



**HAL**  
open science

## Les environnements : en avoir ou pas ? Formalisation du concept et patterns d'implémentation

Philippe Mathieu, Sébastien Picault, Yann Secq

### ► To cite this version:

Philippe Mathieu, Sébastien Picault, Yann Secq. Les environnements : en avoir ou pas ? Formalisation du concept et patterns d'implémentation. Actes des 22e Journées Francophones sur les Systèmes Multi-Agents, Oct 2014, Loriol-sur-Drôme, France. pp.55-64. hal-01076103

**HAL Id: hal-01076103**

**<https://inria.hal.science/hal-01076103>**

Submitted on 1 Dec 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Les environnements : en avoir ou pas ?

## Formalisation du concept et *patterns* d'implémentation

P. Mathieu  
philippe.mathieu@univ-lille1.fr

S. Picault  
sebastien.picault@univ-lille1.fr

Y. Secq  
yann.secq@univ-lille1.fr

LIFL UMR 8022 CNRS,  
Université Lille 1, Villeneuve d'Ascq, France

### Résumé

*Dans le domaine des systèmes multi-agents la notion d'environnement est omniprésente, quoique fort mal définie. Nous défendons ici l'idée que la façon dont on modélise l'espace ou les relations entre agents dans un SMA, notamment en simulation, conduit pour leur implémentation à la mise en œuvre d'un nombre réduit de solutions efficaces. Cet article a pour objectif de formaliser les fonctions fondamentales de l'environnement et de recenser différentes familles d'implémentations possibles, selon les objectifs visés (efficacité d'exécution, pertinence de la représentation des connaissances, gain mémoire...). Cette démarche unificatrice permet d'identifier des patterns d'environnements élémentaires : dès lors, en lieu et place de l'approche monolithique habituelle de « l'environnement » d'un SMA, nous prôtons une décomposition sur la base de ces patterns permettant de combiner plusieurs environnements.*

**Mots-clés :** environnement, modélisation, parcimonie, ingénierie, patron de conception

### Abstract

*In the field of multi-agent systems, the concept of environment is omnipresent, though poorly defined. We argue here that depending on the modeling of space and of relations between agents, only a few efficient implementations can be set up, especially in simulation. The aim of this article is to formalize the core functions of environments, so as to highlight several possible implementations and their computational features (runtime efficiency, relevance of the knowledge representation, memory usage...). This unifying approach leads to the identification of elementary environments patterns. Thus, instead of the usual monolithic approach to « the environment » of a multi-agent system, we propose a decomposition based on these patterns, which allows to handle several environments if needed.*

**Keywords:** environments, modeling, parsimony, engineering, design patterns

## 1 Introduction

Il est important pour les SMA, en tant que discipline scientifique, de se reconnaître autour d'un noyau minimal de concepts théoriques et de modèles opérationnels, de structures et d'algorithmes qui fassent consensus. Ce « noyau » se doit d'être suffisamment réduit pour former un « dénominateur commun » applicable autant que possible à la diversité des situations existantes, tout en offrant un cadre opérationnel qui permette de passer à la réalisation effective des systèmes. Ce modèle minimal de SMA a vocation à être enrichi pour chaque application particulière et nous ne prétendons nullement qu'il puisse être élaboré d'un simple trait de plume ; néanmoins l'expérience accumulée depuis 25 ans doit nous permettre de l'esquisser.

Nous souhaitons ici faire porter notre réflexion sur la définition minimale de la notion d'environnement, et sur ses implications en termes d'implémentation. On s'accorde en général sur le fait que les agents agissent « dans un environnement » [1, 12] — et c'est à peu près tout, tant il est sous-entendu que chacun *sait bien* ce qu'est un environnement : au mieux, si différentes sortes d'environnements sont décrites, rien n'est dit sur leur implémentation. À quelques exceptions près, par exemple en simulation, où le problème est crucial (cf. les essais de formalisation de [5, 16]), cet appel implicite au sens commun fait de l'environnement le parent pauvre des SMA. La conséquence en est que le terme lui-même recouvre des réalités très hétérogènes, à la fois dans leur structure et dans leurs usages, qui vont d'une description abstraite du « milieu », au sens écologique, où les agents « vivent », au contexte matériel et logiciel d'exécution de la plateforme [17].

Ces difficultés à définir d'une façon claire l'environnement, viennent à notre sens d'une focalisation excessive sur les agents eux-mêmes (comme nous l'avons montré à propos des comportements [7]). Ainsi, bien que les critères de

caractérisation des environnements, donnés par [12, ch. 2], restent fréquemment cités (accessible ou non, déterministe ou non, statique vs. dynamique, continu vs. discret), une lecture attentive montre qu'il ne s'agit en fait pas tant de caractéristiques propres à l'environnement, que des capacités de perception, de cognition et d'action des agents qui s'y trouvent. Ainsi, par exemple, l'accessibilité est en tout premier lieu une affaire de fiabilité des perceptions, voire de perception globale opposée à l'obligation d'une perception locale. De même, on glisse de l'environnement « discret » à l'environnement *fini* alors qu'il n'y a pas de lien nécessaire entre les deux (cf. *InfiniteForest* [11]).

On mesure bien le caractère obsolète de ces classifications, où prédomine un point de vue centré agent, en les comparant aux enjeux énoncés dans [17] où s'esquissent des questions relatives aux liens entre agents et environnements, au besoin d'une taxonomie des environnements, et à la primauté des relations topologiques. En effet, pour agir, l'agent a besoin de savoir sur quels autres agents il peut exercer ses actions (communication comprise). L'agent étant en règle générale décrit comme une entité à perception limitée, il ne peut (doit) interagir qu'avec ses *voisins*. **La question essentielle est donc : comment un agent détermine-t-il ses voisins ? L'environnement doit être en premier lieu une réponse à cette question.**

Notre objectif ici est triple : 1° chercher une définition minimale de ce que peut bien « signifier » l'environnement lorsque l'on cherche à modéliser un phénomène ou résoudre un problème au moyen d'un système multi-agents ; 2° en donner une caractérisation formelle ; 3° montrer dans quelle mesure la diversité des environnements rencontrés dans la plupart des SMA s'unifie en quelques *patterns* dont le choix ne dépend que d'un nombre réduit de critères de modélisation et d'implémentation, un peu à la façon des *Design Patterns* en génie logiciel [4].

Dans ce qui suit, nous poserons comme hypothèse que « l'environnement » que nous cherchons à caractériser est **construit** comme partie du SMA, ce qui est typiquement le cas en *simulation* ou en *résolution distribuée de problèmes*. Le cas d'environnements issus de l'existence d'un espace « naturel » (physique, biologique ou socio-culturel), par exemple en robotique mobile, nécessiterait un traitement spécifique que nous n'aborderons pas ici.

Par ailleurs, nous poserons comme hypothèse

que **toute entité peut être considérée comme un agent**, dont l'activité est caractérisée selon trois critères indépendants : l'*activité* (faculté d'effectuer des actions), la *passivité* (faculté de subir des actions) et la *labilité* (faculté de changer spontanément d'état). montré [6] que cette démarche unificatrice n'entraîne de perte d'efficacité algorithmique. Bien entendu, nous ne poussons pas le réductionnisme au point de vouloir *tout* agentifier : selon le niveau d'analyse nécessaire à la modélisation, on est amené à choisir *un niveau de granularité en deçà duquel les agents sont remplacés par une information agrégée*. Par exemple, la température en un point est une mesure de l'agitation moléculaire (donc calculable à partir des vitesses de déplacement d'agents molécules) ; mais aux échelles ordinaires il est plus pertinent de considérer que c'est une information agrégée sur un certain volume spatial.

Dans un effort similaire pour circonscrire une base commune aux approches SMA, nous avons défendu l'idée que chaque agent, afin de garantir son autonomie, doit n'offrir qu'un seul point d'accès public qui est l'appel à prendre une décision. Cette invocation est réalisée par un ou plusieurs ordonnanceurs (selon que le système est distribué ou non), qui donnent la parole aux agents, de façon synchrone ou séquentielle. Ceux-ci doivent alors décider d'effectuer certaines actions (ou aucune) en fonction du contexte [9]. Nous adoptons également ce point de vue dans le reste de l'article.

## 2 Formalisation de la notion d'environnement

Notre objectif étant de rendre compte d'une façon homogène de la plupart des situations rencontrées habituellement, nous cherchons une base minimale pour définir un environnement dans le cadre des SMA. Plus largement, cela impose d'identifier les éléments formels nécessaires à la caractérisation même d'un SMA : d'abord dans sa structure, et ensuite seulement dans son fonctionnement.

Nous défendons l'idée que les deux principales fonctions dévolues à l'environnement dans un SMA sont :

1. **placer les agents** les uns par rapport aux autres, selon des relations de voisinage et d'accessibilité particulières ;
2. **porter des informations** correspondant à des niveaux n'ayant pas été agentifiés.

Mais pour commencer nous avons besoin du **temps**. Quelle que soit l'opinion métaphysique qu'on défende, en informatique il est exclu d'utiliser un temps continu (au sens de  $\mathbb{R}$ ) : nous considérons donc dans la suite que l'exécution d'un SMA passe par une suite **d'instants** notés  $t \in [0, T_{\max}]$ , pouvant être séparés par des durées quelconques (et pas nécessairement constantes). Cette représentation est évidemment indépendante du caractère synchrone ou asynchrone, centralisé (par un ordonnanceur commun) ou distribué, du système considéré, et permet de traiter aussi bien des systèmes à temps discret qu'à événements discrets.

À chaque instant, le SMA contient un ensemble d'agents, autrement dit des entités qui jouent un rôle dans le modèle, et que nous noterons  $\mathcal{A}_t$ . À ce stade nous ne faisons (et ne souhaitons faire) aucune hypothèse particulière quant aux capacités d'action, de perception, de cognition de ces entités.

## 2.1 Première fonction : placer les agents

Pour définir l'environnement, il faut d'abord déterminer quel monde partagent ces agents. La façon la plus simple de le formaliser est de supposer qu'il existe un ensemble  $E$  dont les éléments sont des « lieux » susceptibles d'accueillir des agents. A priori, cet ensemble  $E$  peut être quelconque. Toutefois, il faut être capable également de déterminer dans quelle mesure ces lieux sont reliés les uns aux autres. Pour cela il faut au minimum définir une application  $d : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  qui satisfait les conditions suivantes :

1.  $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0$  ssi  $x = y$   
(séparation)
2.  $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$   
(inégalité triangulaire)

Une telle fonction est une **quasidistance** [14] : elle ne possède pas nécessairement la propriété de symétrie (on peut avoir  $d(x, y) \neq d(y, x)$ ). Néanmoins,  $(E, d)$  constitue un *espace quasimétrique* dans lequel la quasidistance définit une **topologie**.

En toute rigueur, la quasidistance peut elle-même dépendre du temps (e.g. un agent construit un mur et modifie ainsi les relations d'accessibilité d'un point à un autre, donc la topologie, au cours de l'exécution). Toutefois nous gardons la notation  $d$  (et non  $d_t$ ) par souci de simplification.

Cette description minimaliste généralise [1, p. 14], où l'environnement est présenté comme « un espace disposant généralement d'une métrique », et couvre en fait des situations fort diversifiées :

- l'espace usuel en 3D correspond à  $E = \mathbb{R}^3$ , avec pour  $d$  la distance euclidienne ;
- une grille à deux dimensions, dans laquelle on utilise le voisinage de Moore (chaque cellule est à distance 1 de ses 8 voisines), correspond à  $E = \mathbb{Z}^2$ , avec pour  $d$  la distance de Tchebychef (écart maximum entre les coordonnées des points) ;
- de même un espace continu 2D « torique » de largeur  $w$  et de hauteur  $h$  correspond mathématiquement à l'espace quotient  $\mathbb{R}^2 / (w\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z})$  (avec par exemple la distance euclidienne) ;
- un réseau d'acoïtances se modélise par un graphe, i.e. un ensemble  $E$  de sommets muni de la distance géodésique (plus petit chemin entre chaque couple de nœuds) ;
- un environnement de type « soupe » où les agents sont « non localisés » (c'est-à-dire tous au même endroit) se représente au moyen d'un singleton  $E = \{p\}$ , muni de la distance triviale  $\forall x, y, d(x, y) = 0$ .

**N.B.** : une raison qui d'ordinaire fait que l'on distingue les environnements spatiaux des environnements sociaux, c'est qu'il peut sembler que les premiers sont d'abord liés à une distance, tandis que les seconds donnent la primauté à la topologie. En pratique cela n'a aucune espèce d'importance : comme l'illustrent les exemples ci-dessus, la topologie découle souvent de la quasidistance, mais réciproquement la quasidistance peut se construire à partir des relations topologiques.

Il ne suffit toutefois pas de dire dans quelle sorte de monde les agents peuvent évoluer pour avoir défini un *environnement*. À chaque instant, chaque agent se trouve à un endroit précis de l'espace ; en outre lors de la modélisation on s'intéresse en général seulement à un sous-ensemble  $\mathcal{E} \subset (E, d)$ . Si l'on admet que l'environnement a bien vocation à localiser les agents, à induire des relations de *voisinage* qui vont permettre à chaque agent d'effectuer des actions en fonction de ses perceptions locales et de son état, il est indispensable d'adjoindre à l'espace où se trouvent les agents, une fonction qui permet de leur attribuer une **position**. Une telle fonction est de la forme :  $pos_t : \mathcal{A}_t \rightarrow \mathcal{E}$ . L'environnement peut alors être défini ainsi :

Un environnement est un sous-ensemble  $\mathcal{E}$  d'un espace quasimétrique  $(E, d)$  muni d'une famille de fonctions  $(pos_t)_{t \in [0, T_{\max}]}$  qui donnent les positions successives des agents dans  $\mathcal{E}$ .

On notera que cette description (ainsi que ce qui suit) s'extrapole aisément aux situations dans lesquelles les agents ont une *extension spatiale*, i.e. occupent une partie de l'espace ( $\wp(\mathcal{E})$ ) et non simplement un point, en définissant une fonction  $\overline{pos}_t : \mathcal{A}_t \rightarrow \wp(\mathcal{E})$ .

La raison pour laquelle d'ordinaire nous n'identifions pas la **position** comme étant ce qu'elle est, une *fonction*, c'est que la plupart du temps nous ne sommes pas en mesure de donner cette fonction en *intension* mais seulement en *extension* — et ce, de façon distribuée puisque c'est en général chaque agent  $a$  qui connaît la valeur de  $pos_t(a)$  sous la forme d'un attribut. Pire : le passage de  $pos_t$  à  $pos_{t+1}$  est lui-même en général l'effet d'un algorithme propre à chaque agent (l'effet de son comportement), de sorte que la connaissance de  $pos_t$  ne permet que très rarement de prévoir ce que sera  $pos_{t+1}$ . Il n'en reste pas moins, comme nous le verrons ensuite, que cette façon de décrire l'environnement permet de mettre en évidence les critères qui peuvent présider aux choix d'implémentation — et ce, d'une manière totalement indépendante du domaine visé.

On peut par ailleurs définir la fonction réciproque de la position, le *contenu* associé à un point de l'environnement, comme suit :

$$\begin{aligned} \mathit{cont}_t : \mathcal{E} &\rightarrow \wp(\mathcal{A}_t) \\ p &\mapsto \{a \in \mathcal{A}_t \mid pos_t(a) = p\} \end{aligned}$$

À partir de cette formalisation, nous affirmons que ce qui distingue divers types d'environnements et les façons possibles de les implémenter (autrement dit le passage de l'environnement conceptuel à l'environnement opérationnel), c'est d'une part *la nature de l'espace quasimétrique*  $(E, d)$  (continu, réseau, graphe, singleton) et d'autre part, le *choix d'explicitier ou non ces fonctions*, en particulier  $\mathit{cont}_t$ .

En effet, ce qui compte pour l'action des agents, c'est de savoir avec quels autres agents (leurs *voisins*) ils peuvent interagir. Le comportement des agents est donc directement dépendant de la fonction en charge de la *perception des voisins* (*neighbors*), soit :  $\nu_t : \mathcal{A}_t \rightarrow \wp(\mathcal{A}_t)$ .

La fonction la plus « simple » (au sens topologique) qu'on puisse définir pour déterminer les

voisins d'un agent  $a$  est simplement le calcul des agents situés dans une boule centrée sur la position de  $a$  et de rayon  $r$  (souvent appelé « halo de perception » de  $a$ ) :

$$\nu_t(a) = \{a' \in \mathcal{A}_t \setminus \{a\} \mid d(pos_t(a), pos_t(a')) \leq r\}$$

mais il existe bien sûr une infinité de fonctions de voisinage possibles. En pratique, le calcul de ce voisinage peut s'avérer coûteux et c'est donc un compromis temps/espace entre algorithmique et structure de données qui donne naissance à l'implémentation de cette fonction sous telle ou telle forme, comme nous le décrivons dans la section 3.

## 2.2 Deuxième fonction : porter de l'information

À cela s'ajoutent également des choix de modélisation de « l'information » dont l'environnement peut être porteur. Comme nous l'avons signalé, selon l'échelle de la modélisation il peut être nécessaire d'approximer les niveaux sous-jacents par une mesure macroscopique.

Prenons l'exemple des phéromones : en toute rigueur, il s'agit de molécules qui sont soumises à des phénomènes physico-chimiques comme le mouvement brownien (qui cause leur diffusion) et l'évaporation ou la dégradation. En tant que telles, elles devraient donc être représentées par des agents. Dans ce premier cas, l'environnement ne « porte » aucune information : ce sont les molécules concernées qui s'en chargent, *en tant qu'agents*, en interagissant avec d'autres sortes d'agents. Mais en pratique, on préfère souvent les modéliser par une double approximation : d'une part on les agrège numériquement (un peu à la façon d'une concentration en chimie); d'autre part on les place dans un espace discrétisé (les cases d'une grille). Dans ce second cas, qui est bien souvent utilisé à seules fins de réduire le coût computationnel d'un trop grand nombre d'entités (et au prix d'une approximation des mécanismes de diffusion par exemple), la littérature SMA n'offre pas de consensus pour nommer cette représentation purement informationnelle.

Or, puisqu'il s'agit au fond de procéder à une approximation comme en physique ou en chimie, il nous semble judicieux de faire appel à la notion de **champ**, déjà utilisée par exemple pour la navigation réactive (« champs de potentiels » [8]), et que nous souhaitons généraliser en considérant que toute « information » (force de gravitation, température, obstacle...)

présente dans l'environnement est une fonction de champ. Le champ est alors une fonction définie sur  $\mathcal{E}$ , à valeurs dans un ensemble d'informations  $\mathcal{I}$ . Ainsi par exemple, la concentration de phéromones dans chaque case d'une grille est donc une fonction **phero** :  $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Elle est définie en extension et change à chaque pas de temps au moyen d'un algorithme de diffusion-évaporation (tel que décrit dans [10]).

Un champ peut être parfois, bien que plus rarement, défini en intension : par exemple dans *InfiniteForest* de [11] où, au moyen d'une technique procédurale, il est possible de se placer en n'importe quel point de  $\mathbb{Z}^2$  et d'y trouver un paysage constant dans le temps mais différent de tous les autres, avec un coût computationnel et un coût mémoire extrêmement réduits.

Là encore, les choix de représentation explicite ou non de ces fonctions de champs entraînent des contraintes sur l'implémentation de l'environnement opérationnel.

### 3 Quatre *patterns* fondamentaux

Il ne fait aucun doute qu'on rencontre *de facto* une très grande variété de structures et d'algorithmes permettant d'implémenter l'environnement (voire les environnements) d'un SMA. Notre propos ici n'est ni de prétendre à une approche normative, ni de viser à une énumération exhaustive de tous les cas, mais bien plutôt de montrer que, selon la nature de l'espace métrique  $(E, d)$  qui sous-tend un environnement, et selon le choix d'implémenter ou non la fonction réciproque de la position, on peut identifier un nombre limité de grandes familles d'implémentations, correspondant chacune à des usages récurrents, et dans lesquelles s'inscrivent la plupart des situations usuelles.

Dans ce qui suit, nous présentons les quatre *patterns* fondamentaux que nous avons identifiés, en expliquant d'abord brièvement leur principe et leurs principaux avantages et inconvénients. Nous montrons ensuite comment sont réalisées deux opérations majeures : la *recherche de voisins* et le *déplacement* d'un agent, autrement dit les algorithmes (notés respectivement **neighbors**(**a**, **r**) et **move\_to**(**a**, **p**)) qui construisent les valeurs des fonctions  $\nu_t$  et  $pos_{t+1}$  pour chaque agent. Enfin nous indiquons les situations dans lesquelles s'applique chaque *pattern*.

Au lieu de chercher à construire un environnement unique relativement complexe qui em-

pêche la séparation des préoccupations<sup>1</sup>, il est préférable de *combiner plusieurs de ces patterns d'environnements élémentaires*. Ainsi par exemple, si des robots simulés doivent cartographier collectivement un bâtiment, ils sont à la fois situés dans un environnement continu dans lequel se trouvent des obstacles (autres entités), et dans un environnement social (réseau d'accointances) pour échanger leurs informations. Dans de très rares cas à l'inverse l'« environnement » peut devenir implicite, en n'étant plus déduit que des relations d'accointances entre agents (§ 3.4).

#### 3.1 Le *pattern AgentSet*

**Principe.** L'implémentation la plus immédiate et la plus générale (applicable à un environnement élémentaire quelconque) consiste à doter chaque agent d'un attribut **pos** représentant  $pos_t(a)$  (position de l'agent  $a$  à l'instant  $t$ ), l'environnement se réduisant à une collection d'agents qui représente  $\mathcal{A}_t$  et à la fonction  $d$ .

**Avantages et inconvénients.** L'avantage de cette méthode est sa simplicité d'écriture ; son inconvénient principal, une complexité de la perception des voisins à chaque tour de parole en  $\mathcal{O}(n^2)$ ,  $n$  étant le nombre d'agents dans le système. En effet, pour calculer sa fonction **neighbors**, chaque agent doit calculer la distance aux  $(n - 1)$  autres agents (cf. algo 1). En revanche le déplacement d'un agent n'affecte que lui-même puisqu'il consiste simplement à modifier l'attribut **pos** de l'agent concerné (algo 2).

Dans cette implémentation, seule la fonction  $pos_t$  est explicitement réifiée. En pratique, l'environnement opérationnel se réduit à un ensemble d'agents.

---

**Algorithme 1** : Calcul des voisins d'un agent (*pattern AgentSet*)

---

```

1  $\forall a_i \in \mathcal{A}_t$  neighbors( $a_i, r$ ) :
2 N  $\leftarrow \emptyset$ 
3 for  $a_j \in \mathcal{A}_t, a_j \neq a_i$  do
4   | if  $d(pos_t(a_i), pos_t(a_j)) \leq r$  then
5   |   | N  $\leftarrow \mathbf{N} \cup \{a_j\}$ 
6   | end
7 end
8 return N

```

---

1. au sens de la *separation of concerns* en génie logiciel

---

**Algorithme 2** : Déplacement d'un agent (*pattern* AgentSet)

---

1 **move\_to**( $a_i, p$ ) :  $pos_{t+1}(a_i) \leftarrow p$ .

---

**Usage.** Le *pattern* AgentSet nous semble approprié pour des environnements relativement quelconques dans lesquels les agents sont en nombre réduit, sans quoi le coût du calcul des voisins le rend prohibitif et fait préférer l'un des deux *patterns* ci-dessous. Il convient également si les éventuels champs sont donnés en intensité. En revanche, il ne se prête pas bien à la représentation « d'obstacles », que ceux-ci soient représentés par des agents (car il faut procéder par « lancer de rayon »), par la quasidistance ou par des champs (car alors ces fonctions doivent être données en extension).

### 3.2 Le *pattern* StandardGrid

**Principe.** On rencontre assez fréquemment des environnements basés sur un espace discret organisé sous la forme d'un **réseau** (l'exemple le plus simple étant des coordonnées entières dans un espace de dimension  $k$ ,  $E = \mathbb{Z}^k$ ). On peut alors voir les positions discrètes des agents comme des « cases » et l'implémentation de tels environnements consiste à ajouter à la solution précédente une structure de type *grille*, i.e. un ensemble de *cellules* qui constituent un pavage régulier de l'environnement. Dans le cas de  $\mathbb{Z}^k$ , cela se fait aisément à partir d'un tableau à  $k$  dimensions contenant des ensembles d'agents. Pour chaque point (ou cellule)  $p$  de l'environnement, on dispose ainsi d'un accès direct à tous les agents situés en ce point, autrement dit on explicite par cet attribut la fonction  $cont_t$  réciproque de  $pos_t$ . On dispose par ailleurs d'un moyen simple d'accéder aux points adjacents à  $p$  puisqu'un tel réseau définit en fait un système de coordonnées : le calcul des points voisins de  $p$  (*neighborhood* dans l'algorithme 3, ligne 3) est donc immédiat (boucle sur des coordonnées).

**Avantages et inconvénients.** L'accès direct aux agents situés en un point accélère considérablement la recherche des voisins d'un agent  $a_i$ , puisque ceux-ci sont nécessairement dans la même cellule que  $a_i$  ou dans les cellules adjacentes. Pour calculer les voisins de  $n$  agents dans un rayon  $r$  (algo 3), le calcul est en  $\mathcal{O}(n.r^k)$ , puisqu'il faut examiner  $\mathcal{O}(r^k)$  points de l'environnement seulement (ainsi pour un

voisinage de Moore avec  $k = 2$  on examine au plus un carré de  $(2r+1)^2$  cellules). En revanche, le déplacement d'un agent nécessite des mises à jour plus compliquées pour maintenir la cohérence entre  $pos_{t+1}$  et  $cont_{t+1}$  (algo 4).

---

**Algorithme 3** : Calcul des voisins d'un agent (*pattern* StandardGrid)

---

1  $\forall a_i \in \mathcal{A}_t$  **neighbors**( $a_i, r$ ) :  
2  $\mathbf{N} \leftarrow \emptyset$   
3 **neighborhood**  $\leftarrow \{p \in E \mid d(pos_t(a_i), p) \leq r\}$   
4 **for**  $c \in$  **neighborhood** **do**  
5 |  $\mathbf{N} \leftarrow \mathbf{N} \cup cont_t(c)$   
6 **end**  
7 **return**  $\mathbf{N} \setminus \{a_i\}$

---

---

**Algorithme 4** : Déplacement d'un agent (*pattern* StandardGrid)

---

1 **move\_to**( $a_i, p$ ) :  
2  $cont_{t+1}(pos_t(a_i)) \leftarrow cont_t(pos_t(a_i)) \setminus \{a_i\}$   
3  $cont_{t+1}(p) \leftarrow cont_t(p) \cup \{a_i\}$   
4  $pos_{t+1}(a_i) \leftarrow p$

---

**Usages.** Cette méthode s'applique assez naturellement dès que l'on doit représenter un environnement à coordonnées entières et que le *pattern* AgentSet s'avère trop coûteux. C'est le cas si le rayon moyen  $\bar{r}$  dans lequel les agents recherchent leurs voisins vérifie :  $\bar{r}^k \ll n$ . C'est également une solution particulièrement adaptée à la représentation des champs, notamment lorsque ceux-ci peuvent faire l'objet d'une approximation sur des coordonnées entières (c'est le cas fréquemment des phéromones) : même s'ils sont donnés en extension, il suffit de les stocker dans un tableau à  $k$  dimensions. On peut alors envisager en outre une parallélisation du calcul comme proposé dans [10]. De même, la gestion d'obstacles est facilitée, que ce soit sous la forme d'agents (et « condamnant » l'accès à leur cellule), de champs ou de la distance (topologie des cellules).

Ce procédé par « grille » ne se limite évidemment pas à un pavage carré ; les simulations en géographie font un usage fréquent des hexagones [13], qui constituent également un réseau de  $\mathbb{R}^2$  et où l'on peut donc donner des coordonnées entières à toute cellule hexagonale. Cette méthode s'applique également aux environnements basés sur des graphes (labyrinthes, sites web, ontologies...) : dans ce cas l'espace est un ensemble de places ( $\mathcal{E} = \{p_1, \dots, p_N\}$ ) qui peut

se représenter par un tableau de  $N$  ensembles d'agents, et l'on peut représenter les distances entre ces points par une matrice des distances  $(\delta_{ij})$  où  $\forall i, j \delta_{ij} = d(p_i, p_j)$ . L'existence de cette matrice donne un accès direct aux places situées dans un rayon  $r$  autour de la place  $pos_t(a_i)$ .

Enfin, notons que ce *pattern* se simplifie dans un cas fréquent : si deux agents ne peuvent occuper la même position (fonction  $pos_t$  injective), alors il suffit de disposer d'un tableau d'agents au lieu d'un tableau d'ensembles d'agents.

### 3.3 Le *pattern* AggregateGrid

**Principe.** Le *pattern* précédent ne peut s'appliquer directement lorsque l'environnement est continu. Néanmoins, à défaut de réifier la fonction  $cont_t$ , on peut en construire une approximation discrète en « projetant » les positions continues dans un espace discret  $\mathbb{E} \subset E$ . Il faut pour cela définir une fonction  $cell_m : E \rightarrow \mathbb{E}$  qui discrétise  $E$  suivant un maillage de pas  $m$  (autrement dit il faut :  $\forall c \in \mathbb{E}, \exists c' \in \mathbb{E}, c' \neq c$  tel que  $d(c, c') \leq m$ ). Ainsi en prenant par exemple  $E = \mathbb{R}^2$ , on peut choisir assez naturellement  $\mathbb{E} = \mathbb{Z}^2$  et la fonction de discrétisation la plus immédiate s'écrit :

$$\begin{aligned} cell_m : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ p = (x, y) &\mapsto (\lfloor \frac{x}{m} \rfloor, \lfloor \frac{y}{m} \rfloor) \end{aligned}$$

où  $\lfloor u \rfloor$  désigne la partie entière par défaut de  $u$ . On peut alors définir dans le cas général une forme « agrégée » de  $cont_t$  donnant l'ensemble d'agents situés dans la « cellule »  $c$  :

$$\begin{aligned} cell\_cont_t^m : \mathbb{E} &\rightarrow \wp(\mathcal{A}_t) \\ c &\mapsto \{a \in \mathcal{A}_t \mid cell_m(pos_t(a)) = c\} \end{aligned}$$

Il reste à réifier la fonction  $cell\_cont_t^m$  comme précédemment, au moyen d'un tableau  $cell\_cont$  à  $k$  dimensions contenant des ensembles d'agents (les agents contenus dans la cellule  $cell_m(p)$ ). Là encore, le calcul de voisinage entre cellules (algo 5, ligne 4) est direct puisqu'on peut travailler sur des coordonnées.

**Avantages et inconvénients.** Cette discrétisation permet de profiter de l'accélération computationnelle d'une grille, tout en autorisant un maillage arbitraire  $m$  de l'espace continu. Le coût de la recherche des voisins de  $n$  agents dans un rayon  $r$  est en  $\mathcal{O}(n \cdot (\lceil \frac{r}{m} \rceil)^k \cdot \bar{q})$  (où  $\lceil u \rceil$  est la partie entière par excès de  $u$ ,  $\bar{q}$  désignant la *densité* des agents, i.e. le nombre moyen d'agents dans chaque cellule (cf. algo 5). En revanche comme précédemment la mise à jour du contenu des cellules est complexifiée (cf. algo 6).

---

#### Algorithme 5 : Calcul des voisins d'un agent (*pattern* AggregateGrid)

---

```

1  $\forall a_i \in \mathcal{A}_t$  neighbors( $a_i, r$ ) :
2  $\mathbf{N} \leftarrow \emptyset$ 
3  $c_0 \leftarrow cell^m(pos_t(a_i))$ 
4 neighborhood  $\leftarrow \{p \in \mathbb{E} \mid d(c_0, p) \leq \lceil \frac{r}{m} \rceil\}$ 
5 for  $c \in$  neighborhood do
6   for  $a_j \in cell\_cont_t^m(c), a_j \neq a_i$  do
7     if  $d(a_i, a_j) \leq r$  then
8        $\mathbf{N} \leftarrow \mathbf{N} \cup \{a_j\}$ 
9     end
10  end
11 end
12 return  $\mathbf{N}$ 

```

---



---

#### Algorithme 6 : Déplacement d'un agent (*pattern* AggregateGrid)

---

```

1 move_to( $a_i, p$ ) :
2  $cont\_cell_{t+1}(pos_t(a_i)) \leftarrow$ 
    $cont\_cell_t(pos_t(a_i)) \setminus \{a_i\}$ 
3  $cont\_cell_{t+1}(p) \leftarrow cont\_cell_t(p) \cup \{a_i\}$ 
4  $pos_{t+1}(a_i) \leftarrow p$ 

```

---

**Usages.** Le *pattern* AggregateGrid s'applique dès lors que l'on doit représenter un environnement continu contenant un nombre important d'agents. Un point très intéressant de cette méthode concerne les environnements de taille finie, car si les agents occupent l'espace de façon homogène, il est possible de calculer un maillage qui maintienne le temps de calcul en-dessous d'un seuil fixé. En effet, si l'on considère un environnement « hypercubique »  $\mathcal{E} = [0, W]^k$ , discrétisé en  $C = \lceil \frac{W}{m} \rceil^k$  cellules, la densité est  $q = \frac{n}{C}$  et le calcul se fait donc en  $\mathcal{O}(n^2 \cdot (\frac{a}{b})^k)$ , en posant  $a = \lceil \frac{r}{m} \rceil$  et  $b = \lceil \frac{W}{m} \rceil$ . L'encadrement des parties entières donne :  $\frac{r}{W+m} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{r+m}{W}$ . Autrement dit, si l'on est capable d'estimer le rayon de perception moyen des agents ainsi que le nombre d'agents attendu, le coût en  $\mathcal{O}(n^2)$  peut être contrebalancé par un facteur d'accélération  $g = (\frac{b}{a})^k$  qui est plus grand que la valeur  $G = (\frac{W}{r+m})^k$ . On peut donc, en ajustant le maillage, garder par exemple un temps de calcul proportionnel au nombre d'agents en choisissant  $G > n$ , soit  $m \leq m^*$  avec  $m^* = \frac{W}{\sqrt[k]{n}} - \bar{r}$ . Le tableau 1 donne les valeurs  $m^*$  obtenues pour diverses valeurs du nombre d'agents et du rayon de perception moyen, à taille ( $W$ ), et dimension ( $k$ ) fixées. Le

$n \backslash \bar{r}$	0,5	1	2	5	10	50	100
$10^2$	99,5	99	98	95	90	50	0
$10^3$	31,1	30,6	29,6	26,6	21,6		
$10^4$	9,5	9	8	5			
$10^5$	2,7	2,2	1,2				
$10^6$	0,5						

TABLE 1 – Valeur du maillage  $m^* = \frac{W}{\sqrt[k]{n}} - \bar{r}$  qui garantit un temps de calcul en  $\frac{n^2}{g}$ , avec  $g \geq n$  ( $n$  étant le nombre d’agents attendu dans le système), pour diverses valeurs du rayon de perception moyen  $\bar{r}$ ; on a pris ici  $W = 10^3$  et  $k = 2$ . Les valeurs manquantes correspondent à  $m^* \leq 0$ , ce qui signifie que la densité des agents entraîne un coût de calcul supplémentaire (on perd la majoration de  $g$ ) — cf. tab. 2.

$n \backslash \bar{r}$	0,5	1	2	5	10	50	100
$10^2$	3,65	3,4	3,05	2,44	1,92	0,58	-0,01
$10^3$	2,65	2,4	2,05	1,44	0,92	-0,42	-1,01
$10^4$	1,65	1,4	1,05	0,44	-0,08	-1,42	-2,01
$10^5$	0,65	0,4	0,05	-0,56	-1,08	-2,42	-3,01
$10^6$	-0,35	-0,6	-0,95	-1,56	-2,08	-3,42	-4,01

TABLE 2 – Gain relatif maximum  $\log_{10} \frac{G}{n} = \log_{10} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{W}{\bar{r}+m}\right)^k$  sur le coût de perception des voisins pour un maillage « naïf »  $m = 1$ , en fonction du nombre  $n$  d’agents attendu dans le système et du rayon de perception moyen  $\bar{r}$  (le temps de calcul est majoré par  $\frac{n^2}{G}$ ); on a pris ici  $W = 10^3$  et  $k = 2$ .

tableau 2 donne quant à lui le gain relatif  $\log_{10} \frac{G}{n}$  obtenu en prenant un maillage « naïf »  $m = 1$ , ce qui permet d’estimer le coût de la perception.

Bien évidemment ces calculs ne concernent que la perception des voisins, en pratique il doivent être ajustés pour tenir compte des mises à jours nécessaires lorsque les agents se déplacent (i.e. changent de cellule dans l’espace discrétisé) : cela dépend de la vitesse (moyenne) de déplacement des agents, ainsi que de l’efficacité de la suppression et de l’ajout d’un agent dans les structures de données qui représentent le contenu d’une cellule.

On peut évidemment appliquer ce *pattern* pour un environnement discret pour lequel un maillage « naturel » de 1 serait inefficace (par exemple parce que l’on aurait  $\bar{r} \gg 1$ ). Comme dans le *pattern* StandardGrid, il est également très facile de représenter par cette méthode divers champs, sous réserve que la discrétisation par un maillage  $m$  soit réaliste par rapport à l’échelle spatiale du champ. Enfin, comme précédemment on peut étendre cette méthode à des pavages variés (hexagones dans le plan par exemple), y compris, si la répartition des agents dans l’espace est très hétérogène, à toute par-

tion de l’espace (en veillant à garder pour chaque cellule  $c$  un accès direct aux cellules adjacentes) : tessellation de Voronoï, *quadrees*, etc.

### 3.4 Le *pattern* SocialNet

Reste enfin à traiter une situation associée en règle générale aux environnements « sociaux », c’est-à-dire dans lesquels on considère que les relations d’acoïntances entre agents sont premières.

**Principe.** Chaque agent est doté d’un attribut **acoïntances** correspondant à l’ensemble des agents qu’il connaît et avec lesquels il peut interagir directement. Cela revient à dire que la fonction  $pos_t$  est bijective puisque ce qui compte, ce ne sont pas les places où se trouvent les agents, mais *les relations d’accessibilité* de ces places : autrement dit les relations d’acoïntances définissent la matrice d’adjacence d’un graphe (orienté si elles ne sont pas réciproques) :

$$\forall i, j, e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_j \in \text{acoïntances}_t(a_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Deux situations se présentent donc :

1. Si l’agent ne peut interagir qu’à distance 1, la solution est triviale : la fonction **neighbors**( $a_i, r$ ) n’est définie que pour  $r = 1$  et elle retourne l’attribut **acoïntances**. L’environnement est alors « virtuel » car totalement distribué dans les listes d’acoïntances des agents : c’est ce qu’on appelle parfois [1] un « SMA purement communiquant ».
2. Si l’agent peut interagir à une distance plus grande (par exemple s’adresser aux acoïntances de ses acoïntances, ne serait-ce que pour les inclure dans ses propres acoïntances), il faut théoriquement passer par une fonction récursive qui peut être coûteuse (si chaque agent possède en moyenne  $q$  acoïntances, la recherche des « voisins » dans un rayon  $r$  est en  $\mathcal{O}(q^r)$ ). Dans ce cas, il est préférable de réifier la fonction de distance au moyen d’une matrice ( $\delta_{ij}$ ) où  $\forall i, j \delta_{ij} = d(pos_t(a_i), pos_t(a_j))$ . Cette matrice peut être calculée à partir de la matrice d’adjacence mentionnée ci-dessus, par exemple en appliquant l’algorithme de Floyd-Warshall [3, 15] comme décrit dans l’algorithme 7. Le

calcul des voisins utilise exactement le même algorithme que dans le *pattern AgentSet* (algo 1), à ceci près que l'on a  $\forall a_i, a_j : d(a_i, a_j) = \delta_{ij}$ .

**Avantages et inconvénients.** Le cas trivial est d'une grande simplicité d'implémentation : s'il peut être nécessaire de disposer d'un graphe pour initialiser les relations d'accointances entre agents (par exemple construction d'un *small-world*), celui-ci n'est plus nécessaire ensuite. Dans le second cas, l'utilisation d'une matrice des distances permet d'interagir avec des voisins dans un rayon arbitraire ; en revanche les changements qui peuvent survenir dans les relations d'accointances supposent de recalculer ces distances, ce qui est en  $\mathcal{O}(n^3)$ .

---

**Algorithme 7 :** Calcul de la matrice de distances (*pattern SocialNet*) par Floyd-Warshall

---

```

1 for  $i \in [1, n]$  do
2    $\delta_{ii} \leftarrow 0$ 
3   for  $j \in [1, n], j \neq i$  do
4     if  $a_j \in \text{accointances}_t(a_i)$  then
5        $\delta_{ij} \leftarrow 1$ 
6     else
7        $\delta_{ij} \leftarrow +\infty$ 
8     end
9   end
10 end
11 for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
12   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
13     for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
14        $\delta_{ij} \leftarrow \min(\delta_{ij}, \delta_{ik} + \delta_{kj})$ 
15     end
16   end
17 end

```

---

## 4 Discussion

Dans cette dernière section, nous cherchons à comparer notre définition de l'environnement à nos *patterns* par rapport à deux approches bien connues et très différentes, à savoir AGRE [2] de Ferber d'une part, et l'abstraction défendue par Weyns [16] d'autre part. Nous voulons montrer comment nos propositions permettent de construire un cadre conceptuel plus simple et un cadre opérationnel plus précis, en dissociant mieux les diverses préoccupations qui sous-tendent ces travaux.

Dans [2], l'environnement s'ajoute à la méthodologie Agent/Groupes/Rôles existante. La

notion de *monde* (*world*) est définie comme collection d'*espaces* (*spaces*) qui régulent les interactions entre agents. Chaque espace peut être soit un *groupe*, soit une *zone* (*area*). Ainsi cette approche maintient une séparation forte entre les environnements sociaux (groupes) où les agents peuvent échanger des messages selon leurs *rôles*, et l'environnement physique (unique), où les agents agissent au moyen de leur unique *corps*. Si nous appliquons nos définitions à AGRE, la distinction entre *zones* et *groupes* disparaît derrière le concept unifié d'environnement élémentaire. Les groupes sont représentés par des graphes de rôles dont la topologie est définie par des protocoles d'interaction (*pattern SocialNet*), tandis que les zones sont représentées par un environnement souvent euclidien, et en général basé sur l'usage d'une grille (*StandardGrid* ou *AggregateGrid*).

Le modèle proposé par [16] est une sorte de « modèle OSI » dans lequel l'environnement est défini comme un système en couches qui vont de l'infrastructure système à la médiation des interactions. Cette approche repose sur trois niveaux principaux : la couche de base, qui donne accès au contexte de déploiement ; la couche d'abstraction qui vise à faire écran aux primitives de bas niveau (par exemple, une requête SQL dans une base de données appartient à la couche de base, tandis qu'un artefact « agenda » lui correspondrait dans la couche d'abstraction) ; enfin, la couche de médiation des interactions, qui régule l'accès à des ressources partagées et sert de support aux interactions. Le modèle de référence qui est proposé [16, fig. 4] détaille les principaux modules qui composent cette notion d'environnement : perception, observation et traitement des données, normes, interactions, communication...

Nous rejoignons Weyns sur l'importance à donner à l'environnement dans la conception et l'implémentation d'un SMA ; néanmoins sa proposition constitue un bloc monolithique où l'on ne distingue pas comment les normes, les interactions et les communications peuvent être organisées pour structurer le système. Plus précisément, la distinction entre couche d'abstraction et couche de médiation semble liée à la sémantique de l'information qui y est traitée, et paraît fortement dépendante du domaine d'application (la robotique mobile).

Si nous appliquons notre définition au modèle de Weyns, la perception et les modules d'interaction qui sont définis séparément seraient réifiés respectivement comme une dis-

tance dans un environnement euclidien continu (*pattern* AggregateGrid), et une distance sociale (*pattern* SocialNet). De plus, la réalisation de l'infrastructure de médiation qui régule les échanges entre agents est indépendante de la nature (physique ou sociale) de l'environnement.

Ainsi, sans préjuger de l'intérêt de ces modèles pour l'analyse ou l'implémentation des SMA, on constate que notre approche a pour effet d'unifier les concepts ordinairement disjoints d'environnement physique et d'environnement social, et de décomposer l'environnement, vu d'ordinaire comme un tout assez complexe, en autant d'environnements élémentaires que nécessaire, dont l'implémentation est univoque.

## 5 Conclusion

La notion d'environnement, bien que centrale dans la conception de SMA, souffre d'une absence de définition univoque et applicable à de nombreux contextes d'usages. Dans cet article, nous proposons de considérer l'environnement comme l'expression du positionnement spatial ou social des agents et comme porteur d'informations dont la granularité est trop fine pour être représentées par des agents. La notion d'environnement est donc définie comme un espace, muni d'une quasidistance et de fonctions de placement et de contenu, permettant de déterminer les perceptions des agents.

Le passage de l'environnement conceptuel à l'environnement opérationnel peut alors être explicite à l'aide d'un nombre restreint de *design patterns* qui possèdent chacun des propriétés les rendant plus ou moins pertinents selon les critères que l'on souhaite optimiser. Dans ce cadre, nous défendons l'idée qu'un agent appartient généralement à plusieurs environnements (spatiaux ou sociaux). Ces propositions nous semblent constituer une contribution supplémentaire vers une formalisation des concepts fondamentaux des systèmes multi-agents.

## Références

- [1] J. Ferber. *Les Systèmes Multi-Agents. Vers une intelligence collective*. InterÉditions, 1995.
- [2] J. Ferber, F. Michel, and J. Báez. AGRE : Integrating environments with organizations. In D. Weyns et al., editors, *Environments for Multi-Agent Systems : 1st Int. Workshop (E4MAS'2004)*, volume 3374 of LNCS, pages 48–56. Springer, 2005.
- [3] R.W. Floyd. Algorithm 97 : Shortest path. *Communications of the ACM*, 5(6) :345, 1962.
- [4] E. Gamma, R. Helm, R. Johnson, and J. Vlissides. *Design Patterns, Elements of Reusable Object-Oriented Software*. Addison Wesley, 1994.
- [5] A. Helleboogh, G. Vizzari, A. Uhrmacher, and F. Michel. Modeling dynamic environments in multi-agent simulation. *Journal of Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (JAAMAS)*, 14(1) :87–116, 2007.
- [6] Y. Kubera, P. Mathieu, and S. Picault. Everything can be agent ! In W. van der Hoek et al., editors, *9th Int. Joint Conf. on Auton. Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS)*, pages 1547–1548, 2010.
- [7] Y. Kubera, P. Mathieu, and S. Picault. IODA : An interaction-oriented approach for multi-agent based simulations. *J. Auton. Agents and Multi-Agent Systems (JAAMAS)*, 23(3) :303–343, 2011.
- [8] J.-C. Latombe. *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [9] P. Mathieu and Y. Secq. Environment updating and agent scheduling policies in agent-based simulators. In J. Filipe and A.L.N. Fred, editors, *Proc. of the 4th Int. Conf. on Agents and Artificial Intelligence (ICAART)*, pages 170–175, 2012.
- [10] F. Michel. Intégration du calcul sur GPU dans la plate-forme de simulation multi-agent générique TurtleKit3. In S. Hassas and M. Morge, editors, *Journées Francophones sur les Systèmes Multi-Agents (JFSMA)*, pages 189–198. Cépaduès, 2013.
- [11] D. Payet, D. David, and N. Sébastien. Auto-génération d'environnement : l'exemple d'infinite forest. In Z. Guessoum and S. Hassas, editors, *Journées Francophones sur les Systèmes Multi-Agents (JFSMA)*, pages 165–174. Cepaduès, 2009.
- [12] S.J. Russell and P. Norvig. *Artificial Intelligence. A Modern Approach*. Prentice Hall, 1995.
- [13] L. Sanders, D. Pumain, H. Mathian, F. Guérin-Pace, and S. Bura. SIMPOP : a multi-agents system for the study of urbanism. *Environment and Planning B*, 24 :287–305, 1997.
- [14] L.A. Steen and J.A. Seebach. *Counterexamples in Topology*. Dover Publications, 1995. 2nd ed.
- [15] S. Warshall. A theorem on boolean matrices. *Journal of the ACM*, 9(1) :11–12, 1962.
- [16] D. Weyns and T. Holvoet. A reference architecture for situated multiagent systems. In D. Weyns et al., editors, *Environments for Multi-Agent Systems III (E4MAS 2006)*, volume 4389 of LNCS, pages 1–40. Springer, 2007.
- [17] D. Weyns, H.V.D. Parunak, F. Michel, T. Holvoet, and J. Ferber. Environments for multiagent systems. State-of-the-Art and research challenges. In D. Weyns et al., editors, *Environments for Multi-Agent Systems : 1st Int. Workshop (E4MAS)*, volume 3374 of LNCS, pages 1–47. Springer, 2005.