Révision des croyances dans la clôture propositionnelle d'une algèbre qualitative

Valmi Dufour-Lussier, Alice Hermann, Florence Le Ber, Jean Lieber

▶ **To cite this version:**

Valmi Dufour-Lussier, Alice Hermann, Florence Le Ber, Jean Lieber. Révision des croyances dans la clôture propositionnelle d'une algèbre qualitative. JIAF-2014 – Huitièmes Journées de l'Intelligence Artificielle Fondamentale, Jun 2014, Angers, France. pp.10. hal-01093977

HAL Id: hal-01093977

https://inria.hal.science/hal-01093977

Submitted on 11 Dec 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Révision des croyances dans la clôture propositionnelle d'une algèbre qualitative *

Valmi Dufour-Lussier[1,2,3] **Alice Hermann**[1,2,3]
Florence Le Ber[4] **Jean Lieber**[1,2,3]

[1] Université de Lorraine, LORIA, UMR 7503 — 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France
[2] CNRS — 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France
[3] Inria — 54602 Villers-lès-Nancy, France
[4] ICUBE, Université de Strasbourg/ENGEES, CNRS — 67000 Strasbourg, France
valmi.dufour@loria.fr, alice.hermann@loria.fr,
florence.leber@engees.unistra.fr, jean.lieber@loria.fr

Résumé

La révision des croyances est une opération visant à modifier d'anciennes croyances afin qu'elles deviennent cohérentes avec de nouvelles croyances. La problématique de la révision des croyances a été étudiée dans divers formalismes, en particulier dans les algèbres qualitatives (AQ), dans lesquelles le résultat est une disjonction de bases de croyances, qui ne sont pas nécessairement représentables dans une AQ. Cela motive l'étude de la révision des croyances dans les clôtures propositionnelles des AQ, dans lesquels le résultat de la révision est représentable. Cette propriété rend possible la définition d'un opérateur de contraction, en s'appuyant sur l'identité de Harper. La révision des croyances dans les clôtures propositionnelles d'AQ est étudiée, un algorithme pour une famille d'opérateurs de révision dans ces formalismes est présenté et une implantation gratuite, avec code source ouvert et disponible sur la toile est décrite.

Mots-clefs : algèbres qualitatives, révision des croyances, contraction des croyances, clôture propositionnelle

Abstract

Belief revision is an operation that aims at modifying old beliefs so that they become consistent with new ones. The issue of belief revision has been studied in various formalisms, in particular, in qualitative algebras (QAs) in which the result is a disjunction of belief bases that is not necessarily representable in a QA. This motivates the study of belief revision in formalisms extending QAs, namely, their propositional closures: in such a closure, the result of belief revision belongs to the formalism. Moreover, this makes it possible to define a contraction operator thanks to the Harper identity. Belief revision in the propositional closure of QAs is studied, an algorithm for a family of revision operators is designed, and an open-source implementation is made freely available on the web.

Keywords: qualitative algebras, belief revision, belief contraction, propositional closure

*Ce travail a été partiellement financée par le projet Kolflow (http://kolflow.univ-nantes.fr) du programme CONTINT de l'ANR. Les auteurs remercient les relecteurs anonymes pour leurs remarques : ils ont fait leur possible pour en tenir compte afin d'améliorer la qualité de l'article et s'en serviront pour alimenter leurs réflexions futures.

1 Introduction

La révision est une opération de changement de croyances consistant à modifier minimalement d'anciennes croyances afin qu'elles deviennent cohérentes avec de nouvelles croyances [1]. Un angle d'étude de la révision consiste à considérer un formalisme et à étudier des opérateurs de révision définis dans ce formalisme : comment ils sont définis et comment ils peuvent être implantés.

En particulier, on peut adapter le travail de [6] sur la problématique proche de la fusion des croyances, pour définir un opérateur de révision sur une algèbre qualitative (AQ), telle que l'algèbre de Allen. Le résultat d'une telle révision est un ensemble de bases de croyances, à interpréter de façon disjonctive, et qui n'est pas nécessairement représentable par une seule base de croyances : les AQ ne sont pas closes pour la disjonction.

Cela donne une première motivation pour l'étude de la révision dans la clôture propositionnelle d'une algèbre qualitative : l'opérateur de révision dans une telle clôture donne un résultat nécessairement représentable dans le formalisme. Une autre motivation réside dans la possibilité de définir un opérateur de contraction des croyances dans ce formalisme, en s'appuyant sur l'identité de Harper.

La section 2 présente des préliminaires concernant diverses notions utilisées dans l'article. La section 3 décrit brièvement quelques propriétés du formalisme étudié. La section 4 présente les contributions principales de cet article : un algorithme et une implantation d'un opérateur de révision dans un tel formalisme, accompagné d'exemples (en particulier d'un exemple de contraction de croyances). La section 5 conclut et présente des perspectives.

Le rapport de recherches [8] est une version longue et en anglais de cet article, contenant en particulier les preuves des propositions.

2 Preliminaires

2.1 À propos des formalismes

Un *formalisme* (de représentation des connaissances) est un couple $(\mathcal{L}, \models)$ où $\mathcal{L}$ est un langage et où $\models$ est une relation binaire sur $\mathcal{L}$. Un *formule* φ est un élément de $\mathcal{L}$. $\models$ est appelée la relation de conséquence logique. Pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$, $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ signifie $\varphi_1 \models \varphi_2$ et $\varphi_2 \models \varphi_1$ et se lit « φ_1 et φ_2 sont équivalents ».

La relation de conséquence logique des formalismes utilisés dans cet article peut toujours être caractérisée (selon une sémantique en théorie des modèles) comme suit. On suppose :

- Qu'il existe un ensemble $\Omega \neq \emptyset$ dont les éléments sont appelés *interprétations*.
- Qu'il existe une relation, également notée $\models$, sur $\Omega \times \mathcal{L}$. Si $\omega \models \varphi$, pour $\omega \in \Omega$ et $\varphi \in \mathcal{L}$, ω est dit être un *modèle* de φ. L'ensemble des modèles de φ est noté $\mathcal{M}(\varphi)$.
- Que la relation de conséquence logique peut être caractérisée comme suit : pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$, $\varphi_1 \models \varphi_2$ si $\mathcal{M}(\varphi_1) \subseteq \mathcal{M}(\varphi_2)$.

De cela, on peut conclure que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ est équivalent à $\mathcal{M}(\varphi_1) = \mathcal{M}(\varphi_2)$.

Une formule φ est *cohérente* (ou *satisfaisable*) si $\mathcal{M}(\varphi) \neq \emptyset$. φ est une *tautologie* si $\mathcal{M}(\varphi) = \Omega$.

$\mathcal{L}$ est supposée être *close pour la conjonction*, ce qui signifie que pour toutes $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$ il existe $\varphi \in \mathcal{L}$ telle que $\mathcal{M}(\varphi) = \mathcal{M}(\varphi_1) \cap \mathcal{M}(\varphi_2)$. φ est unique à l'équivalence logique près et sera notée dans la suite $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. $\wedge$ est associative modulo l'équivalence, ce qui permet d'écrire $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$: quel que soit le choix du parenthésage, la formule aura le même ensemble de modèles. Ainsi, le formalisme est simplifié, sans perte d'expressivité, en enlevant de telles parenthèses inutiles. $\wedge$ est aussi commutative modulo l'équivalence.

Une *base de connaissances* BC est un sous-ensemble fini de $\mathcal{L}$. Il est assimilé à la conjonction de ses éléments.

Un formalisme $(\mathcal{L}, \models)$ est *clos pour la disjonction* si pour toute $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$ il existe $\varphi \in \mathcal{L}$ telle que $\mathcal{M}(\varphi) = \mathcal{M}(\varphi_1) \cup \mathcal{M}(\varphi_2)$. φ est alors unique modulo l'équivalence et est notée $\varphi_1 \vee \varphi_2$. $\vee$ est commutative et associative modulo l'équivalence.

Un formalisme $(\mathcal{L}, \models)$ est *clos pour la négation* si pour toute $\varphi_1 \in \mathcal{L}$ il existe $\varphi \in \mathcal{L}$ telle que $\mathcal{M}(\varphi) = \Omega \setminus \mathcal{M}(\varphi_1)$. φ est unique modulo l'équivalence et est notée $\neg\varphi_1$.

Un formalisme $(\mathcal{L}, \models)$ est *propositionnellement clos* s'il est clos pour la conjonction et la négation. Il est alors aussi clos pour la disjonction ($\varphi_1 \vee \varphi_2$ peut être pris comme une abréviation de $\neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$).

La *clôture propositionnelle* d'un formalisme $(\mathcal{L}, \models)$ est le formalisme $(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\models})$ tel que $\widehat{\mathcal{L}}$ est le plus petit super-ensemble de $\mathcal{L}$ vérifiant

- Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \widehat{\mathcal{L}}$ alors $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \widehat{\mathcal{L}}$;
- Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \widehat{\mathcal{L}}$ alors $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \widehat{\mathcal{L}}$;
- Si $\varphi \in \widehat{\mathcal{L}}$ alors $\neg\varphi \in \widehat{\mathcal{L}}$;

$\widehat{\models}$ est la relation de conséquence logique définie par la fonction $\widehat{\mathcal{M}}$ étendant $\mathcal{M}$ sur $\widehat{\mathcal{L}}$ et telle que $\widehat{\mathcal{M}}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \widehat{\mathcal{M}}(\varphi_1) \cap \widehat{\mathcal{M}}(\varphi_2)$, $\widehat{\mathcal{M}}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \widehat{\mathcal{M}}(\varphi_1) \cup \widehat{\mathcal{M}}(\varphi_2)$ et $\widehat{\mathcal{M}}(\neg\varphi_1) = \Omega \setminus \widehat{\mathcal{M}}(\varphi_1)$ (pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \widehat{\mathcal{L}}$). L'expression du méta-langage $\varphi_1 \mathrel{\widehat{\equiv}} \varphi_2$ signifie que $\varphi_1 \mathrel{\widehat{\models}} \varphi_2$ et $\varphi_2 \mathrel{\widehat{\models}} \varphi_1$. Dans la suite, quand le contexte est explicite, les chapeaux seront oubliés ($\models$ et $\equiv$ à la place de $\widehat{\models}$ and $\mathrel{\widehat{\equiv}}$).

Considérons un formalisme propositionnellement clos $(\mathcal{L}, \models)$. Un *atome* est une formule sans occurrence d'aucun des symboles $\neg$, $\vee$ et $\wedge$ (p. ex., en logique propositionnelle, les atomes sont les variables). Un *littéral* est soit un atome (littéral positif) soit sous la forme $\neg a$ où a est un atome (littéral négatif). Une formule est sous forme normale disjonctive (*DNF*) si c'est la disjonction de conjonctions de littéraux. Toute formule φ est équivalente à une formule sous DNF. Pour le prouver, on peut d'abord prouver les équivalences suivantes :

$$\begin{gathered}\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \varphi_n) \equiv (\varphi \wedge \varphi_1) \vee \ldots \vee (\varphi \wedge \varphi_n) \\ \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \equiv \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n \\ \neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n \\ \neg\neg\varphi \equiv \varphi\end{gathered} \tag{1}$$

pour $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{L}$. L'application de gauche à droite de ces équivalences tant que c'est possible, partant de $\varphi \in \mathcal{L}$, résulte en une formule sous DNF équivalente à φ.

2.2 Distances

Une distance sur un ensemble X est une fonction $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ (où $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs) vérifiant l'axiome de séparation ($d(x,y) = 0$ ssi $x = y$), la symétrie ($d(x,y) = d(y,x)$) et l'inégalité triangulaire ($d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$).

Étant donné $A, B \in 2^X$ (2^X est l'ensemble des parties de X) et $y \in X$, $d(A,y)$ est une abréviation pour $\inf_{x \in A} d(x,y)$ et $d(A,B)$ est une abréviation pour $\inf_{x \in A, y \in B} d(x,y)$.

2.3 Les algèbres qualitatives (AQ)

Les AQ sont des formalismes très utilisés pour représenter des connaissances dépendant du temps et/ou de l'espace [22]. Une AQ est close sous conjonction, quoique le symbole $\wedge$ soit rarement utilisé (plus précisément, on considère en général un ensemble de formules considéré conjonctivement). Certaines notations et conventions usuelles sur les AQ sont modifiées ici afin de mieux correspondre à l'objectif de l'article. En particulier, la représentation des bases de connaissances par des graphes (appelés réseaux de contraintes qualitatives) est mal appropriée ici, à cause de la clôture propositionnelle introduite plus loin.

Dans un premier temps, l'algèbre de Allen est introduite : c'est une des plus connues des AQ et elle sera utilisée dans les exemples. Puis, une définition plus générale des AQ est donnée.

2.3.1 L'algèbre de Allen

L'algèbre de Allen est utilisée pour représenter des relations entre intervalles temporels [2]. Une formule de cette algèbre est une conjonction de contraintes, où une contrainte est une expression de la forme $x \ r \ y$ indiquant que l'intervalle x est lié à l'intervalle y par la relation r. Treize relations de base sont introduites (cf. figure 1(a)). Une relation r est soit une de ces relations de base, soit l'union de relations de base $r_1, \ldots, r_m$, union dénotée ici par $r_1 \mid \ldots \mid r_m$.

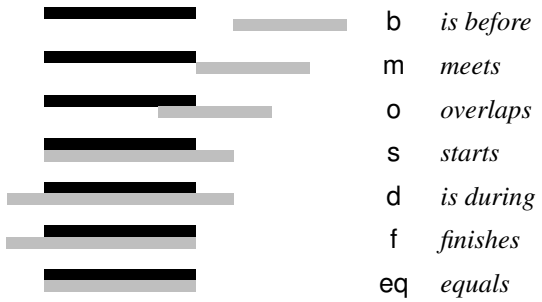
Par exemple, si on veut exprimer le fait que le cours de mathématiques suit immédiatement le cours de physique, lequel précède le cours d'anglais (soit avec un intervalle de temps les séparant, soit immédiatement), on peut écrire :

$$\texttt{maths}\ \mathsf{m}\ \texttt{physique} \quad \wedge \quad \texttt{physique}\ \mathsf{b} \mid \mathsf{m}\ \texttt{anglais}$$

$\mathcal{L}_{\text{Allen}}$ est l'ensemble des formules de l'algèbre de Allen.

2.3.2 Les algèbres qualitatives

Les AQ en général sont définies ci-dessous par leurs syntaxes et leurs sémantiques. Finalement, des mécanismes d'inférences sont décrits.



(a) Signification intuitive.

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des intervalles fermés et bornés $[a,b]$ de $\mathbb{Q}$ (l'ensemble des rationnels) tel que $a < b$. Les relations de base sont définies comme suit, avec $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, $d_1 = [a_1, b_1]$, $d_2 = [a_2, b_2]$:

$$\begin{array}{rl}
(d_1,d_2) \in \widetilde{\mathsf{eq}} & \text{si } a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2 \\
(d_1,d_2) \in \widetilde{\mathsf{b}} & \text{si } b_1 < a_2 \\
(d_1,d_2) \in \widetilde{\mathsf{m}} & \text{si } a_2 = b_1 \\
(d_1,d_2) \in \widetilde{\mathsf{o}} & \text{si } a_1 < a_2, a_2 < b_1 \text{ et } b_1 < b_2 \\
(d_1,d_2) \in \widetilde{\mathsf{s}} & \text{si } a_1 = a_2 \text{ et } b_1 < b_2 \\
(d_1,d_2) \in \widetilde{\mathsf{f}} & \text{si } a_1 > a_2 \text{ et } b_1 = b_2 \\
(d_1,d_2) \in \widetilde{\mathsf{d}} & \text{si } a_1 > a_2 \text{ et } b_1 < b_2
\end{array}$$

$$\mathsf{bi} = \mathsf{b}^- \qquad \mathsf{mi} = \mathsf{m}^- \qquad \mathsf{oi} = \mathsf{o}^-$$
$$\mathsf{si} = \mathsf{s}^- \qquad \mathsf{fi} = \mathsf{f}^- \qquad \mathsf{di} = \mathsf{d}^-$$

(b) Semantique fondée sur un domaine.

FIGURE 1 – Les relations de base de $\mathcal{L}_{\text{Allen}}$.

Syntaxe. Un ensemble fini de symbôles $\mathfrak{B}$ est donné (avec $|\mathfrak{B}| \geqslant 2$). Une *relation de base* est un élément de $\mathfrak{B}$. Une *relation* est une expression de la forme $r_1 \mid \ldots \mid r_m$ ($m \geqslant 0$), telle qu'une relation de base apparaît au plus une fois dans la relation et telle que l'ordre n'est pas pertinent (p. ex. $r_1 \mid r_2$ et $r_2 \mid r_1$ sont des expressions équivalentes). L'ensemble des relations est noté $\mathfrak{R}$, et sa cardinalité est $|\mathfrak{R}| = 2^{|\mathfrak{B}|}$. La relation dans laquelle toutes les relations de base apparaissent est appelée ?. La relation $r_1 \mid \ldots \mid r_m$ avec $m = 0$ est appelée !.

Un ensemble fini de symboles $\mathcal{V}$, disjoint de $\mathfrak{B}$, est donné. Une *variable (qualitative)* est un élément de $\mathcal{V}$.

Une *contrainte* est une expression de la forme $x \ r \ y$ où $x, y \in \mathcal{V}$ et $r \in \mathfrak{R}$.

Une *formule* φ est une conjonction de n contraintes ($n \geqslant 1$) : $x_1 \ r_1 \ y_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ x_n \ r_n \ y_n$. Une contrainte de φ est une des contraintes de sa conjonction. Soit $\mathcal{L}_{\text{QA}}$ l'ensemble des formules de l'AQ considérée. Les atomes de $\mathcal{L}_{\text{QA}}$ sont les contraintes.

Une formule $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{QA}}$ est sous forme normale si pour toutes $x, y \in \mathcal{V}$ avec $x \neq y$, il y a exactement une $r \in \mathfrak{R}$

telle que $x\ r\ y$ est une contrainte de φ. Cette relation r est alors dénotée par $r_\varphi(x, y)$.

Un *scénario* σ est une formule sous forme normale telle que pour toutes variables x et y, $x \neq y$, $r_\sigma(x, y) \in \mathfrak{B}$. Par conséquent, il y a $|\mathfrak{B}|^{|\mathcal{V}|\times(|\mathcal{V}|-1)}$ scénarios (on verra plus loin que seuls certains sont cohérents). Étant donné une formule φ sous forme normale, $\texttt{Scén}(\varphi)$ est l'ensemble des scénarios obtenus par substitution de chaque contrainte $x\ r_1 \mid \ldots \mid r_m\ y$ ($m \geqslant 2$) de φ par une contrainte $x\ r_k\ y$ ($1 \leqslant k \leqslant m$).

Sémantique. La sémantique sera décrite deux fois. Ces deux descriptions correspondent à la même relation de conséquence logique mais ont différents buts. La première s'appuie sur un domaine $\mathcal{D}$ sur lequel les relations sont interprétées et a l'inconvénient suivant : il est difficile de manipuler une classe d'interprétations pour cette description de la sémantique. Cela motive une autre description, définissant un ensemble fini Ω d'interprétations, où une interprétation est un scénario cohérent.

Sémantique fondée sur un domaine $\mathcal{D}$. La sémantique de l'algèbre de Allen présentée à la figure 1(b) illustre cette section.

Soit $\mathcal{D}$, un ensemble non vide et $\widetilde{\cdot}$ une fonction qui associe à chaque $r \in \mathfrak{B}$ une relation binaire $\widetilde{r}$ sur $\mathcal{D}$ ($\widetilde{r} \subseteq \mathcal{D}^2$) telle que :

- $\widetilde{\mathfrak{B}} = \{\widetilde{r} \mid r \in \mathfrak{B}\}$ est une partition de $\mathcal{D}^2$: pour chaque $(d, e) \in \mathcal{D}^2$ il y a exactement une $r \in \mathfrak{B}$ telle que $(d, e) \in \widetilde{r}$. De plus, chaque $\widetilde{r} \in \widetilde{\mathfrak{B}}$ est non vide.
- Pour chaque $r \in \mathfrak{B}$ il existe exactement une $s \in \mathfrak{B}$ telle que $\widetilde{s}$ est la relation inverse de la relation $\widetilde{r}$. Dans la suite, s est dénotée par r^-.
- Il existe une relation de base, notée eq, qui est interprétée comme l'égalité sur $\mathcal{D}$: $\widetilde{\mathsf{eq}} = \{(d, d) \mid d \in \mathcal{D}\}$. eq est son propre inverse : $\mathsf{eq}^- = \mathsf{eq}$.

Cette fonction s'étend à $\mathfrak{R}$ de la façon suivante :

$$\text{si } r \in \mathfrak{R} \text{ et } r = r_1 \mid \ldots \mid r_m \text{ alors } \widetilde{r} = \widetilde{r_1} \cup \ldots \cup \widetilde{r_m}$$

En d'autres termes : $(d, e) \in \widetilde{r}$ ssi il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $(d, e) \in \widetilde{r_i}$.

Une interprétation $\mathcal{I}$ est une fonction de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{D}$. $\mathcal{I}$ satisfait $x\ r\ y$ si $(\mathcal{I}(x), \mathcal{I}(y)) \in \widetilde{r}$. $\mathcal{I}$ satisfait une conjonction de contraintes si elle satisfait chaque contrainte de la conjonction. Une formule φ est cohérente s'il existe une interprétation qui la satisfait. Finalement, $\varphi_1 \models \varphi_2$ si toute interprétation qui satisfait φ_1 satisfait aussi φ_2.

Dans cette sémantique, toute contrainte de la forme $x\ ?\ y$ est une tautologie et aucune contrainte de la forme $x\ !\ y$ n'est cohérente. De plus, toute formule φ est équivalente à une formule φ' sous forme normale. Dans la suite de l'article, toutes les formules de $\mathcal{L}_{\text{QA}}$ sont supposées sous forme normale, sans perte d'expressivité.

Sémantique définie par des scénarios cohérents. La sémantique peut être caractérisée *a posteriori* grâce à la notion de scénarios cohérents.

Soit Ω l'ensemble des scénarios cohérents (étant donné l'ensemble de variables $\mathcal{V}$). On peut facilement démontrer que $|\Omega| \leqslant |\mathfrak{B}|^{|\mathcal{V}|\times(|\mathcal{V}|-1)/2}$: si $x\ r\ y$ est une contrainte d'un scénario cohérent σ alors $y\ r^-\ x$ est aussi une contrainte de σ.

Soit $\mathcal{M} : \mathcal{L} \to 2^\Omega$ défini par :

$$\mathcal{M}(\varphi) = \{\sigma \in \Omega \mid \sigma \models \varphi\}$$

pour $\varphi \in \mathcal{L}$, où $\models$ est la relation de conséquence logique définie ci-dessus, grâce à la sémantique fondée sur un domaine.

Ω et $\mathcal{M}$ permettent de définir une sémantique sur $\mathcal{L}_{\text{QA}}$ qui coïncide avec la sémantique fondée sur un domaine (d'où la même relation $\models$). Cependant, cette deuxième (définition de la) sémantique est plus pratique à utiliser, en particulier pour définir des opérateurs de révision dans les AQ.

Inférences. L'inférence des AQ principalement utilisée dans ce papier est le test de cohérence.

Il est généralement implanté de la façon suivante. Des propriétés sur les formules appelées *arc-cohérence* et *chemin-cohérence* sont définies. Avoir ces propriétés est une condition nécessaire et, dans la plupart des algèbres une condition suffisante, pour la cohérence de scénarios (i.e., un scénario σ est cohérent ssi il est arc-cohérent et chemin-cohérent). Une façon de tester si $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{QA}}$ est cohérent consiste à prouver l'existence d'un $\sigma \in \texttt{Scén}(\varphi)$ qui soit cohérent.

Une formule $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{QA}}$ est arc-cohérente si :

- Pour toutes variables $x, y \in \mathcal{V}$, $r_\varphi(x, y) \neq !$.
- Pour toutes $x, y \in \mathcal{V}$, $r_\varphi(x, y) = r_\varphi(y, x)^-$.

La définition de chemin-cohérence est fondée sur une opération binaire sur $\mathfrak{R}$, dénotée dans cet article par ;. Elle est définie sur $\mathfrak{B}$ (par exemple, par un tableau $|\mathfrak{B}| \times |\mathfrak{B}|$) et étendue sur $\mathfrak{R}$ grâce aux égalités suivantes :

$$(r_1 \mid \ldots \mid r_m)\ ;\ s = (r_1\ ;\ s) \mid \ldots \mid (r_m\ ;\ s)$$
$$s\ ;\ (r_1 \mid \ldots \mid r_m) = (s\ ;\ r_1) \mid \ldots \mid (s\ ;\ r_m)$$

Dans $\mathcal{L}_{\text{Allen}}$, ; correspond à la composition classique des relations : $\widetilde{s\ ;\ r} = \widetilde{s} \circ \widetilde{r}$ (i.e. $\mathcal{I} \models x\ s\ ;\ r\ y$ s'il existe $d \in \mathcal{D}$ tel que $(\mathcal{I}(x), d) \in \widetilde{r}$ et $(d, \mathcal{I}(y)) \in \widetilde{s}$). Dans d'autres AQ, ; correspond à une opération différente, appelée composition faible [21, 16].

Une formule $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{QA}}$ est chemin-cohérente si, pour $x, y, z \in \mathcal{V}$, une contrainte déduite par composition entre x et z ($x\ r_\varphi(y, z)\ ;\ r_\varphi(x, y)\ z$) est plus faible que la contrainte déclarée dans φ (i.e. $x\ r_\varphi(x, z)\ z$).

2.4 Changement de croyances

La révision des croyances. La révision est une opération de changement de croyances. Intuitivement, étant donné un ensemble de croyances ψ d'un agent à propos d'un monde statique, elle consiste à considérer les changements de ses croyances en présence d'un nouvel ensemble de croyances μ, en supposant μ prioritaire sur ψ pour l'agent. L'ensemble résultant des croyances de l'agent est noté $\psi \dot{+} \mu$ et dépend du choix de l'opérateur de révision $\dot{+}$. Dans [1], le principe du changement minimal a été affirmé et peut être formulé ainsi : ψ est changé minimalement en ψ' tel que la conjonction de ψ' et μ soit cohérent, et le résultat de la révision est cette conjonction. Il y a donc en général plusieurs opérateurs $\dot{+}$ possibles, étant donné que la définition de $\dot{+}$ dépend de la manière dont le changement de croyances est « mesuré ». Plus précisément, le principe du changement minimal a été formalisé par un ensemble de postulats, connus sous le nom de postulats AGM (d'après les noms des auteurs de [1]). [18] présente un état de l'art détaillé de la révision à un niveau général (pour tout formalisme satisfaisant certaines propriétés, comme le fait d'être clos pour la conjonction), incluant des théorèmes de représentation et des discussions sur certaines problématiques proches (autres opérateurs de changements de croyances, etc.).

Dans [13], la révision a été étudiée dans le cadre de la logique propositionnelle (avec un nombre fini de variables). Les postulats AGM ont été traduits dans ce formalisme comme suit (ψ, ψ_1, ψ_2, μ, μ_1, μ_2 et ϕ sont des formules propositionnelles) :

($\dot{+}$1) $\psi \dot{+} \mu \models \mu$.

($\dot{+}$2) Si $\psi \wedge \mu$ est cohérent alors $\psi \dot{+} \mu \equiv \psi \wedge \mu$.

($\dot{+}$3) Si μ est cohérent alors $\psi \dot{+} \mu$ est cohérent.

($\dot{+}$4) Si $\psi_1 \equiv \psi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$ alors $\psi_1 \dot{+} \mu_1 \equiv \psi_2 \dot{+} \mu_2$.

($\dot{+}$5) $(\psi \dot{+} \mu) \wedge \phi \models \psi \dot{+} (\mu \wedge \phi)$.

($\dot{+}$6) Si $(\psi \dot{+} \mu) \wedge \phi$ est cohérent alors $\psi \dot{+} (\mu \wedge \phi) \models (\psi \dot{+} \mu) \wedge \phi$.

De plus, une famille d'opérateurs de révision est définie, fondées sur des distances d sur Ω, où Ω est l'ensemble des interprétations : la révision de ψ par μ selon $\dot{+}^d$ ($\psi \dot{+}^d \mu$) est telle que

$$\mathcal{M}(\psi \dot{+}^d \mu) = \{\omega \in \mathcal{M}(\mu) \mid d(\mathcal{M}(\psi), \omega) = d^*\} \quad \text{avec } d^* = d(\mathcal{M}(\psi), \mathcal{M}(\mu)) \tag{2}$$

Intuitivement, d^* est une mesure de la modification minimale de ψ en ψ' nécessaire pour rendre $\psi' \wedge \mu$ cohérent.

En fait, d n'a pas besoin d'être une « vraie » distance : la symétrie et l'inégalité triangulaire ne sont pas requises et si d vérifie l'axiome de séparation, alors $\dot{+}^d$ vérifie les postulats ($\dot{+}$1–6).

Cette approche peut être étendue à d'autres formalismes ayant une sémantique en théorie des modèles et telle qu'une distance sur l'ensemble Ω des interprétations peut être définie. Cependant, dans certains de ces formalismes, un problème de représentabilité peut être soulevé : il peut apparaître, en effet, qu'un sous ensemble Σ de Ω ne soit pas représentable, i.e., qu'il n'y ait pas de formule φ telle que $\mathcal{M}(\varphi) = \Sigma$. Ce problème de représentabilité se pose pour les AQ.

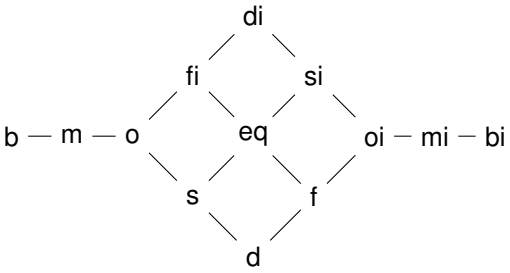


FIGURE 2 – Un graphe de voisinage pour l'algèbre de Allen. [15].

La contraction des croyances. La contraction est une opération de changement de croyances qui, étant donné deux ensembles de croyances ψ et μ, consiste à associer la contraction de ψ par μ, i.e., un ensemble de croyances $\psi \dot{-} \mu$ qui n'entraîne pas μ mais qui modifie minimalement ψ à cette fin. Dans les formalismes propositionnellement clos, l'identité de Harper rend possible la définition d'un opérateur de contraction $\dot{-}$ à l'aide d'un opérateur de révision $\dot{+}$ de la façon suivante :

$$\psi \dot{-} \mu = \psi \vee (\psi \dot{+} \neg\mu) \tag{3}$$

À l'inverse, l'identité de Levi permet de définir un opérateur de révision en utilisant un opérateur de contraction :

$$\psi \dot{+} \mu = (\psi \dot{-} \neg\mu) \wedge \mu$$

La fusion de croyances. La fusion est une autre opérations de changement de croyances. Étant donné des ensembles de croyances $\psi_1, \ldots, \psi_n$, leur fusion est un ensemble de croyances Ψ représentant une vision « globale » et « cohérente » des ψ_i. Des postulats de fusion des croyances ont été proposés et discutés [14].

En pratique, les études sur la fusion des croyances peuvent être adaptés à la révision des croyances : la révision de ψ par μ peut être vue comme une sorte de fusion de ψ et μ telle qu'aucune modification n'est autorisée sur μ. Par exemple, la fusion des croyances a été étudiée pour les algèbres qualitatives dans [6] et peut être réutilisée pour la révision des croyances.

2.5 La révision des croyances dans les AQ

Dans [6], un opérateur de fusion de croyances est défini qui s'appuie sur une distance entre scénarios. On peut

définir une telle distance comme suit. Soit δ une distance sur $\mathfrak{B}$. Soit $\sigma, \tau \in \Omega$, deux scénarios fondés sur le même ensemble de variables $\mathcal{V}$. Alors, d est défini par

$$d(\sigma, \tau) = \sum_{x,y \in \mathcal{V}, x \neq y} \delta(r_\sigma(x,y), r_\tau(x,y))$$

Parmi les possibilités pour δ, on peut noter l'utilisation d'un graphe de voisinage, i.e., un graphe connexe non orienté dont les sommets sont les relations de base et tel que $\delta(r,s)$ est la longueur de la plus courte chaîne entre r et s. La figure 2 présente un tel graphe pour l'algèbre de Allen. Les modèles de la fusion de $\psi_1, \ldots, \psi_n$ sont les ensembles de scénarios σ qui minimisent $\sum_{i=1}^{n} d(\mathcal{M}(\psi_i), \sigma)$ (d'autres fonctions d'aggrégation que la somme peuvent aussi être utilisés). Le problème de représentabilité peut être soulevé, puisque l'ensemble des scénarios réalisant ce minimum n'est pas nécessairement représentable dans $(\mathcal{L}_{\mathrm{QA}}, \models)$. Une solution est alors de trouver une formule $\varrho \in \mathcal{L}_{\mathrm{QA}}$ dont l'ensemble des modèles inclut de façon proche l'ensemble des modèles optimums. Une autre solution est de considérer que le résultat de la fusion est un ensemble de scénarios.

Ce problème de représentabilité est aussi soulevé pour la révision dans $\mathcal{L}_{\mathrm{QA}}$, et ce deuxième type de solution est choisi dans cet article : pour $\psi, \mu \in \mathcal{L}_{\mathrm{QA}}$, $\psi \dot{+}^d \mu$ *est* l'ensemble des scénarios les plus proches de $\mathcal{M}(\psi)$.

Dans [9], un algorithme pour $\dot{+}^d$ dans une algèbre qualitative $(\mathcal{L}_{\mathrm{QA}}, \models)$ est défini et son implantation dans le système RÉVISOR/QA — pour trois AQ — est décrit. Ses entrées sont ψ et μ, éléments de $\mathcal{L}_{\mathrm{QA}}$. Sa sortie est l'ensemble des scénarios $\sigma \in \mathcal{M}(\mu)$ tels que $d(\mathcal{M}(\psi), \sigma)$ est minimal. Son principe est fondé sur une recherche A* [17] avec une heuristique admissible. Pour cette recherche :

- Un état est un $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathrm{QA}}$.
- L'état initial est μ.
- Un successeur d'un état φ est un état φ' obtenu en substituant dans φ une contrainte $x \ r_1 \mid \ldots \mid r_m \ y$ ($m \geqslant 2$) par une contrainte (plus forte) $x \ r_k \ y$ ($1 \leqslant k \leqslant m$).
- Un état final est un scénario cohérent.
- La fonction heuristique est une estimation de la distance de ψ à l'état φ (estimation qui devient exacte sur les états finaux).

Une petite modification vis-à-vis de l'algorithme A* classique est que la recherche s'arrête quand *tous* les états finaux à coût minimal ont été générés (et non pas dès qu'un tel état est généré). Le résultat est l'ensemble des états finaux φ, qui sont aussi les modèles de μ les plus proches de ψ selon d. On peut noter que le coût d'un état final généré par une recherche A* est d^* (tel que défini par (2)).

La complexité dans le pire cas de cet algorithme dépend du nombre de scénarios dans $\mathcal{M}(\mu)$, qui est de l'ordre de $O\left(|\mathfrak{B}|^{\frac{|V| \cdot (|V|-1)}{2}}\right)$.

Dans [12] l'implantation d'une famille d'opérateurs de révision sur les AQ est également décrite. Leur algorithme de recherche s'appuie sur le moteur d'inférences GQR [10], qui n'utilise pas de recherche heuristique mais qui, en revanche, tire profit de l'existence de relations préconvexes, ce qui, dans certains cas, garantit la cohérence sans avoir à générer de scénarios.

3 Clôture propositionnelle d'une AQ

Soit $(\mathcal{L}_{\mathrm{QA}}, \models)$ une algèbre qualitative. La clôture propositionnelle de ce formalisme, tel que défini en section 2.1 est notée $(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{QA}}, \widehat{\models})$.

Proposition 1 (representabilité)**.** *Tout ensemble de scénarios $\Sigma \subseteq \Omega$ est représentable en $\widehat{\mathcal{L}}_{QA}$. Plus précisément, si $\varphi = \bigvee_{\sigma \in \Sigma} \sigma$, alors $\mathcal{M}(\varphi) = \Sigma$.*

Toute formule de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{QA}}$ peut être mise sous DNF, puisque c'est un formalisme propositionnellement clos, mais la proposition suivante permet d'aller plus loin.

Proposition 2 (formes normales)**.** *Soit $\varphi \in \widehat{\mathcal{L}}_{QA}$. φ peut être mis sous les formes suivantes :*

DNF-w/oN *φ est équivalente à une formule en DNF n'utilisant aucun symbole de négation.*

DNF-w/oN-$\mathfrak{B}$ *φ est équivalente à une formule en DNF n'utilisant aucun symbole de négation et dont chaque contrainte n'utilise qu'une seule relation de base.*

D'autres auteurs ont également mis en évidence l'intérêt d'avoir des disjonctions de contraintes temporelles, telles que « Le voyage durera 5 minutes (en voiture) ou 15 minutes (en bus). » Certains travaux proposent de prendre en compte les disjonctions dans l'algèbre des points de [23]. Dans [11], par exemple, les relations qualitatives entre intervalles sont représentées par des disjonctions de relations entre les extrémités de ces intervalles — p. ex., « Le début de l'intervalle y précède le début de l'intervalle x ou la fin de x précède le début de y. » Des formalismes représentant des contraintes temporelles numériques sont plus fréquents et suivent la proposition de [7]. Dans [3], les disjonctions de contraintes sont manipulées grâce à la notion de contexte temporel. À notre connaissance, aucun de ces travaux n'a traité la problématique de la clôture propositionnelle.

4 Révision des croyances dans $(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbf{QA}}, \widehat{\models})$

Étant donnée une distance d sur Ω, un opérateur de révision sur $(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{QA}}, \widehat{\models})$ peut être défini selon l'équation (2). En effet, la proposition 1 implique que $\{\omega \in \mathcal{M}(\mu) \mid d(\mathcal{M}(\psi), \omega) = d^*\}$ est représentable.

4.1 Un algorithme pour $\dot{+}^d$ dans $(\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbf{QA}}, \widehat{\models})$

L'algorithme s'appuie sur la proposition suivante.

Proposition 3 (révision de disjonctions)**.** *Soit ψ et μ deux formules de $\widehat{\mathcal{L}}_{QA}$ et $\{\psi_i\}_i$ et $\{\mu_j\}_j$ deux familles finies de $\widehat{\mathcal{L}}_{QA}$ telles que $\psi = \bigvee_i \psi_i$ et $\mu = \bigvee_j \mu_j$. Soit $d^*_{ij} = d(\mathcal{M}(\psi_i), \mathcal{M}(\mu_j))$ pour tout i et j. On a :*

$$\psi \dot{+}^d \mu \equiv \bigvee_{i,j,d^*_{ij}=d^*} \psi_i \dot{+}^d \mu_j$$
$$\text{avec } d^* = d(\mathcal{M}(\psi), \mathcal{M}(\mu)) = \min_{ij} d^*_{ij}$$

L'algorithme pour $\dot{+}^d$ dans $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}$ consiste en gros à mettre ψ et μ sous DNF-w/oN et à leur appliquer la proposition 3, en utilisant un algorithme sur $\mathcal{L}_{\text{QA}}$ pour calculer les $\psi_i \dot{+}^d \mu_j$. Cela requiert de petites modifications de l'algorithme pour $\dot{+}^d$ défini sur $(\mathcal{L}_{\text{QA}}, \models)$:

- L'algorithme de révision prend en entrée un triplet $(\psi, \mu, d_{\max})$ où $\psi, \mu \in \mathcal{L}_{\text{QA}}$ et $d_{\max}$ est un nombre positif ou nul donnant un majorant de $d^* = d(\mathcal{M}(\psi), \mathcal{M}(\mu))$.
- Cette exploration d'un espace d'état s'arrête (et retourne un symbole d'échec) quand le coût associé à l'état courant dépasse $d_{\max}$.
- La sortie de l'algorithme est soit le symbole d'échec soit un couple (ϱ, d^*) où $\varrho \in \widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}$ est la disjonction des scénarios de $\psi \dot{+}^d \mu$.

L'algorithme est présenté à la figure 3. Il s'appuie sur la proposition 3 et sur l'algorithme pour $\dot{+}^d$ dans $(\mathcal{L}_{\text{QA}}, \models)$ — la ligne 6 utilise cet algorithme modifié.

`Revision`$_{\widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}}(\psi, \mu)$

entrées $\psi, \mu \in \widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}$

sortie $\varrho \in \widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}$ tel que $\varrho \equiv \psi \dot{+}^d \mu$

1 $\psi \leftarrow$ DNF-w/oN(ψ) — $\psi = \bigvee_i \psi_i$ où $\psi_i \in \mathcal{L}_{\text{QA}}$
2 $\mu \leftarrow$ DNF-w/oN(μ) — $\mu = \bigvee_j \mu_j$ où $\mu_j \in \mathcal{L}_{\text{QA}}$
3 `résultat` $\leftarrow \emptyset$
4 $d_{\max} \leftarrow +\infty$
5 **pour chaque** i **et chaque** j **faire**
6 `rév` $\leftarrow$ `Revision`$_{\mathcal{L}_{\text{QA}}}(\psi_i, \mu_j, d_{\max})$
7 **si** `rév` $\neq$ `échec` **alors**
8 $(\varrho_{ij}, d^*_{ij}) \leftarrow$ `rév` — // $\varrho_{ij} = \psi_i \dot{+}^d \mu_j \in \widehat{\mathcal{L}}_{QA}$ // $d^*_{ij} = d(\mathcal{M}(\psi_i), \mathcal{M}(\mu_j))$
9 **si** $d^*_{ij} < d_{\max}$ **alors**
10 $d_{\max} \leftarrow d^*_{ij}$
11 `résultat` $\leftarrow \{\varrho_{ij}\}$
12 **sinon si** $d^*_{ij} = d_{\max}$ **alors**
13 `résultat` $\leftarrow$ `résultat` $\cup \{\varrho_{ij}\}$
14 **fin si**
15 **fin si**
16 **fin pour**
17 $\varrho \leftarrow \bigvee_{\sigma \in \texttt{résultat}} \sigma$
18 **retourner** ϱ

FIGURE 3 – Algorithme pour $\dot{+}^d$ dans $(\widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}, \widehat{\models})$.

4.2 RÉVISOR/PCQA

RÉVISOR est une bibliothèque d'opérateurs de révision de croyances gratuite, avec code source ouvert et disponible à l'adresse `http://revisor.loria.fr` [4].

En particulier, RÉVISOR/QA implante $\dot{+}^d$ dans trois AQ : l'algèbre de Allen, INDU — une extension de l'algèbre de Allen prenant en compte les relations entre intervalles en fonction de leurs durées [19] — et RCC8 — une AQ pour représenter les relations topologiques entre régions de l'espace [20]. De plus, il est facile de définir une autre algèbre qualitative au sein de RÉVISOR/QA en spécifiant dans le code les valeurs de s ; r pour chaque $r, s \in \mathfrak{B}$, les valeurs de r^- pour chaque $r \in \mathfrak{B}$, et le graphe de voisinage. Le moteur est écrit en Perl, mais peut être lancé depuis Java. La complexité dans le pire cas de cette implantation est en $O\left(|\mathfrak{B}|^{\frac{|\mathcal{V}|\cdot(|\mathcal{V}|-1)}{2}}\right)$.

RÉVISOR/PCQA implante $\dot{+}^d$ sur les clôtures propositionnelles des AQ $\mathcal{L}_{\text{Allen}}$, INDU et RCC8 : il s'appuie sur RÉVISOR/QA et est un des moteurs d'inférences de RÉVISOR. La complexité dans le pire cas de cette implantation est de l'ordre de $O\left(|\mathcal{V}|^4 |\mathfrak{B}|^{\frac{|\mathcal{V}|\cdot(|\mathcal{V}|-1)}{2}}\right)$, d'après une analyse rapide.

Exemples. Les exemples suivants ont été exécutés en utilisant RÉVISOR/PCQA et sont inclus dans le code source. Le fichier `README` associé à RÉVISOR/QA sur le site RÉVISOR explique comment ils sont exécutés.

Le premier exemple a pour but de montrer que certains problèmes de révision s'expriment plus aisément en $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}$ qu'en $\mathcal{L}_{\text{QA}}$. Considérons Zoé, une principale de collège, qui doit faire l'emploi du temps d'un groupe d'étudiants qui a quatre cours, en biologie, français, histoire et mathématiques, dans une matinée. Dans ce but, elle pense réutiliser l'emploi du temps de l'année précédente :

$$\pi = \texttt{français eq 8-9} \wedge \texttt{biologie eq 9-10}$$
$$\wedge\ \texttt{histoire eq 10-11} \wedge \texttt{maths eq 11-12}$$

où, p. ex., le cours de français a lieu entre 8 et 9 heures.

Elle a aussi quelques connaissances qu'elle exprime en $\mathcal{L}_{\text{Allen}}$. Elle connaît les relations entre les 4 périodes de cours :

$$\beta_1 = \texttt{8-9}\ \mathsf{m}\ \texttt{9-10}\ \wedge\ \texttt{9-10}\ \mathsf{m}\ \texttt{10-11}\ \wedge\ \texttt{10-11}\ \mathsf{m}\ \texttt{11-12}$$

Ensuite, elle impose qu'un cours n'a pas d'intersection (à l'exception éventuelle d'une frontière) avec un autre cours :

$$\beta_2 = \bigwedge_{c_1, c_2 \in \texttt{Cours}, c_1 \neq c_2} c_1\ \mathsf{b} \mid \mathsf{bi} \mid \mathsf{m} \mid \mathsf{mi}\ c_2$$

avec $\texttt{Cours} = \{\texttt{biologie}, \texttt{français}, \texttt{histoire}, \texttt{maths}\}$

Ensuite, elle doit representer le fait que chaque cours correspond à un des 4 intervalles de temps. Comme il n'y a pas de disjonction en $\mathcal{L}_{\text{Allen}}$, elle utilise l'astuce suivante qui énonce que chaque cours est soit égal à soit disjoint de (à une intersection de frontière près) chaque période :

$$\beta_3 = \bigwedge_{c \in \texttt{Cours}, p \in \texttt{Périodes}} c\ \mathsf{eq} \mid \mathsf{b} \mid \mathsf{bi} \mid \mathsf{m} \mid \mathsf{mi}\ p$$

avec $\texttt{Périodes} = \{\texttt{8-9}, \texttt{9-10}, \texttt{10-11}, \texttt{11-12}\}$

Pour contraindre les cours et les intervalles à respecter les limites de la matinée, la variable `8-12` est introduite et assortie des connaissances suivantes :

$$\beta_4 = \texttt{8-9}\ \mathsf{s}\ \texttt{8-12}\ \wedge\ \texttt{9-10}\ \mathsf{d}\ \texttt{8-12}\ \wedge\ \texttt{10-11}\ \mathsf{d}\ \texttt{8-12}$$
$$\wedge\ \texttt{11-12}\ \mathsf{f}\ \texttt{8-12}\ \wedge \bigwedge_{c \in \texttt{Cours}} c\ \mathsf{s} \mid \mathsf{d} \mid \mathsf{f}\ \texttt{8-12}$$

Soit $\beta = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \beta_4$. La connaissance concernant l'année passée est $\psi = \beta \wedge \pi$. Pour l'année courante, une nouvelle contrainte existe, qui dit que les professeurs de biologie et d'histoire ne doivent pas se rencontrer (la raison n'en est pas donnée) :

$$\gamma = \texttt{biologie}\ \mathsf{b} \mid \mathsf{bi}\ \texttt{histoire}$$

Comme la connaissance générale n'a pas changé, la connaissance concernant cette année est $\mu = \beta \wedge \gamma$. Ainsi, pour construire le nouvel emploi du temps, Zoé va réviser ψ par μ. Si elle utilise l'opérateur $\dot{+}^d$ défini ci-dessus, elle obtient deux modèles qui consistent à échanger le français avec la biologie ou l'histoire avec les mathématiques.

Maintenant, Zoé veut formaliser ses connaissances en $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{Allen}}$. On conserve l'emploi du temps de l'année précédente π et la nouvelle contrainte γ pour cette année. En revanche la représentation de la connaissance générale change : $\widehat{\beta} = \beta_1 \wedge \widehat{\beta_2} \wedge \widehat{\beta_3}$, avec $\widehat{\beta_2}$ exprimant le fait que deux cours ne peuvent pas avoir lieu en même temps

$$\widehat{\beta_2} = \bigwedge_{c_1, c_2 \in \texttt{Cours}, c_1 \neq c_2} \neg(c_1\ \mathsf{eq}\ c_2)$$

et $\widehat{\beta_3}$ exprimant le fait que chaque cours est situé dans un des 4 intervalles de temps :

$$\widehat{\beta_3} = \bigwedge_{c \in \texttt{Cours}} \bigvee_{p \in \texttt{Périodes}} c\ \mathsf{eq}\ p$$

La révision de $\widehat{\psi} = \widehat{\beta} \wedge \pi$ par $\widehat{\mu} = \widehat{\beta} \wedge \gamma$ donne également deux modèles, correspondant aux deux mêmes échanges de cours (formellement, ce ne sont pas les mêmes modèles, les ensembles de variables étant différents — il y a une variable additionelle dans la première formalisation : `8-12`).

Nous affirmons que la seconde formalisation est plus simple que la première, qui nécessite une « astuce ». De plus, RÉVISOR/QA prend environ 6 minutes pour résoudre ce problème (dans la première formalisation) tandis que RÉVISOR/PCQA ne nécessite qu'environ 2 minutes.

Le deuxième exemple généralise le premier et consiste en une famille de problèmes paramétrés par n et p, où n est le nombre de cours et de créneaux horaires et p est le nombre de coupures durant la période de temps globale (le premier exemple correspond à $n = 4$ et $p = 0$). De plus, les coupures sont réparties uniformément sur cette période globale. Une experimentation a été menée avec $n \in \{3, 4, 5\}$ et $p \in \{0, 1, 2\}$. En respectant des formalisations similaires en $\mathcal{L}_{\text{Allen}}$ (avec $2n + p + 1$ variables) et en $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{Allen}}$ (avec $2n$ variables), les résultats obtenus sont les mêmes (excepté pour les variables additionnelles) ; les temps de calcul sont presentés dans le tableau 1. Le temps moyen, pour chaque ligne, est calculé sur des séries de $n - 1$ tests avec $d > 0$, sur un ordinateur doté d'un processeur de $2,53$ GHz et d'une mémoire disponible de 8 GB. Par exemple, pour $n = 4$ et $p = 1$, la distance moyenne est $14,0$ pour RÉVISOR/QA et RÉVISOR/PCQA et le temps moyen est $765,125$ s pour RÉVISOR/QA et $183,945$ s pour RÉVISOR/PCQA. Le temps moyen augmente avec le nombre de variables pour RÉVISOR/QA et pour RÉVISOR/PCQA. Pour le même nombre de variables, RÉVISOR/QA est plus rapide que RÉVISOR/PCQA. Néanmoins, comme moins de variables additionnelles sont introduites avec RÉVISOR/PCQA, des problèmes plus complexes peuvent être résolus avec RÉVISOR/PCQA.

Le troisième exemple utilise un opérateur de contraction de croyances. Selon l'équation (3), un opérateur de contraction peut être défini sur la base de l'opérateur de révision $\dot{+}^d$. Soit $\dot{-}^d$ cet opérateur. Maintenant considérons l'ensemble de croyances ψ d'un agent appelé Maurice, croyances qui concernent les dates de naissance et de mort de mathématiciens fameux. Maurice pense que Boole est né après de Morgan et mort avant lui et que de Morgan et Weierstraß sont nés la même année (c'est-à-dire, en même temps) mais que le premier est mort avant le second :

$$\psi = \texttt{Boole}\ \mathsf{d}\ \texttt{De Morgan}\ \wedge\ \texttt{De Morgan}\ \mathsf{s}\ \texttt{Weierstraß}$$

		RÉVISOR/QA			RÉVISOR/PCQA		
n	p	nb variables	distance moy	temps moy (s)	nb variables	distance moy	temps moy (s)
3	0	7	24,0	1,387	6	22,0	3,809
3	1	8	21,0	5,407	6	20,0	7,744
4	0	9	25,3	444,927	8	24,7	119,136
4	1	10	29,3	765,125	8	29,3	183,945
4	2	11	14,0	2040,551	8	14,0	266,667
5	0	11	—	*> 1 heure*	10	26,0	3052,398

TABLE 1 – Distance moyenne et temps moyen selon le problème, paramétré par n et p, où n est le nombre de cours et de créneaux horaires et p est le nombre de pauses durant la période de temps globale. « distance moy » est la moyenne des valeurs d^* sur l'ensemble de problèmes de révision générés pour un couple (n, p) donné.

où `Boole` est l'intervalle de temps entre la naissance et la mort de Boole, et ainsi de suite. Maintenant Germaine, une amie de Maurice, lui dit qu'elle n'est pas sûre que Boole soit né strictement après Weierstraß. Comme Maurice croit Germaine (et ses doutes), il désire réaliser la contraction de ses croyances originelles ψ par μ avec

$$\mu = \texttt{Boole bi} \mid \texttt{mi} \mid \texttt{oi} \mid \texttt{f} \mid \texttt{d Weierstraß}$$

Le résultat, calculé par RÉVISOR/PCQA en moins d'une seconde, est $\psi \dot{-}^d \mu$, équivalent à la formule suivante :

$$\begin{aligned}
&(\texttt{Boole d De Morgan} \wedge \texttt{De Morgan s Weierstraß}) \\
\vee\ &(\texttt{Boole s Weierstraß} \wedge \texttt{De Morgan di Weierstraß}) \\
\vee\ &(\texttt{Boole s De Morgan} \wedge \texttt{De Morgan s Weierstraß}) \\
\vee\ &\begin{pmatrix}\texttt{Boole d De Morgan} \wedge \texttt{Boole s Weierstraß} \\ \wedge\ \texttt{De Morgan o Weierstraß}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En fait, le dernier terme de cette disjonction correspond à la réalité, pour autant que les intervalles de temps s'expriment selon une granularité annuelle [1].

5 Conclusion

Cet article présente un algorithme d'un opérateur de révision de croyances $\dot{+}^d$ fondé sur une distance pour la clôture propositionnelle $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}$ d'une algèbre qualitative $\mathcal{L}_{\text{QA}}$, s'appuyant sur la restriction à $\mathcal{L}_{\text{QA}}$ de $\dot{+}^d$. Ce travail peut être motivé par le fait qu'il fournit une opération de révision dont le résultat est représentable dans le formalisme, par le fait que certains exemples peuvent être plus facilement représentés dans $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}$ que dans $\mathcal{L}_{\text{QA}}$ et par le fait qu'il rend possible la définition d'un opérateur de contraction des croyances, en s'appuyant sur l'identité de Harper (qui requiert des connecteurs de disjonction et de négation). Le prétraitement de l'algorithme consiste à mettre les formules en forme normale disjonctive sans négation. Puis, la proposition 3, qui réduit la révision de disjonctions à la disjonction des révisions les moins coûteuses, est appliquée. RÉVISOR/PCQA est une implantation de cet opérateur de révision pour les algèbres de Allen, INDU et RCC8.

Une première perspective de recherches est l'amélioration du temps de calcul de RÉVISOR/PCQA. Une façon de faire cela consiste à le paralléliser, ce qui ne devrait pas être très difficile (en parallélisant la boucle principale). Une optimisation séquentielle consisterait à trouver une heuristique pour ordonner les couples (i, j) dans le but de commencer avec les meilleurs candidats, afin d'obtenir au plus vite un majorant $d_{\max}$.

L'approche présentée dans ce papier pour un algorithme de $\dot{+}^d$ dans $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}$ construit en utilisant un algorithme de $\dot{+}^d$ dans $\mathcal{L}_{\text{QA}}$ dépend en fait peu des particularités des AQ, à l'exception du fait que les négations peuvent être supprimées dans $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}$ (cf. proposition 2). En effet, il pourrait être réutilisé tel quel pour concevoir un algorithme de révision sur la clôture disjonctive d'un formalisme $\mathcal{L}$, pour peu qu'un algorithme pour $\dot{+}^d$ soit disponible dans $\mathcal{L}$. Par exemple, le système RÉVISOR/CLC a été implanté dans le formalisme $\mathcal{L}_{\text{CLC}}$ des conjonctions de contraintes linéaires (sur des entiers ou des réels), avec une distance de Manhattan [5]. Cependant, réutiliser cette approche pour un algorithme de $\dot{+}^d$ dans la clôture *propositionnelle* de $\mathcal{L}_{\text{CLC}}$ soulève d'autres problèmes. En particulier, la distance minimale entre ensembles de modèles (i.e., n-uplets de nombres entiers ou réels) n'est pas nécessairement atteinte, ce qui viole le postulat ($\dot{+}$ 3). Travailler sur ce problème est une deuxième perspective.

L'algorithme décrit ici pour la révision des croyances en $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{QA}}$ peut être utilisé tel quel pour la contraction des croyances. Une troisième perspective est d'étudier comment d'autres opérations de changement de croyances peuvent être implantées dans ce formalisme, en particulier la fusion des croyances et la mise à jour.

1. George Boole (1815-1864), Augustus De Morgan (1806-1871), Karl Weierstraß (1815-1897).

Références

[1] C. E. ALCHOURRÓN, P. GÄRDENFORS et D. MAKINSON : On the Logic of Theory Change : partial meet functions for contraction and revision. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[2] J. F. ALLEN : Maintaining knowledge about temporal intervals. *Communications of the ACM*, 26(11):832–843, novembre 1983.

[3] F. BARBER : Reasoning on interval and point-based disjunctive metric constraints in temporal contexts. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 12(2000): 35–86, 2000.

[4] J. COJAN, V. DUFOUR-LUSSIER, A. HERMANN, F. LE BER, J. LIEBER, E. NAUER et G. PERSONENI : Révisor : un ensemble de moteurs d'adaptation de cas par révision des croyances. *In JIAF - Septièmes Journées de l'Intelligence Artificielle Fondamentale - 2013*, Aix-en-Provence, France, juin 2013.

[5] J. COJAN et J. LIEBER : Conservative Adaptation in Metric Spaces. *In Advances in Case-Based Reasoning, 9th European Conference, ECCBR-2008, Trier, Germany. Proceedings*, LNAI 5239, pages 135–149, 2008.

[6] J.-F. CONDOTTA, S. KACI et N. SCHWIND : A Framework for Merging Qualitative Constraints Networks. *In FLAIRS Conference*, pages 586–591, 2008.

[7] R. DECHTER, I. MEIRI et J. PEARL : Temporal constraint networks. *Artificial Intelligence*, 49:61–95, 1991.

[8] V. DUFOUR-LUSSIER, A. HERMANN, F. LE BER et J. LIEBER : Belief revision in the propositional closure of a qualitative algebra (extended version). Technical report, LORIA, Université de Lorraine, CNRS, 2014. `http://hal.inria.fr/hal-00954512`.

[9] V. DUFOUR-LUSSIER, F. LE BER, J. LIEBER et L. MARTIN : Case Adaptation with Qualitative Algebras. *In* Francesca ROSSI, éditeur : *International Joint Conferences on Artificial Intelligence (IJCAI-2013)*, pages 3002–3006, Pékin, Chine, août 2013. AAAI Press.

[10] Z. GANTNER, M. WESTPHAL et S. WÖLFL : GQR – a fast reasoner for binary qualitative constraint calculi. *In AAAI Workshop on Spatial and Temporal Reasoning*, 2008.

[11] A. GEREVINI et L. SCHUBERT : Efficient algorithms for qualitative reasoning about time. *Artificial Intelligence*, 74(1995):207–248, 1995.

[12] J. HUÉ et M. WESTPHAL : Revising qualitative constraint networks : Definition and implementation. *In Tools with Artificial Intelligence (ICTAI)*, pages 548–555, 2012.

[13] H. KATSUNO et A. MENDELZON : Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52(3):263–294, 1991.

[14] S. KONIECZNY et R. Pino PÉREZ : Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5):773–808, 2002.

[15] G. LIGOZAT : On generalized interval calculi. *In AAAI*, pages 234–240, 1991.

[16] G. LIGOZAT et J. RENZ : What Is a Qualitative Calculus ? A General Framework. *In* C. ZHANG, H.W. GUESGEN et W.K. YEAPS, éditeurs : *PRICAI 2004*, volume LNAI 3157, pages 53–64. Springer-Verlag, 2004.

[17] J. PEARL : *Heuristics – Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1984.

[18] P. PEPPAS : Belief Revision. *In* F. van HARMELEN, V. LIFSCHITZ et B. PORTER, éditeurs : *Handbook of Knowledge Representation*, chapitre 8, pages 317–359. Elsevier, 2008.

[19] A. K. PUJARI, G. V. KUMARI et A. SATTAR : INDU : An Interval & Duration Network. *In* Norman FOO, éditeur : *Advanced Topics in Artificial Intelligence*, volume 1747 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 291–303. Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[20] D. RANDELL, Z. CUI et A. G. COHN : A spatial logic based on regions and connection. *In Knowledge Representation*, pages 165–176, 1992.

[21] J. RENZ et G. LIGOZAT : Weak Composition for Qualitative Spatial and Temporal Reasoning. *In* P. van BEEK, éditeur : *CP 2005*, LNCS 3709, pages 534–548. Springer-Verlag, 2005.

[22] O. STOCK, éditeur. *Spatial and Temporal Reasoning*. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[23] M. B. VILAIN et H. KAUTZ : Constraint propagation algorithms for temporal reasoning. *In Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI'86)*, pages 377–382, 1986.