \angle RP B_3 \equiv \angle B_4PB_3, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $\angle STU$  est strictement inférieur à un angle plat, ce qui contredit le postulat du triangle.  $\square$

**Proposition 3.** *Le postulat des angles alternes-internes implique le postulat du triangle.*

La preuve usuelle qui consiste à construire la parallèle à un côté passant par le sommet opposé (Fig. 8) n'utilise pas la décidabilité de l'intersection, elle se formalise sans peine. Le cas du triangle dégénéré n'est pas difficile à traiter car par définition, si trois points sont alignés alors un des trois est entre les deux autres.

## 5.1. À propos de la décidabilité de l'intersection

Dans cette partie nous prouvons que sous l'hypothèse de l'unicité de la parallèle (postulat de Playfair), les postulats de Greenberg, d'Aristote et la décidabilité de l'intersection sont des propriétés équivalentes. Pour le prouver nous utilisons des postulats intermédiaires équivalents.

**Proposition 4.** *La conjonction du postulat de Greenberg et du postulat des angles alternes-internes implique le postulat de Proclus.*

L'équivalence entre le postulat de Proclus et celui des angles alternes-internes est un résultat connu en logique classique. Mais en logique intuitionniste, ces deux postulats ne sont pas équivalents : le premier implique la décidabilité de l'intersection, contrairement au deuxième [BNS15b]. Pour montrer que le postulat de Greenberg est équivalent à la décidabilité de l'intersection en géométrie euclidienne, nous passons par l'intermédiaire du postulat de Proclus.

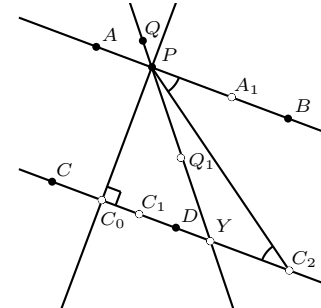
À notre connaissance, la preuve de ce résultat est originale.

*Démonstration.*

Soient  $AB$  et  $CD$  deux droites parallèles,  $P$  un point de  $AB$  et  $Q$  un point extérieur à  $AB$ . Montrons que les droites  $CD$  et  $PQ$  se rencontrent en un point  $Y$ .

On peut d'abord éliminer le cas où  $P$  appartient à la droite  $CD$ , car il correspond alors au point recherché. Considérons ensuite  $C_0$  le projeté orthogonal de  $P$  sur la droite  $CD$ . Si  $C_0$  appartient à  $PQ$ , la conclusion est là encore immédiate. Sinon, après avoir construit un point  $Q_1$  sur la droite  $PQ$  tel que  $A \overset{C_0Q_1}{\parallel} B$  par le Lemme 9, on peut réutiliser ce lemme pour obtenir des points  $A_1$  et  $C_1$  sur les droites respectives  $AB$  et  $CD$  tels que  $P \overset{Q_1A_1}{\parallel} C_0$  et  $P \overset{Q_1C_1}{\parallel} C_0$ . Le Lemme 8

nous apprend alors que  $Q_1 \in \angle C_0PA_1$ . Or, on sait que l'angle  $\angle C_0PA_1$  est droit grâce au postulat des angles alternes-internes, donc l'angle  $\angle A_1PQ_1$  est aigu. On peut ainsi appliquer le postulat de Greenberg, et construire un point  $C_2$  tel que  $C_0 \dashrightarrow C_2 \dashrightarrow C_1$  et  $\angle PC_2C_0 < \angle A_1PQ_1$ . On a également



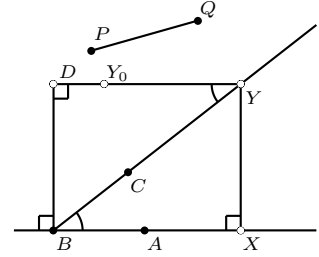
$\angle A_1 P C_2 \equiv \angle P C_2 C_0$  par le postulat des angles alternes-internes, donc  $C_2 \in \angle A_1 P Q_1$ . On peut alors arriver à montrer  $P \overset{C_2 Q_1}{\parallel} C_0$  et  $P \overset{C_0 Q_1}{\parallel} C_2$ , et le Lemme 8 nous amène à  $Q_1 \in \angle C_0 P C_2$ , c'est-à-dire qu'il existe un point  $Y$  tel que  $C_0 \overset{Y}{\parallel} C_2$  et  $P \overset{Y}{\parallel} Q_1$ . En particulier,  $Y$  appartient aux droites  $CD$  et  $PQ$ .  $\square$

**Proposition 5.** *Le postulat de Proclus implique le postulat d'Aristote.*

Cette preuve est donnée dans la 4<sup>e</sup> édition de [Gre93], à laquelle nous n'avons pas accès. Nous proposons la preuve suivante.

*Démonstration.*

Nos hypothèses sont le postulat de Proclus et que l'angle  $\angle A B C$  est aigu et non nul. Montrons que pour tout segment  $PQ$ , on peut trouver des points  $X$  et  $Y$  tels que  $B \overset{C}{\parallel} Y$ ,  $B \overset{A}{\parallel} X$ ,  $\perp B X Y$  et  $PQ < XY$ . En utilisant le Lemme 2, on peut construire un point  $D$  tel que  $AB \perp BD$ ,  $A \overset{CD}{\parallel} B$  et  $PQ < BD$ , puis un point  $Y_0$  tel que  $BD \perp DY_0$ ,  $B \overset{AY_0}{\parallel} D$ . Les droites  $AB$  et  $DY_0$  étant parallèles d'après le lemme 12-9, on peut appliquer le postulat de Proclus pour trouver un point  $Y$  à l'intersection des droites  $BC$  et  $DY_0$ . On peut ensuite construire  $X$  le projeté orthogonal de  $Y$  sur la droite  $AB$ . Vérifions que les quatre conditions recherchées pour  $X$  et  $Y$  sont bien réunies :



1. Par le Lemme 4, on a  $A \overset{DY}{\parallel} B$ , d'où  $A \overset{CY}{\parallel} B$ , puis  $B \overset{C}{\parallel} Y$  par le Lemme 1.
2. Comme  $B \overset{C}{\parallel} Y$ , on en déduit  $B \overset{YC}{\parallel} D$ . D'autre part, on a  $B \overset{XY}{\parallel} D$  par les Lemmes 5 et 4, et comme l'angle  $\angle A B C$  est aigu, on a  $C \in \angle A B D$ , donc  $B \overset{CA}{\parallel} D$ . Ainsi  $B \overset{XA}{\parallel} D$ , d'où  $B \overset{A}{\parallel} X$  par le Lemme 1.
3. On a bien  $\perp B X Y$  par construction.
4. On déduit de  $B \overset{A}{\parallel} X$  que  $Y \overset{AX}{\parallel} B$ , et de  $C \in \angle A B D$  que  $B \overset{D}{\parallel} C$ . Ainsi on a  $Y \overset{D}{\parallel} B$ , et on peut appliquer le postulat des angles alternes-internes, qui est une conséquence du postulat de Proclus. On trouve alors  $\angle B Y D \equiv \angle Y B X$ , ce qui nous permet d'affirmer que les triangles  $X B Y$  et  $Y D B$  sont isométriques par le Lemme 3, notamment  $BD \equiv XY$ . Ainsi,  $PQ < BD \equiv XY$ .

$\square$

**Proposition 6** (Greenberg, [Gre10] page 207). *Le postulat d'Aristote implique le postulat de Greenberg.*

## 6. Résultats

Pour finir, nous résumons nos résultats concernant le postulat des parallèles. Afin de les exprimer de manière compacte, nous introduisons une forme n-aire d'équivalence :

---

**Definition** `all_equiv` (l: list Prop) :=  
`forall x y, In x l -> In y l -> (x <-> y).`

---

De plus, nous définissons un prédicat `all_equiv_under` qui exprime une équivalence n-aire sous hypothèse :

---

```
Definition all_equiv_under (l1 l2 : list Prop) :=
  forall x y z, In x l1 -> In y l2 -> In z l2 -> (x -> (y <-> z)).
```

---

En prenant pour hypothèse n'importe quel postulat des parallèles excepté le postulat du triangle (nous ajoutons les postulats étudiés dans [BNS15b]), la décidabilité de l'intersection est équivalente aux postulats de Greenberg et d'Aristote. À notre connaissance, ce résultat est original.

---

```
Lemma equivalence_of_aristotle_greenberg_and_decidability_of_intersection :
  all_equiv_under
    (tarski_s_parallel_postulate::
      triangle_circumscription_principle::
      playfair_s_postulate::
      perpendicular_transversal_postulate::
      postulate_of_parallelism_of_perpendicular_tranversals::
      proclus_postulate::
      postulate_of_transitivity_of_parallelism::
      strong_parallel_postulate::
      euclid_5::
      midpoints_converse_postulate::
      alternate_interior_angles_postulate::
      playfair_bis::
      nil)
    (aristotle_s_postulate::
      decidability_of_intersection::
      greenberg_s_postulate::
      nil).
```

---

Enfin, en supposant le postulat de Greenberg, nos 13 versions du postulat des parallèles sont équivalentes :

---

```
Lemma parallel_postulates_assuming_greenberg_s_postulate :
  greenberg_s_postulate ->
  all_equiv (tarski_s_parallel_postulate::
    triangle_circumscription_principle::
    playfair_s_postulate::
    perpendicular_transversal_postulate::
    postulate_of_parallelism_of_perpendicular_tranversals::
    proclus_postulate::
    postulate_of_transitivity_of_parallelism::
    strong_parallel_postulate::
    euclid_5::
    midpoints_converse_postulate::
    alternate_interior_angles_postulate::
    playfair_bis::
    triangle_postulate::
    nil).
```

---

## 7. Conclusion

Nous avons obtenu une version formelle d'un résultat important en géométrie neutre concernant les postulats des parallèles. La formalisation a permis d'une part de mettre en lumière les lemmes nécessaires : nous avons introduit des preuves des propriétés de préservation de l'ordre de l'addition des angles, ainsi que des propriétés concernant la position relative des points par rapports aux droites et aux angles. D'autre part, nous avons pu clarifier le rôle de la décidabilité de l'intersection dans ces preuves.

Nous envisageons d'étendre ce travail en prouvant l'équivalence entre d'autres versions de l'axiome d'Euclide. Par exemple, nous pourrions formaliser la preuve d'équivalence entre 26 versions du 5<sup>e</sup> postulat d'Euclide proposée par George Edward Martin dans [Mar98]. L'une de ces 26 versions est le théorème de Thalès dans le cercle [BM15]. Il serait aussi intéressant de prouver que l'axiome d'Archimède implique les propriétés d'Aristote et de Greenberg.

Nous avons montré que le postulat de Greenberg implique la décidabilité de l'intersection sous l'hypothèse de l'unicité de la parallèle. La question de savoir si cette hypothèse est nécessaire reste ouverte.

Ce développement pourra servir de base à la formalisation des résultats de Michael Beeson concernant la géométrie de Tarski et le postulat des parallèles dans un cadre constructif [Bee15a, Bee15b]. Nous pourrions aussi utiliser les équivalences démontrées pour obtenir des résultats en géométrie hyperbolique : la négation de chaque postulat devient un théorème.

La difficulté des preuves réside dans le fait qu'il est très facile de se tromper et d'admettre implicitement une propriété équivalente à ce que nous souhaitons démontrer. Il faut trouver un "chemin" de preuve permettant d'ordonner les arguments. L'utilisation d'un assistant de preuve permet de clore définitivement le débat concernant la correction de ces preuves.

## Disponibilité

Le développement Coq fait partie de la bibliothèque GeoCoq, qui est disponible ici : <http://geocoq.github.io/GeoCoq/>

**Remerciements** : les auteurs remercient Pascal Schreck et David Braun pour leur relecture attentive de cet article.

## Références

- [Bee15a] Michael Beeson. Constructive geometry and the parallel postulate. *Bulletin of Symbolic Logic*, accepted pending revisions, 2015.
- [Bee15b] Michael Beeson. A constructive version of Tarski's geometry. *Annals of Pure and Applied Logic*, 166(11) :1199–1273, 2015.
- [Bir32] George David Birkhoff. A set of postulates for plane geometry (based on scale and protractors). *Annals of Mathematics*, 33, 1932.
- [BM15] David Braun and Nicolas Magaud. Des preuves formelles en Coq du théorème de Thalès pour les cercles. In David Baelde and Jade Alglave, editors, *Vingt-sixièmes Journées Francophones des Langages Applicatifs (JFLA 2015)*, Le Val d'Ajol, France, January 2015.
- [BN12] Gabriel Braun and Julien Narboux. From Tarski to Hilbert. In Tetsuo Ida and Jacques Fleuriot, editors, *Post-proceedings of Automated Deduction in Geometry 2012*, volume 7993 of *LNCS*, pages 89–109, Edinburgh, United Kingdom, September 2012. Jacques Fleuriot, Springer.

- [BNS15a] Pierre Boutry, Julien Narboux, and Pascal Schreck. A reflexive tactic for automated generation of proofs of incidence to an affine variety. October 2015.
- [BNS15b] Pierre Boutry, Julien Narboux, and Pascal Schreck. Parallel postulates and decidability of intersection of lines : a mechanized study within Tarski's system of geometry. submitted, July 2015.
- [BNSB14a] Pierre Boutry, Julien Narboux, Pascal Schreck, and Gabriel Braun. A short note about case distinctions in Tarski's geometry. In Francisco Botana and Pedro Quaresma, editors, *Automated Deduction in Geometry 2014*, Proceedings of ADG 2014, pages 1–15, Coimbra, Portugal, July 2014.
- [BNSB14b] Pierre Boutry, Julien Narboux, Pascal Schreck, and Gabriel Braun. Using small scale automation to improve both accessibility and readability of formal proofs in geometry. In Francisco Botana and Pedro Quaresma, editors, *Automated Deduction in Geometry 2014*, Proceedings of ADG 2014, pages 1–19, Coimbra, Portugal, July 2014.
- [Deh00] M. Dehn. Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. *Mathematische Annalen*, 53(3) :404–439, 1900.
- [Dup08] Jean Duprat. Une axiomatique de la géométrie plane en Coq. In *JFLA (Journées Francophones des Langages Applicatifs)*, pages 123–136, Etretat, France, January 2008. INRIA.
- [Dup10] Jean Duprat. Fondements de géométrie euclidienne. 2010.
- [Gre93] Marvin J. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries - Development and History*. Macmillan, 1993.
- [Gre10] Marvin J. Greenberg. Old and New Results in the Foundations of Elementary Plane Euclidean and Non-Euclidean Geometries. *The American Mathematical Monthly*, 117(3) :198–219, March 2010.
- [Gup65] Haragauri Narayan Gupta. *Contributions to the axiomatic foundations of geometry*. PhD thesis, University of California, Berkley, 1965.
- [Klu63] G.S. Klugel. *Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*. PhD thesis, Schultz, Göttingen, 1763. German translation available : <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/versuch.html>.
- [Mak12] Timothy James McKenzie Makarios. A Mechanical Verification of the Independence of Tarski's Euclidean Axiom. Master's thesis, Victoria University of Wellington, 2012. Master Thesis.
- [Mar98] G.E. Martin. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1998.
- [MP14] Filip Marić and Danijela Petrović. Formalizing complex plane geometry. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, pages 1–38, 2014.
- [Nar07] Julien Narboux. Mechanical Theorem Proving in Tarski's geometry. In Francisco Botana Eugenio Roanes Lozano, editor, *Post-proceedings of Automated Deduction in Geometry 2006*, volume 4869 of *LNCS*, pages 139–156, Pontevedra, Spain, 2007. Francisco Botana, Springer.
- [SST83] Wolfram Schwabhäuser, Wanda Szmielew, and Alfred Tarski. *Metamathematische Methoden in der Geometrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [TG99] Alfred Tarski and Steven Givant. Tarski's system of geometry. *The bulletin of Symbolic Logic*, 5(2), June 1999.