



HAL
open science

Sur les inégalités et bornes stochastiques du modèle d'attente avec rappels à un seul serveur avec Bernoulli feedback et clients négatifs

Mohamed Boualem, Mouloud Cherfaoui, Djamil Aïssani

► To cite this version:

Mohamed Boualem, Mouloud Cherfaoui, Djamil Aïssani. Sur les inégalités et bornes stochastiques du modèle d'attente avec rappels à un seul serveur avec Bernoulli feedback et clients négatifs. 2015. hal-01224294

HAL Id: hal-01224294

<https://inria.hal.science/hal-01224294>

Preprint submitted on 4 Nov 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur les inégalités et bornes stochastiques du modèle d'attente avec rappels à un seul serveur avec Bernoulli feedback et clients négatifs

Mohamed Boualem^{1*}, Mouloud Cherfaoui^{2†} and Djamil Aïssani^{3‡}

¹ Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes), Faculté de Technologie, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie

robertt15dz@yahoo.fr

² Département de Mathématiques, Université de Biskra, 07000 Biskra, Algérie, Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes), Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie

mouloudcherfaoui2013@gmail.com

³ Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes), Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie

lamos_bejaia@hotmail.com

Abstract

Dans ce travail, nous utilisons les outils mathématiques de l'analyse qualitative pour étudier les propriétés de monotonie et de comparabilité, du modèle d'attente avec rappels à un seul serveur avec Bernoulli feedback et clients négatifs, par rapport aux ordres stochastiques donnés. Les mesures de performance d'un tel système sont disponibles sous des formes explicites mais complexes. Elles ne sont donc pas faciles à interpréter pour que le praticien puisse en bénéficier. Pour pallier ces difficultés, les méthodes de comparaison stochastique ont été introduites pour qu'on puisse avoir des estimations qualitatives de ces mesures en les bornant par des mesures de performance d'autres modèles plus simples. Particulièrement, nous avons prouvé la monotonie de l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse. Nous avons également établi des conditions pour lesquelles les opérateurs de transition ainsi que les probabilités stationnaires, associées à deux chaînes de Markov incluses, ayant la même structure mais avec des paramètres différents, sont comparables au sens des ordres stochastiques donnés. Des exemples numériques sont donnés pour illustrer les résultats théoriques obtenus.

1 Introduction

Les modèles d'attente avec rappels apparaissent généralement dans la modélisation stochastique de plusieurs situations réelles. Par exemple, dans la transmission de données, un paquet transmis de la source à la destination peut être retourné et le processus doit se répéter jusqu'à ce que le paquet soit finalement transmis. Il existe aujourd'hui des centaines de publications sur les systèmes avec rappels où des exemples concrets en rapport avec les nouveaux développements technologiques dont l'intérêt porté s'accroît de jour en jour ont été cités [1, 2, 12, 23].

Il est apparu ces dernières années dans la littérature des files d'attente, des travaux portant sur les systèmes et réseaux de files d'attente caractérisés par la présence de deux types d'arrivées. D'un côté, les arrivées positives ou régulières qui ont pour objectif l'occupation du service. De

*Corresponding author

†co-author

‡co-author

l'autre côté, les arrivées négatives, dont la présence dans le système de files d'attente affecte ce dernier de différentes manières. Plusieurs possibilités différentes ont été introduites dans la littérature à ce sujet, à savoir: élimination individuelle, élimination par groupe, élimination d'une quantité aléatoire d'activité, le désastre (la catastrophe) (pour plus de détails voir [11]). L'intérêt porté à cette nouvelle famille de réseaux de files d'attente avec arrivées négatives, introduite par Gelenbe [16], était motivé initialement par la modélisation des réseaux de neurone où les arrivées positives et négatives représentent les signaux excitateurs, qui font croître le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, et inhibiteurs, qui diminuent le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, respectivement. Puis, leurs domaines d'application se sont étendus pour toucher d'autres systèmes plus complexes comme les réseaux informatiques avec infection par virus [3], élimination des transactions dans les bases de données [14], les systèmes d'inventaires [17], les systèmes de télécommunications [10], les systèmes de production [11, 15, 18]. La notion de feedback a été bien détaillée dans [7].

Cependant, la théorie analytique des modèles d'attente avec rappels s'avère d'une portée limitée en raison de la complexité des résultats connus. En effet, dans la majorité des cas, on se retrouve confronté à des systèmes d'équations dont la résolution est complexe ou possédant des solutions qui ne sont pas facilement interprétables afin que le praticien puisse en bénéficier. Par exemple, la formule de Pollaczek-Khintchine exige une inversion numérique de la transformée de Laplace pour calculer la distribution de la durée d'attente. Et dans plusieurs cas, même la transformée de Laplace ou la fonction génératrice ne sont pas disponibles sous formes explicites. Pour pallier ces difficultés, on fait souvent appel aux méthodes d'approximation qui permettent d'obtenir des estimations quantitatives et/ou qualitatives pour certaines mesures de performance. C'est pour toutes ces raisons, qu'on s'intéresse, dans notre étude, d'une manière particulière à la méthode de comparaison stochastique.

La méthode de comparaison stochastique est un outil mathématique utilisé pour l'étude des performances de certains systèmes modélisés par des chaînes de Markov à temps continu ou discret. L'idée générale de cette méthode est de borner un système complexe par un nouveau système, plus simple à résoudre et fournissant des bornes qualitatives pour ces mesures de performance. Ces méthodes constituent aujourd'hui l'une des principales activités de recherche dans divers domaines scientifiques, tels que l'économie, la biologie, la recherche opérationnelle, la théorie de fiabilité, la théorie de décision, les files d'attente et les réseaux informatiques et de télécommunications [19, 20, 21].

Les propriétés de monotonie et de comparabilité sont bien documentées dans la littérature de files d'attente avec rappels. L'une de ces propriétés a été étudiée dans [13]. Les auteurs ont utilisé la théorie générale des ordres stochastiques pour l'étude des propriétés de monotonie du système $M/G/1$ avec rappels suivant des ordres stochastiques donnés. Boualem et al. [4] ont étudié quelques problèmes de comparabilité et de monotonie pour l'analyse du système $M/G/1$ avec rappels constants et vacances du serveur en utilisant la théorie générale des ordres stochastiques. Le lecteur peut également consulter les références [6, 8, 9] traitant de la même problématique.

Les mesures de performance du modèle d'attente avec rappels à un seul serveur avec Bernoulli feedback et clients négatifs sont disponibles sous des formes explicites mais complexes (elles contiennent des transformées de Laplace, des expressions intégrales) [18]. Elles ne sont donc pas faciles à interpréter pour que le praticien puisse en bénéficier. L'objectif de notre travail est d'appliquer la méthode de comparaison stochastiques, pour étudier les propriétés de monotonie d'un tel modèle, relativement à l'ordre stochastique et convexe, afin d'obtenir des bornes simples pour la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite associée au modèle considéré. Des exemples numériques sont donnés pour illustrer les résultats théoriques

obtenus en utilisant l'approche à événements discrets.

Le reste du document est organisé comme suit: la deuxième section est consacrée à la description mathématique du modèle considéré. Dans la troisième section, on énonce quelques résultats préliminaires et définitions qui vont permettre la comparaison des probabilités du nombre de clients arrivant durant une période de service. Les conditions de monotonie et de comparabilité de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse sont données dans la quatrième section. Les conditions de comparabilité des distributions stationnaires sont présentés dans la cinquième section. La dernière section est consacrée à l'application numérique.

2 Description mathématique du modèle

Considérons un système d'attente avec rappels à un seul serveur avec Bernoulli feedback et clients négatifs. Les clients primaires positifs arrivent au système selon un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$. Si l'arrivée d'un client positif et trouve le serveur inactif, commence son service immédiatement. Sinon, si le serveur est occupé, ce dernier entre en orbite de capacité illimitée, et devient une source d'appels répétés et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire, jusqu'à ce qu'il le trouve libre. Le temps entre les tentatives répétées successives est supposé être distribué suivant la loi exponentielle de paramètre $n\mu$, lorsque le nombre de clients en orbite est $n \in \mathbb{N}$. Les temps de service des clients positifs sont indépendants et identiquement distribués avec une fonction de distribution générale $G(x)$ et de fonction de densité de probabilité $g(x)$.

Après qu'un client positif est complètement servi, il décidera soit de rejoindre l'orbite avec une probabilité θ_1 ($0 \leq \theta_1 < 1$) ou de quitter le système définitivement avec une probabilité $(1 - \theta_1)$. En plus de l'arrivée des clients positifs et les rappels des clients en orbite. On suppose, en outre, que des clients négatifs, arrivent au système selon un processus de Poisson de taux $\delta > 0$. Le client négatif arrivant pendant le temps de service d'un client positive, supprimera ce dernier et décide soit d'entrer en orbite avec la probabilité θ_2 ($0 \leq \theta_2 < 1$) ou de quitter le système définitivement avec une probabilité $(1 - \theta_2)$.

Les temps entre les arrivées des clients positifs, clients négatifs, les temps de rappels des clients en orbite et les temps de service sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Notons que le modèle particulier, sans les arrivées négatives, a été étudié dans Boualem et al. [5], en utilisant l'approche régénérative de Markov.

D'après cette description, l'état du système à un instant arbitraire t peut être décrit par le processus stochastique à temps continu $\{X(t), t \geq 0\} = \{(C(t), N(t), \xi(t), t \geq 0\}$, où $N(t)$: est le nombre de clients en orbite à l'instant t .

$C(t)$: est une variable aléatoire qui désigne l'état du serveur, avec

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre,} \\ 1, & \text{si le serveur est occupé.} \end{cases} \quad (1)$$

En outre, si $C(t) = 1$, alors $\xi(t) > 0$ représente le temps de service écoulé du client positif en service et $\xi(t) = 0$ si $C(t) = 0$.

2.1 Chaîne de Markov induite

Soit la suite τ_i , qui représente les instants de départs des clients. C'est-à-dire, les instants de départs de fin du service du $i^{\text{ième}}$ client positif, ou bien celui de $i^{\text{ième}}$ client positif en service qui est éliminé par un client négatif. Soit $N_i = N(\tau_i+)$, est le nombre de clients en orbite juste avant l'instant de départ τ_i . Alors la suite $\{N_i, i \in \mathbb{N}\}$ des variables aléatoires constitue une chaîne de Markov induite pour notre système de files d'attente.

La condition nécessaire et suffisante d'ergodique de la chaîne de Markov induite est donnée par [18]:

$$\theta_1 \beta^*(\delta) + \theta_2 (1 - \beta^*(\delta)) + \frac{\lambda [1 - \beta^*(\delta)]}{\delta} < 1, \quad (2)$$

où, $\beta^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx$ est la transformée de Laplace de la fonction $g(x)$.

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov pour le système $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs sont données par la formule suivante :

$$P_{n,m} = \begin{cases} (1 - \delta_{0m}) \theta_1 k_{m-1} + (1 - \theta_1) k_m + (1 - \delta_{0m}) \theta_2 h_{m-1} + (1 - \theta_2) h_m, & \text{si } n = 0, m \geq 0, \\ \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_0 + \frac{n\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_0, & \text{si } n \geq 1, m = n - 1, \\ \frac{\lambda \theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n-1} + \frac{\lambda(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \frac{n\mu \theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_{m-n+1} \\ + \frac{\lambda \theta_2}{\lambda + n\mu} h_{m-n-1} + \frac{\lambda(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_{m-n} + \frac{n\mu \theta_2}{\lambda + n\mu} h_{m-n} \\ + \frac{n\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_{m-n+1}, & \text{si } n \geq 1, m > n - 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

où,

$$k_m^{(i)} = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)} u)^m \exp\{-\lambda^{(i)} u\}}{m!} \exp\{-\delta^{(i)} u\} dG^{(i)}(u), \quad i = 1, 2; \quad m \geq 0,$$

$$h_m^{(i)} = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)} u)^m \exp\{-\lambda^{(i)} u\}}{m!} \exp(-\delta^{(i)} u) \delta^{(i)} d\bar{G}^{(i)}(u), \quad i = 1, 2; \quad m \geq 0.$$

2.2 Notations

On considère deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, notés par Σ_1 et Σ_2 , respectivement (ayant la même structure mais avec des paramètres différents). Pour cela, on introduit les notations suivantes :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux modèles d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, pour $i = 1, 2$:

$\lambda^{(i)}$: taux d'arrivées des clients positifs dans Σ_i .

$\mu^{(i)}$: taux de rappels dans Σ_i .

$\theta_1^{(i)}$: probabilité de rejoindre l'orbite.

$\bar{\theta}_1^{(i)}$: probabilité de quitter le système.

$\theta_2^{(i)}$: probabilité que le client interrompu rejoigne l'orbite.

$\delta^{(i)}$: taux d'arrivées des clients négatifs.

$G^{(i)}(u)$: distribution de temps de service.

$k_m^{(i)}$: nombre de nouvelles arrivées durant le service du $n^{\text{ème}}$ clients dans Σ_i .

$h_m^{(i)}$: nombre de clients négatifs qui arrivent durant le service du $n^{\text{ème}}$ clients dans Σ_i .

$\pi_m^{(i)}$: distribution stationnaire du nombre de clients dans le système Σ_i .

3 Résultats préliminaires et définitions

3.1 Généralités

L'objectif des ordres stochastiques est l'approximation du modèle complexe par un modèle plus simple ou bien par un modèle dont les distributions sont plus simples. Cela fournit des informations sur notre modèle qui sont difficiles à avoir directement.

Définition 1. Soient X et Y deux variables aléatoires non négatives de fonctions de répartition F et G , respectivement. On dit que X est plus petite que Y par rapport à:

(a) *Ordre stochastique* (noté $X \leq_{st} Y$) ssi $F(x) \geq G(x), \forall x \geq 0$.

(b) *Ordre convexe* (noté $X \leq_v Y$) ssi $\int_x^{+\infty} \bar{F}(u)d(u) \leq \int_x^{+\infty} \bar{G}(u)d(u), \forall x \geq 0$.

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes prenant des valeurs sur l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} , et en notant par $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$ et $\nu = (\nu_n)_{n \geq 0}$, pour $i \in \mathbb{Z}$, leurs distributions de fonction correspondantes, alors

(a) $\omega \leq_{st} \nu$ ssi $\bar{\omega}_m = \sum_{n \geq m} \omega_n \leq \bar{\nu}_m = \sum_{n \geq m} \nu_n, \forall m$.

(b) $\omega \leq_v \nu$ ssi $\bar{\bar{\omega}}_m = \sum_{n \geq m} \sum_{k \geq n} \omega_k \leq \bar{\bar{\nu}}_m = \sum_{n \geq m} \sum_{k \geq n} \nu_k, \forall m$.

Pour une discussion complète sur ces ordres stochastiques et leurs applications, on peut se référer à [19, 20, 21, 22].

Définition 2. Soient X et X_τ des variables aléatoires représentant respectivement la durée de vie et la durée de vie résiduelle d'un élément. Soient F et F_τ leurs distributions respectives. On dit que F est:

(a) *NBUE* (New Better than Used in Expectation), si $E(X_\tau) \leq E(X), (0 < \tau < \infty)$.

(b) *NWUE* (New Worse than Used in Expectation), si $E(X) \leq E(X_\tau), (0 < \tau < \infty)$.

3.2 Inégalités préliminaires

Dans cette section, on utilise la théorie générale des ordres stochastiques pour l'étude des propriétés de monotonie du système d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, relative aux ordres : stochastique \leq_{st} et convexe \leq_v .

Les lemmes suivants donnent les conditions, sur les paramètres des systèmes $\Sigma_i, i = 1, 2$, sous lesquelles les probabilités du nombre de clients arrivant durant le service d'un client dans les deux systèmes d'attente $\{k_m^{(i)}, i = 1, 2; m \in \mathbb{N}\}$ et $\{h_m^{(i)}, i = 1, 2; m \in \mathbb{N}\}$ sont comparables suivant les ordres stochastiques donnés.

Lemme 1. Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente.

$$\begin{aligned} \text{Si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } G^{(1)} \leq_{st,v} G^{(2)}, \text{ alors } \{k_m^{(1)}\} \leq_{st,v} \{k_m^{(2)}\}, \\ \text{Si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } \bar{G}^{(1)} \leq_{st,v} \bar{G}^{(2)}, \text{ alors } \{h_m^{(1)}\} \leq_{st,v} \{h_m^{(2)}\}, \end{aligned}$$

Preuve 1. La démonstration de ces deux inégalités dans le Lemme 1 est basée sur la sommation des variables aléatoires.

4 Monotonie de la chaîne de Markov induite

Soit l'opérateur de transition τ de la chaîne de Markov incluse. Pour chaque distribution $p = (p_n)_{n \geq 0}$, on associe une distribution $\tau p = q = (q_m)_{m \geq 0}$ telle que

$$q_m = \sum_{n \geq 0} p_n P_{nm}. \quad (4)$$

où les probabilités de transition P_{nm} sont définies dans la formule (3). L'opérateur est monotone par rapport à l'ordre stochastique si et seulement si:

$$\bar{P}_{n-1m} \leq \bar{P}_{nm}, \quad \forall n, m. \quad (5)$$

L'opérateur est monotone par rapport à l'ordre convexe si et seulement si :

$$2\bar{\bar{P}}_{nm} \leq \bar{\bar{P}}_{n-1m} + \bar{\bar{P}}_{n+1m}, \quad \forall n, m. \quad (6)$$

4.1 Monotonie de l'opérateur de transition

Les deux Théorèmes suivants donnent la condition sous laquelle l'opérateur de transition τ est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe.

Théorème 1. *L'opérateur de transition τ est monotone par rapport à l'ordre stochastique. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_{st} p^{(2)}$ implique $\tau p^{(1)} \leq_{st} \tau p^{(2)}$.*

Preuve 2. *Pour montrer l'inégalité (4), il suffit de vérifier les cas suivants:*

Premier cas: $n = 0$ et $m \geq 0$ (voir la première ligne de (3)). Pour cela, on a:

$$\begin{aligned} P_{nm} &= (1 - \delta_{0m})\theta_1 k_{m-1} + (1 - \theta_1)k_m + (1 - \delta_{0m})\theta_2 h_{m-1} + (1 - \theta_2)h_m. \\ \bar{P}_{nm} &= \sum_{\ell \geq m} P_{n\ell} = \sum_{\ell \geq m} [(1 - \delta_{0\ell})\theta_1 k_{\ell-1} + (1 - \theta_1) + (1 - \delta_{0\ell})\theta_2 h_{\ell-1} + (1 - \theta_2)h_\ell] \\ &= \theta_1 k_{m-1} + \bar{k}_m + \theta_2 h_{m-1} + \bar{h}_m. \\ \bar{P}_{n-1m} &= \sum_{\ell \geq m} P_{n-1\ell} = \theta_1 k_{m-1} + \bar{k}_m + \theta_2 h_{m-1} + \bar{h}_m. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\bar{P}_{nm} - \bar{P}_{n-1m} \geq 0.$$

Deuxième cas: $n \geq 1$ et $m = n - 1$, on a

$$\begin{aligned} P_{nm} &= \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_0 + \frac{n\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_0. \\ \bar{P}_{nm} &= \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_0 + \frac{n\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_0. \\ \bar{P}_{n-1m} &= \frac{(n-1)\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + (n-1)\mu} k_0 + \frac{(n-1)\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + (n-1)\mu} h_0. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\bar{P}_{nm} - \bar{P}_{n-1m} &= \left[\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] (1 - \theta_1)k_0 \\ &+ \left[\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] (1 - \theta_2)h_0 \\ &= \frac{\lambda\mu(1 - \theta_1)}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} k_0 + \frac{\lambda\mu(1 - \theta_2)}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} h_0 \geq 0.\end{aligned}$$

Dernier cas: $n \geq 1$ et $m > n - 1$. En suivant le même raisonnement, on trouve:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{nm} - \bar{P}_{n-1m} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n-1} + \left[\frac{(n-1)\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + (n-1)\mu} \right] k_{m-n+1} \\ &+ \left[\frac{\lambda^2(1 - \theta_1) + \lambda\mu(n-1) + n(n-1)\mu^2\theta_1}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] k_{m-n} \\ &+ \frac{\lambda\theta_2}{\lambda + n\mu} h_{m-n-1} + \left[\frac{(n-1)\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + (n-1)\mu} \right] h_{m-n+1} \\ &+ \left[\frac{\lambda^2(1 - \theta_2) + \lambda\mu(n-1) + n(n-1)\mu^2\theta_2}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] h_{m-n} \geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (5) est vérifiée pour tout n et m .

En conclusion, l'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre \leq_{st} .

Théorème 2. L'opérateur de transition τ est monotone, par rapport à l'ordre convexe. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_v p^{(2)}$ implique la suivante: $\tau p^{(1)} \leq_v \tau p^{(2)}$.

Preuve 3. La démonstration de ce théorème est analogue à la preuve du Théorème 1.

4.2 Comparabilité des opérateurs de transition

Maintenant, on considère Σ_1 et Σ_2 deux modèles d'attentes $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs ayant les paramètres suivants : $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \delta^{(1)}, G^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, \theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \delta^{(2)}, G^{(2)}$ respectivement. Notons par $\tau^{(1)}$ et $\tau^{(2)}$ les opérateurs de transition associés aux chaînes de Markov induite de chaque système.

Les deux théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité de ces opérateurs par rapport aux ordres partiels : stochastique et convexe.

Théorème 3. Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}$, $\theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)}$, $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ et $G^{(1)}(u) \leq_{st} G^{(2)}(u)$ alors $\tau^{(1)} \leq_{st} \tau^{(2)}$. C'est-à-dire pour une distribution quelconque p , on a $\tau^{(1)}p \leq_{st} \tau^{(2)}p$.

Preuve 4. D'après le Théorème 2.4.2, donné par Stoyan [21], nous devons vérifier les inégalités suivantes pour l'ordre stochastique,

$$\bar{P}_{nm}^{(1)} \leq \bar{P}_{nm}^{(2)}, \quad \forall n, m. \quad (7)$$

Ce qui revient à montrer :

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}k_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}k_{m-n}^{(1)} + \bar{k}_{m-n}^{(1)} \\
& + \frac{\lambda^{(1)}\theta_2^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}h_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_2^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}h_{m-n}^{(1)} + \bar{h}_{m-n}^{(1)} \\
& \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}k_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}k_{m-n}^{(2)} + \bar{k}_{m-n}^{(2)} \\
& + \frac{\lambda^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}h_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}h_{m-n}^{(2)} + \bar{h}_{m-n}^{(2)}. \tag{8}
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1 (par rapport à l'ordre stochastique), on a :

$$\left\{k_m^{(1)}\right\} \leq_{st} \left\{k_m^{(2)}\right\}, \quad \forall m \geq 0. \tag{9}$$

D'autre part,

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \text{ et } \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)} \text{ alors } \frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}} \text{ ou } \frac{\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \geq \frac{\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)}}. \tag{10}$$

En outre, du fait que la fonction $x \rightarrow \frac{x}{x+n}$ est croissante par rapport à x , alors l'inégalité suivante a lieu :

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}. \tag{11}$$

Par hypothèse, on a $\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}$ et $\theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)}$, donc

$$\frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \text{ et } \frac{\lambda^{(1)}\theta_2^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}. \tag{12}$$

De même, la fonction : $\frac{x}{1+x}$ est croissante alors :

$$\frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \geq \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}. \tag{13}$$

De plus, du fait que

$$\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)} \text{ et } \theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)} \text{ alors } (1 - \theta_1^{(1)}) \geq (1 - \theta_1^{(2)}) \text{ et } (1 - \theta_2^{(1)}) \geq (1 - \theta_2^{(2)}),$$

alors

$$-\frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq -\frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \text{ et } -\frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_2^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq -\frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}. \tag{14}$$

Des inégalités (12), (14) et (9), on obtient :

$$\bar{P}_{nm}^{(1)} = \frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}k_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}k_{m-n}^{(1)} + \bar{k}_{m-n}^{(1)} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\lambda^{(1)}\theta_2^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}h_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_2^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}h_{m-n}^{(1)} + \bar{h}_{m-n}^{(1)} \\ & \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}k_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}k_{m-n}^{(1)} + \bar{k}_{m-n}^{(1)} \\ & + \frac{\lambda^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}h_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}h_{m-n}^{(1)} + \bar{h}_{m-n}^{(1)} \\ & = \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{k}_{m-n-1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{k}_{m-n}^{(1)} \\ & + \frac{\lambda^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{h}_{m-n-1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}(1 - \theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{h}_{m-n}^{(1)} \\ & + \frac{n\mu^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{k}_{m-n}^{(1)} + \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{k}_{m-n+1}^{(1)} \quad (16) \end{aligned}$$

$$+ \frac{n\mu^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{h}_{m-n}^{(1)} + \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{h}_{m-n+1}^{(1)} \leq \bar{P}_{nm}^{(2)}. \quad (17)$$

Par conséquent, l'inégalité (7) est vérifiée.

Théorème 4. Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}$, $\theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)}$, $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ et $G^{(1)}(u) \leq_v G^{(2)}(u)$ alors $\tau^{(1)} \leq_v \tau^{(2)}$. C'est-à-dire que pour une distribution quelconque p on a $\tau^{(1)}p \leq_v \tau^{(2)}p$.

Preuve 5. D'après le Théorème 2.4.2 (voir Stoyan [21]), pour l'ordre convexe, il suffit de vérifier l'inégalité suivante:

$$\bar{\bar{P}}_{nm}^{(1)} \leq \bar{\bar{P}}_{nm}^{(2)}, \quad \forall 0 \leq n \leq m.$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}\bar{k}_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}\bar{k}_{m-n}^{(1)} + \bar{\bar{k}}_{m-n}^{(1)} \\ & + \frac{\lambda^{(1)}\theta_2^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}\bar{h}_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_2^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}\bar{h}_{m-n}^{(1)} + \bar{\bar{h}}_{m-n}^{(1)} \\ & \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{k}_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{k}_{m-n}^{(2)} + \bar{\bar{k}}_{m-n}^{(2)} \\ & + \frac{\lambda^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{h}_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}\bar{h}_{m-n}^{(2)} + \bar{\bar{h}}_{m-n}^{(2)}. \end{aligned}$$

En suivant la même démarche que la démonstration du Théorème 3 et en exploitant le résultat du Lemme 1 (par rapport à l'ordre convexe), on obtient le résultat recherché.

5 Inégalités stochastiques pour les distributions stationnaires

Les deux Théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité des distributions stationnaires du nombre de clients, pour deux systèmes de files d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, par rapport aux ordres partiels : stochastique et convexe.

Théorème 5. *On considère Σ_1, Σ_2 deux systèmes de files d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, ayant les paramètres $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \delta^{(1)}, G^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, \theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \delta^{(2)}, G^{(2)}$ respectivement, et soient $\pi_i^{(1)}, \pi_i^{(2)}$, les distributions stationnaires du nombre de clients dans chaque système, alors si les inégalités suivantes lieu*

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}, \theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)} \quad \text{et} \quad G^{(1)} \leq_{st,v} G^{(2)}, \quad (18)$$

on a aussi l'inégalité suivante sur la distribution stationnaire

$$\left\{ \pi_i^{(1)} \right\} \leq_{st,v} \left\{ \pi_i^{(2)} \right\}.$$

Preuve 6. *D'après les hypothèses des Théorèmes 3-4, on a $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}, \theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)}$ et $G^{(1)} \leq_{st,v} G^{(2)}$ ce qui implique $\tau^{(1)} \leq_{st,v} \tau^{(2)}$. C'est-à-dire, pour une distribution quelconque p on a l'inégalité suivante :*

$$\tau^{(1)} p \leq_{st,v} \tau^{(2)} p. \quad (19)$$

En outre, on a $G^{(2)} \leq_{st,v} G^{(2)}$, alors d'après le Théorème 1 (resp. le Théorème 2), l'opérateur τ associé à la chaîne de Markov incluse, du deuxième système, est monotone. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p_1^{(2)}$ et $p_2^{(2)}$, telle que $p_1^{(2)} \leq_{st,v} p_2^{(2)}$, on a

$$\tau^{(2)} p_1^{(2)} \leq_{st,v} \tau^{(2)} p_2^{(2)}. \quad (20)$$

Cependant, de l'inégalité (19), on obtient

$$\tau^{(1)} p^{(1)} \leq_{st,v} \tau^{(2)} p^{(1)}. \quad (21)$$

Il existe une probabilité $p_1^{(2)}$ telle qu'on ait l'inégalité suivante

$$\tau^{(2)} p^{(1)} \leq_{st,v} \tau^{(2)} p_1^{(2)}. \quad (22)$$

En combinant les inégalités (21) et (22), on obtient le résultat suivant

$$\tau^{(1)} p^{(1)} \leq_{st,v} \tau^{(2)} p^{(2)}, \quad (23)$$

pour deux distributions quelconques $p^{(1)}, p^{(1)}$.

L'inégalité (23), peut être réécrite de la manière suivante

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} p_i^{(1)} &= P(Z_l^{(1)} = i) = P(Z_l^{(1)} = i) \\ &\leq_{st,v} P(Z_l^{(2)} = i) = P(Z_l^{(2)} = i) = \tau^{(2)} p_i^{(2)}, \end{aligned}$$

quand $l \rightarrow \infty$, on obtient le résultat recherché, c'est-à-dire $\left\{ \pi_i^{(1)} \right\} \leq_{st,v} \left\{ \pi_i^{(2)} \right\}$.

Théorème 6. *Si pour le modèle $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, la distribution de temps de service est NBUE (New Better than Used Expectation), (respectivement NWUE-New Worse than Used in Expectation), alors la distribution stationnaire du nombre de clients dans ce système est inférieure (respectivement supérieure), par rapport à l'ordre convexe, à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs.*

Preuve 7. *Considérons un système de files d'attente $M/M/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs ayant les mêmes paramètres : taux d'arrivée λ , taux de rappels μ , la probabilité de rejoindre l'orbite θ , temps moyen de service β_1 que le système $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, mais avec une distribution de temps de service exponentielle de moyenne $\theta = \frac{1}{\beta_1}$.*

$$G^*(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\beta_1}}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (24)$$

D'après Stoyan [21], si $G(x)$ est NBUE (respectivement NWUE), alors

$$G(x) \leq_v G^*(x) \quad \text{respectivement} \quad G^*(x) \leq_v G(x) \quad (25)$$

Et comme $G^{(1)} \leq_v G^{(2)}$ alors d'après le Théorème 5, on déduit que la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, est inférieure (respectivement supérieure) à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs.

6 Application numérique

Dans le but d'illustrer et de confirmer les résultats obtenu dans le Théorème 6, nous avons élaboré un simulateur, sous environnement Matlab, basé sur la simulation à événements discrets, qui reproduira le comportement du modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs. Pour ce faire, on a choisi une loi de probabilité de type NBUE (une distribution d'Erlang d'ordre k notée $E_k(\lambda)$) et une autre de type NWUE (une distribution gamma de paramètres a et b notée $\Gamma(a, b)$ avec $0 < a < 1$) pour les temps de service. De plus, afin d'analyser l'influence de taux d'arrivées des clients négatifs δ , sur les mesures de performance du modèle en question, et cela dans le but d'avoir une tendance générale des résultats. En outre, nous avons fixé le taux des arrivées des clients positifs $\lambda = 0.5$, la probabilité de quitter le système $\theta_1 = 0.4$, la probabilité que le client interrompu par l'arrivée négatives rejoindre l'orbite $\theta_2 = 0.6$. Pour cela, nous avons considéré trois situations de variations de δ (voir la Table 1. Pour l'exécution du simulateur, on a considéré: le temps de simulation $t_{max} = 200$ unités de temps, $n = 30$ (nombre de replication) et différentes valeurs de δ .

D'après la Figure 1 et pour différentes valeurs de δ , on remarque que :

- Si le taux des arrivées des clients négatifs est assez petit, alors le système $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs se comporte de la même manière que le système $M/M/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs (voir la Figure 1, $\delta = 0.1$).
- Si le taux d'arrivées des clients négatifs δ assez grand alors les caractéristiques du système $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs s'éloignent de celles du système $M/M/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs (voir la Figure 1, $\delta \geq 0.2$).

		δ	\bar{N}	\bar{N}_o
Loi NBUE	$E_2(0.4)$	0.1	37.0304	36.2587
		0.2	33.8065	33.1728
		0.4	30.1202	29.5466
		0.5	24.4961	24.0525
		0.7	20.5071	20.0039
		0.9	13.3664	13.0813
		Loi Exp	$\exp(0.2)$	0.1
0.2	31.0738			30.3479
0.4	25.1960			24.6409
0.5	20.9393			20.4236
0.7	14.6426			14.1910
0.9	9.7615			9.5251
Loi NWUE	$\Gamma(0.5, 10)$			0.1
		0.2	26.8490	26.3051
		0.4	19.9299	19.5051
		0.5	13.9915	13.6671
		0.7	9.3054	9.0699
		0.9	4.6790	4.5691

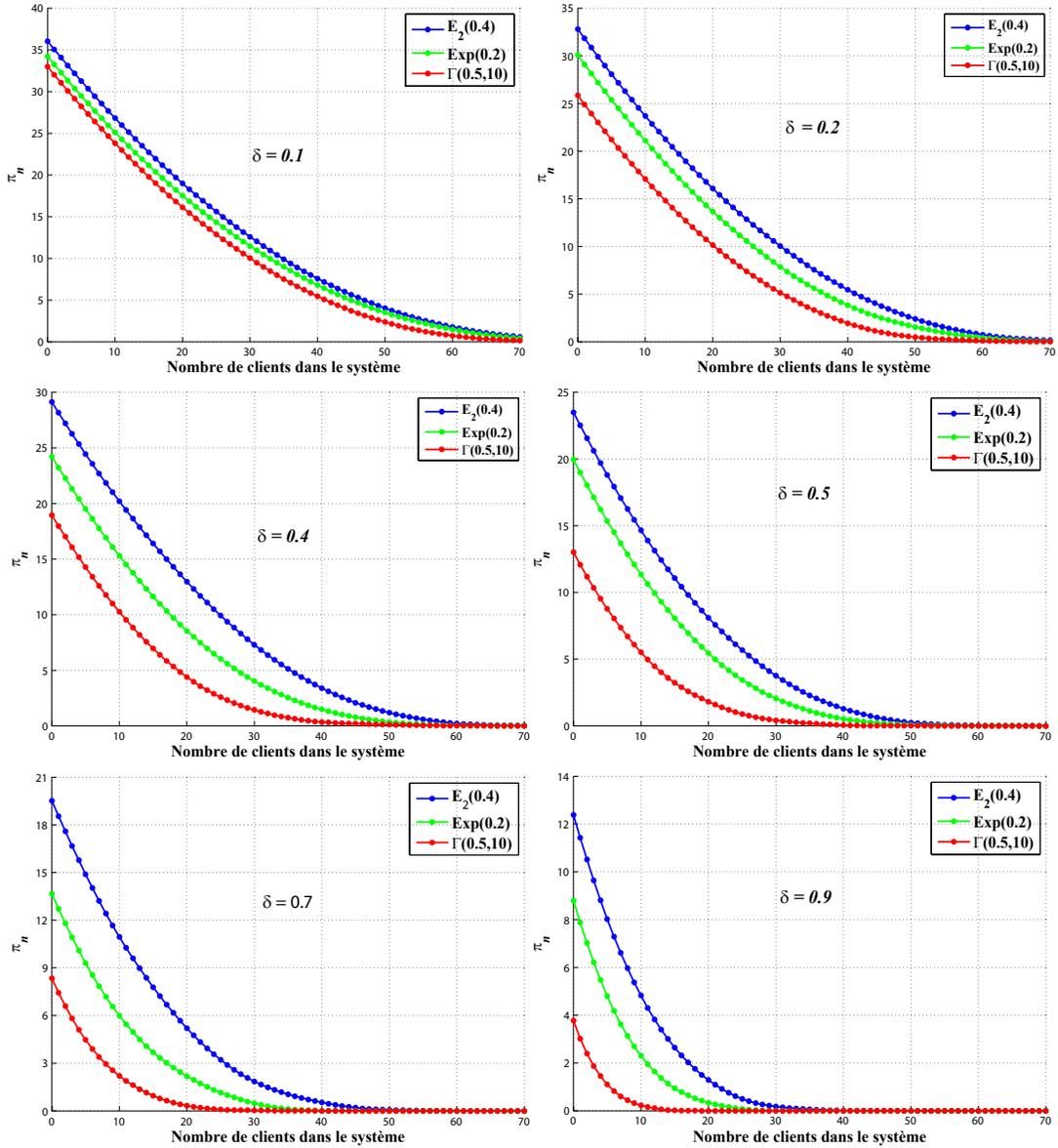
Table 1: Différentes situations prises en considération lors de simulation

- Les bornes stochastiques données dans le Théorème 6 dépendent de taux d'arrivées des clients négatifs δ (voir la Figure 1, $\forall \delta$).
- Lorsque le taux des arrivées des clients négatifs (δ) augmente dans le système, alors le nombre moyen de clients positifs dans le système (\bar{N}) et le nombre moyen de clients positifs dans l'orbite (\bar{N}_o) diminue (voir la Table 1).

D'une manière générale, les résultats théoriques obtenus dans le Théorème 6, sont confirmés par les résultats de simulation (une bonne concordance entre les résultats analytiques et ceux issus de la simulation). De plus, si le taux d'arrivées des clients négatifs δ est faible alors les bornes stochastiques sont une bonne approximation pour les probabilités stationnaires du modèle considéré et ce quelque soit la distribution des temps de service (NBUE ou NWUE). Par conséquent, les mesures de performance d'un tel système peuvent être estimées par celles du système $M/M/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs.

7 Conclusion

Dans ce travail, dans un premier temps, nous avons élaboré des conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles les probabilités du nombre de clients arrivant durant le service d'un client dans deux systèmes, ayant la même structure mais avec des paramètres différents, sont comparables par rapport aux ordres stochastiques donnés. Dans un deuxième temps, on a montré la monotonie de l'opérateur de transition de la chaîne Markov induite par rapport aux ordres stochastique et convexe. En outre, on a dérivé les conditions de comparabilité des opérateurs de transition, de deux systèmes ayant la même structure mais avec des paramètres différents, associés à deux chaînes de Markov respectivement. De plus, nous avons obtenu des conditions de comparabilité pour lesquelles la distribution stationnaire du nombre de clients

Figure 1: Nombre de clients dans le système en fonction de δ

dans le système $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs soit majorée (respectivement minorée) par la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M/M/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, si la distribution de temps de service est NBUE (respectivement NWUE). En dernier temps, par une étude de simulation, on observe une bonne concordance entre les résultats analytiques et ceux issus de la simulation.

References

- [1] J.R. Artalejo, Accessible bibliography on retrial queues: progress in 2000-2009, *Mathematical and Computer Modelling*, 51: 1071–1081, 2010.
- [2] J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral, *Retrial queueing system: A computation approach*, Springer Edition, Berlin, 2008.
- [3] J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral, Computation of the limiting distribution in queueing systems with repeated attempts and disasters, *RAIRO-Operations Research*, 33:371–382, 1999.
- [4] M. Boualem and N. Djellab and D. Aïssani, Stochastic inequalities for $M/G/1$ retrial queues with vacations and constant retrial policy, *Mathematical and Computer Modelling*, 50:207–212, 2009.
- [5] M. Boualem and N. Djellab and D. Aïssani, Approche régénérative de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels classiques et vacances exhaustives du serveur, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 45:253–267, 2011.
- [6] M. Boualem and N. Djellab and D. Aïssani, Stochastic approximations and monotonicity of a single server feedback retrial queue, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 536982, 2012:1–13, 2012.
- [7] M. Boualem, M. Cherfaoui, N. Djellab and D. Aïssani, Analyse des performances du système $M/G/1$ avec rappels et Bernoulli feedback, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 47:181–193, 2013.
- [8] M. Boualem and N. Djellab and D. Aïssani, Stochastic bounds for a single server queue with general retrial times. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 40:183–198, 2014.
- [9] M. Boualem, Insensitive bounds for the stationary distribution of a single server retrial queue with server subject to active breakdowns. *Advances in Operations Research*, Article ID 985453, 2014:1–12, 2014.
- [10] X. Chao , M. Miyazawa and M. Pinedo, *Queueing networks: customers, signals and product form solutions*, Wiley, Chichester, 1999.
- [11] Do TV, Bibliography on G-networks, negative customers and applications. *Math. Comput. Modell.*, 53:205–212, 2011.
- [12] G. I. Falin and J. G. C. Templeton, *Retrial Queues*, Chapman and Hall, London, 1997.
- [13] Z. Khalil and G. Falin, Stochastic inequalities for $M/G/1$ retrial queues, *Oper. Res. Lett.*, 16: 285–290, 1994.
- [14] E. Gelenbe, Product form queueing network with negative and positive customers, *Journal of Applied Probability*, 28:656–663, 1991.
- [15] E. Gelenbe, P. Glynn and K. Sigman, Queues with negative arrivals, *Journal of Applied Probability*, 28:245–250, 1991.
- [16] E. Gelenbe, Random neural network with negative and positive signals and product form solution, *Neural Computation*, 1:502–510, 1989.
- [17] G. Jain and K. Sigman, A Pollaczek-Khintchine formula for $M/G/1$ queue with disasters, *Journal of Applied Probability*, 33:1191–1200, 1996.
- [18] B. Krishna Kumar, S. Pavaï Madheswari and S. R. Anantha Lakshmi, An $M/G/1$ Bernoulli feedback retrial queueing system with negative customers, *Oper. Res. Int. J.*, 13:187–210, 2013.
- [19] M. Shaked and J. G. Shanthikumar, *Stochastic Orders and their Applications*, Academic Press, San Diego, 1994.
- [20] M. Shaked and J. G. Shanthikumar, *Stochastic Orders*, Springer-Verlag, New York, 2007.
- [21] D. Stoyan, *Comparison methods for queues and other stochastic models*, 217. Wiley, New York, 1983.
- [22] R. Szekli, *Stochastic ordering and dependence in applied probability*, Springer, New York, 1995.
- [23] T. Yang and J. G. C. Templeton, A survey on retrial queues, *Queueing Systems*, 2:201–233, 1987.