# Simulation par éléments discrets de fibres flexibles avec frottement de Coulomb

Gilles Daviet Inria – Laboratoire Jean Kuntzmann Avec Florence Bertails-Descoubes



#### Rencontres du GDR 3MF — Nantes 12 juin 2014

# MOTIVATION : CHEVELURE NUMÉRIQUES

#### Deux secteurs principaux

Loisir numérique (cinéma d'animation, effets spéciaux)



Final Fantasy (2000) The Incredibles (2005) Avatar (2009) Tangled (2010) Brave (2012)

▲□▶▲□▶▲□▶▲□▶ ▲□ ● ● ●

# MOTIVATION : CHEVELURE NUMÉRIQUES

#### Deux secteurs principaux

Loisir numérique (cinéma d'animation, effets spéciaux)



Final Fantasy (2000) The Incredibles (2005) Avatar (2009) Tangled (2010) Brave (2012)

#### Prototypage virtuel en cosmétologie



©L'Oréal

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ★ □▶ = 三 の < @

# EXIGENCES SUR LE MODÈLE



 Simulation dynamique (et non quasi-statique)

# EXIGENCES SUR LE MODÈLE



- Simulation dynamique (et non quasi-statique)
- Fibres longues mais inextensibles

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

- Flexibles (en courbure et en torsion)
- Frisure naturelle

# EXIGENCES SUR LE MODÈLE



- Simulation dynamique (et non quasi-statique)
- Fibres longues mais inextensibles

▲□▶▲□▶▲□▶▲□▶ ▲□ ● ● ●

- Flexibles (en courbure et en torsion)
- Frisure naturelle
- Frottement statique ( présence d'un seuil )

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ★ □▶ = 三 の < @

Plan de l'exposé

TIGES MÉCANIQUES

MODÈLE DE CONTACT

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE** 

Résultats

Plan de l'exposé

TIGES MÉCANIQUES

MODÈLE DE CONTACT

**Résolution numérique** 

RÉSULTATS

▲□▶▲圖▶▲≣▶▲≣▶ ≣ のQ@

- ► Ligne moyenne **r**(*s*)
- Repère matériel

 $\{\mathbf{t}(s) = \mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$ 



◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 善臣 - のへで

- Ligne moyenne r(s)
- Repère matériel
  - $\{\mathbf{t}(s) = \mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$
- Hypothèses de Kirchhoff :
  - Tige sans cisaillement
  - Tige inextensible
  - Inertie en torsion négligeable



- Ligne moyenne r(s)
- Repère matériel
  - $\{\mathbf{t}(s) = \mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$
- Hypothèses de Kirchhoff :
  - Tige sans cisaillement
  - Tige inextensible
  - Inertie en torsion négligeable
- Degrés de liberté :
  - torsion  $\tau(s)$
  - courbures  $\kappa_1(s)$ ,  $\kappa_2(s)$



- Ligne moyenne r(s)
- Repère matériel
  - $\{\mathbf{t}(s) = \mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$
- Hypothèses de Kirchhoff :
  - Tige sans cisaillement
  - Tige inextensible
  - Inertie en torsion négligeable
- Degrés de liberté :
  - torsion  $\tau(s)$
  - courbures  $\kappa_1(s)$ ,  $\kappa_2(s)$
- ▶ Grands déplacements mais petites déformations :
   → Loi de comportement élastique

$$\mathbf{M}(s) = K\left(\kappa(s) - \kappa^0(s)\right)$$



Découpage de la tige en N éléments
 τ(s), κ<sub>1</sub>(s), κ<sub>2</sub>(s) constantes p. morceaux



▲□▶ ▲□▶ ▲三▶ ▲三▶ 三三 のへで

#### UNE DISCRÉTISATION : LES SUPER-HÉLICES BERTAILS *et al.* 2006

- Découpage de la tige en N éléments
   τ(s), κ<sub>1</sub>(s), κ<sub>2</sub>(s) constantes p. morceaux
- Intégration en temps

$$M \boldsymbol{v} + f = 0, \, \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{t+dt}$$



▲□▶ ▲□▶ ▲三▶ ▲三▶ 三三 のへで

- Découpage de la tige en N éléments
   τ(s), κ<sub>1</sub>(s), κ<sub>2</sub>(s) constantes p. morceaux
- Intégration en temps

 $M \mathbf{v} + f = 0, \, \mathbf{v} = \dot{\mathbf{\kappa}}_{t+dt}$ 

Extension : κ linéaire p. morceaux
 Super-Clothoides (Casati *et al.* 2013)



Résultats

#### UNE DISCRÉTISATION : LES SUPER-HÉLICES Illustration



◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ ─臣 ─のへで

Plan de l'exposé

TIGES MÉCANIQUES

MODÈLE DE CONTACT

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE** 

RÉSULTATS

▲□▶▲圖▶▲≣▶▲≣▶ ≣ のQ@

#### CONTACT PONCTUEL



#### Hypothèses

- 1. Le contact concerne toujours au plus deux objets, A et B
- 2. Surface de contact assez lisse pour définir une normale e

# CONTACT PONCTUEL



#### Hypothèses

- 1. Le contact concerne toujours au plus deux objets, A et B
- 2. Surface de contact assez lisse pour définir une normale e
- $\rightarrow$  On peut définir un repère local et
  - ► la vitesse relative **u** *A*/*B*
  - ▶ la force de contact **r**  $B \rightarrow A$

Soit  $\mu \ge 0$  le coefficient de frottement. On définit le cône du second-ordre  $K_{\mu}$ ,

 $K_{\mu} = \{ \|\mathbf{r}_{\mathrm{T}}\| \le \mu r_{\mathrm{N}} \} \subset \mathbb{R}^3$ 



▲ロト ▲ □ ト ▲ □ ト ▲ □ ト ● ● の Q ()

Soit  $\mu \ge 0$  le coefficient de frottement. On définit le cône du second-ordre  $K_{\mu}$ ,

 $K_{\mu} = \{ \|\mathbf{r}_{\mathrm{T}}\| \le \mu r_{\mathrm{N}} \} \subset \mathbb{R}^3$ 



Contact frottant avec la loi de Coulomb ( $\approx 1780$ )

$$(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \in C(\mathbf{e}, \mu) \iff$$

Soit  $\mu \ge 0$  le coefficient de frottement. On définit le cône du second-ordre  $K_{\mu}$ ,

 $K_{\mu} = \{ \|\mathbf{r}_{\mathrm{T}}\| \le \mu r_{\mathrm{N}} \} \subset \mathbb{R}^3$ 



< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Contact frottant avec la loi de Coulomb ( $\approx 1780$ )

soit décollage  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  et  $u_{\rm N} > 0$ 

$$(\mathbf{u},\mathbf{r})\in C(\mathbf{e},\mu)\iff$$

Soit  $\mu > 0$  le coefficient de frottement. On définit le cône du second-ordre  $K_{\mu}$ ,

 $K_{\mu} = \{ \|\mathbf{r}_{\mathrm{T}}\| \leq \mu r_{\mathrm{N}} \} \subset \mathbb{R}^3$ 



▲□▶▲□▶▲□▶▲□▶ ▲□ ● ● ●

Contact frottant avec la loi de Coulomb ( $\approx 1780$ )

 $(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \in C(\mathbf{e}, \mu) \iff \begin{cases} \text{soit décollage} & \mathbf{r} = \mathbf{0} \text{ et } u_{N} > 0 \\ \text{soit adhérence} & \mathbf{r} \in K_{\mu} \text{ et } \mathbf{u} = 0 \end{cases}$ 

Soit  $\mu \ge 0$  le coefficient de frottement. On définit le cône du second-ordre  $K_{\mu}$ ,

 $K_{\mu} = \{ \|\mathbf{r}_{\mathrm{T}}\| \le \mu r_{\mathrm{N}} \} \subset \mathbb{R}^3$ 



Contact frottant avec la loi de Coulomb ( $\approx 1780$ )

$$(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \in C(\mathbf{e}, \mu) \iff$$

 $\begin{cases} \text{ soit décollage } \mathbf{r} = \mathbf{0} \text{ et } u_{\text{N}} > 0 \\ \text{ soit adhérence } \mathbf{r} \in K_{\mu} \text{ et } \mathbf{u} = 0 \\ \text{ soit glissement } \mathbf{r} \in \partial K_{\mu} \setminus 0, u_{\text{N}} = 0 \\ \text{ et } \exists \alpha \ge 0, \ \mathbf{u}_{\text{T}} = -\alpha \mathbf{r}_{\text{T}} \end{cases}$ 

▲□▶▲圖▶▲≣▶▲≣▶ ≣ のQ@

▲□▶ ▲□▶ ▲ 三▶ ▲ 三▶ - 三 - のへぐ

#### APPROCHE EXPLICITE

Ajout d'une force de pénalité  $\mathbf{r} = r_{\rm N} \mathbf{e} + \mathbf{r}_{\rm T}$ 

#### APPROCHE EXPLICITE

Ajout d'une force de pénalité  $\mathbf{r} = r_{\rm N} \mathbf{e} + \mathbf{r}_{\rm T}$ 

*r*<sub>N</sub> := η(*d*) + ν**v**<sub>N</sub><sup>k-1</sup>, *d* distance de pénétration
 *r*<sub>T</sub> := −μ*r*<sub>n</sub>||**v**<sub>T</sub><sup>k-1</sup>||

# APPROCHE EXPLICITE

Ajout d'une force de pénalité  $\mathbf{r} = r_{\text{N}}\mathbf{e} + \mathbf{r}_{\text{T}}$ 

- ►  $r_{\rm N} := \eta(d) + \nu \mathbf{v}_{\rm N}^{k-1}$ , *d* distance de pénétration
- $\mathbf{r}_{\mathrm{T}} := -\mu r_n \| \mathbf{v}_{\mathrm{T}}^{k-1} \|$
- Explicite, peu stable
- $\mathbf{r}_{T} > 0 \implies \mathbf{u}_{T} > 0$  , pas de seuil

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ★ □▶ = 三 の < @

# FORMULATION PAR CONTRAINTES

Système global (sans interactions) :

 $\mathbf{M}\,\mathbf{v}+\mathbf{f}=0$ 

 $\rightarrow$  inconnues :  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\kappa}_{t+dt}$  et  $\mathbf{v}$ 

#### FORMULATION PAR CONTRAINTES

Système global (sans interactions) :

 $\mathbf{M}\,\mathbf{v}+\mathbf{f}=0$ 

 $\rightarrow$  inconnues :  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\kappa}_{t+dt}$  et  $\mathbf{v}$ 

Système global (avec contact frottant) :

$$\begin{cases}
\mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{f} &= \mathbf{H}^{\top} \mathbf{r} \\
\mathbf{u} &= \mathbf{H} \mathbf{v} + \mathbf{w} \\
(\mathbf{u}, \mathbf{r}) & \text{vérifie la loi de Coulomb}
\end{cases}$$
(1)

 $\rightarrow$  Inconnues : **q**, **v**, **u** et **r** 

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

# FORMULATION PAR CONTRAINTES

Système global (sans interactions) :

 $\mathbf{M}\,\mathbf{v}+\mathbf{f}=0$ 

 $\rightarrow$  inconnues :  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\kappa}_{t+dt}$  et  $\mathbf{v}$ 

Système global (avec contact frottant) :

$$\begin{cases}
\mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{f} &= \mathbf{H}^{\top} \mathbf{r} \\
\mathbf{u} &= \mathbf{H} \mathbf{v} + \mathbf{w} \\
(\mathbf{u}, \mathbf{r}) & \text{vérifie la loi de Coulomb}
\end{cases}$$
(1)

 $\rightarrow$  Inconnues : **q**, **v**, **u** et **r** 

 $\rightarrow$  Non-lisse, non linéaire, pas de garantie d'existence

Plan de l'exposé

TIGES MÉCANIQUES

MODÈLE DE CONTACT

**R**ÉSOLUTION NUMÉRIQUE

RÉSULTATS

▲□▶▲圖▶▲≣▶▲≣▶ ≣ のQ@

## PROBLÈME À *n* CONTACTS Méthode choisie

#### Méthode de Gauss-Seidel projeté

- Très stable
- Convergence O(log k)
- ... mais erreur suffisamment faible très rapidement

#### PROBLÈME À *n* CONTACTS Méthode choisie

#### Méthode de Gauss-Seidel projeté

- Très stable
- Convergence O(log k)
- ... mais erreur suffisamment faible très rapidement

#### Idée

Tant que la convergence n'est pas atteinte

## PROBLÈME À *n* CONTACTS Méthode choisie

#### Méthode de Gauss-Seidel projeté

- Très stable
- Convergence O(log k)
- ... mais erreur suffisamment faible très rapidement

#### Idée

- Tant que la convergence n'est pas atteinte
  - Pour chaque contact

## PROBLÈME À *n* CONTACTS Méthode choisie

#### Méthode de Gauss-Seidel projeté

- Très stable
- Convergence O(log k)
- ... mais erreur suffisamment faible très rapidement

#### Idée

- Tant que la convergence n'est pas atteinte
  - Pour chaque contact
    - Résoudre le contact de manière isolée

## PROBLÈME À *n* CONTACTS Méthode choisie

#### Méthode de Gauss-Seidel projeté

- Très stable
- Convergence O(log k)
- ... mais erreur suffisamment faible très rapidement

#### Idée

- Tant que la convergence n'est pas atteinte
  - Pour chaque contact
    - Résoudre le contact de manière isolée

◆□▶ ◆□▶ ◆ □▶ ◆ □▶ ─ □ ─ のへぐ

# REFORMULATION

Rappel de la formulation primale en (v, u et r):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M\,v+f &=& H^{\top}r\\ u &=& H\,v+w\\ (u,r) & & \mbox{v\'erifie}\ \mbox{la}\ \mbox{loi}\ \ \mbox{de}\ \ \mbox{Coulomb} \end{array} \right.$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

#### REFORMULATION

Rappel de la formulation primale en (v, u et r) :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{f} &= \mathbf{H}^{\top} \mathbf{r} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{H} \mathbf{v} + \mathbf{w} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{r}) & \text{vérifie la loi de Coulomb} \end{cases}$$

Formulation duale compacte en (**u**, **r**) :

 $\begin{cases} \mathbf{u} &= \mathbf{W} \mathbf{r} + \mathbf{b} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{r}) & \text{vérifie la loi de Coulomb} \end{cases}$ où  $\mathbf{W} = \mathbf{H} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H}^{\top} \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$  est l'opérateur de Delassus

#### GAUSS-SEIDEL Illustration pour 4 contacts



- Découper la matrice W en blocs 3 × 3
   → Chaque ligne de blocs correspond à un unique contact
- Puis pour  $k := 1 \dots N_{\text{itermax}}$  itérer sur ces lignes :

イロト イ理ト イヨト イヨト

#### GAUSS-SEIDEL Illustration pour 4 contacts

# $\mathbf{u}_{1}^{k+1} = \mathbf{b}_{1} + \overbrace{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{W}_{11} \ \mathbf{W}_{12} \ \mathbf{W}_{12} \ \mathbf{W}_{23} \ \mathbf{W}_{23} \ \mathbf{W}_{24} \ \mathbf{W}_{23} \ \mathbf{W}_{23} \ \mathbf{W}_{24} \ \mathbf{W}_{14} \ \mathbf{W}_{24} \ \mathbf{W}_{24} \ \mathbf{W}_{44} \end{array}\right)} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1}^{k+1} \\ \mathbf{r}_{2}^{k} \\ \mathbf{r}_{3}^{k} \\ \mathbf{r}_{4}^{k} \ \mathbf{r}_{4}^{k} \end{pmatrix}$

 $\rightarrow$  Résoudre le problème à un contact

$$(\mathbf{u}_1^{k+1}, \mathbf{r}_1^{k+1}) \in \mathcal{C}(\mu)$$

avec  $\mathbf{r}_2^k$ ,  $\mathbf{r}_3^k$ ,  $\mathbf{r}_4^k$  fixés,  $\mathbf{u}_1^{k+1}$  linéaire en  $\mathbf{r}_1^{k+1}$ 

#### GAUSS-SEIDEL Illustration pour 4 contacts



 $\rightarrow$  Résoudre le problème à un contact

$$(\mathbf{u}_2^{k+1}, \mathbf{r}_2^{k+1}) \in \mathcal{C}(\mu)$$

avec  $\mathbf{r}_1^{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_3^k$ ,  $\mathbf{r}_4^k$  fixés,  $\mathbf{u}_2^{k+1}$  linéaire en  $\mathbf{r}_2^{k+1}$ 

▲ロト▲聞★▲国ト▲国ト 国・今日や

(日)

#### GAUSS-SEIDEL Illustration pour 4 contacts



 $\rightarrow$  Résoudre le problème à un contact

$$(\mathbf{u}_3^{k+1}, \mathbf{r}_3^{k+1}) \in \mathcal{C}(\mu)$$

avec  $\mathbf{r}_1^{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_2^{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_4^k$  fixés,  $\mathbf{u}_3^{k+1}$  linéaire en  $\mathbf{r}_3^{k+1}$ 

#### GAUSS-SEIDEL Illustration pour 4 contacts



 $\rightarrow$  Résoudre le problème à un contact

$$(\mathbf{u}_4^{k+1}, \mathbf{r}_4^{k+1}) \in \mathcal{C}(\mu)$$

avec  $\mathbf{r}_1^{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_2^{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_3^{k+1}$  fixés,  $\mathbf{u}_4^{k+1}$  linéaire en  $\mathbf{r}_4^{k+1}$ 

GAUSS-SEIDEL Illustration pour 4 contacts



▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ★ □▶ = 三 の < @

#### $\rightarrow$ Recommencer la boucle avec k := k + 1

UN SEUL CONTACT Résolution de  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_i) \in \mathcal{C}(\mu)$ 

#### Linéarisation

- Cône polygonal (pyramide)
- Problème linéaire
- ... mais plus de variables
- ... et artefacts visables

UN SEUL CONTACT Résolution de  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_i) \in \mathcal{C}(\mu)$ 

- Linéarisation
- Formulation fonctionelle  $f(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = 0$ 
  - Alart-Curnier (1992)
  - MFB (2011) : Fischer-Burmeister sur cône du second ordre
  - $\rightarrow$  Newton, point-fixe...
  - $\rightarrow$  Non-convexe, pas de convergence globale

#### UN SEUL CONTACT Résolution de $(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_i) \in \mathcal{C}(\mu)$

- Linéarisation
- Formulation fonctionelle  $f(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = 0$
- Formulation énumérative
  - ► Test successif de chaque cas cas ( décollage → adhérence → glissement )
  - Glissement : polynôme de degré 4
  - Formule exacte
    - $\rightarrow$  Nombreux tests, lent
  - ... ou valeurs propres matrice compagnon
    - $\rightarrow$  Possiblement mal conditionnée
  - Si non-existence, pas de solution approchée

UN SEUL CONTACT Résolution de  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_i) \in \mathcal{C}(\mu)$ 

- Linéarisation
- Formulation fonctionelle  $f(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = 0$
- Formulation énumérative
- Méthode hybride
  - Cas simple ou glissement grossier par énumératif
  - Raffinement par Newton

Plan de l'exposé

TIGES MÉCANIQUES

MODÈLE DE CONTACT

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE** 

Résultats

▲□▶▲圖▶▲≣▶▲≣▶ ≣ のQ@

# $\begin{array}{l} R\acute{e}sultats\\ \approx 2000 \text{ super-hélices} \end{array}$



◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 善臣・のへで

▲□▶ ▲□▶ ▲ □▶ ▲ □▶ ▲ □ ● ● ● ●

# COMPARAISONS NUMÉRIQUES

#### SUR 306 PROBLÈMES INCRÉMENTAUX

Solveur local   Taux d'échec (%)		GS Iters	Time (ms)
Linéarisé	0	575	6497
PAC	19.3	163	1265
DAC	0.33	60	874
MFB	4.9	72	484
Enum	1	67	1044
MFB + Enum	0	41	312

 Le solveur hybride améliore à la fois la robustesse et l'efficacité en temps de calcul

# COMPARAISONS NUMÉRIQUES

#### SUR 306 PROBLÈMES INCRÉMENTAUX

Solveur local	Taux d'échec (%)	GS Iters	Time (ms)
Linéarisé	0	575	6497
PAC	19.3	163	1265
DAC	0.33	60	874
MFB	4.9	72	484
Enum	1	67	1044
MFB + Enum	0	41	312

- Le solveur hybride améliore à la fois la robustesse et l'efficacité en temps de calcul
- ► Le solveur linéarisé résout bien le problème approché, mais requiert plus d'itérations de Gauss-Seidel pour converger → performance globale moindre

◆□▶ ◆□▶ ◆ □▶ ◆ □▶ - □ - のへぐ

# CONCLUSION

#### Remarques

- Modèles visuellement réalistes
- Solveur stable

# CONCLUSION

# Remarques

- Modèles visuellement réalistes
- Solveur stable
- ► Coût du calcul en *O*(*n*<sup>2</sup>)
- ▶ *n* augmente super-linéairement avec le nombre de fibres
- $\blacktriangleright$   $\rightarrow$  limité à des systèmes de taille moyenne

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

# CONCLUSION

#### Remarques

- Modèles visuellement réalistes
- Solveur stable
- Coût du calcul en  $O(n^2)$
- ▶ *n* augmente super-linéairement avec le nombre de fibres
- $\rightarrow$  limité à des systèmes de taille moyenne

#### Perspectives

- Validation plus précise
- Raffinement du modèle de contact : anisotropie, adhésion
- Interactions avec l'air
- Modèle macroscopique (passage à l'échelle)

# MERCI POUR VOTRE ATTENTION

#### Code disponible :

#### http://gdaviet.fr/code/bogus

http://bipop.inrialpes.fr/~bertails/Papiers/Code

Découpage de la tige en N éléments
 τ(s), κ<sub>1</sub>(s), κ<sub>2</sub>(s) constantes p. morceaux



◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 善臣 - のへで

- Découpage de la tige en N éléments
   τ(s), κ<sub>1</sub>(s), κ<sub>2</sub>(s) constantes p. morceaux
- Éléments raccordés de manière C<sup>1</sup>



- Découpage de la tige en N éléments
   τ(s), κ<sub>1</sub>(s), κ<sub>2</sub>(s) constantes p. morceaux
- ▶ Éléments raccordés de manière C<sup>1</sup>
   → Courbe lisse en hélices par morceaux



- Découpage de la tige en N éléments
   τ(s), κ<sub>1</sub>(s), κ<sub>2</sub>(s) constantes p. morceaux
- ▶ Éléments raccordés de manière C<sup>1</sup>
   → Courbe lisse en hélices par morceaux
- Équation dynamique :

 $\mathbb{M}(\boldsymbol{\kappa},t)\,\ddot{\boldsymbol{\kappa}}+\nu\,\mathbb{K}\,\dot{\boldsymbol{\kappa}}+\mathbb{K}\,\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\kappa}},t)$ 

 $\mathbb M$  dense non-linéaire,  $\mathbb K$  diagonale cste



<ロト < 同ト < 回ト < 回ト = 三日 = 三日

- Découpage de la tige en N éléments
   τ(s), κ<sub>1</sub>(s), κ<sub>2</sub>(s) constantes p. morceaux
- ▶ Éléments raccordés de manière C<sup>1</sup>
   → Courbe lisse en hélices par morceaux
- Équation dynamique :

 $\mathbb{M}(\boldsymbol{\kappa},t)\,\ddot{\boldsymbol{\kappa}}+\nu\,\mathbb{K}\,\dot{\boldsymbol{\kappa}}+\mathbb{K}\,\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\kappa}},t)$ 

 $\mathbb M$  dense non-linéaire,  $\mathbb K$  diagonale cste

Intégration en temps stable

 $M \mathbf{v} + f = 0, \, \mathbf{v} = \dot{\mathbf{\kappa}}_{t+dt}$ 



- Découpage de la tige en N éléments
   τ(s), κ<sub>1</sub>(s), κ<sub>2</sub>(s) constantes p. morceaux
- ▶ Éléments raccordés de manière C<sup>1</sup>
   → Courbe lisse en hélices par morceaux
- Équation dynamique :

 $\mathbb{M}(\boldsymbol{\kappa},t)\,\ddot{\boldsymbol{\kappa}}+\nu\,\mathbb{K}\,\dot{\boldsymbol{\kappa}}+\mathbb{K}\,\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\kappa}},t)$ 

 $\mathbb{M}$  dense non-linéaire,  $\mathbb{K}$  diagonale cste

Intégration en temps stable

 $M \mathbf{v} + f = 0, \, \mathbf{v} = \dot{\mathbf{\kappa}}_{t+dt}$ 

Extension : κ linéaire p. morceaux
 Super-Clothoides (Casati *et al.* 2013)



#### AUTRE DISCRÉTISATION : DISCRETE ELASTIC RODS Bergou *et al.* 2008, 2010



- Coordonnées maximales (squelette explicite) :
  - N + 1 nœuds (points 3D)  $r_i$
  - *N* torsions matérielles  $\theta_i$
  - $\rightarrow 4N+3$  degrés de libertés

#### AUTRE DISCRÉTISATION : DISCRETE ELASTIC RODS Bergou *et al.* 2008, 2010



- Coordonnées maximales (squelette explicite) :
  - N + 1 nœuds (points 3D)  $r_i$
  - N torsions matérielles  $\theta_i$
  - $\rightarrow 4N+3$  degrés de libertés
- Inextensibilité non-intrinsèque
   Ressorts ou contraintes dures

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 - のへで

#### AUTRE DISCRÉTISATION : DISCRETE ELASTIC RODS Bergou *et al.* 2008, 2010



- Coordonnées maximales (squelette explicite) :
  - N + 1 nœuds (points 3D)  $r_i$
  - N torsions matérielles  $\theta_i$
  - $\rightarrow 4N+3$  degrés de libertés
- Inextensibilité non-intrinsèque
   Ressorts ou contraintes dures
- Intégration implicite
  - ► Forces non-linéaires → Newton
  - Matrice creuse par bandes

#### AUTRE DISCRÉTISATION : DISCRETE ELASTIC RODS Bergou *et al.* 2008, 2010



- Coordonnées maximales (squelette explicite) :
  - N + 1 nœuds (points 3D)  $r_i$
  - N torsions matérielles  $\theta_i$
  - $\rightarrow 4N+3$  degrés de libertés
- Inextensibilité non-intrinsèque
   Ressorts ou contraintes dures
- Intégration implicite
  - Forces non-linéaires  $\rightarrow$  Newton
  - Matrice creuse par bandes
  - ... mais pas forcément positive

▲ロト ▲ □ ト ▲ □ ト ▲ □ ト ● ● の Q ()

- Approximation linéaire par morceaux de r(s) (indépendante de la résolution de la tige)
- Cylindres englobants de rayon  $\epsilon$



- Approximation linéaire par morceaux de r(s) (indépendante de la résolution de la tige)
- Cylindres englobants de rayon  $\epsilon$
- Détection du contact par le calcul de distance minimale entre les axes des cylindres :

 $\rightarrow$  si  $d < 2\epsilon$ , un contact est activé



▲□▶▲□▶▲□▶▲□▶ ▲□ ● のへで

- Approximation linéaire par morceaux de r(s) (indépendante de la résolution de la tige)
- Cylindres englobants de rayon  $\epsilon$
- Détection du contact par le calcul de distance minimale entre les axes des cylindres :
  - $\rightarrow$  si  $d < 2 \epsilon$ , un contact est activé
- Sortie :
  - Positions s<sub>i</sub><sup>A</sup> et s<sub>i</sub><sup>B</sup> du point de contact i pour chaque corps A, B
  - Normale e<sub>i</sub> au contact i



▲□▶▲□▶▲□▶▲□▶ ▲□ ● のへで

- Approximation linéaire par morceaux de r(s) (indépendante de la résolution de la tige)
- Cylindres englobants de rayon  $\epsilon$
- Détection du contact par le calcul de distance minimale entre les axes des cylindres :
  - $\rightarrow$  si  $d < 2 \epsilon$ , un contact est activé
- Sortie :
  - Positions s<sub>i</sub><sup>A</sup> et s<sub>i</sub><sup>B</sup> du point de contact i pour chaque corps A, B
  - Normale e<sub>i</sub> au contact i
- Méthodes d'accélération
  - Partitionnement des contraintes
  - Table de hachage en espace



- Approximation linéaire par morceaux de r(s) (indépendante de la résolution de la tige)
- Cylindres englobants de rayon  $\epsilon$
- Détection du contact par le calcul de distance minimale entre les axes des cylindres :
  - $\rightarrow$  si  $d < 2 \epsilon$ , un contact est activé
- Sortie :
  - Positions s<sub>i</sub><sup>A</sup> et s<sub>i</sub><sup>B</sup> du point de contact i pour chaque corps A, B
  - Normale e<sub>i</sub> au contact i
- Méthodes d'accélération
  - Partitionnement des contraintes
  - Table de hachage en espace

Avantage : simple et rapide ( $\sim 1\%$  du temps total de calcul)

