



**HAL**  
open science

## Simulation de l'interaction entre film fluide et solides déformables

Vincent Majorczyk, Stéphane Cotin, Jérémie Allard, Christian Duriez

► **To cite this version:**

Vincent Majorczyk, Stéphane Cotin, Jérémie Allard, Christian Duriez. Simulation de l'interaction entre film fluide et solides déformables. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*, 2014, 8 (2), pp.10. hal-01165295

**HAL Id: hal-01165295**

**<https://inria.hal.science/hal-01165295v1>**

Submitted on 19 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Simulation de l'interaction entre film fluide et solides déformables

V. Majorczyk<sup>1</sup>, S. Cotin<sup>1</sup>, J. Allard<sup>2</sup>, C. Duriez<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Shacra team, Inria

<sup>2</sup> InSimo

---

## Résumé

*Les liquides organiques sont un constituant essentiel du corps humain, aussi bien par leur volume que par leurs multiples fonctions. En dehors du sang et du liquide lymphatique, de nombreux autres fluides sont présents dans l'organisme et y ont des fonctions importantes, telles que lubrification ou d'absorption de chocs. Dans ce travail nous nous intéressons plus particulièrement aux fluides se trouvant à l'interface entre deux structures anatomiques. Nous présentons une méthode permettant de simuler les phénomènes d'interaction entre un film fluide et les surfaces entre lesquelles il est contraint. L'approche que nous proposons repose sur un modèle de fluide et son couplage mécanique avec des surfaces déformables. Selon la pression du fluide et la raideur des solides déformables en contact avec le fluide, différents comportements sont attendus. Nos résultats préliminaires montrent qu'il est possible de simuler les caractéristiques principales de ces comportements. De plus, les approches choisies pour le modèle de fluide, le modèle déformable, et le couplage entre les deux sont compatibles avec des simulations temps-réel.*

## Abstract

*Body fluids are a major constituent of the human body as well by their volume as by their functions. Besides the blood and the lymphatic liquid, many other liquids are present in the body and they have important functions such as lubrication or shock absorption. In this work, we are more particularly interested in the fluids being in the interface between two anatomical structures. We present a method making it possible to simulate the phenomena of interaction between a fluid film and surfaces between which it is forced. The approach that we propose is based on a fluid model and its mechanical coupling with deformable surfaces. According to the pressure of the fluid and the stiffness of the deformable solids in contact with the fluid, various behaviours are expected. Our preliminary results show that it is possible to simulate the main features of these behaviours. Furthermore, the approaches chosen for the fluid model, the deformable model and the coupling between both, are compatible with real time simulations.*

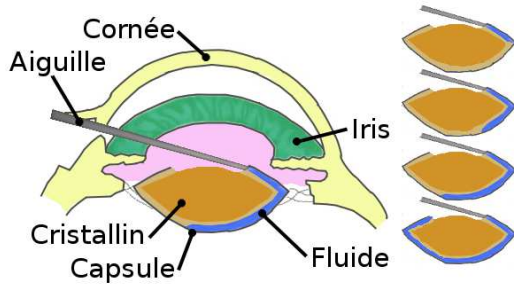
---

**Mots clé :** Simulation, Interaction fluide-solide, Médecine, Ophtalmologie

## 1. Introduction

Le domaine de la simulation médicale interactive est en forte expansion, en particulier dans le cadre de l'apprentissage. Les domaines d'application se diversifient également, entraînant des besoins de modélisation de plus en plus variés, et dans certains cas très complexes. Dans ce travail nous nous intéressons à la simulation des phénomènes d'interaction entre un film fluide et les surfaces entre lesquelles il est contraint. Ce problème est initialement motivé par la nécessité de simuler une étape de l'opération de la cataracte durant

laquelle une humeur aqueuse artificielle est injectée entre le noyau et la capsule du cristallin dans le but de les séparer (fig. 1), avant de retirer le cristallin opacifié par la cataracte et de le remplacer par un implant intraoculaire. Mais cette problématique est plus générale, car de nombreux fluides sont présents dans l'organisme et y ont des fonctions importantes. En dehors des plus connus que sont le sang et le liquide lymphatique, dont le rôle est essentiellement physiologique, d'autres fluides ont un rôle plus "mécanique". C'est par exemple le cas du liquide synovial formant une pellicule sur les surfaces articulaires. Il a pour fonction de réduire la friction en lubrifiant l'articulation, et permet aussi d'absorber les chocs.



**Figure 1:** L'hydrodissection est une étape de l'opération de la cataracte permettant de séparer le cristallin de son enveloppe : un fluide est injecté entre le cristallin et la capsule ; à gauche anatomie de l'oeil ; à droite plusieurs instants lors de la séparation du cristallin et de la capsule

### 1.1. Problématique

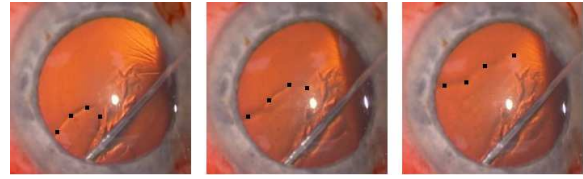
La simulation de l'opération de l'hydrodissection nécessite l'association de trois éléments de natures différentes. L'un est un fluide, les deux autres étant des tissus mous. Ces derniers représentent le cristallin et la capsule. Le premier est un volume, le second est une surface déformable. Et ils possèdent des propriétés mécaniques différentes.

Le fluide injecté par le chirurgien est de l'eau salée, les longueurs caractéristiques sont celles du cristallin et l'épaisseur du fluide, la vitesse correspond au flux envoyé par le chirurgien. Ceci permet d'estimer le nombre de Reynolds  $Re = VL/\nu$  à 10 (avec  $V = 10^{-2} m.s^{-1}$ ,  $L = 10^{-3} m$  et  $\nu = 10^{-6}$ ), correspondant à un fluide laminaire ( $Re < 2000$ ). Ceci est important dans le choix de modélisation du fluide.

Visuellement, l'hydrodissection se présente comme le déplacement d'une frontière au niveau du cristallin. Cette frontière permet de différencier la partie où le cristallin est séparé de sa capsule et celle qui ne l'est pas encore (fig. 2). Si on néglige l'existence de l'épaisseur du fluide ainsi que les pressions appliquées par la capsule et le cristallin en utilisant un modèle 2D et en ne se concentrant que sur le déplacement de la frontière, on perd une information visuellement importante pour l'apprentissage. En effet, on peut voir apparaître la formation de vagues lorsque le chirurgien fait varier la pression du fluide injecté permettant de mesurer l'impact du geste opératoire. La simulation réaliste de cette injection de fluide requiert soit un modèle 3D, soit dans notre cas la prise en compte d'une "épaisseur" de fluide, sur un principe similaire à ce qui est fait pour les modèles de coque en mécanique du solide.

### 1.2. État de l'Art

En mécanique des fluides, la plupart des articles traitent de l'utilisation d'un film fluide comme lubrifiant. Les approches présentées dans ces articles sont peu adaptées à



**Figure 2:** Images successives vues par le chirurgien : avancement de la frontière de la zone où le cristallin et la capsule sont décollés. Le fluide est injecté par l'aiguille en bas du cristallin.

notre problématique sachant que les huiles sont visqueuses et permettent d'effectuer des simplifications qui ne sont pas possibles dans notre cas. Néanmoins, [Per10] peut être cité : il cherche à définir le comportement du fluide entre deux surfaces, l'une élastique et rugueuse avec de nombreuses anfractuosités et l'autre rigide. Une partie de ce travail traite du modèle du fluide lorsque les deux plaques sont pressées. Le fluide comble les creux et laisse en partie en contact les deux surfaces.

La manière la plus simple à appréhender l'interaction entre le fluide et un solide est certainement l'utilisation de particules pour simuler le fluide [MST\*04] comme la surface du solide : les particules ont la particularité de se repousser entre elles. Celles appartenant au solide permettent d'une part de transférer les forces liées au solide vers les particules de fluide et d'autre part de fournir la réaction du fluide sur le solide. Le principal problème d'utiliser des particules provient du faible pas de temps nécessaire pour éviter des instabilités et d'autre part le nombre important de particules nécessaires pour obtenir une simulation réaliste. Dans notre cas, nous nous tournerons vers les méthodes eulériennes. Bien que les pas de temps soient plus coûteux, les méthodes implicites permettent l'utilisation de pas de temps plus grand et la faible résolution de la grille ce qui garantit le temps-réel.

En simulation physique, on retrouve de nombreuses méthodes pour l'immersion d'un solide dans un bac d'eau. Certaines remaillent à chaque pas de temps la zone de fluide pour que la limite fluide-solide soit bien définie [KFCO06]. Cela permet de gérer précisément le comportement du fluide aux frontières mais à un coût en temps de calcul important. D'autres méthodes préfèrent intégrer les frontières des solides dans la grille eulérienne et modifier sa disposition à chaque pas de temps [Joh98] dans le cas des *embedded boundaries* ou plus récemment [BBB07]. La méthode des *immersed boundaries* [Pes02] permet d'éviter de prendre en compte directement la topologie de l'objet immergé. On calcule d'abord les forces liées à l'objet déformable, ensuite, chaque point de l'objet exerce une force sur les cellules voisines (qu'elles contiennent ou non du fluide), ces forces provoquent un mouvement de fluide et les points de l'objet

sont déplacés selon les vitesses du fluide. De façon similaire, [CGFO06] utilise la pression exercée sur l'objet pour le déplacer dans un cadre plus général, sans avoir besoin que l'objet soit entièrement immergé.

Il existe aussi les méthodes où le fluide est en 2,5D. Parmi celles-ci, se trouve le *shallow water* : ce modèle permet principalement la simulation de grandes étendues d'eau par une discrétisation en colonne [Ran06]. Chaque colonne est décrite par sa hauteur, les vitesses de fluide entre les colonnes ainsi que l'énergie. Cette méthode est utilisée pour la simulation des flux marins à grande échelle. Comme dans notre cas, la hauteur du fluide est petite vis-à-vis de sa superficie. Néanmoins, pour ce modèle, la pression exercée par l'air sur la surface du fluide est considérée constante ce qui permet de supprimer l'influence de ce paramètre. Pour le cas de la simulation de l'hydrodissection, la pression exercée sur le fluide est faite par la capsule et le cristallin. On peut aussi s'intéresser aux méthodes qui permettent de délimiter le fluide de l'air [Mü09] [CM12]. Avec ces modèles, le comportement à la frontière dépend de la pression de la cellule contenant de l'air. L'inconvénient est la perte de volume qui doit être corrigée.

Parmi les projets relevant du médical, on trouve le cas de l'étude du mouvement d'un fluide particulier entre deux surfaces : un gel microbicide injecté dans le vagin [Kie06]. Ce fluide, par la pression des parois vaginales, se répartie le long du vagin et permet une protection contre le VIH. Des simulations sont effectuées afin d'analyser différents paramètres du fluide afin de trouver ceux qui garantissent une meilleure répartition du gel. Leur approche utilise une équation mathématique regroupant le modèle de fluide et le modèle du solide sous une seule formulation. Cela entraîne une difficulté d'adaptation à des scènes de simulation qui regroupent de nombreux éléments indépendants les uns des autres. De plus, il y a une simplification qui ne convient pas à l'application de l'hydrodissection : le gel est un fluide visqueux, donc non-turbulent.

Au niveau de la modélisation d'objets déformables dans le contexte de l'oeil, il existe un papier traitant de la modélisation de la distribution de l'effort dans le cristallin [BP07]. Le cristallin est entouré de zonules ciliaires qui eux-mêmes sont liées à des muscles. Par leur action, les muscles déforment le cristallin afin d'adapter la vue de l'individu. L'élasticité du cristallin varie avec l'âge et la simulation permet de comprendre la raison de certains problèmes de santé.

### 1.3. Conclusion

La simulation se déroule dans un environnement 3D où coexistent plusieurs objets de natures différentes. Ainsi, le cristallin sera composé de deux solides ayant des topologies particulières mais ils pourraient être néanmoins de forme arbitraire. Entre ces deux solides, se trouve une zone de fluide. Ainsi, pour concevoir la simulation de l'hydrodissection, nous avons conçu un modèle de type eulérien où

le liquide parcourt une surface non-planaire. Seule une information de hauteur correspondra à l'épaisseur du fluide et n'agira pas sur la mécanique de l'objet. Il s'agit donc d'un modèle 2.5D et le solide sera utilisé pour indiquer au fluide son comportement vis-à-vis de la hauteur.

### 1.4. Plan

Dans ce papier, nous aborderons en premier lieu le modèle de fluide. Ensuite nous nous intéresserons aux équations qui régissent les objets déformables. Puis nous expliquerons la méthode que nous utilisons afin de lier celles-ci. Enfin nous mettrons en avant nos résultats.

## 2. Modèle de fluide

### 2.1. Simulation efficace et stable de fluides

La simulation de l'hydrodissection nécessite un modèle de fluide qui puisse nous permettre de simuler un fluide à la fois réaliste, stable et suffisamment rapide pour une utilisation temps-réel. De plus, le contexte de la simulation de l'hydrodissection correspond à un cas où un fin film de fluide sépare deux surfaces déformables. Ainsi notre choix s'est porté sur le modèle de Stam [Sta99]. Le fluide en lui-même est un modèle eulérien, un champ de vecteurs vitesse (vitesses) disposé sur la surface. Ce modèle permet d'obtenir un fluide peu coûteux en temps de calcul tout en gardant un bon niveau de réalisme. De plus, cette méthode de calcul permet d'utiliser de grands pas de temps et elle est relativement simple à implémenter.

Le modèle se base sur les équations de Navier-Stokes dans le cadre des écoulements de fluides incompressibles :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} \quad (2)$$

La partie de gauche de l'équation de bilan de la quantité de mouvement (2) correspond aux termes d'inertie avec  $\vec{u}$  la vitesse du fluide. Le terme de droite est constitué de termes liés à la pression  $p$  avec  $\rho$  la densité du fluide, la viscosité  $\nu$  et les forces externes  $\vec{f}$ . L'équation (1) correspond à l'équation d'incompressibilité et permet d'éviter les pertes de fluide.

La méthode de Stam ne considère pas les termes de l'équation (2) comme une somme, mais comme quatre opérations successives (voir équation 3). Le fait d'utiliser la somme des termes auraient créé des dépendances entre les termes qui aurait rendu la résolution des équations plus complexes. En agissant avec trois opérations successives, les relations entre les termes sont simplifiées et la stabilité du modèle numérique est améliorée. La méthode commence par s'occuper des forces extérieures  $\mathbb{F}$ , puis de la viscosité lors qu'une étape nommée diffusion  $\mathbb{D}$ , ensuite de l'inertie

dans l'étape d'advection  $\mathbb{A}$  et enfin, grâce à la pression, on cherche à conserver le volumes du fluide durant l'étape de projection  $\mathbb{P}$ . Dans l'équation suivante, l'ensemble des opérations nécessaires durant un pas de temps  $\Delta t$  est représenté par la fonction  $\mathbb{S}$ . Ceci dans le but d'obtenir à partir des vélocités, celles du pas de temps suivant.

$$\begin{aligned}\bar{u}(t + \Delta t) &= \mathbb{S}(\bar{u}(t)) = \mathbb{P}(\mathbb{A}(\mathbb{D}(\mathbb{F}(\bar{u}(t)))))) \\ &= \mathbb{P} \circ \mathbb{A} \circ \mathbb{D} \circ \mathbb{F}(\bar{u}(t))\end{aligned}\quad (3)$$

## 2.2. Staggered Grid

La zone de simulation de fluide peut être représentée par un ensemble de cellules carrées avec en leur centre une vélocité. Or durant l'étape de projection, numériquement, on se retrouve avec une perte de fluide. Cette disposition pose donc un problème de conservation de volume. Pour résoudre ce problème, nous utilisons une *staggered grid* [FSJ01]. Chaque cellule carrée possède désormais une vélocité sur chacun de ses côtés. Les vecteurs sont normaux aux arêtes et indiquent exactement les flux de fluide entrants et sortants des cellules. Ceci permet de forcer l'incompressibilité du fluide d'autant plus efficacement.

## 2.3. Projection

La projection est l'étape qui permet de calculer les pressions et donc de connaître les vélocités. Il faut utiliser l'équation d'incompressibilité (1) pour construire un système linéaire permettant de déterminer la pression. Cette équation nous apprend que la divergence du champ de vélocité doit être nulle. La divergence correspond à la différence entre des flux qui entrent et sortent de la cellule et s'écrit :

$$Div_{i,j} = \sum_{(l,k)} S_{l,k} u_{l,k}(t) \quad (4)$$

avec  $S$  la section par laquelle le fluide entre dans la cellule,  $u$  la vélocité du fluide entrant  $u$  (positif) ou sortant  $u$  (négatif). Le couple  $(l, k)$  représente les coordonnées de chaque côté de la cellule (cas 2D).  $(l, k)$  prend les valeurs  $(i - \frac{1}{2}, j)$ ;  $(i + \frac{1}{2}, j)$ ;  $(i, j - \frac{1}{2})$  et  $(i, j + \frac{1}{2})$ .

Dans le cas de la simulation de l'hydrodissection, il sera utilisé un fluide 2,5D, notre modèle doit prendre en compte l'épaisseur du fluide, information que l'on doit retrouver lors du calcul de la section  $S$ . Pour cela, un champ de hauteurs est défini au niveau des sommets de cellules qui constituent la *staggered grid* et nous utilisons la moyenne des hauteurs du bord de la cellule ainsi que la longueur de ce dernier pour obtenir la section.

$$S = l \frac{h_{v1} + h_{v2}}{2}; \quad (5)$$

avec  $l$  la longueur du bord et  $h_{vi}; i = 1, 2$  les hauteurs au niveau des sommets adjacents au coté de la cellule.

La seconde étape concerne le calcul de la pression. Pour chaque cellule, on cherche à trouver une pression telle que

la différence avec les pressions voisines correspond à la divergence calculée à l'équation 4.

$$\begin{aligned}Div_{i,j} &= \sum_{(l,k)} S_{l,k} P_{l,j} \\ &- S_{i-\frac{1}{2},j} P_{i-1,j} - S_{i+\frac{1}{2},j} P_{i+1,j} \\ &- S_{i,j-\frac{1}{2}} P_{i,j-1} - S_{i,j+\frac{1}{2}} P_{i,j+1}\end{aligned}\quad (6)$$

L'ensemble des équations des cellules est condensé sous forme matricielle afin qu'elles soient résolues par un solveur linéaire. Le système (creux) est résolu par une méthode itérative (gradient conjugué) bien adaptée aux contraintes de temps réel.

$$\mathbf{M}_{proj} \mathbf{p} = \mathbf{Div} \quad (7)$$

avec  $\mathbf{M}_{proj}$  la matrice de projection qui comprend l'ensemble des coefficients  $S_{l,k}$ ,  $\mathbf{p}$  un vecteur contenant les pressions et  $\mathbf{Div}$  un vecteur contenant les divergences.

Enfin, par l'équation (8), les vélocités sont rectifiées en prenant en compte la différence de pression entre les deux cellules adjacentes. Ce qui donne :

$$u_{l,k}(t + \Delta t) = \dot{u}_{l,k}(t) + \Delta P_{l,k} \Delta t \quad (8)$$

Ainsi, la vélocité  $u$  sur un bord d'une cellule dépend de la vélocité calculée à l'étape précédente  $\dot{u}$  et de la différence de pression entre les deux cellules adjacentes  $\Delta P$ .

## 2.4. Distorsion

Lorsque l'on travaille sur le corps humain, la forme des organes est rarement plane, nous avons besoin d'ajouter la notion de distorsion afin d'adapter un modèle plat à une surface courbe [Sta03]. Ainsi le modèle utilise un maillage formé de quadrilatères au lieu d'une grille eulérienne. La distorsion  $g_{i,j}$  est représentée sous la forme d'une matrice 2x2 et elle est définie par :

$$g_{i,j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, 2 \quad (9)$$

Cette distorsion permet de reporter dans un plan 2D, les vélocités et pressions qui se trouvent sur la surface 3D. Avec  $y^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) les coordonnées de la cellule dans l'environnement 3D et  $x^k$  ( $k = 1, 2$ ) les coordonnées de la cellule dans le plan 2D. Nous avons aussi  $g$  qui correspond au déterminant de la matrice qui permet de donner la mesure de distorsion  $\sqrt{g}$ . Le passage d'un fluide sur une surface courbée à un fluide sur un plan, apporte certaines modifications aux opérateurs utilisés dans [Sta99].

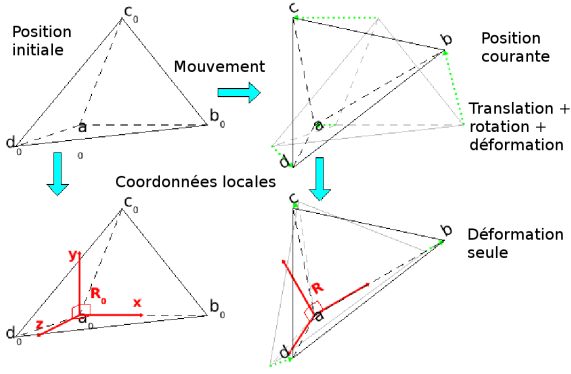
$$\begin{aligned}\text{Gradient} : & \quad \nabla \phi = g^{i,j} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \\ \text{Divergence} : & \quad \nabla \cdot u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} u^j) \\ \text{Laplacien} : & \quad \nabla^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} g^{i,j} \frac{\partial \phi}{\partial x^i})\end{aligned}\quad (10)$$

### 3. Calcul des déformations en temps-réel

De nombreuses méthodes existent pour la simulation en temps-réel de structures déformables. Nous avons choisi de nous baser sur une approche qui offre un très bon compromis entre calcul temps-réel et précision des déformations, dans un domaine de validité relativement large. Le modèle corotationnel repose sur une formulation par éléments finis et permet de prendre en compte les non-linéarités géométriques qui apparaissent lorsque les objets en déformation subissent aussi des déplacements ou rotations importants.

#### 3.1. Modèle corotationnel

Le calcul des déformations des solides déformables à l'interface avec le film fluide repose sur une formulation par éléments finis. Cette approche nécessite une discrétisation du volume ou de la surface de l'objet déformable en éléments géométriques simples, comme des tétraèdres. La déformation interne à chaque élément est interpolée à partir de la déformation de ses sommets par une fonction de forme. Une loi de comportement permet une relation entre une déformation locale à chaque point et la force résultante. Cette relation est intégrée dans chaque élément pour obtenir l'équation finale pour calculer l'ensemble des forces internes. Ce cal-



**Figure 3:** Approche éléments finis corotationnelle : une expression locale est calculée à chaque pas de temps afin d'estimer le mouvement rigide de l'élément. Ainsi la rotation de l'objet est considérée (par l'expression locale) avant les déformations.

cul est potentiellement fort complexe et coûteux, c'est pourquoi on a le plus souvent recours à une relation contrainte-déformation linéaire, c'est à dire que la force calculée est directement proportionnelle à la déformation. Toutefois de tels modèles ne sont pas invariants en rotation et pour résoudre ce problème, une solution consiste à utiliser une approche corotationnelle (voir [MG04] ou [NPF05] par exemple). La rotation locale de chaque élément est estimée et son inverse est appliquée au mouvement courant avant le calcul des déformations. Ceci élimine l'influence de la rotation dans les

forces calculées (fig. 3). Avec une telle approche il est possible d'avoir un calcul des déformations suffisamment précis pour de nombreux problèmes tout en restant compatible avec des contraintes de calcul temps-réel.

#### 3.2. Matrice de compliance

De façon générale, l'équation décrivant la dynamique d'un objet déformable non-linéaire se décrit ainsi :

$$\mathbf{M}_{mass} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbb{F}(q, v) + \mathbf{H}^T \lambda \quad (11)$$

où  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des degrés de libertés.  $\mathbf{M}_{mass}$  est la matrice des masses,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur de vitesse.  $\mathbb{F}$  est une fonction qui représente les forces visco-élastiques internes et  $\mathbf{f}_{ext}$  les forces externes (telles que la gravité).  $\lambda$  est le vecteur des forces de contraintes qui est multiplié par la matrice  $\mathbf{H}^T$ .

Dans notre cas  $\lambda$  correspond aux forces liées à la pression agissant sur le solide.

Le calcul des déplacements dûs aux forces de contact revient à résoudre les lois de contraintes avec l'équation suivante :

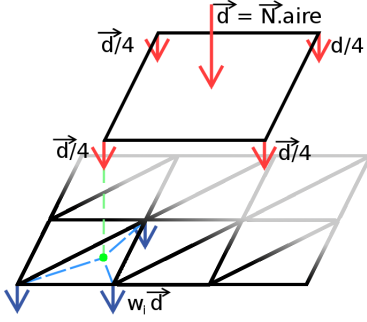
$$\delta = \left[ \mathbf{H} \left( \frac{\mathbf{M}_{mass}}{h^2} + \frac{d\mathbb{F}}{hdv} + \frac{d\mathbb{F}}{dq} \right) \mathbf{H}^T \right] \lambda + \delta^{free} \quad (12)$$

où  $\delta$  correspond au déplacement et  $\mathbf{M}_{comp}$  la matrice de compliance. Nous avons ainsi une relation entre la force appliquée et la déformation.  $\mathbf{H}$  correspond à une matrice permettant d'adapter la topologie du solide avec celle du fluide. Du fait que ces deux éléments sont indépendants, nous pouvons choisir une résolution différente pour chacun.

Dans le cas de notre modèle, nous ne connaissons pas directement la force  $\lambda$  mais une pression. Ainsi la figure 4 décrit une pression appliquée sur une surface qui va être transmise comme force  $\vec{d}$  aux quatre sommets de la cellule de manière homogène. Ces forces vont passer vers le maillage du solide déformable grâce à des pondérations barycentriques.  $\mathbf{H}$  contient donc les coefficients nécessaires pour effectuer le transfert des forces.  $\mathbf{H}$  est une matrice où les lignes correspondent aux quadrilatères du maillage du fluide et où les colonnes correspondent aux noeuds de l'objet déformable placés au niveau de la surface fluide.

### 4. Interface entre fluide et structure déformable

Dans notre modèle, nous choisissons de résoudre le problème en contrainte plutôt qu'en force. Bien qu'il soit possible, à partir d'une pression, d'appliquer une force sur le modèle déformable et ainsi connaître les déplacements de la membrane, cette approche a l'inconvénient de découpler la partie fluide avec la partie solide déformable. Ainsi les deux éléments seraient calculés séparément et le couplage



**Figure 4:** la matrice  $H$  contient l'ensemble des coefficients  $w$  afin de transposer les forces venant d'une topologie vers une autre.  $w$  correspond aux coordonnées barycentriques associées aux forces appliquées sur les nœuds du maillage.

entre les deux nécessiterait des pas de temps petits afin que le fluide puisse prendre en compte l'ensemble des forces agissant sur l'interface. Avec une approche en contrainte nous pouvons gérer les problèmes d'interface dans le même pas de temps, et également améliorer la stabilité.

#### 4.1. Influence du solide déformable sur le fluide

Dans le cas des frontières élastiques linéaires, la variation de hauteur du fluide sur un pas de temps  $\delta_h$  peut être donnée par l'équation (13) issue de l'équation (12).  $\lambda$  les forces normales exercées sur la membrane et  $\mathbf{M}_{comp}$  la matrice de compliance. Avec  $\delta_h \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  avec  $n$  le nombre de cellules qui constituent la membrane fluide.

$$\mathbf{M}_{comp}\lambda = \delta_h \quad (13)$$

Tandis que l'équation de projection du fluide (7) a comme inconnue les pressions  $\mathbf{p}$  et utilise les divergences  $\mathbf{Div}$  ainsi que la matrice de projection  $\mathbf{M}_{proj}$ . Avec  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{Div} \in \mathbb{R}^n$  avec  $n$  le nombre de cellules qui constituent la zone de fluide.

$$\mathbf{M}_{proj}\mathbf{p} = \mathbf{Div} \quad (14)$$

La divergence étant définie comme la différence entre flux entrants et sortants, si nous prenons en compte que la hauteur du fluide puisse varier, une divergence nulle correspond en fait que la somme des flux horizontaux soit égale à la variation verticale de volume. Cette variation correspond à la vitesse du fluide contre la membrane multipliée par la surface de cette dernière. D'un point de vue vecteur, cette multiplication doit se faire par le produit d'Hadamard  $-\mathbf{s} \odot \delta_h$  avec  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  le vecteur regroupant les aires de la surface des cellules. Sur ce, pour des moyens de commodités, nous appellerons  $\mathbf{Div}_0$  la divergence des vitesses tangentées à la surface.

$$\mathbf{Div} = \mathbf{Div}_0 - \mathbf{s} \odot \delta_h \quad (15)$$

La relation entre force et pression permet d'écrire que  $\lambda = \mathbf{s} \odot \mathbf{p}$  dans l'équation (13). De plus en combinant les équations (7) et (15), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{proj}\mathbf{p} &= \mathbf{Div}_0 - \mathbf{s} \odot \delta_h \\ \mathbf{M}_{comp}(\mathbf{s} \odot \mathbf{p}) &= \delta_h \end{aligned} \quad (16)$$

En notation matricielle, le produit d'Hadamard peut être remplacé par une matrice diagonale dont les éléments correspondent au premier vecteur.

$$\mathbf{S} \odot \mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{b}; \quad \mathbf{S} = \text{diag}(\mathbf{s}) \quad (17)$$

On obtient donc

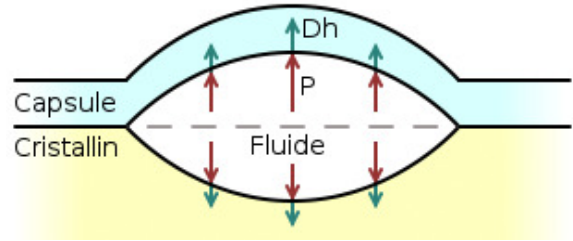
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{proj}\mathbf{p} &= \mathbf{Div}_0 - \mathbf{S}\delta_h \\ \mathbf{s}(\mathbf{M}_{comp}(\mathbf{S}\mathbf{p})) &= \mathbf{S}\delta_h \end{aligned} \quad (18)$$

La somme des deux équations permet d'éliminer  $\mathbf{S}\delta_h$  dans le calcul des pressions tout en prenant en compte la matrice de compliance. De plus nous pouvons remarquer que la matrice de compliance, initialement multipliée par une force, se retrouve liée à une pression. La matrice relative à la surface  $\mathbf{S}$  peut être directement injectée dans la matrice  $\mathbf{H}$  comme cela est décrit dans la section 3.2.

$$(\mathbf{M}_{proj} + \mathbf{S}\mathbf{M}_{comp}\mathbf{S})\mathbf{p} = \mathbf{Div}_0 \quad (19)$$

Une fois le vecteur de pression  $\mathbf{p}$  connu, nous pouvons en déduire la vitesse du fluide sur l'objet déformable via l'équation (20).

$$(\mathbf{S}\mathbf{M}_{comp}\mathbf{S})\mathbf{p} = \mathbf{S}\delta_h \quad (20)$$



**Figure 5:** Fluide compris entre deux membranes élastiques.

#### 4.2. Influence du fluide sur le solide déformable

Le modèle décrit dans la partie précédente ne prend en compte que les contraintes appliquées sur le fluide. Pour prendre en compte les forces du fluide sur le solide, une approche classique consiste à appliquer les forces dues aux pressions du fluide sur le solide. La déformation du solide engendre alors une variation de volume du fluide, qui peut ensuite être corrigée au pas de temps suivant afin de garantir l'incompressibilité du fluide. Dans le contexte de simulations en temps réel, utiliser un tel procédé n'est pas optimal : tout d'abord les calculs seraient trop coûteux en temps,

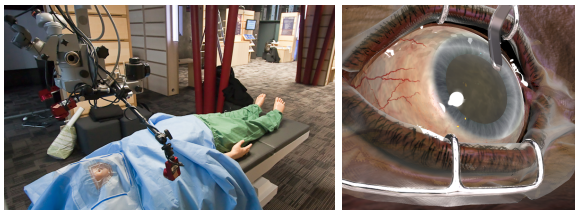
puisque la matrice de compliance serait à calculer à chaque pas de temps, ensuite des instabilités apparaîtraient en raison de contacts fréquents entre les surfaces très proches les unes des autres. Pour éviter ces problèmes, nous forçons une distance nulle entre les deux surfaces. En effet, nous considérons que les forces exercées sur le fluide sont considérables au regard de l'échelle de la simulation. Ce qui implique qu'à chaque fois que nous effectuons la projection, nous devons ajouter le volume de la cellule dans la divergence.

$$\text{Div}_{i,j} = S_{i,j}h(t) + \sum_{(l,k)} s_{l,k}\dot{u}_{l,k}(t) \quad (21)$$

Ceci implique qu'en contrepartie nous n'avons pas une interaction complète entre le fluide et les structures déformables mais cela nous permet de simplifier le modèle du cristallin et de réduire les coûts de calcul.

## 5. Résultats

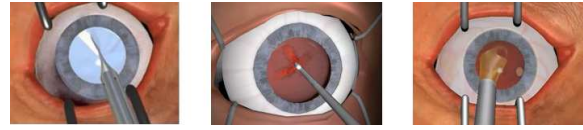
La formation des jeunes chirurgiens ophtalmologistes, par compagnonnage, expose le patient à diverses complications liées à l'inexpérience de l'opérateur. Devant les bénéfices prouvés de l'apprentissage sur simulateur, nous avons développé un prototype fonctionnel pour la chirurgie de la cataracte. Ce simulateur comprend une modélisation réaliste de l'anatomie et de la dynamique des structures oculaires manipulées lors de l'intervention, tenant compte des caractéristiques physiques actuelles [DCC\* 13]. La simulation est calculée en temps-réel et repose sur la plate-forme open source SOFA ([www.sofa-framework.org](http://www.sofa-framework.org)). Un système de suivi optique permet de mesurer, puis transmettre au simulateur, la position dans l'espace des instruments chirurgicaux. La visualisation de l'anatomie de l'œil virtuel est possible grâce à des lunettes stéréoscopiques intégrées à un microscope opératoire. Le système inclut également un mannequin corps entier afin d'augmenter le réalisme et le niveau d'immersion de la simulation (fig. 6).



**Figure 6:** Prototype de simulateur d'ophtalmologie comprenant un mannequin, un microscope et une simulation des principales étapes de l'opération de la cataracte.

La plateforme SOFA est dédiée à la simulation physique temps-réel, avec le domaine médical comme cadre principal. Différentes étapes de l'opération de la cataracte ont d'ores et déjà été simulées comme le capsulorhexis, la phacoémulsification ou encore l'implantation de la prothèse intraoculaire [CCD10] (fig. 7). L'ajout du modèle de fluide dans

cette simulation pour effectuer l'hydrodissection est un pas supplémentaire vers une simulation complète de l'opération. L'opération de la cataracte, comprend 8 étapes principales.



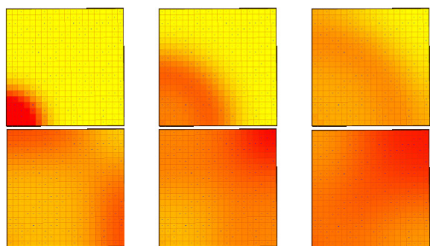
**Figure 7:** Trois étapes précédemment simulées dans Sofa : la capsulorhexis, la phacoémulsification (2007) et l'implantation prothèse (2010).

L'une d'entre elles, l'hydrodissection, est nécessaire pour être capable d'extraire le cristallin défaillant sans endommager la capsule (épaisse de quelques microns seulement). À la suite de cela, un implant intraoculaire sera inséré dans la capsule afin de permettre au patient de retrouver une vision de bien meilleure qualité. Dans la suite de cette section nous présentons différents résultats génériques permettant de valider notre approche, puis nous montrons un résultat préliminaire sur la simulation de l'hydrodissection.

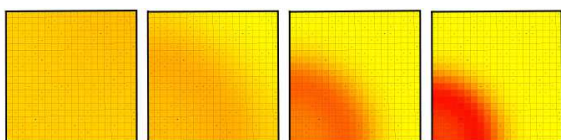
La base de nos tests est une zone carrée qui possède une source de fluide. La surface libre du fluide sur les bords du domaine est étanche et l'effet de la pression sur cette surface n'est pas considéré. La figure 8 montre l'évolution des hauteurs en fonction du temps. On peut voir une vague engendrée par la source de fluide. Celle-ci a pour origine un coin du domaine, puis la vague de fluide se projette contre les parois opposées pour y rebondir et les réflexions s'intersecter, enfin la surface finit par se stabiliser. Nous pouvons aussi remarquer que la source de fluide se trouve un moment donné dans un creux. Le fluide préfère se déplacer à l'horizontale plutôt que pousser la surface au niveau de la source. Cela correspond au comportement que l'on obtient pour d'autres modèles de fluide avec interface air-fluide. Différentes rigidités ont été appliquées au modèle pour évaluer l'impact de ce paramètre sur le fluide (fig. 9). Avec une rigidité importante, le fluide se contente d'élever uniformément la surface du fluide. Avec une rigidité moindre, des vagues apparaissent. Moins il y a de rigidité, plus la différence de hauteur entre deux cellules voisines est susceptible d'être élevée et plus la vague se propage lentement.

Nous avons également réalisé des simulations à différentes résolutions, afin d'évaluer l'impact de la résolution de la surface sur l'estimation de la compliance. Les résultats restent similaires, montrant très peu de sensibilité à la résolution du maillage. Dans le cas où la rigidité n'est pas constante, notre méthode reste adaptée car les caractéristiques des solides déformables sont représentées par la matrice de compliance. La figure 10 illustre par exemple le cas d'un fluide compris entre deux surfaces de raideurs différentes, l'une rigide, l'autre déformable. L'objet déformable





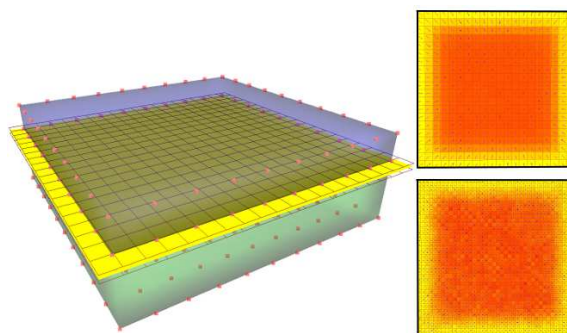
**Figure 8:** Simulation de fluide au cours du temps. Les couleurs correspondent à la hauteur de fluide dans chaque cellule (jaune : hauteur minimum ; orange : hauteur maximum). Il y a une source de fluide en bas à droite de la zone de simulation. Ainsi, au cours du temps, le fluide injecté se propage à partir de la source sous forme d'une vague (1,2,3) pour ensuite atteindre les limites du domaine (4), la vague rebondit (5) et enfin les réflexions de la vague s'intersectent au milieu du domaine (6). Les images sont espacées dans le temps de 0,5s.



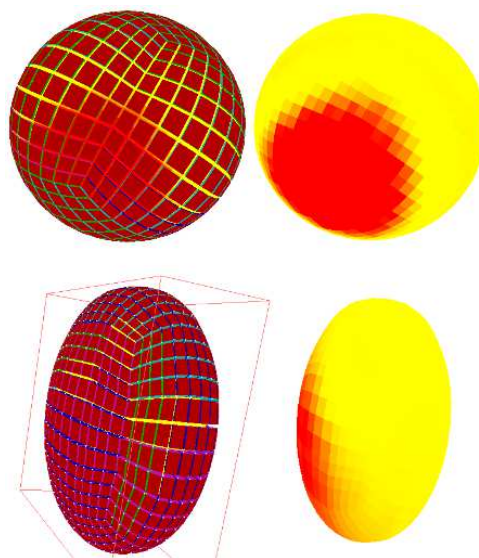
**Figure 9:** Simulation avec différentes rigidités. À gauche vers la droite, passage de surfaces rigides à surfaces souples. Dans le cas des surfaces rigides, la surface est peu déformée, ce qui entraîne une propagation plus rapide du fluide. A contrario, dans les cas des surfaces souples, la surface va être déformée, le fluide aura plus de facilité de pousser la surface que se propager sur le domaine. Les images ont été toutes générées à une seconde de simulation.

étant contraint sur les bords du domaine, le fluide va s'accumuler au centre du domaine, ne pouvant pas pousser l'objet déformable sur sa périphérie.

Après avoir fait nos tests sur une surface plane, nous avons appliqué notre modèle sur une sphère et d'un ellipsoïde afin de nous rapprocher de la géométrie du cristallin. Les résultats de la simulation sont concluants et nous observons bien le déplacement d'une vague (fig. 11). La figure 12 simule l'hydrodissection de la cataracte, en utilisant une sphère en guise de cristallin. On peut y voir le déplacement de la frontière entre la zone où le cristallin est décollé de la capsule et la zone où il ne l'est pas. Au niveau du temps de calcul, ce sont les étapes de création de la matrice de compliance puis la résolution des pressions qui sont les plus coûteuses. Il est nécessaire de modifier la matrice de projection pour prendre en compte la surface séparant deux cellules, puis additionner les deux matrices. Lors de nos tests, nous avons utilisé un ordinateur avec un CPU Intel(r) Xeon(r) 5140 (2.33GHz). La

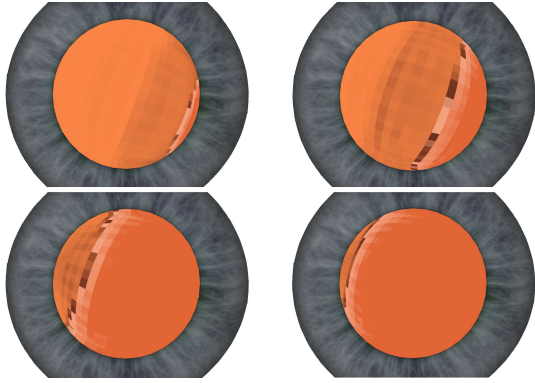


**Figure 10:** Scène avec un objet déformable contraint sur la périphérie. En vert, l'objet rigide sous le fluide. En bleu, l'objet déformable au-dessus du fluide. À droite, le résultat de la simulation pour deux résolutions différentes. La périphérie contrainte oblige le fluide à se stocker au centre du domaine



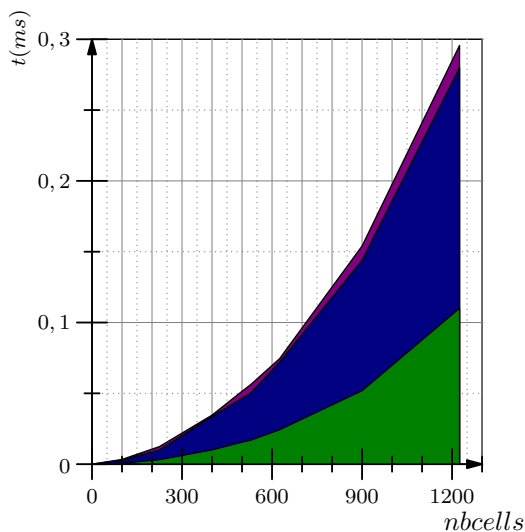
**Figure 11:** Fluide sur une surface courbe arbitraire. En haut un ellipsoïde, en bas une sphère. À gauche les modèles mécaniques des deux objets et à droite les cartes de hauteurs de fluide.

simulation reste en temps-réel pour un domaine de 500 cellules en utilisant un pas de temps de 50ms. La création de la matrice de compliance ne s'effectue qu'une seule fois lors de l'initialisation de la simulation. Pour un domaine de 100 cellules, cette opération dure 17ms et atteint 1s pour une scène de 1225 cellules. La figure 13 montre que la décomposition de la durée d'exécution d'un pas de temps de simulation. L'étape de création de la matrice pour la résolution de la pression a également un coût très important : en considérant



**Figure 12:** Évolution de la frontière séparant la zone où le cristallin est collé à la capsule et la zone décollée. La frontière se déplace de la droite vers la gauche.

les variations de hauteurs négligeables, on peut obtenir une simulation temps-réel pour une résolution de 900 cellules.



**Figure 13:** Durée d'exécution d'un pas de temps en fonction du nombre de cellules de fluide. vert : durée d'exécution de la résolution de la pression par le solveur. bleu : durée de la création de la matrice (prise en compte de la surface et addition des matrice de projection et compliance). magenta : reste des étapes.

## 6. Conclusion

Dans cet article nous démontrons qu'il est possible de lier les modèles de fluide et les modèles déformables par l'utilisation, lors de l'étape de projection, de la matrice de com-

pliance du système. Pour nos futurs travaux, nous continuons vers le chemin d'une simulation plus réaliste de l'hydrodissection du cristallin durant l'opération de la cataracte. Pour cela nous devons ajouter au modèle la prise en compte de fibres qui relient le cristallin et la capsule. L'hydrodissection, par sa pression sur la membrane, provoque la rupture de ces fibres et désolidarise le cristallin de la capsule. Pour obtenir ce phénomène, nous avons besoin de calculer la réponse du fluide sur les membranes. Pour améliorer les performances, et ainsi augmenter le nombre de cellules composant le domaine fluide pour une meilleure simulation, nous allons travailler sur une version GPU de l'algorithme. La création de la matrice pour le calcul des pressions est un procédé simple à paralléliser et des solveurs ont d'ores et déjà été implémentés sur GPU pour l'utilisation de la matrice de compliance [CJA\*10].

## Références

- [BBB07] BATTY C., BERTAILS F., BRIDSON R. : A fast variational framework for accurate solid-fluid coupling. *ACM Trans. Graph.* Vol. 26, Num. 3 (2007), 100.
- [BP07] BELAIDI A., PIERSCIONEK B. K. : Modeling internal stress distributions in the human lens : can opponent theories coexist ? *J Vis.* Vol. 7, Num. 11 (2007), 1.1–12.
- [CCD10] COMAS O., COTIN S., DURIEZ C. : A shell model for real-time simulation of intra-ocular implant deployment. In *ISMBS* (2010), Bello F., Cotin S., (Eds.), vol. 5958 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 160–170.
- [CGFO06] CHENTANEZ N., GOKTEKIN T. G., FELDMAN B. E., O'BRIEN J. F. : Simultaneous coupling of fluids and deformable bodies. In *ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation* (2006), pp. 83–89.
- [CJA\*10] COURTECUISSIE H., JUNG H., ALLARD J., DURIEZ C., LEE D. Y., COTIN S. : GPU-based Real-Time Soft Tissue Deformation with Cutting and Haptic Feedback. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*. Vol. 103, Num. 2-3 (2010), 159–168. Special Issue on Biomechanical Modelling of Soft Tissue Motion.
- [CM12] CHENTANEZ N., MÜLLER M. : Mass-conserving eulerian liquid simulation. In *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation* (2012), SCA '12, Eurographics Association, pp. 245–254.
- [DCC\*13] DEQUIDT J., COURTECUISSIE H., COMAS O., ALLARD J., DURIEZ C., COTIN S., DUMORTIER E., WAVREILLE O., ROULAND J.-F. : Computer-based training system for cataract surgery. *Simulation*. Vol. 89, Num. 12 (2013), 1421–1435.
- [FJSJ01] FEDKIW R., STAM J., JENSEN H. W. : Visual simulation of smoke. In *Proceedings of the 28th Annual*

- Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (2001), SIGGRAPH '01, ACM, pp. 15–22.
- [Joh98] JOHANSEN H. : A Cartesian Grid Embedded Boundary Method for Poisson's Equation on Irregular Domains. *Journal of Computational Physics*. Vol. 147, Num. 1 (novembre 1998), 60–85.
- [KFCO06] KLINGNER B. M., FELDMAN B. E., CHENTANEZ N., O'BRIEN J. F. : Fluid animation with dynamic meshes. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 2006* (2006), pp. 820–825.
- [Kie06] KIEWEG S. : Squeezing flows of vaginal gel formulations relevant to microbicide drug delivery. *Journal of biomechanical engineering*. Vol. 128 (4) (2006), 540–553.
- [MG04] MÜLLER M., GROSS M. : Interactive virtual materials. In *Proceedings of the 2004 Graphics Interface Conference* (2004), GI '04, Canadian Human-Computer Communications Society, pp. 239–246.
- [MST\*04] MÜLLER M., SCHIRM S., TESCHNER M., HEIDELBERGER B., GROSS M. : Interaction of fluids with deformable solids : Research articles. *Comput. Animat. Virtual Worlds*. Vol. 15, Num. 3-4 (2004), 159–171.
- [Mü09] MÜLLER M. : Fast and robust tracking of fluid surfaces. In *Proceedings of the 2009 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation* (2009), SCA '09, ACM, pp. 237–245.
- [NPF05] NESME M., PAYAN Y., FAURE F. : Efficient, Physically Plausible Finite Elements. In *Eurographics* (2005).
- [Per10] PERSSON B. N. J. : Fluid dynamics at the interface between contacting elastic solids with randomly rough surfaces. *Journal of Physics : Condensed Matter*. Vol. 22, Num. 26 (2010), 265004.
- [Pes02] PESKIN C. S. : The immersed boundary method. *Acta Numerica*. Vol. 11 (1 2002), 479–517.
- [Ran06] RANDALL D. A. : The shallow water equations. *Water*. Vol. 41, Num. 3 (2006), 695–719.
- [Sta99] STAM J. : Stable fluids. In *Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (1999), SIGGRAPH '99, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., pp. 121–128.
- [Sta03] STAM J. : Flows on surfaces of arbitrary topology. *ACM Trans. Graph.*. Vol. 22, Num. 3 (2003), 724–731.