



HAL
open science

Somme des angles d'un triangle et unicité de la parallèle : une preuve d'équivalence formalisée en Coq

Charly Gries, Pierre Boutry, Julien Narboux

► To cite this version:

Charly Gries, Pierre Boutry, Julien Narboux. Somme des angles d'un triangle et unicité de la parallèle : une preuve d'équivalence formalisée en Coq. Les vingt-septièmes Journées Francophones des Langages Applicatifs (JFLA 2016), Jade Algaev; Julien Signoles, Jan 2016, Saint Malo, France. pp.15. hal-01228612v2

HAL Id: hal-01228612

<https://inria.hal.science/hal-01228612v2>

Submitted on 19 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Somme des angles d'un triangle et unicité de la parallèle : une preuve d'équivalence formalisée en Coq.

Charly Gries, Pierre Boutry, Julien Narboux

*Laboratoire ICube, UMR 7357 CNRS, Université de Strasbourg
Pôle API, Bd Sébastien Brant, BP 10413, 67412 Illkirch, France
charly.gries@etu.unistra.fr, {boutry, narboux}@unistra.fr*

Résumé

Nous nous intéressons dans cet article au 5^e postulat d'Euclide. Ce postulat a une importance historique : pendant des siècles, de nombreux mathématiciens de renom ont cru qu'il s'agissait d'un théorème pouvant être dérivé des quatre premiers postulats d'Euclide. Dans cet article, nous présentons la formalisation en Coq de résultats relatifs à l'équivalence entre l'unicité de la parallèle et le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits. Nous travaillons en logique intuitionniste dans le contexte de l'axiomatique de Tarski. D'une part nous obtenons la preuve formelle de l'équivalence, et d'autre part nous clarifions les propriétés de décidabilité nécessaires pour la preuve. Nous étudions également le lien entre la propriété d'Aristote et la décidabilité de l'intersection entre deux droites.

1. Introduction

Nous nous intéressons dans cet article au 5^e postulat d'Euclide (Fig. 1) :

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Ce postulat a une importance historique, parce que pendant des siècles, de nombreux mathématiciens de renom ont cru qu'il pouvait être dérivé des quatre premiers postulats d'Euclide. L'histoire est ainsi riche en preuves fausses du postulat des parallèles. En 1763, Georg Simon Klügel a soutenu une thèse présentant une critique et un résumé de 28 tentatives de preuves du postulat des parallèles d'Euclide [Klu63]. Adrien Marie Legendre fait partie de ceux qui ont publié des preuves erronées du postulat d'Euclide, notamment en utilisant la somme des angles d'un triangle. En 1833, un an après la publication par János Bolyai d'un appendice sur la géométrie non-euclidienne, Legendre écrit :

“Il n'en est pas moins certain que le théorème sur la somme des trois angles du triangle doit être regardé comme l'une de ces vérités fondamentales qu'il est impossible de contester, et qui sont un exemple toujours subsistant de la certitude mathématique qu'on recherche sans cesse et qu'on n'obtient que bien difficilement dans les autres branches des connaissances humaines.”
– Adrien Marie Legendre [Leg33]

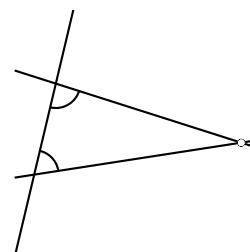


FIGURE 1 – Le 5^e postulat d'Euclide.

Pour la plupart, les preuves incorrectes supposaient, plus ou moins implicitement, un énoncé équivalent à celui qu’elles voulaient démontrer. Il existe de nombreux énoncés équivalents (dans le contexte de la géométrie neutre¹) au 5^e postulat. Nous avons décrit la formalisation en Coq de l’équivalence entre dix versions du postulat des parallèles et l’impact sur la décidabilité de l’intersection dans un article précédent [BNS15b]. Dans cet article, nous nous intéressons au postulat du triangle qui stipule que la somme des angles d’un triangle est égale à π (ou plutôt à deux droits, nous verrons que cela a une importance). Cette version du postulat des parallèles n’est pas équivalente au 5^e postulat d’Euclide dans toute géométrie neutre. En effet, comme l’a montré Max Dehn [Deh00], il existe un modèle non-archimédien dans lequel la somme des angles d’un triangle vaut π mais le 5^e postulat d’Euclide n’est pas vérifié. L’axiome d’Archimède est un corollaire de l’axiome de continuité, et peut s’exprimer de la façon suivante. Étant donné deux segments AB et CD tel que C est différent de D , il existe un entier n et n points A_1, \dots, A_n de la droite AB , tels que A_j se situe entre A_{j-1} et A_{j+1} pour $1 < j < n$, $A_j A_{j+1}$ et CD ont même longueur pour $0 < j < n$, $A = A_1$ et B se situe entre A_1 et A_n .

Jean Duprat a prouvé, en utilisant cet axiome, que quand la somme des angles d’un triangle est égale à deux droits, cela implique l’unicité de la parallèle [Dup10], dans une axiomatique pour la géométrie euclidienne à la règle et au compas basée sur la notion d’orientation et qu’il a proposée dans [Dup08]. Dans cette formalisation, nous utilisons une propriété, proposée par Marvin Jay Greenberg [Gre10], dont l’expression est purement géométrique et qui peut se déduire de l’axiome d’Archimède. Nous prouvons l’équivalence entre le postulat du triangle et l’unicité de la parallèle en supposant cette propriété.

Nos preuves formelles reposent sur les nombreux lemmes décrits dans [SST83] qui sont prouvables sans le postulat des parallèles, et que nous avons formalisés précédemment [Nar07, BN12] à l’aide de l’assistant de preuve Coq. Nous utilisons les tactiques développées précédemment [BNSB14b, BNS15a].

Cette formalisation a un double intérêt. Premièrement, elle permet d’exhiber des preuves dont on pourra dire définitivement qu’elles sont correctes. En effet, l’utilisation d’un assistant de preuve permet d’éviter tout risque d’erreur : preuve utilisant un argument circulaire, étape non justifiée dans une preuve ou incohérence entre plusieurs définitions.

De plus, la formalisation permet de clarifier quels sont les axiomes nécessaires pour chacune des preuves d’équivalence.

2. Le contexte

Toutes nos preuves sont réalisées dans le contexte de la géométrie de Tarski. Nous utilisons les axiomes A1 à A9 donnés dans [SST83]. Le lecteur intéressé par une explication et l’histoire de ces axiomes peut consulter la lettre d’Alfred Tarski et Steven Givant à Wolfram Schwabhäuser [TG99]. En Table 1, nous listons les axiomes de la géométrie de Tarski neutre, c’est-à-dire sans le postulat des parallèles (l’axiome A10 dans [SST83]).

Ce système d’axiomes considère un seul type de base : les points, ainsi que deux prédicats. Le premier, d’arité 3, est noté $A-B-C$ et signifie que A , B et C sont colinéaires et que B se situe entre A et C (B peut être égal à A ou à C). Le second, d’arité 4, est noté $AB \equiv CD$ et signifie que les segments AB et CD ont même longueur.

Nous omettons l’axiome de continuité (A11 dans [SST83]) qui n’est pas nécessaire pour ce développement. En effet, dans sa thèse, Haragauri Nayaran Gupta [Gup65] a montré que dans le cadre de la géométrie de Tarski, il est possible de prouver l’existence du milieu d’un segment sans faire appel à l’axiome de continuité.

1. Nous désignons par le terme géométrie neutre l’ensemble des résultats communs entre la géométrie euclidienne et la géométrie hyperbolique. C’est-à-dire qu’il existe des parallèles mais elles ne sont pas forcément uniques. Cela exclut la géométrie sphérique.

```

Class Tarski_neutral_dimensionless := {
  Tpoint : Type;
  Bet : Tpoint -> Tpoint -> Tpoint -> Prop;
  Cong : Tpoint -> Tpoint -> Tpoint -> Tpoint -> Prop;
  between_identity : forall A B, Bet A B A -> A = B;
  cong_pseudo_reflexivity : forall A B : Tpoint, Cong A B B A;
  cong_identity : forall A B C : Tpoint, Cong A B C C -> A = B;
  cong_inner_transitivity : forall A B C D E F : Tpoint,
    Cong A B C D -> Cong A B E F -> Cong C D E F;
  inner_pasch : forall A B C P Q : Tpoint,
    Bet A P C -> Bet B Q C ->
    exists X, Bet P X B /\ Bet Q X A;
  five_segment : forall A A' B B' C C' D D' : Tpoint,
    Cong A B A' B' -> Cong B C B' C' -> Cong A D A' D' -> Cong B D B' D' ->
    Bet A B C -> Bet A' B' C' -> A <> B -> Cong C D C' D';
  segment_construction : forall A B C D : Tpoint,
    exists E : Tpoint, Bet A B E /\ Cong B E C D;
  lower_dim : exists A, exists B, exists C, ~ (Bet A B C \/ Bet B C A \/ Bet C A B)
}.

```

TABLE 1 – Formalisation du système d'axiomes en Coq .

À ces axiomes, nous ajoutons l'axiome de dimension supérieure (A9 dans [SST83]), qui exprime le fait que nous nous plaçons dans un espace de dimension 2 :

```

Class Tarski_2D `(Tn : Tarski_neutral_dimensionless) := {
  upper_dim : forall A B C P Q : Tpoint,
    P <> Q -> Cong A P A Q -> Cong B P B Q -> Cong C P C Q ->
    (Bet A B C \/ Bet B C A \/ Bet C A B)
}.

```

Utiliser l'axiomatique de Tarski possède plusieurs avantages dont les suivants : il y a peu d'axiomes, ils sont assez courts, il est facile de généraliser l'axiomatisation pour des espaces d'autres dimensions, et elle présente de nombreuses propriétés métamathématiques. L'existence d'un modèle a été prouvée formellement en Isabelle/HOL [PM12]. De plus, la plupart de ses axiomes sont indépendants [Gup65]. En particulier, l'indépendance du postulat des parallèles, propriété cruciale pour notre étude, a été formalisée². Enfin notre équipe a réalisé un développement Coq conséquent fondé sur cette axiomatique. Le travail décrit dans cet article se base ainsi sur les 53000 lignes de preuve des 1200 lemmes formalisant les 13 premiers chapitres de [SST83]. Il représente à son tour 2700 lignes de preuves pour environ 80 lemmes, concernant essentiellement la bibliothèque sur la somme d'angles (Partie 4).

Nous avons montré précédemment que les axiomes de Tarski, en dimension 2 sans continuité, permettent de prouver les axiomes de Hilbert correspondants [BN12].

Il convient de noter que, travaillant dans un contexte intuitionniste, nous avons eu besoin d'introduire l'axiome suivant, qui permet de faire des distinctions de cas sur l'égalité des points :

```

eq_dec_points : forall A B : Tpoint, A = B \/ A <> B.

```

2. Timothy Makarios a formalisé avec l'assistant de preuve Isabelle une preuve de l'indépendance du 5^e postulat d'Euclide par rapport aux autres axiomes de la géométrie de Alfred Tarski [Mak12]. Il utilise le modèle de Klein-Beltrami. Filip Marić et Danijela Petrović ont formalisé en Isabelle la géométrie du plan complexe [MP14] et envisagent d'étendre leurs résultats pour formaliser différents modèles de géométrie non-euclidienne.

| Coq | Notation | Définition |
|----------------------|--|---|
| Bet A B C | $A-B-C$ | |
| Cong A B C D | $AB \equiv CD$ | |
| Col A B C | $\text{Col } ABC$ | $A-B-C \vee B-A-C \vee A-C-B$ |
| out O A B | $O \dashv\vdash A \dashv\vdash B$ | $O \neq A \wedge O \neq B \wedge (O-A-B \vee O-B-A)$ |
| is_midpoint M A B | $A \dashv\vdash M \dashv\vdash B$ | $A-M-B \wedge AM \equiv BM$ |
| Per A B C | $\perp ABC$ | $\exists C', C \dashv\vdash B \dashv\vdash C' \wedge AC \equiv AC'$ |
| Perp_in P A B C D | $AB \perp_P CD$ | $A \neq B \wedge C \neq D \wedge \text{Col } PAB \wedge \text{Col } PCD \wedge (\forall UV, \text{Col } UAB \Rightarrow \text{Col } VCD \Rightarrow \perp UPV)$ |
| Perp A B C D | $AB \perp CD$ | $\exists P, AB \perp_P CD$ |
| two_sides A B P Q | $A \xrightarrow{Q} B$ $A \xrightarrow{P} B$ | $A \neq B \wedge \neg \text{Col } PAB \wedge \neg \text{Col } QAB \wedge \exists T, \text{Col } TAB \wedge P-T-Q$ |
| one_side A B X Y | $A \xrightarrow{XY} B$ | $\exists Z, A \xrightarrow{Z} B \wedge A \xrightarrow{Y} B$ |
| Par_strict A B C D Y | $AB \parallel_s CD$ | $A \neq B \wedge C \neq D \wedge \text{Cp } ABCD \wedge \neg \exists X, \text{Col } XAB \wedge \text{Col } XCD$ |
| Par A B C D | $AB \parallel CD$ | $AB \parallel_s CD \vee (A \neq B \wedge C \neq D \wedge \text{Col } ACD \wedge \text{Col } BCD)$ |
| le A B C D | $AB \leq CD$ | $\exists Y, C-Y-D \wedge AB \equiv CY$ |
| lt A B C D | $AB < CD$ | $AB \leq CD \wedge \neg AB \equiv CD$ |
| Perp2 A B C D P | | $\exists X, \exists Y, \text{Col } PXY \wedge XY \perp AB \wedge XY \perp CD$ |

TABLE 2 – Résumé des prédicats et leur notation.

Cet axiome est utilisé dans la quasi-totalité du développement, directement ou indirectement. À partir de cet axiome, nous avons prouvé [BNSB14a] que l'on peut obtenir la décidabilité des autres prédicats définis dans [SST83]. Seule la décidabilité de l'intersection des droites, donnée par la définition suivante où Col désigne la colinéarité, ne peut pas être déduite.

Definition decidability_of_intersection := forall A B C D,
 (exists I, Col I A B /\ Col I C D) \/\ ~ (exists I, Col I A B /\ Col I C D).

Nous avons prouvé dans [BNS15b] que certaines versions du postulat des parallèles impliquent la décidabilité de l'intersection. Michael Beeson a réalisé une étude similaire. En effet, il a étudié l'équivalence entre différentes versions du postulat des parallèles dans le contexte d'une géométrie constructive [Bee15a]. Notre approche est légèrement différente : Michael Beeson ne suppose pas la décidabilité de l'égalité des points, cependant il ajoute l'axiome d'intersection cercle-cercle, qui est un corollaire de l'axiome de continuité.

Dans cet article, nous étendons cette étude du rôle de la décidabilité de l'intersection.

3. La formalisation des différents prédicats

Nous avons expliqué quelques définitions utiles dans [BNS15b]. Pour faciliter la lecture, nous rappelons ces définitions et leurs notations à la Table 2, suivies des définitions de la relation d'ordre sur les segments et de deux droites ayant une perpendiculaire commune. Dans cette partie, nous listons les définitions supplémentaires dont nous avons besoin.

Pour que le lecteur puisse se convaincre que le théorème prouvé est bien celui attendu, nous fournissons les définitions utilisées en syntaxe Coq.

| Coq | Notation | Définition |
|-------------------|-------------------|---|
| Conga A B C D E F | $ABC \cong DEF$ | $A \neq B \wedge C \neq B \wedge D \neq E \wedge F \neq E \wedge$ $\exists A', \exists C', \exists D', \exists F', B-A-A' \wedge AA' \equiv ED \wedge$ $B-C-C' \wedge CC' \equiv EF \wedge E-D-D' \wedge DD' \equiv BA \wedge$ $E-F-F' \wedge FF' \equiv BC \wedge A'C' \equiv D'F'$ |
| InAngle P A B C | $P \hat{=} ABC$ | $A \neq B \wedge C \neq B \wedge P \neq B \wedge \exists X, A-X-C \wedge$ $(X = B \vee B-X \leftrightarrow P)$ |
| lea A B C D E F | $ABC \hat{=} DEF$ | $\exists P, P \hat{=} DEF \wedge ABC \hat{=} DEP$ |
| lta A B C D E F | $ABC \hat{>} DEF$ | $ABC \hat{=} DEF \wedge \neg ABC \hat{=} DEF$ |
| acute A B C | | $\exists A', \exists B', \exists C', \perp A'B'C' \wedge ABC \hat{<} A'B'C'$ |

TABLE 3 – Résumé des prédicats sur les angles et leur notation.

3.1. Prédicats sur les angles

Pour introduire la somme d'angles et étudier ses propriétés, nous avons utilisé les prédicats sur les angles définis dans le chapitre 11 de [SST83]. Leurs définitions et notations sont données à la Table 3. Notons que ces prédicats portent sur des angles non orientés.

3.2. Propriétés de continuité

Nous souhaitons prouver que quand la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, cela implique l'unicité de la parallèle. Rappelons que Max Dehn, un étudiant de David Hilbert, a démontré que l'on ne peut pas prouver cette implication sans un axiome supplémentaire, comme l'axiome d'Archimède [Deh00].

Un corollaire de l'axiome d'Archimède est suffisant pour notre preuve, il s'agit de la propriété d'Aristote. Étant donné un segment s et un angle aigu non nul, il est possible de trouver un point Y sur un côté de l'angle dont la distance à l'autre côté est supérieure à la longueur du segment s (Fig. 2).

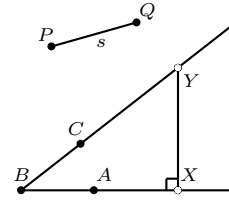


FIGURE 2 – La propriété d'Aristote.

```

Definition aristotle_s_postulate := forall P Q A B C,
  ~ Col A B C -> acute A B C ->
  exists X, exists Y, out B A X /\ out B C Y /\ Per B X Y /\ lt P Q X Y.
    
```

Un corollaire important de la propriété d'Aristote a été mis en évidence par Marvin Jay Greenberg [Gre10]. Étant donné deux points P et Q , une demi-droite r partant de Q perpendiculairement à PQ et un angle α non nul, il est possible de trouver un point S sur r tel que $PSQ \hat{<} \alpha$ (Fig. 3).

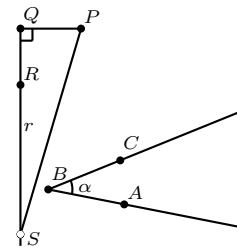


FIGURE 3 – La propriété de Greenberg.

```

Definition greenberg_s_postulate := forall P Q R A B C,
  ~ Col A B C -> acute A B C -> Q <> R -> Per P Q R ->
  exists S, lta P S Q A B C /\ out Q S R.
    
```

3.3. Postulats des parallèles

Dans cette partie, nous définissons les différentes versions du postulat des parallèles dont nous avons besoin dans cet article. Commençons par le plus connu : le postulat de Playfair, qui stipule

l'unicité de la parallèle (Fig. 4³).

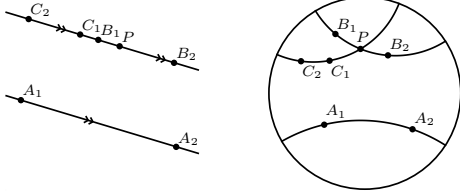


FIGURE 4 – Le postulat de Playfair.

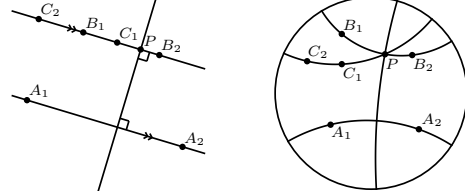


FIGURE 5 – Le postulat alternatif de Playfair.

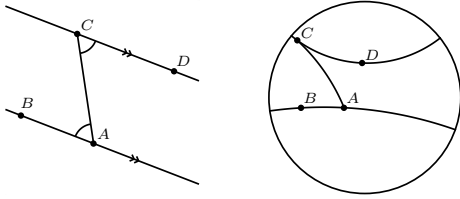


FIGURE 6 – Le postulat des angles alternes-internes.

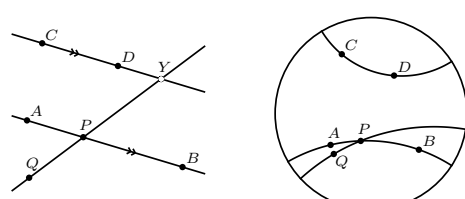


FIGURE 7 – Le postulat de Proclus.

```

Definition playfair_s_postulate := forall A1 A2 B1 B2 C1 C2 P,
  Par A1 A2 B1 B2 -> Col P B1 B2 -> Par A1 A2 C1 C2 -> Col P C1 C2 ->
  Col C1 B1 B2 /\ Col C2 B1 B2.
  
```

Pour certaines preuves, il est plus aisé d'utiliser une variante du postulat de Playfair, qui semble être un cas particulier mais dont on peut aisément démontrer l'équivalence. On remplace l'hypothèse de parallélisme par l'existence d'une perpendiculaire commune passant par P (Fig. 5).

```

Definition playfair_bis := forall A1 A2 B1 B2 C1 C2 P,
  Perp2 A1 A2 B1 B2 P -> Col P B1 B2 -> Par A1 A2 C1 C2 -> Col P C1 C2 ->
  Col C1 B1 B2 /\ Col C2 B1 B2.
  
```

Nous utilisons aussi le postulat des angles alternes-internes, qui stipule que si deux droites sont parallèles, les angles alternes-internes sont égaux (Fig. 6). Notons que la réciproque est vraie en géométrie neutre. Il s'agit du Lemme 6, exposé dans la Partie 5.

```

Definition alternate_interior_angles_postulate := forall A B C D,
  two_sides A C B D -> Par A B C D -> Conga B A C D C A.
  
```

Enfin, nous considérerons aussi le postulat de Proclus, qui indique que si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre (Fig. 7). Il est important de rappeler que nous avons démontré dans [BNS15b] que ce postulat est équivalent à la conjonction du postulat de Playfair et de la décidabilité de l'intersection.

```

Definition proclus_postulate := forall A B C D P Q,
  Par A B C D -> Col A B P -> ~ Col A B Q -> exists Y, Col P Q Y /\ Col C D Y.
  
```

3. Pour chaque postulat, nous donnons une illustration en géométrie euclidienne et un contre-exemple dans le disque de Poincaré.

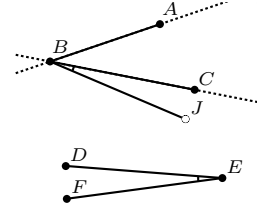
4. Une bibliothèque à propos de la somme d'angles

Pour exprimer le postulat qui stipule que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, il est nécessaire de développer une bibliothèque sur la somme des angles, dont nous avons dû adopter une approche purement géométrique.

En effet, dans l'axiomatique de Tarski, on ne peut reconstruire les réels et définir une fonction de mesure des angles qu'en utilisant l'axiome de continuité (les coupures de Dedekind). Or, l'axiomatique que nous adoptons pour cet article (les axiomes A1-A9 de [SST83] auxquels nous ajoutons la décidabilité de l'égalité des points) est indépendante de l'axiome de continuité [Gup65], contrairement à d'autres approches où la continuité est implicitement utilisée ; l'axiomatique de Birkhoff [Bir32], par exemple, suppose l'existence des réels et des fonctions permettant de mesurer les angles et les distances.

Nous développons donc dans cette partie une définition purement géométrique du concept de somme d'angles, qui n'utilise pas l'axiome de continuité.

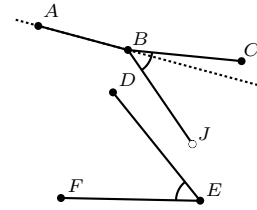
Pour obtenir la somme de deux angles ABC et DEF , on reporte l'angle DEF de façon adjacente à l'angle ABC , c'est-à-dire qu'on crée un point J tel que $CBJ \cong DEF \wedge \neg B \overset{AJ}{\parallel} C$ (voir figure ci-contre). Un angle GHI quelconque est dit égal à la somme des angles ABC et DEF , et l'on note $ABC \hat{+} DEF \cong GHI$, s'il est congru à l'angle ABJ obtenu. Le prédicat `Suma` exprime cette relation en Coq :



Definition Suma A B C D E F G H I :=
`exists J, Conga C B J D E F /\ ~ one_side B C A J /\ Conga A B J G H I.`

Cette somme est commutative, et reste inchangée si l'on remplace les angles ABC et DEF par des angles qui leur sont respectivement congrus.

En revanche, la somme d'angles non orientés ne préserve pas l'ordre, et n'est pas associative, pour des angles dont la somme est strictement supérieure à deux droits : en géométrie euclidienne, on a par exemple $170^\circ > 170^\circ + 30^\circ = 160^\circ$, ainsi que $160^\circ = (20^\circ + 170^\circ) + 30^\circ \neq 20^\circ + (170^\circ + 30^\circ) = 180^\circ$. La figure ci-contre fournit également un exemple d'angles ABC et DEF dont la somme ABJ , construite avec le protocole décrit plus haut, est strictement inférieure à l'angle ABC . Or, nous avons besoin de ces propriétés, notamment la préservation de l'ordre, qui constitue un argument primordial de la preuve 2 (Partie 5).



On peut remarquer que le fait que la somme soit strictement supérieure à deux droits est équivalent à $A \overset{J}{\parallel} B$, ce qui est corroboré par nos deux figures. Vérifier $\neg A \overset{J}{\parallel} B$ permet donc de s'assurer que la somme satisfait les propriétés recherchées. Ce critère géométrique nous a permis de définir le prédicat `Isi`, servant à vérifier si la somme de deux angles est inférieure à deux droits :

Definition Isi A B C D E F :=
`exists J, Conga C B J D E F /\ ~ one_side B C A J /\ ~ two_sides A B C J.`

Nous avons pu prouver en Coq que la somme de tels angles préserve l'ordre et qu'elle est associative.

Enfin, le prédicat `Trisuma` définit l'égalité entre un angle DEF et la somme des angles du triangle ABC , dans l'ordre $(ABC \hat{+} BCA) \hat{+} CAB$, et notée $S(\triangle ABC) \cong DEF$:

Definition `Trisuma A B C D E F :=`
`exists G H I, Suma A B C B C A G H I /\ Suma G H I C A B D E F.`

Cette définition n'est pas très lisible; c'est dû au fait que nous n'adoptons pas une notation fonctionnelle (du type $ABC \hat{+} DEF$) pour la somme d'angles, car cela nécessiterait en Coq d'introduire un axiome supplémentaire de réification des relations fonctionnelles. Nous souhaitons garder le minimum d'axiomes pour les fondements de notre bibliothèque, quitte à introduire ensuite une surcouche plus lisible utilisant des symboles fonctionnels.

Le théorème de l'angle extérieur permet, en géométrie neutre et sans axiome d'Archimède, de considérer la somme des angles d'un triangle sans se soucier de l'ordre des points. En effet, ce théorème affirme que la somme de deux angles d'un triangle est strictement inférieure à deux droits, et nous nous en servons pour établir l'associativité de la somme des trois angles.

Nous pouvons à présent définir un postulat exprimant le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, que nous appellerons postulat du triangle (Fig. 8). Le fait que l'angle est égal à deux droits est exprimé par le fait que l'angle est plat, ce que l'on a montré être équivalent.

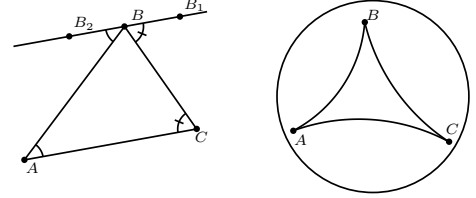


FIGURE 8 – Le postulat du triangle.

Definition `triangle_postulate := forall A B C D E F,`
`Trisuma A B C D E F -> Bet D E F.`

5. Preuves d'équivalence

Nos preuves reposent sur des lemmes prouvés en géométrie neutre sans utiliser la décidabilité de l'intersection. Il n'est pas aisé de savoir si un énoncé est valable en géométrie neutre, c'est pourquoi nous listons ici les lemmes non triviaux qui sont utilisés dans cette partie :

Lemme 1 : $\forall ABXY, \text{Col } AXY \Rightarrow A \overset{XY}{\dashv} B \Rightarrow A \dashv X \leftrightarrow Y.$

Lemme 2 : $\forall ABC, \text{Col } ABC \Rightarrow \neg \text{Col } ABP \Rightarrow \exists Q, AB \perp QC \wedge A \overset{QC}{\dashv} B.$

Lemme 3 (isométrie angle-côté-angle) : $\forall ABCA'B'C', \neg \text{Col } ABC \Rightarrow BCA \hat{=} B'C'A' \Rightarrow$
 $ABC \hat{=} A'B'C' \Rightarrow AB \equiv A'B' \Rightarrow AC \equiv A'C' \wedge BC \equiv B'C' \wedge CAB \hat{=} C'A'B'.$

Lemme 4 : $\forall ABCD, AB \parallel_s CD \Rightarrow A \overset{CD}{\dashv} B.$

Lemme 5 : $\forall A_1A_2B_1B_2C_1C_2, A_1A_2 \perp C_1C_2 \Rightarrow B_1B_2 \perp C_1C_2 \Rightarrow A_1A_2 \parallel B_1B_2.$

Lemme 6 (angles alternes-internes) : $\forall ABCD, A \overset{D}{\dashv} C \Rightarrow BAC \hat{=} CDA \Rightarrow AB \parallel CD.$

Lemme 7 : $\forall ABCP, \neg \text{Col } ABC \Rightarrow \neg \text{Col } BAP \Rightarrow P \hat{=} ABC \Rightarrow A \overset{PC}{\dashv} B.$

Lemme 8 : $\forall ABCP, B \overset{C}{\dashv} P \Rightarrow B \overset{CP}{\dashv} A \Rightarrow P \hat{=} ABC.$

Lemme 9 : $\forall ABCP, B \overset{CP}{\dashv} A \Rightarrow B \overset{AP}{\dashv} C \Rightarrow P \hat{=} ABC.$

Lemme 10 : $\forall ABCDIP, C \neq D \Rightarrow \text{Col } ABI \Rightarrow \text{Col } CDI \Rightarrow \neg \text{Col } ABC \Rightarrow \neg \text{Col } ABP \Rightarrow$
 $\exists Q, \text{Col } CDQ \wedge A \overset{PQ}{\dashv} B.$

Nous avons déjà exposé les 6 premiers dans [BNS15b], et nous avons dû introduire les 4 derniers pour exprimer des propriétés concernant les positions relatives de points par rapport à des droites et des angles.

Nous présentons ci-dessous un schéma récapitulatif de nos preuves. Les énoncés concernés sont :

1. Axiome de continuité
2. Axiome d'Archimède
3. Propriété d'Aristote
4. Propriété de Greenberg
5. Postulat du triangle
6. Postulat alternatif de Playfair
7. Postulat de Playfair
8. Postulat des angles alternes-internes
9. Postulat de Proclus
10. Décidabilité de l'intersection

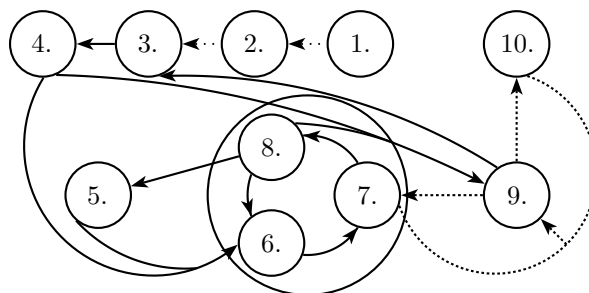


FIGURE 9 – Schéma récapitulatif des preuves.

Les preuves sont représentées par des flèches en trait plein si elles sont exposées dans cet article, en pointillé dense si elles sont issues de [BNS15b], et en pointillé léger si elles ne sont pas encore formalisées.

5.1. Postulat du triangle et unicité de la parallèle

Dans cette partie, nous prouvons d'abord l'équivalence entre l'unicité de la parallèle (postulat de Playfair) et deux postulats intermédiaires, puis nous prouvons que sous l'hypothèse de la propriété de Greenberg, ces postulats sont équivalents au postulat du triangle.

Proposition 1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes en géométrie neutre sans axiome de continuité :*

1. le postulat alternatif de Playfair
2. le postulat de Playfair
3. le postulat des angles alternes-internes.

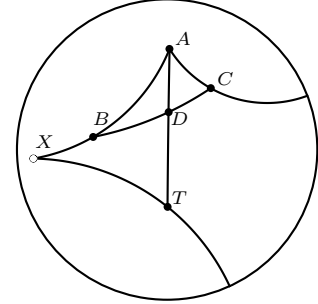
Démonstration.

1. \Rightarrow 2. Cette implication n'est pas difficile à formaliser.
2. \Rightarrow 3. La preuve se déduit facilement du fait que l'on peut reporter un angle donné d'un côté d'une droite et du Lemme 6.
3. \Rightarrow 1. La preuve utilise la décidabilité du Co1, que nous avons démontrée précédemment [BNS15b], pour distinguer le cas dégénéré. Dans le cas général, on utilise le postulat des angles alternes-internes pour exhiber un angle droit et on conclut par l'unicité de la perpendiculaire. □

Proposition 2. *La conjonction de la propriété de Greenberg et du postulat du triangle implique le postulat alternatif de Playfair.*

La preuve formelle s'inspire de celle que donne Marvin Jay Greenberg dans [Gre10], mais en diffère par plusieurs aspects. D'abord, sa définition de l'intérieur d'un angle diffère de la nôtre, donnée à la Table 3 (**InAngle**) : il dit qu'un point T est à l'intérieur d'un angle BAC si d'une part, T et C sont du même côté de la droite AB et d'autre part, T et B sont du même côté de la droite AC . Cette définition correspond aux hypothèses du Lemme 9, présent dans [Gre93] sous le nom de *Crossbar Theorem*. Les Lemmes 7 et 9 prouvent que les deux définitions sont équivalentes, sauf cas dégénéré (point sur un côté de l'angle).

Remarquons que l'on pourrait croire, à l'instar de Legendre [Mar98], qu'il existe toujours un segment reliant les deux côtés d'un angle en passant par un point T donné à l'intérieur. Ce n'est vrai qu'en géométrie euclidienne, on ne peut donc pas s'en servir comme définition pour `InAngle` (voir figure ci-contre). Il s'agit d'ailleurs de la version du postulat des parallèles qui est présente dans [SST83].

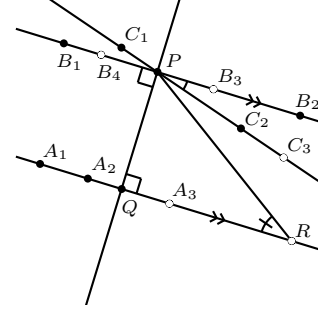


Par ailleurs, notre preuve est plus explicite que celle de Greenberg quant aux positions relatives des points, ce qui nous amène à construire des points supplémentaires avec le Lemme 10 et à utiliser le Lemme 4.

Enfin, Greenberg se sert implicitement de la mesure d'angles pour justifier la préservation de l'ordre par la somme d'angles. Or, la construction d'une telle mesure n'est pas possible sans l'axiome de continuité, comme nous l'avons expliqué dans la Partie 4, et cet axiome est plus fort que la propriété de Greenberg. Notre bibliothèque sur les sommes d'angles permet de combler cette lacune dans sa preuve de manière purement géométrique.

Démonstration.

Nous voulons prouver que les points B_1, B_2, C_1 et C_2 sont colinéaires, en supposant que les droites B_1B_2 et C_1C_2 ont un point commun P , que la droite B_1B_2 a une perpendiculaire commune passant par P avec une droite A_1A_2 , que A_1A_2 est parallèle à C_1C_2 , et que la propriété de Greenberg et le postulat du triangle s'appliquent.



D'abord, on peut déduire du Lemme 5 que les droites A_1A_2 et B_1B_2 sont parallèles. Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que la droite C_1C_2 est distincte de la droite B_1B_2 . On peut aussi supposer $\neg \text{Col } A_1A_2P$, car dans le cas contraire A_1A_2 et C_1C_2 seraient des droites parallèles avec un point commun P , donc confondues, de même que les droites A_1A_2 et B_1B_2 . En considérant l'intersection Q entre la droite A_1A_2 et sa perpendiculaire commune avec B_1B_2 , on peut alors utiliser le Lemme 10 pour construire un point C_3 sur la droite C_1C_2 tel que $B_1 \overset{Q}{\dashv} C_3 \dashv B_2$, puis des points A_3 et B_3 sur les droites respectives A_1A_2 et B_1B_2 tels que

$P \overset{C_3A_3}{\dashv} Q$ et $P \overset{C_3B_3}{\dashv} Q$. À présent, le Lemme 9 nous apprend que $C_3 \hat{=} Q P B_3$, ce qui fait de $C_3 P B_3$ un angle aigu. Par conséquent, on peut utiliser la propriété de Greenberg pour construire un point R tel que $Q \dashv R \dashv A_3$ et $P R Q \hat{=} C_3 P B_3$. Comme R appartient à la droite A_1A_2 , on peut utiliser le Lemme 4 pour prouver $P \overset{B_3}{\dashv} R \dashv C_3$ et $P \overset{RC_3}{\dashv} B_3$. Par le Lemme 8, on obtient $C_3 \hat{=} R P B_3$, et donc $C_3 P B_3 \hat{=} R P B_3$. Construisons des points S, T et U tels que $\mathcal{S}(\triangle PQR) \cong STU$ et B_4 le symétrique de B_3 par rapport à P . On peut remarquer que les angles PQR et B_4PQ sont tous deux droits, donc $PQR \cong B_4PQ$, et que $B_4 - P - B_3$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
 STU \hat{+} PQR \hat{+} QPR \hat{+} PRQ & \text{ car } \mathcal{S}(\triangle PQR) \cong STU \\
 \cong B_4PQ \hat{+} QPR \hat{+} PRQ & \text{ car } PQR \cong B_4PQ \\
 \cong B_4PR \hat{+} PRQ & \text{ car } P \overset{B_4}{\dashv} R \dashv Q \\
 \hat{=} B_4PR \hat{+} C_3PB_3 & \text{ par préservation de l'ordre} \\
 \hat{=} B_4PR \hat{+} RP B_3 \cong B_4PB_3, &
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'angle STU est strictement inférieur à un angle plat, ce qui contredit le postulat du triangle. \square

Proposition 3. *Le postulat des angles alternes-internes implique le postulat du triangle.*

La preuve usuelle qui consiste à construire la parallèle à un côté passant par le sommet opposé (Fig. 8) n'utilise pas la décidabilité de l'intersection, elle se formalise sans peine. Le cas du triangle

dégénéré n'est pas difficile à traiter car par définition, si trois points sont alignés alors un des trois est entre les deux autres.

5.2. À propos de la décidabilité de l'intersection

Dans cette partie, nous prouvons que les propriétés de Greenberg, d'Aristote et de décidabilité de l'intersection sont équivalentes sous l'hypothèse de l'unicité de la parallèle (postulat de Playfair). Pour le prouver, nous utilisons des postulats intermédiaires équivalents, conformément au schéma de la Figure 9.

Proposition 4. *La conjonction de la propriété de Greenberg et du postulat des angles alternes-internes implique le postulat de Proclus.*

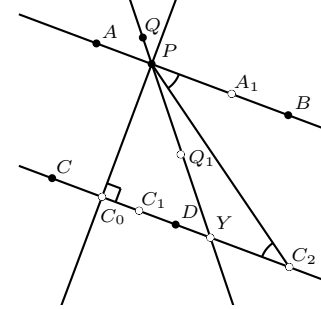
L'équivalence entre le postulat de Proclus et celui des angles alternes-internes est un résultat connu en logique classique. Mais en logique intuitionniste, ces deux postulats ne sont pas équivalents : le premier implique la décidabilité de l'intersection, contrairement au deuxième [BNS15b]. Pour montrer que la propriété de Greenberg est équivalente à la décidabilité de l'intersection en géométrie euclidienne, nous passons par l'intermédiaire du postulat de Proclus.

À notre connaissance, la preuve de ce résultat est originale.

Démonstration.

Soient AB et CD deux droites parallèles, P un point de AB et Q un point extérieur à AB . Montrons que les droites CD et PQ se rencontrent en un point Y .

On peut d'abord éliminer le cas où P appartient à la droite CD , car il correspond alors au point recherché. Considérons ensuite C_0 le projeté orthogonal de P sur la droite CD . Si C_0 appartient à PQ , la conclusion est là encore immédiate. Sinon, après avoir construit un point Q_1 sur la droite PQ tel que $A \overset{C_0 Q_1}{\parallel} B$ par le Lemme 10, on peut réutiliser ce lemme pour obtenir des points A_1 et C_1 sur les droites respectives AB et CD tels que $P \overset{Q_1 A_1}{\parallel} C_0$ et $P \overset{Q_1 C_1}{\parallel} C_0$. Le Lemme 9 nous apprend alors que $Q_1 \hat{=} C_0 P A_1$. Or, on sait que l'angle $C_0 P A_1$ est droit grâce au postulat des angles alternes-internes, donc l'angle $A_1 P Q_1$ est aigu. On peut ainsi appliquer la propriété de Greenberg, et construire un point C_2 tel que $C_0 \dashv C_2 \dashv C_1$ et $P C_2 C_0 \hat{<} A_1 P Q_1$. On a également $A_1 P C_2 \hat{=} P C_2 C_0$ par le postulat des angles alternes-internes, donc $C_2 \hat{=} A_1 P Q_1$. On peut alors montrer $P \overset{C_2 Q_1}{\parallel} C_0$ et $P \overset{C_0 Q_1}{\parallel} C_2$, et le Lemme 9 nous amène à $Q_1 \hat{=} C_0 P C_2$, c'est-à-dire qu'il existe un point Y tel que $C_0 \dashv Y \dashv C_2$ et $P \dashv Y \dashv Q_1$. En particulier, Y appartient aux droites CD et PQ . \square

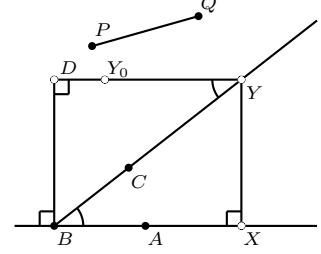


Proposition 5. *Le postulat de Proclus implique la propriété d'Aristote.*

Cette preuve est donnée dans la 4^e édition de [Gre93], à laquelle nous n'avons pas accès. Nous proposons la preuve suivante.

Démonstration.

Nos hypothèses sont le postulat de Proclus et que l'angle ABC est aigu et non nul. Montrons que pour tout segment PQ , on peut trouver des points X et Y tels que $B \dashv C \dashv Y$, $B \dashv A \dashv X$, $\perp BXY$ et $PQ < XY$. En utilisant le Lemme 2, on peut construire un point D tel que $AB \perp BD$, $A \dashv_{CD} B$ et $PQ < BD$, puis un point Y_0 tel que $BD \perp DY_0$ et $B \dashv_{AY_0} D$. Les droites AB et DY_0 étant parallèles d'après le Lemme 5, on peut appliquer le postulat de Proclus pour trouver un point Y à l'intersection des droites BC et DY_0 . On peut ensuite construire X le projeté orthogonal de Y sur la droite AB . Vérifions que les quatre conditions recherchées pour X et Y sont bien réunies :



1. Par le Lemme 4, on a $A \dashv_{DY} B$, d'où $A \dashv_{CY} B$, puis $B \dashv C \dashv Y$ par le Lemme 1.
2. Comme $B \dashv C \dashv Y$, on en déduit $B \dashv_{YC} D$. D'autre part, on a $B \dashv_{XY} D$ par les Lemmes 5 et 4, et comme l'angle ABC est aigu, on a $C \widehat{\in} ABD$, donc $B \dashv_{CA} D$, grâce au Lemme 7. Ainsi $B \dashv_{XA} D$, d'où $B \dashv A \dashv X$ par le Lemme 1.
3. On a bien $\perp BXY$ par construction.
4. On déduit de $B \dashv A \dashv X$ que $Y \dashv_{AX} B$, et de $C \widehat{\in} ABD$ que $B \dashv_A^D C$. Ainsi on a $Y \dashv_X^D B$, et on peut appliquer le postulat des angles alternes-internes, qui est une conséquence du postulat de Proclus. On trouve alors $BYD \cong YBX$, ce qui nous permet d'affirmer que les triangles BYD et YBX sont isométriques par le Lemme 3, notamment $BD \equiv XY$. Ainsi, $PQ < BD \equiv XY$.

□

Proposition 6 (Greenberg, [Gre10] page 207). *La propriété d'Aristote implique le postulat de Greenberg.*

6. Résultats

Pour finir, nous résumons nos résultats concernant le postulat des parallèles. Afin de les exprimer de manière compacte, nous introduisons une forme n-aire d'équivalence :

Definition all_equiv (l: list Prop) := forall x y, In x l -> In y l -> (x <-> y).

De plus, nous définissons un prédicat `all_equiv_under l1 l2` qui exprime l'équivalence entre les propriétés présentes dans la liste `l2` sous n'importe quelle hypothèse présente dans `l1` :

Definition all_equiv_under (l1 l2 : list Prop) :=
forall x y z, In x l1 -> In y l2 -> In z l2 -> (x -> (y <-> z)).

En prenant pour hypothèse n'importe quel postulat des parallèles (nous ajoutons les postulats étudiés dans [BNS15b]), excepté le postulat du triangle (car il est plus faible), la décidabilité de l'intersection est équivalente aux propriétés de Greenberg et d'Aristote. À notre connaissance, ce résultat est original.

```
Lemma equivalence_of_aristotle_greenberg_and_decidability_of_intersection :
  all_equiv_under
    (alternate_interior_angles_postulate::
      euclid_5::
      midpoints_converse_postulate::
      perpendicular_transversal_postulate::
      playfair_bis::
      playfair_s_postulate::
      postulate_of_parallelism_of_perpendicular_transversals::
      postulate_of_transitivity_of_parallelism::
      proclus_postulate::
      strong_parallel_postulate::
      tarski_s_parallel_postulate::
      triangle_circumscription_principle::
      nil)

    (aristotle_s_postulate::
      decidability_of_intersection::
      greenberg_s_postulate::
      nil).
```

Enfin, en supposant la propriété de Greenberg, nos 13 versions du postulat des parallèles sont équivalentes :

```
Lemma parallel_postulates_assuming_greenberg_s_postulate :
  greenberg_s_postulate ->
  all_equiv
    (alternate_interior_angles_postulate::
      euclid_5::
      midpoints_converse_postulate::
      perpendicular_transversal_postulate::
      playfair_bis::
      playfair_s_postulate::
      postulate_of_parallelism_of_perpendicular_transversals::
      postulate_of_transitivity_of_parallelism::
      proclus_postulate::
      strong_parallel_postulate::
      tarski_s_parallel_postulate::
      triangle_circumscription_principle::
      triangle_postulate::
      nil).
```

7. Conclusion

Nous avons obtenu une version formelle d'un résultat important en géométrie neutre concernant les postulats des parallèles. D'une part, la formalisation a permis de mettre en lumière les lemmes nécessaires : nous avons introduit des preuves des propriétés de préservation de l'ordre de l'addition des angles, ainsi que des propriétés concernant la position relative des points par rapports aux droites et aux angles. D'autre part, nous avons pu clarifier le rôle de la décidabilité de l'intersection dans ces preuves.

Nous envisageons d'étendre ce travail en prouvant l'équivalence entre d'autres versions du postulat d'Euclide. Par exemple, nous pourrions formaliser la preuve d'équivalence entre 26 versions du 5^e postulat d'Euclide proposées par George Edward Martin dans [Mar98]. L'une de ces 26 versions est le théorème de Thalès dans le cercle [BM15]. Il serait aussi intéressant de prouver que l'axiome d'Archimède implique la propriété d'Aristote.

Nous avons montré que la propriété de Greenberg implique la décidabilité de l'intersection sous l'hypothèse de l'unicité de la parallèle. La question de savoir si cette hypothèse est nécessaire reste ouverte.

Ce développement pourra servir de base à la formalisation des résultats de Michael Beeson concernant la géométrie de Tarski et le postulat des parallèles dans un cadre constructif [Bee15a, Bee15b]. Nous pourrions aussi utiliser les équivalences démontrées pour obtenir des résultats en géométrie hyperbolique : la négation de chaque postulat devient un théorème.

La difficulté des preuves réside dans le fait qu'il est très facile de se tromper et d'admettre implicitement une propriété équivalente à ce que nous souhaitons démontrer. Il faut trouver un "chemin" de preuve permettant d'ordonner les arguments. L'utilisation d'un assistant de preuve permet de réduire significativement les doutes concernant la correction de ces preuves.

Disponibilité : le développement Coq fait partie de la bibliothèque GeoCoq, qui est disponible ici : <http://geocoq.github.io/GeoCoq/>

Remerciements : les auteurs remercient Pascal Schreck et David Braun pour leur relecture attentive de cet article.

Références

- [Bee15a] Michael Beeson. Constructive geometry and the parallel postulate. *Bulletin of Symbolic Logic*, accepted pending revisions, 2015.
- [Bee15b] Michael Beeson. A constructive version of Tarski's geometry. *Annals of Pure and Applied Logic*, 166(11) :1199–1273, 2015.
- [Bir32] George David Birkhoff. A set of postulates for plane geometry (based on scale and protractors). *Annals of Mathematics*, 33, 1932.
- [BM15] David Braun and Nicolas Magaud. Des preuves formelles en Coq du théorème de Thalès pour les cercles. In David Baelde and Jade Alglave, editors, *Vingt-sixièmes Journées Francophones des Langages Applicatifs (JFLA 2015)*, Le Val d'Ajol, France, January 2015.
- [BN12] Gabriel Braun and Julien Narboux. From Tarski to Hilbert. In Tetsuo Ida and Jacques Fleuriot, editors, *Post-proceedings of Automated Deduction in Geometry 2012*, volume 7993 of *LNCS*, pages 89–109, Edinburgh, United Kingdom, September 2012. Jacques Fleuriot, Springer.
- [BNS15a] Pierre Boutry, Julien Narboux, and Pascal Schreck. A reflexive tactic for automated generation of proofs of incidence to an affine variety. October 2015.
- [BNS15b] Pierre Boutry, Julien Narboux, and Pascal Schreck. Parallel postulates and decidability of intersection of lines : a mechanized study within Tarski's system of geometry. submitted, July 2015.
- [BNSB14a] Pierre Boutry, Julien Narboux, Pascal Schreck, and Gabriel Braun. A short note about case distinctions in Tarski's geometry. In Francisco Botana and Pedro Quaresma, editors, *Automated Deduction in Geometry 2014*, Proceedings of ADG 2014, pages 1–15, Coimbra, Portugal, July 2014.

- [BNSB14b] Pierre Boutry, Julien Narboux, Pascal Schreck, and Gabriel Braun. Using small scale automation to improve both accessibility and readability of formal proofs in geometry. In Francisco Botana and Pedro Quaresma, editors, *Automated Deduction in Geometry 2014*, Proceedings of ADG 2014, pages 1–19, Coimbra, Portugal, July 2014.
- [Deh00] M. Dehn. Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. *Mathematische Annalen*, 53(3) :404–439, 1900.
- [Dup08] Jean Duprat. Une axiomatique de la géométrie plane en Coq. In *JFLA (Journées Francophones des Langages Applicatifs)*, pages 123–136, Etretat, France, January 2008. INRIA.
- [Dup10] Jean Duprat. *Fondements de géométrie euclidienne*. 2010.
- [Gre93] Marvin J. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries - Development and History*. Macmillan, 1993.
- [Gre10] Marvin J. Greenberg. Old and New Results in the Foundations of Elementary Plane Euclidean and Non-Euclidean Geometries. *The American Mathematical Monthly*, 117(3) :198–219, March 2010.
- [Gup65] Haragauri Narayan Gupta. *Contributions to the axiomatic foundations of geometry*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1965.
- [Klu63] G.S. Klugel. *Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*. PhD thesis, Schultz, Göttingen, 1763. German translation available : <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/versuch.html>.
- [Leg33] Adrien Marie Legendre. Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle. *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, XII :367–410, 1833.
- [Mak12] Timothy James McKenzie Makarios. A Mechanical Verification of the Independence of Tarski's Euclidean Axiom. Master's thesis, Victoria University of Wellington, 2012. Master Thesis.
- [Mar98] G.E. Martin. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1998.
- [MP14] Filip Marić and Danijela Petrović. Formalizing complex plane geometry. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, pages 1–38, 2014.
- [Nar07] Julien Narboux. Mechanical Theorem Proving in Tarski's geometry. In Francisco Botana Eugenio Roanes Lozano, editor, *Post-proceedings of Automated Deduction in Geometry 2006*, volume 4869 of *LNCS*, pages 139–156, Pontevedra, Spain, 2007. Francisco Botana, Springer.
- [PM12] Danijela Petrović and Filip Marić. Formalizing analytic geometries. In *Proceedings of Automated Deduction in Geometry*, September 2012.
- [SST83] Wolfram Schwabhäuser, Wanda Szmielew, and Alfred Tarski. *Metamathematische Methoden in der Geometrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [TG99] Alfred Tarski and Steven Givant. Tarski's system of geometry. *The bulletin of Symbolic Logic*, 5(2), June 1999.