



**HAL**  
open science

## Construction et validation des éléments Serendip associés à un carreau de degré arbitraire

Paul-Louis George, Houman Borouchaki, Nicolas Barral

► **To cite this version:**

Paul-Louis George, Houman Borouchaki, Nicolas Barral. Construction et validation des éléments Serendip associés à un carreau de degré arbitraire. [Rapport de recherche] RR-8572, INRIA. 2014, pp.107. hal-01052913

**HAL Id: hal-01052913**

**<https://inria.hal.science/hal-01052913>**

Submitted on 29 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Construction et validation des éléments Serendip associés à un carreau de degré arbitraire.

Paul Louis George, Houman Borouchaki, Nicolas Barral

**RESEARCH  
REPORT**

**N° 8572**

Juillet 2014

Project-Team Gamma3





## Construction et validation des éléments Serendip associés à un carreau de degré arbitraire.

Paul Louis George\*, Houman Borouchaki†, Nicolas Barral‡

Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 8572 — Juillet 2014 — 107 pages

**Résumé :** On montre comment construire des éléments Serendip complètement symétriques basés sur un produit tensoriel (quadrilatères et hexaèdres) et on donne l'expression de leurs fonctions de forme. On indique que dès le degré 5, les éléments Serendip classiques ne sont plus symétriques mais que l'on peut construire des éléments (de Lagrange) complètement symétriques en ajoutant judicieusement des nœuds supplémentaires.

Par ailleurs, on indique comment valider géométriquement un élément courbe (vu comme un carreau) d'un maillage donné défini de cette façon. Cette validation se fait en raisonnant sur l'écriture des carreaux dans le formalisme Bézier (polynôme de Bernstein et points de contrôle). On discute ensuite des carreaux définis par interpolation transfinie et on montre que certains d'entre eux sont les mêmes que ceux obtenus précédemment et, ainsi, ont la propriété de Serendipité.

**Mots-clés :** Éléments finis de Lagrange Serendip. Quadrilatère. Hexaèdre. Interpolation transfinie. Élément d'ordre élevé.

---

\* INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

† UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

‡ INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: nicolas.barral@inria.fr

**RESEARCH CENTRE  
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt  
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

## Construction and validation of Serendipity elements of arbitrary degree.

**Abstract:** We give a method to constructing Serendipity elements for quads and hexes with full symmetry properties and indicate the reading of their shape functions. We show that, since the degree 5, the Serendipity elements are no longer symmetric but we propose a method resulting in a Lagrange element of degree 5 with full symmetry properties after adding an adequate number of additional nodes.

On the other hand, we show how to guarantee the geometric validity of a given curved element (seen as a patch) of a mesh. This is achieved after writing the patch in a Bézier setting (Bernstein polynomials and control points). In addition, we discuss the case of patch derived from a transfinite interpolation and it is proved that only some of them are Serendipity elements indeed, we return to the same elements as above.

**Key-words:** Lagrangian Serendipity Finite Element. Quadrilateral. Hexahedron. Transfinite interpolation. High order element

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Définitions relatives à la Serendipité</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Construction du quadrilatère Serendip de degré 2</b>	<b>6</b>
3.1	Caractérisation de l'espace des polynômes via Taylor . . . . .	7
3.2	Les fonctions de forme à partir de l'espace trouvé via Taylor . . . . .	9
3.3	Construction directe des fonctions de forme dans les Bézier . . . . .	10
3.4	Construction directe des fonctions de forme via un système . . . . .	12
3.5	Validation d'un quadrilatère courant d'un maillage donné . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Construction du quadrilatère Serendip de degré 3</b>	<b>15</b>
4.1	Caractérisation de l'espace des polynômes via Taylor . . . . .	16
4.2	Les fonctions de forme à partir de l'espace trouvé via Taylor . . . . .	19
4.3	Construction directe des fonctions de forme dans les Bézier . . . . .	21
4.4	Construction directe des fonctions via un système . . . . .	23
4.5	Validation d'un quadrilatère courant d'un maillage donné . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Construction du quadrilatère Serendip de degré 4</b>	<b>29</b>
5.1	Caractérisation de l'espace des polynômes via Taylor . . . . .	30
5.2	Les fonctions de forme à partir de l'espace trouvé via Taylor . . . . .	36
5.3	Construction directe des fonctions de forme dans les Bézier . . . . .	41
5.4	Construction directe des fonctions via un système . . . . .	45
5.5	Validation d'un quadrilatère courant d'un maillage donné . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Quadrilatère Serendip de degré supérieur ?</b>	<b>46</b>
<b>7</b>	<b>Sur un quadrilatère Serendip de degré 5</b>	<b>48</b>
7.1	Caractérisation de l'espace des polynômes via Taylor . . . . .	48
7.2	Les fonctions de formes à partir de l'espace trouvé via Taylor . . . . .	57
7.3	Recherche de monômes dans l'espace des fonctions de forme . . . . .	61
7.4	Construction de l'espace réduit directement dans les Bézier . . . . .	64
7.5	Construction directe des fonctions de forme via un système . . . . .	73
7.6	Validation d'un quadrilatère courant d'un maillage donné . . . . .	74
7.7	Degré supérieur ? . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Interpolation transfinie et Serendipité</b>	<b>75</b>
8.1	Rappels sur les formes de Bézier . . . . .	75
8.2	Construction d'un élément transfini de degré quelconque . . . . .	76
8.2.1	Formalisme Bézier . . . . .	76
8.2.2	Formalisme éléments finis . . . . .	79
<b>9</b>	<b>Validation d'un élément de degré quelconque</b>	<b>83</b>
<b>10</b>	<b>Le cas de la trois dimensions</b>	<b>84</b>
10.1	Construction de l'hexaèdre Serendip de degré 2 . . . . .	84
10.2	Construction de l'hexaèdre Serendip de degré 3 . . . . .	88
10.3	Construction de l'hexaèdre Serendip de degré 4 . . . . .	98
10.4	Hexaèdre Serendip de degré supérieur ? . . . . .	98
10.5	Construction par interpolation transfinie . . . . .	98
10.5.1	Définition à partir des 12 arêtes . . . . .	98
10.5.2	Formalisme éléments finis . . . . .	101
10.6	Validation d'un élément tridimensionnel . . . . .	103
<b>11</b>	<b>Conclusion</b>	<b>104</b>



FIG. 1 – *Les trois princes de Serendip.*

## 1 Introduction

On indique comment construire des éléments quadrilatéraux et hexaédriques Serendip<sup>1</sup> complètement symétriques et on donne l'expression de leurs fonctions de forme. Notre approche consiste à trouver une relation entre le(s) nœud(s) central(traux) et les nœuds frontière puis à utiliser cette relation pour répartir des fonctions de base classiques de l'élément complet et obtenir ainsi les fonctions de l'élément réduit. Néanmoins cette construction, au moyen de développements de Taylor pour garantir la présence de monômes donnés, ne suffit pas pour traiter tous les degrés (en fait dès le degré 5), aussi nous proposons également une solution à ce problème, on perd la Serendipité classique mais l'élément est valable (et même plus riche que ce que prévoit la théorie des éléments Serendip) en tant qu'élément fini de Lagrange.

On présente également une méthode, originale à notre connaissance, qui construit ces mêmes éléments en raisonnant directement dans le monde des courbes et surfaces de Bézier, autrement dit, sans recourir à des développements de Taylor.

Par souci d'hexaustivité, on rappelle que tous ces résultats peuvent être obtenus directement en résolvant un système basé sur des instanciations après avoir écrit la forme générique des fonctions cherchées.

Par ailleurs, on indique comment valider géométriquement un élément courbe (vu comme un carreau) d'un maillage donné défini de cette façon. Cette validation se fait en raisonnant sur l'écriture des carreaux dans le formalisme Bézier (polynôme de Bernstein et points de contrôle).

On montre, pour finir, que l'interpolation transfinie est un moyen de construire des éléments finis de Lagrange dont certains sont des éléments Serendip et que leur analyse est rendue simple si on en trouve l'élément complet associé. On montre, pour tout ordre, comment définir les points de contrôle de l'élément complet équivalent. Le point de vue adopté consiste à raisonner sur l'écriture de ces carreaux dans le formalisme Bézier (polynôme de Bernstein et points de contrôle), monde dans lequel tout se simplifie, ce qui permet facilement d'énoncer des conditions suffisantes de validité.

Notre approche est clairement basée sur le fait que l'on voit les éléments finis comme des carreaux et réciproquement, ce qui est peu habituel dans la littérature classique sur les éléments finis et exclut, de fait, les éléments dont les degrés de liberté ne sont pas les valeurs d'une fonction aux nœuds mais comprennent des dérivées, ..., donc se cantonne aux éléments dont la géométrie est définie par des polynômes de Lagrange.

## 2 Définitions relatives à la Serendipité

Les éléments Serendip de bas degré sont bien connus bien qu'il ne soit pas si clair que cela de trouver quelle est leur définition et, en particulier si elle est unique ou s'il y a plusieurs

<sup>1</sup>ces éléments sont, dans la littérature, souvent appelés éléments de serendipité.

moyens de les caractériser, moyens résultant en la même solution de toute façon, voir [2] ou [1] en notant que ce dernier papier considère tous les degrés et, de plus, contient de nombreuses autres références.

La définition usuelle du quadrilatère à 8 nœuds de degré 2,  $Q2$ , se trouve dans beaucoup de références qui indiquent que les fonctions de formes sont engendrées par l'espace  $P^2$  et sont reliées par une relation liant leur valeur au centre à leurs valeurs aux bords ce qui permet de les trouver à partir des fonctions de l'élément complet. Une autre forme de définition se présente de la manière suivante : on donne les monômes de  $P^2$  et on les enrichit par les deux monômes  $u^2v$  et  $uv^2$ , ce qui correspond au schéma :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & & & & \\
 & u & & & v \\
 & & & & \\
 u^2 & & uv & & v^2 \\
 & & & & \\
 & & \text{enrichi de} & & \\
 & & & & \\
 u^2v & & & & uv^2
 \end{array}$$

et cette dernière définition est valable pour tous les degrés, cf. [1] où on montre quelle est la dimension de l'espace et quels sont les nœuds de l'élément de référence tels que l'espace ainsi engendré ait les bonnes propriétés, unicité ou unisolvence et, en particulier, si  $q_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  fonction de forme, on a  $q_i(A_j) = \delta_{ij}$  où  $A_j$  est un nœud de l'élément de référence (le carré unité en général, en deux dimensions).

La question de trouver, en pratique, les fonctions de forme est résolue de deux manières différentes, selon la définition que l'on choisit :

- 1- on trouve une relation liant les valeurs nodales (internes) avec les valeurs nodales au bord et on en déduit les fonctions de forme, voir par exemple la Relation (3) plus bas, en partant des fonctions complètes et en répartissant les fonctions complètes centrales sur celles associées aux bords. En conséquence, par cette approche, on peut reconstruire relativement facilement, pour chaque élément d'un maillage donné son élément complet associé rendant possible sa validation,
- 2- on pose le système à résoudre, à savoir  $q_i(A_j) = \delta_{ij}$ , pour tout  $i$  et tout  $j$  en donnant la forme générique des polynômes  $(1, u, v, \dots, u^2, u^2v, uv^2, \dots)$ , pour le degré 2), et un système de calcul formel (comme `Maple`) donne la solution. Par cette approche, il ne semble pas évident de trouver la relation liant les valeurs centrales aux valeurs "bords" et il est plus délicat, à des fins de validation, de reconstruire un élément complet correspondant à un élément courant d'un maillage donné.

Nous avons observé que, pour des degrés élevés, les fonctions trouvées par la deuxième méthode n'étaient pas complètement géométriquement symétriques<sup>2</sup> (quand on change  $u$  en  $(1 - u)$ , par exemple, la fonction obtenue n'est pas égale à une autre que l'on aurait aimé trouver, voir le dessin ci-dessous et la définition que nous donnons de cette notion de complète symétrie) donc indépendantes de la numérotation locale des nœuds. Cette non-symétrie se voit également dans le nombre de nœuds internes, 3 au degré 5 qui, par suite, ne peuvent pas former un motif géométrique symétrique vis-à-vis des arêtes. Cette non-symétrie a pour conséquence que la numérotation locale d'un élément courant d'un maillage influe sur l'expression des fonctions de forme, ce qui semble indésirable pour un élément de Lagrange, à tout le moins en trois dimensions. Par suite, nous proposons de considérer la définition suivante :

**Définition : Fonctions de forme complètement symétriques.** Deux fonctions de forme,  $q_i(u, v)$  et  $q_j(u, v)$ , sont **complètement symétriques** par *symétrie* en  $u$  si :

$$q_i(1 - u, v) = q_j(u, v),$$

<sup>2</sup>Dans cette étude, l'élément de référence est le carré ou le cube unité.



et en  $v$  si :

$$q_i(u, 1 - v) = q_j(u, v),$$

et par *rotation* si :

$$q_i(v, u) = q_j(u, v).$$

Cette notion s'étend sans peine à la trois dimensions.

Pour illustrer cette notion de symétrie, nous donnons le schéma qui suit :

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & 10 & & \dots & & & 3 \\ & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \mathbf{n} & & & & & & 7 \\ 1 & 5 & & \dots & & 6 & 2 \end{array}$$

et la symétrie s'exprime, par exemple, entre  $q_5$  et  $q_6$ , en  $u$ , entre  $q_5$  et  $q_{10}$ , en  $v$  et entre  $q_5$  et  $q_n$  (avec, ici, une symétrie par rotation,  $u$  et  $v$  permutent), etc.

Et, notre étude se place **uniquement** dans ce cas. Remarquons néanmoins que les deux définitions sont équivalentes pour les éléments  $Q2$ ,  $Q3$  et  $Q4$  dont les fonctions de forme sont symétriques (on le vérifiera plus tard, pour le  $Q4$  parce que le nœud central est complètement symétrique vis-à-vis des nœuds des arêtes). Pour monter en ordre, il est tentant de penser que le seul moyen possible est de rajouter un ou plusieurs monômes et autant de nœuds supplémentaires en accord. Par exemple, au degré 5, on peut songer à ajouter à  $P^5$ ,  $x^5y$  et à  $xy^5$  le monôme  $x^3y^3$  avec, donc, quatre nœuds internes qu'il est trivial de positionner de façon symétrique par rapport aux arêtes, mais, en revenant sur ce point plus tard, on verra si cette idée est bonne ou non.

Pour conclure sur cette notion de complète symétrie, on note comme conséquence qu'il suffit de trouver uniquement quelques fonctions de forme (les fonctions *type*) pour les avoir toutes (2 pour le quadrilatère et l'hexaèdre de degré 2, 2 encore pour ces mêmes éléments au degré 3, 3 pour le quadrilatère de degré 4, etc.).

### 3 Construction du quadrilatère Serendip de degré 2

Il s'agit de trouver les 8 fonctions  $q_{ij}$  de  $Q^2$ , l'espace des polynômes de degré 2 en chaque variable, ayant les quatre propriétés suivantes :

$$(P_r1) \quad q_{ij}(A_{lm}) = \delta_{ij,lm}$$

$$(P_r2) \quad \sum_{ij} q_{ij}(u, v) = 1$$

$$(P_r3) \quad EV \{q_{ij}\} \text{ contient } P^2 + u^2v + uv^2$$

$$(P_r4) \quad \text{symétrie complète,}$$

où  $EV \{q_{ij}\}$  est l'espace polynomial engendré par les fonctions  $q_{ij}$ ,  $P^2$  est l'espace des polynômes de degré 2 en toutes les variables et  $A_{ij}$  est le nœud  $ij$  (de coordonnées  $(u, v) = (\frac{i}{2}, \frac{j}{2})$ ) du carré de référence. Les deux premières propriétés sont classiques, la troisième définit ce qu'est un élément Serendip.

Pour simplifier les notations, on utilise la notation à deux indices ou la notation séquentielle avec la correspondance montrée sur le schéma suivant :

02	12	22	4	7	3
01	11	21	8		6
00	10	20	1	5	2

Ainsi, par exemple,  $q_{00}$  sera vu comme  $q_1$  ou l'inverse.

On va traiter ce problème de deux manières différentes, soit en utilisant un développement de Taylor, soit en raisonnant directement sur les Bézier.

### 3.1 Caractérisation de l'espace des polynômes via Taylor

L'idée est de considérer un polynôme  $q$  et de voir quelles propriétés il doit vérifier pour être dans un espace polynomial contenant  $P^2$ . Pour ce faire, on part d'un développement de Taylor de  $q$  en les sommets et en les nœuds, développement exprimé en s'appuyant sur le nœud central, afin de trouver une liaison entre la valeur "centrale" et les valeurs aux "bords". On introduit le vecteur  $\vec{v}_{ij} = \overline{A_{11}A_{ij}}$  et les dérivées successives des  $q$ , vues de manière abstraite comme des opérateurs linéaires, bilinéaires, etc., et notées  $D^1.(\vec{u})$ ,  $D^2.(\vec{u}, \vec{u})$ , etc., où l'opérateur  $D^i(., ., \dots)$  contient le coefficient  $\frac{1}{i!}$ . Alors, comme on cherche une solution dans  $P^2$ , le développement s'arrête à la dérivée seconde et s'écrit, en  $A_{00}$  :

$$q(A_{00}) = q(A_{11}) + D^1.(\vec{v}_{00}) + D^2.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}).$$

On exprime de la même façon  $q$  en  $A_{20}$ ,  $A_{22}$  et  $A_{02}$  et en sommant il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,4} q(\text{sommet}_k) &= 4q(A_{11}) + D^1.(\vec{v}_{00}) + D^1.(\vec{v}_{20}) + D^1.(\vec{v}_{22}) + D^1.(\vec{v}_{02}) \\ &+ D^2.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^2.(\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^2.(\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^2.(\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}), \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$\sum_{k=1,4} q(\text{sommet}_k) = 4q(A_{11}) + D^2.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^2.(\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^2.(\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^2.(\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}), \quad (1)$$

car l'opérateur  $D^1.(.)$  est linéaire et que, par définition,  $\vec{v}_{00} + \vec{v}_{20} + \vec{v}_{22} + \vec{v}_{02} = 0$ . On exprime ce même développement pour les nœuds des arêtes. par exemple :

$$q(A_{10}) = q(A_{11}) + D^1.(\vec{v}_{10}) + D^2.(\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}).$$

et on somme, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,4} q(\text{noeudarete}_k) &= 4q(A_{11}) + D^1.(\vec{v}_{10}) + D^1.(\vec{v}_{21}) + D^1.(\vec{v}_{12}) + D^1.(\vec{v}_{01}) \\ &+ D^2.(\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) + D^2.(\vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}) + D^2.(\vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}) + D^2.(\vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}), \end{aligned}$$

dont ne reste que (les termes relatifs à  $D^1.(.)$  s'annulent deux à deux) :

$$\sum_{k=1,4} q(\text{noeudarete}_k) = 4q(A_{11}) + D^2.(\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) + D^2.(\vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}) + D^2.(\vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}) + D^2.(\vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}), \quad (2)$$

comme  $A_{10} = \frac{A_{00} + A_{20}}{2}$ , etc., on peut exprimer les différents vecteurs  $\vec{v}_{ij}$  uniquement en fonction des quatre vecteurs liés aux sommets. Soit, par exemple,  $\vec{v}_{10} = \frac{\vec{v}_{00} + \vec{v}_{20}}{2}$ . On calcule maintenant  $D^2.(\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10})$ , on trouve :

$$D^2.(\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) = \frac{1}{4}D^2.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + \frac{1}{4}D^2.(\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + \frac{1}{2}D^2.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{20})$$

et des expressions analogues pour les autres termes. En sommant sur les quatre arêtes, il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{00}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{02}})) . \\ & + \frac{1}{2} (D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{02}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{00}})) . \end{aligned}$$

On va exprimer les termes croisés en fonction des termes liés aux seuls sommets, comme  $D^2.(\overrightarrow{v_{00}} + \overrightarrow{v_{20}} + \overrightarrow{v_{22}} + \overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{00}} + \overrightarrow{v_{20}} + \overrightarrow{v_{22}} + \overrightarrow{v_{02}}) = 0$ , il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{00}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{02}}) \\ &+ 2(D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{02}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{00}})) \\ &+ 2(D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{02}})) , \end{aligned}$$

mais

$$2(D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{02}})) = -(D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{00}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{02}})) ,$$

en effet, par exemple  $D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{22}}) = D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, -\overrightarrow{v_{00}}) = -D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{00}})$ , donc, on a :

$$0 = 2(D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{02}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{00}})) ,$$

et, par suite, la somme ci-dessus se réduit à :

$$\frac{1}{2} (D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{00}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{02}})) ,$$

et, au passage, on a démontré le résultat formulé par le lemme suivant :

**Lemme 1 (sur les dérivées secondes).** La somme des dérivées secondes appliquées aux nœuds des arêtes est reliée<sup>3</sup> à la somme de ces dérivées appliquées aux sommets par la relation :

$$\begin{aligned} & D^2.(\overrightarrow{v_{10}}, \overrightarrow{v_{10}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{21}}, \overrightarrow{v_{21}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{12}}, \overrightarrow{v_{12}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{01}}, \overrightarrow{v_{01}}) \\ &= \frac{1}{2} (D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{00}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{02}})) , \end{aligned}$$

ceci étant indépendant du degré des fonctions considérées.  $\square$

Par suite, la Relation (2) s'écrit :

$$\sum_{k=1,4} q(\text{noeudarete}_k) = 4q(A_{11}) + \frac{1}{2} (D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{00}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{02}})) ,$$

pour finir, on identifie cette dernière somme dans les deux relations ce qui donne la combinaison suivante :

$$\sum_{k=1,4} q(\text{sommet}_k) - 4q(A_{11}) = 2 \left( \sum_{k=1,4} q(\text{noeudarete}_k) - 4q(A_{11}) \right) ,$$

et, au final, la relation :

$$4q(A_{11}) + \sum_{k=1,4} q(\text{sommet}_k) - 2 \sum_{k=1,4} q(\text{noeudarete}_k) = 0 . \quad (3)$$

<sup>3</sup>Une autre manière de trouver ce résultat est de voir que

$$D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{22}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{02}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{00}}) = 0 .$$

En effet, pour les deux premiers termes, on a :

$$D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{20}}, \overrightarrow{v_{22}}) = D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{20}}) = D^2.(\overrightarrow{v_{00}} + \overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{20}}) = D^2.(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{v_{20}}) ,$$

et, pour les deux autres, on a :

$$D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{02}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{02}}, \overrightarrow{v_{00}}) = D^2.(\overrightarrow{v_{22}}, \overrightarrow{v_{02}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{02}}) = D^2.(\overrightarrow{v_{22}} + \overrightarrow{v_{00}}, \overrightarrow{v_{02}}) = D^2.(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{v_{02}}) ,$$

donc la somme vaut :

$$D^2.(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{v_{20}}) + D^2.(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{v_{02}}) = D^2.(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{v_{20}} + \overrightarrow{v_{02}}) = D^2.(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0}) = 0 .$$

La relation de serendipité pour le quadrilatère de degré 2 à 8 nœuds

définit la Serendipité.

On a également vu que la somme, sur le motif, des dérivées premières est nulle. Plus généralement, on a le lemme suivant :

**Lemme 2 (sur les dérivées impaires).** La somme des dérivées impaires appliquées aux sous-motifs est nulle quel que soit le degré.  $\square$

La démonstration est immédiate, c'est la même que ci-dessus pour le degré 2.

**L'espace de Serendipité.** Les monômes de cet espace sont représentés dans le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & & u & & v \\
 & & u^2 & & v^2 \\
 & u^2v & & & uv^2
 \end{array}$$

où l'on retrouve l'espace  $P^2$  enrichi par les monômes  $u^2v$  et  $uv^2$ . Notons que  $P^2$  est trouvé par construction tandis que  $u^2v$  et  $uv^2$  arrivent car ces deux fonctions vérifient la Relation (3).

### 3.2 Les fonctions de forme à partir de l'espace trouvé via Taylor

Pour obtenir les fonctions réduites, les  $q_i$  ou  $q_{ij}$  selon l'indigage, on utilise le fait que ces fonctions doivent vérifier la Relation (3) et, par symétrie, on les cherche sous la forme :

$$\begin{aligned}
 q_i &= q_i^c + \alpha q_{11}^c, & \text{pour } i &= 1, 4 \\
 q_i &= q_i^c + \beta q_{11}^c, & \text{pour } i &= 5, 8,
 \end{aligned}$$

où  $q_i^c$  désigne la fonction  $i$  de l'élément complet. Par symétrie, en effet, le diagramme de répartition s'écrit simplement (lire  $a$  comme  $\alpha$  et  $b$  comme  $\beta$ ) comme :

$$\begin{array}{ccc}
 a & b & a \\
 & & \\
 b & & b \\
 & & \\
 a & b & a
 \end{array}$$

Ainsi, on doit avoir, par exemple pour  $i = 1$  :

$$4q_1(A_{11}) + \sum_{k=1,4} q_1(\text{sommet}_k) - 2 \sum_{k=1,4} q_1(\text{noeudarete}_k) = 0,$$

donc :

$$\begin{aligned}
 4q_1^c(A_{11}) + 4\alpha q_{11}^c(A_{11}) + \sum_{k=1,4} (q_1^c(\text{sommet}_k) + \alpha q_{11}^c(\text{sommet}_k)) \\
 - 2 \sum_{k=1,4} (q_1^c(\text{noeudarete}_k) + \alpha q_{11}^c(\text{noeudarete}_k)) = 0,
 \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$4\alpha + 1 = 0,$$

d'où la valeur de  $\alpha$ ,  $\alpha = -\frac{1}{4}$  dont on déduit  $q_1$ , la première fonction de forme de l'élément réduit. De même on trouve  $\beta = \frac{1}{2}$  et la cinquième fonction de forme.

À noter que les quatre propriétés demandées sont vérifiées. La troisième et la quatrième par construction (les fonctions complètes étant symétriques) et les autres de manière évidente, ainsi, pour un nœud sommet :

$$q_{ij}(A_{lm}) = q_{ij}^c(A_{lm}) + \alpha q_{11}^c(A_{lm}) = \delta_{ij,lm} + \alpha \delta_{11,lm} = \delta_{ij,lm} + 0 = \delta_{ij,lm},$$

et de même pour un nœud arête :

$$q_{ij}(A_{lm}) = q_{ij}^c(A_{lm}) + \beta q_{11}^c(A_{lm}) = \delta_{ij,lm} + \beta \delta_{11,lm} = \delta_{ij,lm} + 0 = \delta_{ij,lm},$$

et, finalement, les fonctions somment à 1 car :

$$\sum_{ij} q_{ij}(u, v) = \sum_{ij} q_{ij}^c(u, v) + \sum_{\text{sommet}} \alpha q_{11}^c(u, v) + \sum_{\text{arete}} \beta q_{11}^c(u, v) = \sum_{ij} q_{ij}^c(u, v) + q_{11}^c(u, v) = 1,$$

puisque  $4\alpha + 4\beta = 1$ .

Plus en détail, les fonctions de forme du quadrilatère à 9 nœuds sont les suivantes (voir la Relation (9), donnée plus tard) :

$$q_1^c = q_{00}^c(u, v) = (1 - u)(1 - 2u)(1 - v)(1 - 2v)$$

$$q_2^c = q_{20}^c(u, v) = -u(1 - 2u)(1 - v)(1 - 2v)$$

$$q_3^c = q_{22}^c(u, v) = u(1 - 2u)v(1 - 2v)$$

$$q_4^c = q_{02}^c(u, v) = -(1 - u)(1 - 2u)v(1 - 2v)$$

$$q_5^c = q_{10}^c(u, v) = 4u(1 - u)(1 - v)(1 - 2v)$$

$$q_6^c = q_{21}^c(u, v) = -4u(1 - u)v(1 - v)$$

$$q_7^c = q_{22}^c(u, v) = -4u(1 - u)v(1 - 2v)$$

$$q_8^c = q_{01}^c(u, v) = 4(1 - u)(1 - 2u)v(1 - v)$$

$$q_9^c = q_{11}^c(u, v) = 16u(1 - u)v(1 - v),$$

et, on obtient  $q_1$  comme  $q_1 = q_1^c - \frac{1}{4}q_9^c$ , soit :

$$q_1 = q_{00}(u, v) = (1 - u)(1 - v)(1 - 2u - 2v),$$

et  $q_5$  comme  $q_5 = q_5^c + \frac{1}{2}q_9^c$ , soit :

$$q_5 = q_{10}(u, v) = 4u(1 - u)(1 - v).$$

Il est alors aisé d'en déduire toutes les autres fonctions dont la liste est la suivante :

1	$q_1 = q_{00}(u, v) = (1 - u)(1 - v)(1 - 2u - 2v)$
2	$q_2 = q_{20}(u, v) = u(1 - v)(-1 + 2u - 2v)$
3	$q_3 = q_{22}(u, v) = uv(-3 + 2u + 2v)$
4	$q_4 = q_{02}(u, v) = (1 - u)v(-1 - 2u + 2v)$
5	$q_5 = q_{10}(u, v) = 4u(1 - u)(1 - v)$
6	$q_6 = q_{21}(u, v) = 4uv(1 - v)$
7	$q_7 = q_{22}(u, v) = 4u(1 - u)v$
8	$q_8 = q_{01}(u, v) = 4(1 - u)v(1 - v)$

Fonctions de forme du quadrilatère de degré 2 à 8 nœuds

### 3.3 Construction directe des fonctions de forme dans les Bézier

Par symétrie, il suffit d'examiner les deux fonctions *type* qui correspondent aux indices 00 et 10. Toujours par symétrie, on pose *a priori* :

$$B'_{00}(u, v) = B_0^2(u)B_0^2(v) + \alpha B_1^2(u)B_1^2(v),$$

$$B'_{10}(u, v) = B_1^2(u)B_0^2(v) + \beta B_1^2(u)B_1^2(v),$$

et des relations identiques pour les autres fonctions réduites (notées  $B'_{ij}(u, v)$ ). Il n'y a donc que 2 paramètres.

La définition de l'espace réduit implique en premier la présence de  $u^2v$ . Comme on a :

$$\begin{aligned} u^2v &= u^2v(1-v+v) = B_2^2(u) \left\{ \frac{1}{2}B_1^2(v) + B_2^2(v) \right\} = \frac{1}{2}B_2^2(u)B_1^2(v) + B_2^2(u)B_2^2(v) \\ &= \frac{1}{2}B'_{21}(u,v) + B'_{22}(u,v) - \frac{1}{2}\beta B_1^2(u)B_1^2(v) - \alpha B_1^2(u)B_1^2(v), \end{aligned}$$

qui donne l'équation :

$$(E1) \quad \frac{1}{2}\beta + \alpha = 0.$$

Supposons que  $u^2v$  existe, alors, par symétrie,  $u^2(1-v)$  existe et, par suite  $u^2$  existe aussi dans l'espace réduit. Pour couvrir  $P^2$ , il reste à imposer  $uv$ , puis  $u$ , puis la constante. Comme on a :

$$uv = \left( \frac{1}{2}B_1^2(u) + B_2^2(u) \right) \times \left( \frac{1}{2}B_1^2(v) + B_2^2(v) \right),$$

et que la contribution de  $B_1^2(u)B_1^2(v)$  vaut

$$\frac{1}{4} - \alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4} - \alpha - \beta,$$

on obtient une seconde équation :

$$(E2) \quad \alpha + \beta = \frac{1}{4}.$$

Supposons, comme ci-dessus, que  $uv$  existe, alors, par symétrie,  $u(1-v)$  existe et, par suite  $u$  existe aussi dans l'espace réduit. Comme  $u$  existe,  $1-u$  existe et la constante est trouvée.

Par suite, en imposant simplement  $u^2v$  et  $uv$  dans le monde Bézier, on a défini complètement et rapidement les paramètres permettant de construire les fonctions de formes de l'espace réduit.

Le système à résoudre est rappelé, à savoir :

$$(E1) \quad \frac{1}{2}\beta + \alpha = 0,$$

$$(E2) \quad \alpha + \beta = \frac{1}{4}.$$

et la solution est

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

Pour poursuivre, on va trouver explicitement les fonctions de forme de l'élément réduit. On écrit :

$$\sigma(u,v) = \sum_{ij \in \mathcal{F}} B'_{ij}(u,v)P_{ij},$$

où  $\mathcal{F}$  désigne les indices des points de contrôle de la frontière, soit tous les indices sauf l'indice "central" ( $i = j = 1$ ). Ensuite, on remplace les  $B'$  en fonction des  $B^2$ . Soit

$$\sigma(u,v) = \sum_{ij \in \mathcal{F}} B_i^2(u)B_j^2(v)P_{ij} + (\alpha P_{00} + \beta P_{10} + \alpha P_{20} + \beta P_{21} + \alpha P_{22} + \beta P_{12} + \alpha P_{02} + \beta P_{01})B_1^2(u)B_1^2(v),$$

et il suffit de poser :

$$P_{11} = \alpha P_{00} + \beta P_{10} + \alpha P_{20} + \beta P_{21} + \alpha P_{22} + \beta P_{12} + \alpha P_{02} + \beta P_{01},$$

pour retrouver le carreau complet, ainsi inventé, à savoir :

$$\sigma(u,v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)P_{ij}.$$

Trouver les fonctions se fait en exprimant les  $P_{ij}$  en fonction des  $A_{ij}$  ce qui va permettre de regrouper les  $B_i^2(u)B_j^2(v)$ . Par exemple, pour avoir  $q_{00}(u, v)$ , on traque  $A_{00}$  qui se cache dans  $P_{00}, P_{10}, P_{01}$  et  $P_{11}$  dont on ne retient que la partie  $= \alpha P_{00} + \beta P_{10} + \beta P_{01}$ . On utilise les relations classiques comme  $P_{10} = \frac{4A_{10} - A_{00} - A_{20}}{2}$  pour trouver la solution. Il vient :

$$\text{en } A_{00} = P_{00} : B_0^2(u)B_0^2(v),$$

$$\text{en } A_{10} \text{ via } P_{10} : -\frac{1}{2}B_1^2(u)B_0^2(v),$$

$$\text{en } A_{01} \text{ via } P_{01} : -\frac{1}{2}B_0^2(u)B_1^2(v),$$

$$\text{en } A_{11} \text{ via } P_{11} \text{ donc via } P_{00}, P_{10}, P_{01} : \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)B_1^2(u)B_1^2(v),$$

soit :

$$\begin{aligned} q_{00}(u, v) &= (1-u)^2(1-v)^2 - \frac{1}{2}2u(1-u)(1-v)^2 - \frac{1}{2}(1-u)^22v(1-v) - \frac{3}{4}4u(1-u)v(1-v) \\ &= (1-u)(1-v)(1-2u-2v), \end{aligned}$$

qui est l'expression trouvée auparavant. Pour trouver  $q_{10}(u, v)$ , c'est plus court, on a directement :

$$\text{en } A_{10} \text{ via } P_{10} : \frac{4}{2}B_1^2(u)B_0^2(v),$$

$$\text{en } A_{11} \text{ via } P_{10} : \frac{1}{2} \frac{4}{2}B_1^2(u)B_1^2(v),$$

soit :

$$q_{10}(u, v) = 2u(1-u)(2(1-v)^2 + 2v(1-v)) = 4u(1-u)(1-v),$$

comme attendu.

### 3.4 Construction directe des fonctions de forme via un système

On part du fait que l'espace de polynômes cherché contient  $P^2$  enrichi de  $u^2v$  et  $uv^2$ , cf. [1]. Alors on cherche les fonctions sous la forme :

$$q(u, v) = \alpha_{00} + \alpha_{10}u + \alpha_{01}v + \alpha_{11}uv + \alpha_{20}u^2 + \alpha_{02}v^2 + \alpha_{21}u^2v + \alpha_{12}uv^2.$$

Il y a 8 inconnues, il faut donc construire un système de 8 équations et ainsi on a besoin de définir 8 nœuds donc il y a 8 fonctions de base. Soit  $q_1$  la première, on a :

$$q_1(A_j) = \delta_{ij},$$

soit :

$$q_1(0, 0) = 1$$

$$q_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0, \dots, q_1\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

On en déduit les valeurs des coefficients  $\alpha_{ij}$  pour cette fonction, on trouve :

$$q_1(u, v) = 1 - 3u - 3v + 2u^2 + 2v^2 + 5uv - 2u^2v - 2uv^2,$$

qui se factorise simplement. En effet,  $1-u$  et  $1-v$  (en effet,  $q_1(1, v) = q_1(u, 1) = 0$ ) se factorisent et il vient :

$$q_1(u, v) = (1-u)(1-v)(\alpha + \beta u + \gamma v),$$

dont on déduit  $\alpha = 1, \beta = \gamma = -2$  et, ainsi, on a :

$$q_1(u, v) = (1-u)(1-v)(1-2u-2v).$$

On procède de même pour les 7 autres fonctions de base et on retrouve les expressions du tableau précédent. Il est clair, par définition, que  $q_i(A_j) = \delta_{ij}$  et que  $q(u, v) = \sum_i q_i(u, v) = 1$ , en effet cette fonction prend la valeur 1 en 8 instanciations.

Par contre, avec cette méthode de construction, on ne voit pas directement la symétrie<sup>4</sup> et on ne voit pas la relation liant le point central aux nœuds du bord et, pour la validation géométrique d'un élément donné d'un maillage, on ne peut pas déduire immédiatement le point de contrôle central du quadrilatère complet correspondant.

**Liaison entre le centre et le bord.** On évalue les  $q_i(u, v)$  pour le couple  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , il vient :

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = -\frac{1}{4},$$

$$q_5 = q_6 = q_7 = q_8 = \frac{1}{2},$$

donc, pour tout  $i$ , on a :

$$4q_i\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1,4} q_i(\text{sommet}_k) - 2 \sum_{k=1,4} q_i(\text{noeudarete}_k) = 0,$$

ce qui veut dire que les fonctions solutions vérifient la relation connue et également que le point central vaut :

$$4A_{11} + \sum_i \text{sommet}_i - 2 \sum_i \text{noeudarete}_i = 0,$$

donc, c'est ici que l'on voit la symétrie du résultat.

**Points de contrôle du quadrilatère complet correspondant.** Les points de contrôle des arêtes sont connus (ou calculables via la relation liant nœuds et points de contrôle sur chaque arête). Pour obtenir le point central, il suffit de résoudre l'équation :

$$A_{11} = \sum_i \sum_j B_i^2(u) B_j^2(v) P_{ij},$$

pour le couple  $(u, v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et pour  $A_{11}$  construit via la relation ci-dessus puis en exprimant les nœuds des arêtes en fonction des points de contrôle de ces arêtes (sommet initial, point de contrôle, sommet final). Il reste alors une seule inconnue,  $P_{11}$ .

Une autre façon de trouver  $P_{11}$  est de décomposer les fonctions de forme en Bézier et de voir ce qui vient au regard de  $B_i^1(u) B_j^1(v)$ . Mais cela impose de résoudre 8 systèmes (un par fonction) à 9 inconnues chacun (toutes les combinaisons  $B_i^2(u) B_j^2(v)$ ).

**Remarque 1.** L'apparente simplicité de cette construction directe, ici au degré 2, s'étend-elle aux degrés supérieurs? Sur le papier oui, mais la dimension des systèmes à résoudre est égale au nombre de nœuds, ici 8 équations à 8 inconnues (soit au total 64 inconnues à trouver, 8 par fonction) alors que dans l'approche par développement de Taylor, on a simplement résolu deux équations à une inconnue chacune ( $\alpha$  puis  $\beta$ ) et dans l'approche Bézier on a simplement résolu un système de deux équations à deux inconnues ( $\alpha$  et  $\beta$ ).

**Remarque 2.** L'équivalence entre les deux modes de construction, par développement de Taylor donnant une relation liant le centre aux bords ou en posant, *a priori*, l'expression générique des fonctions cherchées est tout sauf évidente. Elle est néanmoins garantie par l'unicité de la solution trouvée.

<sup>4</sup>qui est immédiate avec la précédente méthode de construction puisque les fonctions réduites sont des combinaisons linéaires de fonctions symétriques.



### 3.5 Validation d'un quadrilatère courant d'un maillage donné

Étant donné un élément quelconque d'un maillage, noté comme le carreau :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=1,8} q_i(u, v) A_i,$$

où les  $A_i$  désignent les nœuds de l'élément observé, on cherche les conditions assurant sa validité géométrique. On a :

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= \sum_{i=1,8} q_i(u, v) A_i = \sum_{i=1,4} (q_i^c(u, v) - \frac{1}{4} q_9^c(u, v)) A_i + \sum_{i=5,8} (q_i^c(u, v) + \frac{1}{2} q_9^c(u, v)) A_i \\ &= \sum_{i=1,8} q_i^c(u, v) A_i + q_9^c(u, v) A_9 \end{aligned}$$

en définissant

$$A_9 = \alpha \sum_{i=1,4} A_i + \beta \sum_{i=5,8} A_i = -\frac{1}{4} \sum_{i=1,4} A_i + \frac{1}{2} \sum_{i=5,8} A_i,$$

autrement dit le carreau réduit :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=1,8} q_i(u, v) A_i \quad \text{est équivalent au carreau} \quad \sum_{i=1,9} q_i^c(u, v) A_i,$$

**pour** le nœud central ainsi construit. On note ce carreau complet, plus simplement, comme :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} q_{ij}^c(u, v) A_{ij}.$$

L'analyse de la validité géométrique d'un carreau complet, cf. [9], se fait en regardant sa forme de Bézier, en effet

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} q_{ij}^c(u, v) A_{ij} = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) P_{ij},$$

avec  $P_{ij}$  les points de contrôle de l'élément et  $B_i^2(u)$  les polynômes de Bernstein de degré 2. Sous ce formalisme il est facile d'analyser le signe du jacobien, voir plus bas. Le seul point à effectuer est le calcul des points de contrôle, en particulier le point central. La relation liant le point de contrôle d'une arête aux nœuds de celle-ci est la suivante, par exemple pour l'arête image de  $v = 0$ , on a :

$$\sigma(u, 0) = \sum_{i=0,2} q_{i0}^c(u, 0) A_{i0} = \sum_{i=0,2} B_i^2(u) B_0^2(0) P_{i0} = \sum_{i=0,2} B_i^2(u) P_{i0},$$

et  $u = \frac{1}{2}$  donne :

$$A_{10} = \frac{1}{4} P_{00} + \frac{1}{2} P_{10} + \frac{1}{4} P_{20} = \frac{1}{4} A_{00} + \frac{1}{2} P_{10} + \frac{1}{4} A_{20},$$

soit la relation classique :

$$P_{10} = \frac{4A_{10} - A_{00} - A_{20}}{2},$$

et ainsi, on détermine les points de contrôle des arêtes.  $P_{11}$ , le dernier point inconnu, s'obtient via  $A_9$ , alias  $A_{11}$  par la relation :

$$A_{11} = \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) P_{ij},$$

pour la valeur  $(u, v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , relation dans laquelle seul  $P_{11}$  est inconnu, on trouve :

$$P_{11} = -\frac{1}{4}(P_{00} + P_{20} + P_{22} + P_{02}) + \frac{1}{2}(P_{10} + P_{21} + P_{12} + P_{01}), \quad (4)$$

qui est identique à la relation liant  $A_{11}$  aux nœuds du bord. En effet, on écrit :

$$A_{11} = \frac{1}{16}(P_{00} + \dots + P_{02}) + \frac{1}{8}(P_{10} + \dots + P_{01}) + \frac{1}{4}P_{11}, \quad (5)$$

soit,

$$P_{11} = 4A_{11} - \frac{1}{4}(P_{00} + \dots) - \frac{1}{2}(P_{10} + \dots) \quad (6)$$

et on remplace  $A_{11}$  par sa valeur, il vient :

$$P_{11} = -(A_{00} + \dots) + 2(A_{10} + \dots) - \frac{1}{4}(P_{00} + \dots) - \frac{1}{2}(P_{10} + \dots),$$

puis on exprime les  $A_{ij}$  en fonction des  $P_{ij}$ , donc :

$$P_{11} = -(P_{00} + \dots) + 2\left(\frac{P_{00} + P_{20} + 2P_{10}}{4} + \dots\right) - \frac{1}{4}(P_{00} + \dots) - \frac{1}{2}(P_{10} + \dots),$$

d'où le résultat.

**Remarque 3.** Il est remarquable que la relation de Serendipité s'applique entre les valeurs de la fonction  $q$ , au nœud interne "manquant" et au point de contrôle "manquant" inventés pour reconstruire l'élément complet équivalent à un élément courant d'un maillage donné, la démonstration de cet état de fait, vue ici au degré 2, sera tentée plus tard pour des degrés autres, elle est déjà non évidente ici. Pour le degré deux, on pose  $A_{11} = -\frac{1}{4}(A_{00} + \dots) + \frac{1}{2}(A_{10} + \dots)$ , on trouve pour  $P_{11}$ , par la Relation (6), le même lien. En sens inverse, si on pose  $P_{11} = -\frac{1}{4}(P_{00} + \dots) + \frac{1}{2}(P_{10} + \dots)$  et que l'on évalue le point pour  $(u, v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , soit  $A_{11}$ , on trouve (par la Relation (5))  $A_{11} = -\frac{1}{4}(A_{00} + \dots) + \frac{1}{2}(A_{10} + \dots)$ , soit la même relation.

Par contre, si on pose *a priori*  $P_{11} = \sum_{ij} \beta_{ij} P_{ij}$  et si on cherche les coefficients  $\beta_{ij}$ , on arrive à une curiosité. En effet, on écrit la Relation (6) :

$$P_{11} = 4A_{11} - \frac{1}{4}(P_{00} + \dots) - \frac{1}{2}(P_{10} + \dots),$$

comme ci-dessus et on remplace  $A_{11}$  par  $A_{11} = \sum_{ij} \alpha_{ij} A_{ij}$  puis on exprime ces  $A_{ij}$  en fonction des  $P_{ij}$ , il vient alors :

$$\beta_{00} = 4\alpha_{00} + \alpha_{10} + \alpha_{01} - \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \beta_{10} = 2\alpha_{10} - \frac{1}{2},$$

et des relations analogues pour les autres  $\beta$ . On constate alors effectivement que  $\beta_{00} = -\frac{1}{4}$  et  $\beta_{10} = \frac{1}{2}$  en portant les valeurs des  $\alpha$  mais on ne le voit pas **formellement** dans les deux relations ci-dessus sauf à écrire, par exemple :

$$\beta_{00} = \alpha_{00} + 3\alpha_{00} + \alpha_{10} + \alpha_{01} - \frac{1}{4},$$

et à établir (et non pas simplement vérifier) que  $3\alpha_{00} + \alpha_{10} + \alpha_{01} - \frac{1}{4} = 0$ .

**En pratique.** À partir des  $A_{ij}$  de l'élément, on calcule les  $P_{ij}$  correspondants puis  $P_{11}$  par la formule (4).

## 4 Construction du quadrilatère Serendip de degré 3

Comme ci-dessus, il s'agit de trouver les 12 fonctions  $q_{ij}$  de  $Q^3$ , l'espace des polynômes de degré 3 en chaque variable, ayant les quatre propriétés suivantes :

$$(P_r 1) \quad q_{ij}(A_{lm}) = \delta_{ij,lm}$$

$$(P_r2) \quad \sum_{ij} q_{ij}(u, v) = 1$$

$$(P_r3) \quad EV \{q_{ij}\} \text{ contient } P^3 + u^3v + uv^3$$

$$(P_r4) \quad \text{symétrie complète.}$$

où  $EV \{q_{ij}\}$  est l'espace polynomial engendré par les fonctions  $q_{ij}$ ,  $P^3$  est l'espace des polynômes de degré 3 en toutes les variables et  $A_{ij}$  est le nœud  $ij$  (de coordonnées  $(u, v) = (\frac{i}{3}, \frac{j}{3})$ ) du carré de référence. Les deux premières propriétés sont classiques, la troisième définit ce qu'est un élément Serendip.

Pour simplifier les notations, on utilise la notation à deux indices ou la notation séquentielle avec la correspondance montrée sur le schéma suivant :

03	13	23	33	4	10	9	3
02	12	22	32	11			8
01	11	21	31	12			7
00	10	20	30	1	5	6	2

Ainsi, par exemple,  $q_{00}$  sera vu comme  $q_1$  ou l'inverse.

#### 4.1 Caractérisation de l'espace des polynômes via Taylor

On reprend la même démarche et on considère un polynôme  $q$  afin de voir quelles propriétés il doit vérifier pour être dans un espace polynomial contenant  $P^3$ . Pour ce faire, on part d'un développement de Taylor de  $q$  en les sommets et en les nœuds, développement exprimé en s'appuyant sur les quatre nœuds centraux. Pour  $A_{11}$  on introduit le vecteur  $\vec{v}_{ij} = \overline{A_{11}A_{ij}}$  et les dérivées successives des  $q$ , vues de manière abstraite comme des opérateurs linéaires, bilinéaires, etc., et notées  $D^1.(\vec{u})$ ,  $D^2.(\vec{u}, \vec{u})$ ,  $D^3.(\vec{u}, \vec{u}, \vec{u})$  etc., où l'opérateur  $D^i(., ., \dots)$  contient le coefficient  $\frac{1}{i!}$ . Les vecteurs impliqués, ici pour  $A_{11}$ , sont ceux du sous-motif du treillis complet (schéma ci-dessus) centré en  $A_{11}$  dont la forme est la suivante :

.	.	.	.
02	12	22	.
01	11	21	.
00	10	20	.

Alors, comme on cherche une solution dans  $P^3$ , le développement s'arrête à la dérivée troisième et s'écrit, en  $A_{00}$ , vis-à-vis de  $A_{11}$  :

$$q(A_{00}) = q(A_{11}) + D^1.(\vec{v}_{00}) + D^2.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^3.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}).$$

On exprime de la même façon  $q$  en  $A_{20}$ ,  $A_{22}$  et  $A_{02}$ , les sommets du sous-motif, puis on somme, il vient :

$$\begin{aligned} q(A_{00}) + q(A_{20}) + q(A_{22}) + q(A_{02}) &= 4q(A_{11}) + D^1.(\vec{v}_{00}) + D^1.(\vec{v}_{20}) + D^1.(\vec{v}_{22}) + D^1.(\vec{v}_{02}) \\ &+ D^2.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^2.(\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^2.(\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^2.(\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}) \\ &+ D^3.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^3.(\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^3.(\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^3.(\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}), \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$\begin{aligned} q(A_{00}) + q(A_{20}) + q(A_{22}) + q(A_{02}) &= 4q(A_{11}) \\ &+ D^2.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^2.(\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^2.(\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^2.(\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}) \\ &+ D^3.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^3.(\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^3.(\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^3.(\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}), \end{aligned}$$

qui se réduit encore à (cette propriété étant vérifiée pour toutes les dérivées impaires, Lemme 2) :

$$\begin{aligned} q(A_{00}) + q(A_{20}) + q(A_{22}) + q(A_{02}) &= 4q(A_{11}) \\ + D^2 \cdot (\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}). \end{aligned}$$

De même, on a (avec les mêmes vecteurs !) :

$$\begin{aligned} q(A_{10}) + q(A_{30}) + q(A_{32}) + q(A_{12}) &= 4q(A_{21}) \\ + D^2 \cdot (\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}), \\ q(A_{01}) + q(A_{21}) + q(A_{23}) + q(A_{03}) &= 4q(A_{12}) \\ + D^2 \cdot (\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}), \\ q(A_{11}) + q(A_{31}) + q(A_{33}) + q(A_{13}) &= 4q(A_{22}) \\ + D^2 \cdot (\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}). \end{aligned}$$

Pour les arêtes on a :

$$q(A_{10}) = q(A_{11}) + D^1 \cdot (\vec{v}_{10}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) + D^3 \cdot (\vec{v}_{10}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{10}),$$

et des expressions analogues pour  $A_{21}$ ,  $A_{12}$  et  $A_{01}$ . En sommant, il vient :

$$\begin{aligned} q(A_{10}) + q(A_{21}) + q(A_{12}) + q(A_{01}) &= 4q(A_{11}) + D^1 \cdot (\vec{v}_{10}) + D^1 \cdot (\vec{v}_{21}) + D^1 \cdot (\vec{v}_{12}) + D^1 \cdot (\vec{v}_{01}) \\ + D^2 \cdot (\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}) \\ + D^3 \cdot (\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) + D^3 \cdot (\vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}) + D^3 \cdot (\vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}) + D^3 \cdot (\vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}), \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$\begin{aligned} q(A_{10}) + q(A_{21}) + q(A_{12}) + q(A_{01}) &= 4q(A_{11}) \\ + D^2 \cdot (\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}) \\ + D^3 \cdot (\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) + D^3 \cdot (\vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}) + D^3 \cdot (\vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}) + D^3 \cdot (\vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}), \end{aligned}$$

qui se réduit encore à (cette propriété étant vérifiée pour toutes les dérivées impaires, Lemme 2) :

$$\begin{aligned} q(A_{10}) + q(A_{21}) + q(A_{12}) + q(A_{01}) &= 4q(A_{11}) \\ + D^2 \cdot (\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}) + D^2 \cdot (\vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}), \end{aligned}$$

mais les vecteurs s'expriment en fonction des sommets, ainsi,  $\vec{v}_{10} = \frac{\vec{v}_{00} + \vec{v}_{20}}{2}$  et on peut calculer, par exemple  $D^2 \cdot (\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10})$ , soit :

$$D^2 \cdot (\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) = \frac{1}{4} D^2 \cdot (\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + \frac{1}{4} D^2 \cdot (\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + \frac{1}{2} D^2 \cdot (\vec{v}_{00}, \vec{v}_{20})$$

et des expressions analogues pour les autres termes. En sommant, on va trouver la même relation qu'au degré 2 (en particulier, le Lemme 1 s'applique pour les dérivées secondes) et le résultat final sera le même, à savoir :

$$4q(A_{11}) + q(A_{00}) + q(A_{20}) + q(A_{22}) + q(A_{02}) - 2(q(A_{10}) + q(A_{21}) + q(A_{12}) + q(A_{01})) = 0,$$

et aussi, pour les autres nœuds centraux, des expressions analogues exprimées sur le sous-motif centré en le nœud examiné, soit :

$$4q(A_{21}) + q(A_{10}) + q(A_{30}) + q(A_{32}) + q(A_{12}) - 2(q(A_{20}) + q(A_{31}) + q(A_{22}) + q(A_{11})) = 0,$$

$$4q(A_{12}) + q(A_{01}) + q(A_{21}) + q(A_{23}) + q(A_{03}) - 2(q(A_{11}) + q(A_{22}) + q(A_{13}) + q(A_{02})) = 0,$$

$$4q(A_{22}) + q(A_{11}) + q(A_{31}) + q(A_{33}) + q(A_{13}) - 2(q(A_{21}) + q(A_{32}) + q(A_{23}) + q(A_{12})) = 0.$$

Ces 4 relations s'écrivent comme le système

$$\begin{aligned} 4q(A_{11}) - 2q(A_{21}) - 2q(A_{12}) + q(A_{22}) &= -q(A_{00}) - q(A_{20}) - q(A_{02}) + 2q(A_{10}) + 2q(A_{01}), \\ -2q(A_{11}) + 4q(A_{21}) + q(A_{12}) - 2q(A_{22}) &= -q(A_{10}) - q(A_{30}) - q(A_{32}) + 2q(A_{20}) + 2q(A_{31}), \\ -2q(A_{11}) + q(A_{21}) + 4q(A_{12}) - 2q(A_{22}) &= -q(A_{01}) - q(A_{23}) - q(A_{03}) + 2q(A_{13}) + 2q(A_{02}), \\ q(A_{11}) - 2q(A_{21}) - 2q(A_{12}) + 4q(A_{22}) &= -q(A_{31}) - q(A_{33}) - q(A_{13}) + 2q(A_{32}) + 2q(A_{23}), \end{aligned} \quad (7)$$

qui sont les relations définissantes d'un quadrilatère de degré 3 Serendip et permettent d'en déduire les fonctions de forme à partir de celles, notées avec l'exposant  $c$ , de l'élément complet. Il suffit de résoudre le système issu des relations précédentes qui donnent le lien entre les fonctions cherchées puis de poser la forme générique des fonctions de forme, soit :

$$q_i = q_i^c + \sum_l \alpha_i^l q_l^c,$$

où  $l$  est l'indice des fonctions complètes centrales (4 telles fonctions ici).

Le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(A_{11}) \\ q(A_{21}) \\ q(A_{12}) \\ q(A_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q(A_{00}) - q(A_{20}) - q(A_{02}) + 2q(A_{10}) + 2q(A_{01}) \\ -q(A_{10}) - q(A_{30}) - q(A_{32}) + 2q(A_{20}) + 2q(A_{31}) \\ -q(A_{01}) - q(A_{23}) - q(A_{03}) + 2q(A_{13}) + 2q(A_{02}) \\ -q(A_{31}) - q(A_{33}) - q(A_{13}) + 2q(A_{32}) + 2q(A_{23}) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les 4 fonctions centrales sont définies par les relations qui suivent, on établit la première via le système (par élimination de Gauss) et on en déduit les autres. On trouve :

$$q(A_{22}) = \frac{1}{9}(-q(A_{00}) - 2q(A_{30}) - 4q(A_{33}) - 2q(A_{03}) + 3q(A_{20}) + 6q(A_{32}) + 6q(A_{23}) + 3q(A_{02}))$$

soit le schéma :

$$\begin{array}{cccc} -2/9 & \cdot & 2/3 & -4/9 \\ 1/3 & \cdot & (2.2) & 2/3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1/9 & \cdot & 1/3 & -2/9 \end{array}$$

Autrement dit, la relation de Serendipité, pour  $A_{22}$ , s'exprime par :

$$9q(A_{22}) + q(A_{00}) + 2q(A_{30}) + 4q(A_{33}) + 2q(A_{03}) - 3q(A_{20}) - 6q(A_{32}) - 6q(A_{23}) - 3q(A_{02}) = 0.$$

Et, par déduction, on a aussi les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 9q(A_{11}) + 4q(A_{00}) + 2q(A_{30}) + q(A_{33}) + 2q(A_{03}) - 6q(A_{10}) - 3q(A_{31}) - 3q(A_{13}) - 6q(A_{01}) &= 0, \\ 9q(A_{21}) + 2q(A_{00}) + 4q(A_{30}) + 2q(A_{33}) + q(A_{03}) - 6q(A_{20}) - 6q(A_{31}) - 3q(A_{23}) - 3q(A_{01}) &= 0, \\ 9q(A_{12}) + 2q(A_{00}) + q(A_{30}) + 2q(A_{33}) + 4q(A_{03}) - 3q(A_{10}) - 3q(A_{32}) - 6q(A_{13}) - 6q(A_{02}) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

Les relations de serendipité pour le quadrilatère de degré 3 à 12 nœuds

en notant que ces quatre relations sont pour le degré 3 ce qu'est la Relation (3) pour le degré 2.

**L'espace de Serendipité.** Les monômes de cet espace sont représentés dans le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & & & & \\
 & & u & & v \\
 & & & & \\
 & u^2 & & uv & & v^2 \\
 & & & & \\
 & u^3 & & u^2v & & uv^2 & & v^3 \\
 & & & & & & & \\
 & u^3v & & & & & & uv^3
 \end{array}$$

où l'on retrouve l'espace  $P^3$  enrichi par les monômes  $u^3v$  et  $uv^3$ . Notons que  $P^3$  est trouvé par construction tandis que  $u^3v$  et  $uv^3$  arrivent car ces deux fonctions vérifient les Relations (8).

## 4.2 Les fonctions de forme à partir de l'espace trouvé via Taylor

À partir de ces relations on peut déduire les fonctions de forme en exhibant les coefficients de la répartition. On repart de la forme des fonctions, à savoir :

$$q_i = q_i^c + \sum_l \alpha_i^l q_l^c,$$

que l'on note comme :

$$q_i = q_i^c + \alpha_i q_{11}^c + \beta_i q_{21}^c + \gamma_i q_{12}^c + \delta_i q_{22}^c.$$

Pour  $i = 1$ , on remplace  $q$  par  $q_1$  dans le système ci-dessus et il se réduit à :

$$9\delta_1 + 1 = 0,$$

$$9\alpha_1 + 4 = 0,$$

$$9\beta_1 + 2 = 0,$$

$$9\gamma_1 + 2 = 0,$$

donc :

$$\alpha_1 = -\frac{4}{9}, \beta_1 = -\frac{2}{9}, \gamma_1 = -\frac{2}{9}, \delta_1 = -\frac{1}{9}.$$

Pour  $i = 5$ , on remplace  $q$  par  $q_5$  dans le système ci-dessus qui se réduit à :

$$9\delta_5 = 0,$$

$$9\alpha_5 - 6 = 0,$$

$$9\beta_5 = 0,$$

$$9\gamma_5 - 3 = 0,$$

donc :

$$\alpha_5 = \frac{2}{3}, \beta_5 = 0, \gamma_5 = \frac{1}{3}, \delta_5 = 0.$$

On peut alors donner l'expression de  $q_1$ , alias  $q_{00}$ , et de  $q_5$ , alias  $q_{10}$  qui, par symétries, rotations et permutations, permettront de trouver facilement toutes les autres fonctions. Pour ce faire, il faut d'abord donner la forme des fonctions complètes  $q_{00}^c, q_{10}^c, q_{11}^c, q_{21}^c, q_{12}^c$  et  $q_{22}^c$ . On applique la formule générique qui, utilisant les fonctions :

$$\phi_i(u) = \frac{-1^i}{i!(n-i)!} \prod_{l=0, l \neq i}^{l=n} (l-nu) \quad \text{et} \quad \phi_j(v) = \frac{-1^j}{j!(n-j)!} \prod_{l=0, l \neq j}^{l=n} (l-nv),$$

$$\text{s'écrit :} \quad q_{ij}^c(u, v) = \phi_i(u)\phi_j(v). \quad (9)$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
q_{00}^c &= \frac{1}{6 \times 6} (1-3u)(2-3u)(3-3u)(1-3v)(2-3v)(3-3v) \\
&= \frac{1}{4} (1-3u)(2-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v), \\
q_{10}^c &= \frac{-1}{2 \times 6} (-3u)(2-3u)(3-3u)(1-3v)(2-3v)(3-3v) \\
&= \frac{9}{4} u(2-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v), \\
q_{11}^c &= \frac{1}{4} (-3u)(2-3u)(3-3u)(-3v)(2-3v)(3-3v) \\
&= \frac{81}{4} u(2-3u)(1-u)v(2-3v)(1-v), \\
q_{21}^c &= \frac{-1}{4} (-3u)(1-3u)(3-3u)(-3v)(2-3v)(3-3v) \\
&= -\frac{81}{4} u(1-3u)(1-u)v(2-3v)(1-v), \\
q_{12}^c &= -\frac{81}{4} u(2-3u)(1-u)v(1-3v)(1-v), \\
q_{22}^c &= \frac{1}{4} (-3u)(1-3u)(3-3u)(-3v)(1-3v)(3-3v) \\
&= \frac{81}{4} u(1-3u)(1-u)v(1-3v)(1-v).
\end{aligned}$$

On en déduit  $q_1 = q_{00}$  et  $q_5 = q_{10}$ . En effet, comme

$$\begin{aligned}
q_{00} &= q_{00}^c + \alpha_1 q_{11}^c + \beta_1 q_{21}^c + \gamma_1 q_{12}^c + \delta_1 q_{22}^c \\
q_{10} &= q_{10}^c + \alpha_5 q_{11}^c + \beta_5 q_{21}^c + \gamma_5 q_{12}^c + \delta_5 q_{22}^c
\end{aligned}$$

on a, avec les coefficients  $\alpha_1$ , etc. :

$$\begin{aligned}
q_{00} &= q_{00}^c - \frac{4}{9} q_{11}^c - \frac{2}{9} q_{21}^c - \frac{2}{9} q_{12}^c - \frac{1}{9} q_{22}^c = \frac{1}{4} (1-3u)(2-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v) - \\
&9u(2-3u)(1-u)v(2-3v)(1-v) + \frac{9}{2} u(1-3u)(1-u)v(2-3v)(1-v) + \\
&\frac{9}{2} u(2-3u)(1-u)v(1-3v)(1-v) - \frac{9}{4} u(1-3u)(1-u)v(1-3v)(1-v) \\
&= \frac{9}{2} (1-u)(1-v) \left( \frac{1}{18} (1-3u)(2-3u)(1-3v)(2-3v) - \right. \\
&\quad \left. 2u(2-3u)v(2-3v) + u(1-3u)v(2-3v) + \right. \\
&\quad \left. u(2-3u)v(1-3v) - \frac{1}{2} u(1-3u)v(1-3v) \right) \\
&= \frac{9}{2} (1-u)(1-v) \left( \frac{2}{9} - u - v + u^2 + v^2 \right),
\end{aligned}$$

et on a, avec les coefficients  $\alpha_5$ , etc. :

$$\begin{aligned}
q_{10} &= q_{10}^c + \frac{2}{3} q_{11}^c + \frac{1}{3} q_{12}^c = \frac{9}{4} u(2-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v) + \\
&\frac{27}{2} u(2-3u)(1-u)v(2-3v)(1-v) - \frac{27}{4} u(2-3u)(1-u)v(1-3v)(1-v) \\
&= \frac{9}{4} u(1-u)(2-3u)(1-v) \left( (1-3v)(2-3v) + 6v(2-3v) - 3v(1-3v) \right) \\
&= \frac{9}{2} u(1-u)(2-3u)(1-v).
\end{aligned}$$

Par permutations, symétries, ..., on trouve les autres fonctions dont la liste est :

1	$q_1 = \frac{9}{2}(1-u)(1-v)(\frac{2}{9} - u - v + u^2 + v^2)$
2	$q_2 = \frac{9}{2}u(1-v)(\frac{2}{9} - u - v + u^2 + v^2)$
3	$q_3 = \frac{9}{2}uv(\frac{2}{9} - u - v + u^2 + v^2)$
4	$q_4 = \frac{9}{2}(1-u)v(\frac{2}{9} - u - v + u^2 + v^2)$
5	$q_5 = u(1-u)(2-3u)(1-v)$
6	$q_6 = u(1-u)(3u-1)(1-v)$
7	$q_7 = v(1-v)(2-3v)u$
8	$q_8 = v(1-v)(3v-1)u$
9	$q_9 = \frac{2}{3}u(1-u)(3u-1)v$
10	$q_{10} = \frac{2}{3}u(1-u)(2-3u)v$
11	$q_{11} = \frac{2}{3}v(1-v)(3v-1)(1-u)$
12	$q_{12} = \frac{2}{3}v(1-v)(2-3v)(1-u)$

Fonctions de forme du quadrilatère de degré 3 à 12 nœuds

### 4.3 Construction directe des fonctions de forme dans les Bézier

On suit la même méthode que pour le quadrilatère de degré 2. Par symétrie, il suffit d'examiner les deux fonctions *type* qui correspondent aux indices 00 et 10. On pose *a priori* :

$$B'_{00}(u, v) = B_0^3(u)B_0^3(v) + \alpha_{00}B_1^3(u)B_1^3(v) + \beta_{00}B_2^3(u)B_1^3(v) + \gamma_{00}B_1^3(u)B_2^3(v) + \delta_{00}B_2^3(u)B_2^3(v),$$

$$B'_{10}(u, v) = B_1^3(u)B_0^3(v) + \alpha_{10}B_1^3(u)B_1^3(v) + \beta_{10}B_2^3(u)B_1^3(v) + \gamma_{10}B_1^3(u)B_2^3(v) + \delta_{10}B_2^3(u)B_2^3(v),$$

et des relations identiques pour les autres fonctions réduites (notées  $B'_{ij}$ ). Par symétrie les coefficients de répartition, les  $\alpha_{00}, \dots$ , prennent leurs valeurs dans un ensemble de 7 paramètres qui correspondent aux schémas qui suivent (lire *ai* comme  $a_i$ ) :

a4	a5	a6	a7	a7	a6	a5	a4	a1	a2	a3	a4	a4	a3	a2	a1
a3			a6	a6			a3	a2	[12]		a5	a5		[22]	a2
a2	[11]		a5	a5		[21]	a2	a3			a6	a6			a3
a1	a2	a3	a4	a4	a3	a2	a1	a4	a5	a6	a7	a7	a6	a5	a4

L'espace cherché doit contenir  $P^3$ ,  $u^3v$  et  $uv^3$ . On impose en premier  $u^3v$ . On a :

$$u^3v = u^3v(1-v+v)^2 = B_3^3(u) \left\{ \frac{1}{3}B_1^3(v) + \frac{2}{3}B_2^3(v) + B_3^3(v) \right\},$$

$$= \frac{1}{3}B_3^3(u)B_1^3(v) + \frac{2}{3}B_3^3(u)B_2^3(v) + B_3^3(u)B_3^3(v),$$

et, en  $B_1^3(u)B_1^3(v)$ , il vient :

$$-\frac{1}{3}\alpha_{31} - \frac{2}{3}\alpha_{32} - \alpha_{33} = -\frac{1}{3}a_5 - \frac{2}{3}a_6 - a_7 = 0,$$

donc une première équation :

$$(E1) \quad a_5 + 2a_6 + 3a_7 = 0.$$

Les contributions aux indices 21, 12 et 22 donnent les trois équations qui suivent :

$$(E2) \quad a_2 + 2a_3 + 3a_4 = 0,$$

$$(E3) \quad 3a_4 + 2a_5 + a_6 = 0,$$

$$(E4) \quad 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0.$$



L'existence de  $u^3v$  impliquant celle de  $u^3(1-v)$  donne celle de  $u^3$ . On impose maintenant  $u^2v$ . On a :

$$\begin{aligned} u^2v &= u^2(1-u+u)v(1-v+v)^2 = \{u^2(1-u) + u^3\} \{v(1-v)^2 + 2v^2(1-v) + v^3\}, \\ &= \left\{ \frac{1}{3}B_2^3(u) + B_3^3(u) \right\} \left\{ \frac{1}{3}B_1^3(v) + \frac{2}{3}B_2^3(v) + B_3^3(v) \right\}. \\ &= \frac{1}{9}B_2^3(u)B_1^3(v) + \frac{1}{3}B_3^3(u)B_1^3(v) + \frac{2}{9}B_2^3(u)B_2^3(v) + \frac{2}{3}B_3^3(u)B_2^3(v) + \frac{1}{3}B_2^3(u)B_3^3(v) + B_3^3(u)B_3^3(v), \end{aligned}$$

expression dans laquelle on remplace les Bernstein en fonction des  $B'$  en exprimant les coefficients des fonctions centrales, soit :

$$\begin{aligned} \text{en } B_1^3(u)B_1^3(v) &: -\frac{1}{3}a_5 - \frac{2}{3}a_6 - \frac{1}{3}a_6 - a_7, \\ \text{en } B_2^3(u)B_1^3(v) &: \frac{1}{9} - \frac{1}{3}a_2 - \frac{2}{3}a_3 - \frac{1}{3}a_5 - a_4, \\ \text{en } B_1^3(u)B_2^3(v) &: -\frac{1}{3}a_6 - \frac{2}{3}a_5 - \frac{1}{3}a_3 - a_4, \\ \text{en } B_2^3(u)B_2^3(v) &: -\frac{1}{3}a_3 - \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{9} - \frac{1}{3}a_2 - a_1, \end{aligned}$$

donc un jeu de quatre équations :

$$\begin{aligned} (E5) \quad a_5 + 3a_6 + 3a_7 &= 0, \\ (E6) \quad 3a_2 + 6a_3 + 9a_4 + 3a_5 &= 1, \\ (E7) \quad a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 &= 0, \\ (E8) \quad 9a_1 + 9a_2 + 3a_3 &= 2. \end{aligned}$$

L'existence de  $u^2v$  impliquant celle de  $u^2(1-v)$  donne celle de  $u^2$ . À ce stade, on a  $u^3, (1-u)^3, u^2, (1-u)^2$  qui forment une base donc on a aussi  $1, u, u^2, u^3$ . De plus comme  $u^2v$  implique  $(1-u)^2v = v - 2uv + u^2v$ ,  $uv$  tombe aussi.

Le système précédent est rappelé ici, soit :

$$\begin{aligned} (E1) \quad a_5 + 2a_6 + 3a_7 &= 0, \\ (E2) \quad a_2 + 2a_3 + 3a_4 &= 0, \\ (E3) \quad 3a_4 + 2a_5 + a_6 &= 0, \\ (E4) \quad 3a_1 + 2a_2 + a_3 &= 0, \\ (E5) \quad a_5 + 3a_6 + 3a_7 &= 0, \\ (E6) \quad 3a_2 + 6a_3 + 9a_4 + 3a_5 &= 1, \\ (E7) \quad a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 &= 0, \\ (E8) \quad 9a_1 + 9a_2 + 3a_3 &= 2. \end{aligned}$$

Ce système admet une solution qui est représentée sur le diagramme suivant :

a4	a5	a6	a7	-2/9	1/3	0	-1/9
a3			a6	0			0
			=				
a2	[11]		a5	2/3	[11]		1/3
a1	a2	a3	a4	-4/9	2/3	0	-2/9

Il reste à expliquer pourquoi on a 8 équations (et non 7) donc une redondance.

Pour obtenir l'expression des deux fonctions de base réduites type, on suit la même méthode que pour l'élément précédent par regroupement des Bernstein.

#### 4.4 Construction directe des fonctions via un système

On suit la même méthode que pour le degré 2. On écrit la forme générique d'une fonction et on instancie. Il y a 12 inconnues et donc un système  $12 \times 12$  pour chacune des fonctions.

#### 4.5 Validation d'un quadrilatère courant d'un maillage donné

La méthode est la même, on considère un élément d'un maillage et on va reconstruire un quadrilatère complet et l'écrire sous sa forme de Bézier avant d'effectuer l'analyse de son jacobien. La reconstruction consiste à définir les nœuds centraux puis les points de contrôle des arêtes et enfin les points de contrôle centraux.

Étant donné un élément quelconque d'un maillage, noté comme le carreau :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=1,12} q_i(u, v)A_i,$$

où les  $A_i$  désignent les nœuds de l'élément observé, on cherche les conditions assurant sa validité géométrique. On a :

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= \sum_{i=1,12} q_i(u, v)A_i = \sum_{i=1,12} (q_i^c(u, v) + \alpha_i q_{11}^c(u, v) + \beta_i q_{21}^c(u, v) + \gamma_i q_{12}^c(u, v) + \delta_i q_{22}^c(u, v))A_i \\ &= \sum_{i=1,12} q_i^c(u, v)A_i + q_{11}^c(u, v)A_{11} + q_{21}^c(u, v)A_{21} + q_{12}^c(u, v)A_{12} + q_{22}^c(u, v)A_{22} \end{aligned}$$

en définissant

$$A_{11} = \sum_{i=1,12} \alpha_i A_i,$$

$$A_{21} = \sum_{i=1,12} \beta_i A_i,$$

$$A_{12} = \sum_{i=1,12} \gamma_i A_i,$$

$$A_{22} = \sum_{i=1,12} \delta_i A_i,$$

autrement dit le carreau :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=1,12} q_i(u, v)A_i = \sum_{i=1,16} q_i^c(u, v)A_{i^v},$$

noté, au final :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} q_{ij}^c(u, v)A_{ij},$$

est un carreau complet pour les nœuds centraux ainsi construits.

L'analyse de la validité géométrique d'un carreau complet, cf. [9], se fait en regardant sa forme de Bézier, en effet

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} q_{ij}^c(u, v)A_{ij} = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} B_i^3(u)B_j^3(v)P_{ij},$$

avec  $P_{ij}$  les points de contrôle de l'élément et  $B_i^3(u)$  les polynômes de Bernstein de degré 3. Sous ce formalisme il est facile d'analyser le signe du jacobien, voir plus bas. Le seul point à effectuer est le calcul des points de contrôle, en particulier les points centraux. Il y a, *a priori*, deux méthodes pour obtenir ces points.

**Méthode 1.** La relation liant les points de contrôle d'une arête aux nœuds de celle-ci est la suivante, par exemple pour l'arête image de  $v = 0$  :

$$P_{10} = \frac{-5A_{00} + 18A_{10} - 9A_{20} + 2A_{30}}{6}$$

$$P_{20} = \frac{2A_{00} - 9A_{10} + 18A_{20} - 5A_{30}}{6}.$$

Ceci permet de déterminer facilement les points de contrôle des arêtes puis  $P_{11}, P_{21}, P_{12}, P_{22}$ , les derniers points inconnus, s'obtiennent via  $A_{11}, A_{21}, A_{12}, A_{22}$ , par les relations :

$$A_{11} = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} B_i^3(u) B_j^3(v) P_{ij} \quad \text{pour } (u, v) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$A_{21} = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} B_i^3(u) B_j^3(v) P_{ij} \quad \text{pour } (u, v) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$A_{12} = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} B_i^3(u) B_j^3(v) P_{ij} \quad \text{pour } (u, v) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$A_{22} = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} B_i^3(u) B_j^3(v) P_{ij} \quad \text{pour } (u, v) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

qui est un système  $4 \times 4$  dont la solution donne les 4 points de contrôle centraux.

**Méthode 2.** Pour éviter de résoudre le système précédent, nous préférons utiliser la forme en Bézier du carreau. On part de :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} q_{ij}^c(u, v) A_{ij} = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} B_i^3(u) B_j^3(v) P_{ij}, \quad (10)$$

et on cherche ce qui vient au regard de chaque paire  $B_i^3(u) B_j^3(v)$ , en fait, il suffit de regarder 3 cas seulement,  $B_0^3(u) B_0^3(v)$ ,  $B_1^3(u) B_0^3(v)$ , et  $B_1^3(u) B_1^3(v)$  et d'établir les contributions des différents  $q_{ij}^c(u, v)$  dans chacune de ces paires. Ceci revient à exprimer ces fonctions dans la base de Bernstein.

Prenons  $q_{00}^c(u, v)$ , on a :

$$q_{00}^c(u, v) = \frac{1}{4}(1 - 3u)(2 - 3u)(1 - u)(1 - 3v)(2 - 3v)(1 - v),$$

et un simple calcul<sup>5</sup> montre que :

$$\begin{aligned} q_{00}^c(u, v) &= \frac{1}{2} \left\{ 2B_0^3(u) - \frac{5}{3}B_1^3(u) + \frac{2}{3}B_2^3(u) \right\} \frac{1}{2} \left\{ 2B_0^3(v) - \frac{5}{3}B_1^3(v) + \frac{2}{3}B_2^3(v) \right\}, \\ &= \left\{ B_0^3(u) - \frac{5}{6}B_1^3(u) + \frac{1}{3}B_2^3(u) \right\} \left\{ B_0^3(v) - \frac{5}{6}B_1^3(v) + \frac{1}{3}B_2^3(v) \right\}. \end{aligned}$$

Avant de poursuivre, rappelons le résultat suivant :

<sup>5</sup>On écrit

$$(1 - 3u)(2 - 3u)(1 - u) = (1 - u - 2u)(2 - 2u - u)(1 - u)$$

en mettant en évidence  $u$  et  $(1 - u)$  et on développe.

**Lemme 4 (sur la symétrie des Bernstein).** On a :

$$B_i^3(1-u) = B_{3-i}^3(u),$$

et cette propriété est, en fait, vraie pour tout degré.  $\square$

Avec cette propriété, on déduit (on change, selon la fonction,  $u$  en  $1-u$  et  $v$  en  $1-v$ ), par exemple on a  $q_{30}^c(u, v) = q_{00}^c(1-u, v)$  et ainsi :

$$\begin{aligned} q_{30}^c(u, v) &= \left\{ B_3^3(u) - \frac{5}{6}B_2^3(u) + \frac{1}{3}B_1^3(u) \right\} \left\{ B_0^3(v) - \frac{5}{6}B_1^3(v) + \frac{1}{3}B_2^3(v) \right\}, \\ q_{03}^c(u, v) &= \left\{ B_0^3(u) - \frac{5}{6}B_1^3(u) + \frac{1}{3}B_2^3(u) \right\} \left\{ B_3^3(v) - \frac{5}{6}B_2^3(v) + \frac{1}{3}B_1^3(v) \right\}, \\ q_{33}^c(u, v) &= \left\{ B_3^3(u) - \frac{5}{6}B_2^3(u) + \frac{1}{3}B_1^3(u) \right\} \left\{ B_3^3(v) - \frac{5}{6}B_2^3(v) + \frac{1}{3}B_1^3(v) \right\}. \end{aligned}$$

Prenons  $q_{10}^c(u, v)$ , on a (il suffit de regarder en  $u$  pour  $i = 1$ ) :

$$q_{10}^c(u, v) = \frac{9}{4}u(2-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v),$$

et un simple calcul montre que :

$$\begin{aligned} q_{10}^c &= \frac{9}{4} \left\{ \frac{2}{3}B_1^3(u) - \frac{1}{3}B_2^3(u) \right\} \left\{ 2B_0^3(v) - \frac{5}{3}B_1^3(v) + \frac{2}{3}B_2^3(v) \right\}, \\ &= \left\{ B_1^3(u) - \frac{1}{2}B_2^3(u) \right\} \left\{ 3B_0^3(v) - \frac{5}{2}B_1^3(v) + B_2^3(v) \right\}, \end{aligned}$$

on en déduit (on change, selon la fonction,  $u$  en  $1-u$  et  $v$  en  $1-v$ ) :

$$\begin{aligned} q_{20}^c &= \left\{ B_2^3(u) - \frac{1}{2}B_1^3(u) \right\} \left\{ 3B_0^3(v) - \frac{5}{2}B_1^3(v) + B_2^3(v) \right\}, \\ q_{13}^c &= \left\{ B_1^3(u) - \frac{1}{2}B_2^3(u) \right\} \left\{ 3B_3^3(v) - \frac{5}{2}B_2^3(v) + B_1^3(v) \right\}, \\ q_{23}^c &= \left\{ B_2^3(u) - \frac{1}{2}B_1^3(u) \right\} \left\{ 3B_3^3(v) - \frac{5}{2}B_2^3(v) + B_1^3(v) \right\}, \\ q_{31}^c &= \left\{ 3B_3^3(u) - \frac{5}{2}B_2^3(u) + B_1^3(u) \right\} \left\{ B_1^3(v) - \frac{1}{2}B_2^3(v) \right\}, \\ q_{32}^c &= \left\{ 3B_3^3(u) - \frac{5}{2}B_2^3(u) + B_1^3(u) \right\} \left\{ B_2^3(v) - \frac{1}{2}B_1^3(v) \right\}, \\ q_{01}^c &= \left\{ 3B_0^3(u) - \frac{5}{2}B_1^3(u) + B_2^3(u) \right\} \left\{ B_1^3(v) - \frac{1}{2}B_2^3(v) \right\}, \\ q_{02}^c &= \left\{ 3B_0^3(u) - \frac{5}{2}B_1^3(u) + B_2^3(u) \right\} \left\{ B_2^3(v) - \frac{1}{2}B_1^3(v) \right\}. \end{aligned}$$

Prenons  $q_{11}^c(u, v)$ , on a (il suffit de prendre en  $u$  et en  $v$  ce que l'on a pour  $u$  et  $i = 1$  dans  $q_{10}^c$ ) :

$$q_{11}^c = \frac{81}{4}u(2-3u)(1-u)v(2-3v)(1-v),$$

et un simple calcul montre que :

$$q_{11}^c = \frac{81}{4} \left\{ \frac{2}{3}B_1^3(u) - \frac{1}{3}B_2^3(u) \right\} \left\{ \frac{2}{3}B_1^3(v) - \frac{1}{3}B_2^3(v) \right\} = \frac{9}{4} \{ 2B_1^3(u) - B_2^3(u) \} \{ 2B_1^3(v) - B_2^3(v) \},$$

on en déduit (on change, selon la fonction,  $u$  en  $1 - u$  et  $v$  en  $1 - v$ ) :

$$\begin{aligned} q_{21}^c &= \frac{9}{4} \{2B_2^3(u) - B_1^3(u)\} \{2B_1^3(v) - B_2^3(v)\}, \\ q_{12}^c &= \frac{9}{4} \{2B_1^3(u) - B_2^3(u)\} \{2B_2^3(v) - B_1^3(v)\}, \\ q_{22}^c &= \frac{9}{4} \{2B_2^3(u) - B_1^3(u)\} \{2B_2^3(v) - B_1^3(v)\}. \end{aligned}$$

Au final on a seulement eu besoin de décomposer 3 fonctions (les fonctions type) pour les avoir toutes.

En regroupant, pour  $P_{00}$ , on ne trouve qu'un seul terme provenant de  $q_{00}^c$  avec le facteur 1, ouf! Pour  $P_{10}$ , on a les termes suivants :

$$P_{10} = -\frac{5}{6}A_{00} + \frac{1}{3}A_{30} + 3A_{10} - \frac{3}{2}A_{20} = \frac{-5A_{00} + 18A_{10} - 9A_{20} + 2A_{30}}{6},$$

qui est la valeur attendue. Tous les points de contrôle des arêtes sont, en fait, facilement calculables via les formules classiques.

Plus intéressant, en  $P_{11}$ , on trouve

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{25}{36}A_{00} - \frac{5}{18}A_{30} + \frac{1}{9}A_{33} - \frac{5}{18}A_{03} \\ &\quad - \frac{5}{2}A_{10} + \frac{5}{4}A_{20} + A_{13} - \frac{1}{2}A_{23} - \frac{5}{2}A_{31} + \frac{5}{4}A_{32} - \frac{5}{2}A_{01} + \frac{5}{4}A_{02} \\ &\quad + 9A_{11} - \frac{9}{2}A_{21} - \frac{9}{2}A_{12} + \frac{9}{4}A_{22}, \end{aligned}$$

et on remplace les  $A_{ij}$  en fonction des  $P_{ij}$  avec la relation, pour les arêtes, ici la première :

$$A_{10} = \frac{8P_{00} + 12P_{10} + 6P_{20} + P_{30}}{27}, \quad A_{20} = \frac{P_{00} + 6P_{10} + 12P_{20} + 8P_{30}}{27},$$

et les relations définissant les  $A_{ij}$  internes (en  $\alpha_i, \dots$ ) données ci-dessus et que nous explicitons maintenant, on a :

$$A_{11} = \sum_{i=1,12} \alpha_i A^{v_i} = -\frac{4}{9}A_{00} - \frac{2}{9}A_{30} - \frac{1}{9}A_{33} - \frac{2}{9}A_{03} + \frac{2}{3}A_{10} + \frac{1}{3}A_{13} + \frac{2}{3}A_{01} + \frac{1}{3}A_{31},$$

et, par analogie :

$$\begin{aligned} A_{21} &= -\frac{2}{9}A_{00} - \frac{4}{9}A_{30} - \frac{2}{9}A_{33} - \frac{1}{9}A_{03} + \frac{2}{3}A_{20} + \frac{1}{3}A_{23} + \frac{1}{3}A_{01} + \frac{2}{3}A_{31}, \\ A_{12} &= -\frac{2}{9}A_{00} - \frac{1}{9}A_{30} - \frac{2}{9}A_{33} - \frac{4}{9}A_{03} + \frac{1}{3}A_{10} + \frac{2}{3}A_{13} + \frac{2}{3}A_{02} + \frac{1}{3}A_{32}, \\ A_{22} &= -\frac{1}{9}A_{00} - \frac{2}{9}A_{30} - \frac{4}{9}A_{33} - \frac{2}{9}A_{03} + \frac{1}{3}A_{20} + \frac{2}{3}A_{23} + \frac{1}{3}A_{02} + \frac{2}{3}A_{32}. \end{aligned}$$

Ces relations sont analogues aux Relations (8) comme le prouve le lemme donné plus bas.

Au regard de  $P_{00} = A_{00}$ , il vient les contributions cachées dans  $A_{00}, A_{10}, A_{20}, A_{01}, A_{02}$  puis  $A_{11}, A_{21}, A_{12}, A_{22}$ , qui, elles-mêmes contiennent également des termes en  $A_{00}, A_{10}, A_{20}, A_{01}, A_{02}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\frac{25}{36} - \frac{5}{2} \frac{8}{27} + \frac{5}{4} \frac{1}{27} - \frac{5}{2} \frac{8}{27} + \frac{5}{4} \frac{1}{27} - 4 + 1 + 1 - \frac{1}{4} + 9 \frac{2}{3} \frac{8}{27} + 9 \frac{2}{3} \frac{8}{27} - \frac{9}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{27} - \frac{9}{2} \frac{1}{3} \frac{8}{27} - \frac{9}{2} \frac{1}{3} \frac{8}{27} - \frac{9}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{27} + \frac{9}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{27} + \frac{9}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{27} \\ &= \frac{25}{36} - \frac{5}{2} \frac{8}{27} + \frac{5}{4} \frac{1}{27} - \frac{5}{2} \frac{8}{27} + \frac{5}{4} \frac{1}{27} - 2 - \frac{1}{4} + 6 \frac{8}{27} + 6 \frac{8}{27} - 3 \frac{1}{27} - \frac{3}{2} \frac{8}{27} - \frac{3}{2} \frac{8}{27} - 3 \frac{1}{27} + \frac{3}{4} \frac{1}{27} + \frac{3}{4} \frac{1}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{25}{36} - \frac{5}{2} \frac{8}{27} + \frac{5}{4} \frac{1}{27} - \frac{5}{2} \frac{8}{27} + \frac{5}{4} \frac{1}{27} - 2 - \frac{1}{4} + 12 \frac{8}{27} - 6 \frac{1}{27} - 3 \frac{8}{27} + \frac{3}{2} \frac{1}{27} \\
 &= \frac{75 - 80 + 5 - 80 + 5 - 216 - 27 + 384 - 24 - 96 + 6}{108} = -\frac{48}{108} = -\frac{4}{9}.
 \end{aligned}$$

Au regard de  $P_{10}$ , il vient les contributions au travers de  $A_{10}$  et  $A_{20}$  directement ou via les nœuds centraux. On trouve comme résultat la simple valeur :

$$\frac{2}{3}.$$

On vérifie alors qu'au regard de  $P_{13}$ , on a le coefficient  $\frac{1}{3}$  et que pour la contribution de  $P_{20}$  on trouve 0, etc. Le schéma complet des contributions est donc le suivant :

$$\begin{array}{cccc}
 -2/9 & 1/3 & \cdot & -1/9 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 2/3 & (1.1) & \cdot & 1/3 \\
 -4/9 & 2/3 & \cdot & -2/9
 \end{array}$$

le même que celui trouvé via le système issu de Taylor ou encore celui associé aux  $A_{ij}$  ci-dessus. Notons que cette relation (et leurs analogues) donnant les quatre points de contrôle internes a, ici, une expression d'interprétation géométrique particulièrement simple :

$$P_{ij} = \alpha_j P_{i0} + \beta_j P_{i3} + \alpha_i P_{0j} + \beta_i P_{3j} - \alpha_i \alpha_j P_{00} - \alpha_i \beta_j P_{03} - \alpha_j \beta_i P_{30} - \beta_i \beta_j P_{33}, \quad (11)$$

pour  $i = 1, 2$  et  $j = 1, 2$  et les coefficients suivants :

- $\alpha_i$  est le poids de  $A_{ij}$  (sur l'élément de référence) par rapport à  $A_{i0}$  sur la "ligne"  $u = \frac{i}{3}$ ,
- $\alpha_j$  est le poids de  $A_{ij}$  par rapport à  $A_{0j}$  sur la "ligne"  $v = \frac{j}{3}$ ,
- $\beta_i = 1 - \alpha_i$ ,
- $\beta_j = 1 - \alpha_j$ .

**En pratique.** À partir des  $A_{ij}$  de l'élément, on calcule les  $P_{ij}$  correspondants puis les quatre  $P_{ij}$  internes par la formule ci-dessus.

On revient sur les Relations (8) qui indiquent comment les valeurs centrales de la fonction sont liées aux valeurs de cette même fonction aux bords avec les deux lemmes qui suivent.

**Lemme 5 (sur la relation pour inventer les nœuds internes).** Pour  $A_{11}$ , on a la relation :

$$9A_{11} + 4A_{00} + 2A_{30} + A_{33} + 2A_{03} - 6A_{10} - 3A_{31} - 3A_{13} - 6A_{01} = 0,$$

et des relations similaires pour définir les autres nœuds internes. □

Preuve : Les Relations (8) indiquent comment les valeurs centrales de la fonction sont liées aux valeurs de cette même fonction aux bords. Elles donnent aussi le moyen de construire les nœuds internes de l'élément complet équivalent. En effet, on a, par définition :

$$M(u, v) = \sum_{ij} q_{ij}(u, v) A_{ij},$$

mais comme :

$$q_{ij}(u, v) = q_{ij}^c(u, v) + \sum_{kl \in \text{centre}} \alpha_{ij}^{kl} q_{kl}^c(u, v),$$

il vient :

$$M(u, v) = \sum_{ij} \left\{ q_{ij}^c(u, v) + \sum_{kl \in \text{centre}} \alpha_{ij}^{kl} q_{kl}^c(u, v) \right\} A_{ij},$$

posons, par exemple  $(u, v) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , alors :

$$M(u, v) = \sum_{ij} \left\{ 0 + \sum_{kl=11} \alpha_{ij}^{kl} q_{kl}^c(u, v) \right\} A_{ij} = \sum_{ij} \alpha_{ij}^{11} q_{11}^c(u, v) A_{ij} = \sum_{ij} \alpha_{ij}^{11} A_{ij},$$

mais, pour ce couple, on a  $M(u, v) = A_{11}$ , donc :

$$A_{11} = \sum_{ij} \alpha_{ij}^{11} A_{ij},$$

ce qui confirme que l'on a (les  $A_{ij}$  étant des instanciations sur l'élément de référence) :

$$9q(A_{11}) + 4q(A_{00}) + 2q(A_{30}) + q(A_{33}) + 2q(A_{03}) - 6q(A_{10}) - 3q(A_{31}) - 3q(A_{13}) - 6q(A_{01}) = 0,$$

et, de façon similaire, que l'on a (les  $A_{ij}$ , hormis  $A_{11}$ , étant les nœuds d'un élément courant) :

$$9A_{11} + 4A_{00} + 2A_{30} + A_{33} + 2A_{03} - 6A_{10} - 3A_{31} - 3A_{13} - 6A_{01} = 0.$$

Ce qui est indépendant du degré et termine la preuve.

Dans la foulée, on va montrer que cette relation s'applique aussi sur les points de contrôle.

**Lemme 6 (sur la relation pour inventer les points de contrôle internes).** Pour  $P_{11}$ , on a la relation :

$$9P_{11} + 4P_{00} + 2P_{30} + P_{33} + 2P_{03} - 6P_{10} - 3P_{31} - 3P_{13} - 6P_{01} = 0,$$

et des relations similaires pour définir les autres points de contrôle.  $\square$

Preuve : On va poser la relation sur les  $P_{ij}$  centraux et on va montrer qu'elle se retrouve pour les  $A_{ij}$  centraux. On regarde donc le cas de  $A_{11}$  en fixant les relations sur  $P_{11}, P_{21}, P_{12}$  et  $P_{22}$ , soit :

$$9P_{11} = -4P_{00} - 2P_{30} - P_{33} - 2P_{03} + 6P_{10} + 3P_{13} + 6P_{01} + 3P_{31},$$

$$9P_{21} = -2P_{00} - 4P_{30} - 2P_{33} - P_{03} + 6P_{20} + 3P_{23} + 3P_{01} + 6P_{31},$$

$$9P_{12} = -2P_{00} - P_{30} - 2P_{33} - 4P_{03} + 3P_{10} + 6P_{13} + 6P_{02} + 3P_{32},$$

$$9P_{22} = -P_{00} - 2P_{30} - 4P_{33} - 2P_{03} + 3P_{20} + 6P_{23} + 3P_{02} + 6P_{32}.$$

Ensuite, on évalue  $A_{11}$  soit le point du couple  $(u, v) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  par la Relation (10). Il vient :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{27 \times 27} \{ 64P_{00} + 8P_{30} + P_{33} + 8P_{03} \\ &+ 96P_{10} + 12P_{31} + 12P_{13} + 96P_{01} + 48P_{20} + 6P_{32} + 6P_{23} + 48P_{02} \\ &+ 144P_{11} + 72P_{12} + 72P_{21} + 36P_{22} \}, \end{aligned}$$

puis on exprime les  $P_{ij}$  en fonction des  $A_{ij}$  via la relation

$$P_{ij} = A_{ij}$$

pour un point de contrôle sommet et les relations

$$P_{10} = \frac{-5A_{00} + 18A_{10} - 9A_{20} + 2A_{30}}{6} \quad \text{soit} \quad 6P_{10} = -5A_{00} + 18A_{10} - 9A_{20} + 2A_{30}$$

$$P_{20} = \frac{2A_{00} - 9A_{10} + 18A_{20} - 5A_{30}}{6} \quad \text{soit} \quad 6P_{20} = 2A_{00} - 9A_{10} + 18A_{20} - 5A_{30},$$

pour les points de contrôle autres (ici pour l'arête  $A_{00}A_{30}$ ).

Au regard de  $A_{00}$ , il vient les coefficients liés à  $P_{00}, P_{10}, P_{20}, P_{01}, P_{02}$ , ce qui donne (au facteur  $\frac{1}{27^2}$  près) les 17 termes suivants (1 pour  $P_{00}$ , ...,  $P_{02}$  et 3 pour  $P_{11}$ , ...,  $P_{22}$ ) :

$$64 - 80 + 16 - 80 + 16 - 64 - \frac{5}{6}96 - \frac{5}{6}96 - 16 + \frac{2}{6}48 - \frac{5}{6}24 - 16 + \frac{2}{6}48 - \frac{5}{6}24 - 4 + \frac{2}{6}12 + \frac{2}{6}12 = -324,$$

soit le coefficient  $-\frac{324}{27 \times 27} = -\frac{4}{9}$ .

\*

Au regard de  $A_{30}$ , il vient les coefficients liés à  $P_{30}, P_{10}, P_{20}, P_{31}, P_{32}$ , ce qui donne (au facteur  $\frac{1}{27^2}$  près) :

$$8 + 32 - 10 - 40 + 2 - 32 + 32 - \frac{5}{6}48 - 32 - 40 - 40 - 8 + 8 + 8 - 8 - 10 + 8 = -162,$$

soit le coefficient  $-\frac{162}{27 \times 27} = -\frac{2}{9}$ .

Et ainsi de suite pour les autres coefficients.

**Question.** Est ce que cette analogie s'étend à tout degré ? Nous le supposons mais nous ne savons pas le prouver en trouvant une démonstration plus abstraite pour établir que le degré n'intervient pas. La seule méthode semble être de répéter ce qui vient d'être fait ici.

## 5 Construction du quadrilatère Serendip de degré 4

Il s'agit de trouver les fonctions  $q_{ij}$  de  $Q^4$ , l'espace des polynômes de degré 4 en chaque variable, ayant les quatre propriétés suivantes :

$$(P_r1) \quad q_{ij}(A_{lm}) = \delta_{ij,lm}$$

$$(P_r2) \quad \sum_{ij} q_{ij}(u, v) = 1$$

$$(P_r3) \quad EV \{q_{ij}\} \text{ contient } P^4 + u^4v + uv^4$$

$$(P_r4) \quad \text{symétrie complète.}$$

où  $EV \{q_{ij}\}$  est l'espace polynomial engendré par les fonctions  $q_{ij}$ ,  $P^4$  est l'espace des polynômes de degré 4 en toutes les variables et  $A_{ij}$  est le nœud  $ij$  (de coordonnées  $(u, v) = (\frac{i}{4}, \frac{j}{4})$ ) du carré de référence. Les deux premières propriétés sont classiques, la troisième définit ce qu'est un élément Serendip.

Pour simplifier les notations, on utilise la notation à deux indices ou la notation séquentielle avec la correspondance montrée sur le schéma suivant :

04	14	24	34	44	4	13	12	11	3
03	13	23	33	43	14				10
02	12	22	32	42	15	17			9
01	11	21	31	41	16				8
00	10	20	30	40	1	5	6	7	2

Ainsi, par exemple,  $q_{00}$  sera vu comme  $q_1$  ou l'inverse. La présence de l'indice 17 dans ce schéma sera justifiée plus tard.



### 5.1 Caractérisation de l'espace des polynômes via Taylor

On va suivre la même approche qu'aux degrés inférieurs en utilisant un développement de Taylor sur les sous-motifs centrés en les nœuds centraux. En développant  $A_{00}$  et les autres sommets par rapport à  $A_{11}$  et pour son sous-motif, on va trouver, après sommation :

$$\begin{aligned} & q(A_{00}) + q(A_{20}) + q(A_{22}) + q(A_{02}) = 4q(A_{11}) \\ & + D^2.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^2.(\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^2.(\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^2.(\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}) \\ & + D^4.(\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + D^4.(\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^4.(\vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}, \vec{v}_{22}) + D^4.(\vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}, \vec{v}_{02}). \end{aligned} \quad (12)$$

On note cette relation comme :

$$\sum_{s11} q(s) = 4q(A_{11}) + \sum_s D^2.(\vec{v}_s, \vec{v}_s) + \sum_s D^4.(\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s),$$

avec des notations évidentes, la première somme invoque les sommets du sous-motif centré en  $A_{11}$ .

Pour les nœuds non-sommet, on va avoir, par rapport à  $A_{11}$  et pour son sous-motif, après sommation :

$$\begin{aligned} & q(A_{10}) + q(A_{21}) + q(A_{12}) + q(A_{01}) = 4q(A_{11}) \\ & + D^2.(\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) + D^2.(\vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}) + D^2.(\vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}) + D^2.(\vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}) \\ & + D^4.(\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}) + D^4.(\vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}, \vec{v}_{21}) + D^4.(\vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}, \vec{v}_{12}) + D^4.(\vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}, \vec{v}_{01}), \end{aligned} \quad (13)$$

que l'on note comme ci-dessus de la façon suivante :

$$\sum_{a11} q(a) = 4q(A_{11}) + \sum_a D^2.(\vec{v}_a, \vec{v}_a) + \sum_a D^4.(\vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a),$$

la première somme invoquant les nœuds des arêtes du sous-motif centré en  $A_{11}$ . Comme on a vu que (Lemme 1) :

$$\sum_a D^2.(\vec{v}_a, \vec{v}_a) = \frac{1}{2} \sum_s D^2.(\vec{v}_s, \vec{v}_s),$$

il vient successivement (on multiplie par  $-2$  la relation sur les arêtes puis on somme), soit :

$$\begin{aligned} & \sum_{s11} q(s) = 4q(A_{11}) + \sum_s D^2.(\vec{v}_s, \vec{v}_s) + \sum_s D^4.(\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s), \\ & -2 \sum_{a11} q(a) = -8q(A_{11}) - 2 \sum_a D^2.(\vec{v}_a, \vec{v}_a) - 2 \sum_a D^4.(\vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a), \end{aligned}$$

que l'on ajoute pour trouver la relation :

$$\sum_{s11} q(s) - 2 \sum_{a11} q(a) = -4q(A_{11}) + \sum_s D^4.(\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s) - 2 \sum_a D^4.(\vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a),$$

comme la dérivée quatrième est constante, on a :

$$C_{11} = \sum_{s11} q(s) - 2 \sum_{a11} q(a) + 4q(A_{11}), \quad (14)$$

en notant  $C_{11} = \sum_s D^4.(\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s) - 2 \sum_a D^4.(\vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a)$ .

Pour les huit autres valeurs centrales, on va trouver des relations analogues correspondant aux nœuds des sous-motifs impliqués. Le sous-motif précédent était :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 02 & 12 & 22 & \cdot & \cdot & & \\ 01 & 11 & 21 & \cdot & \cdot & & \\ 00 & 10 & 20 & \cdot & \cdot & & \end{array}$$

le suivant, pour  $A_{21}$  est le suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 12 & 22 & 32 & \cdot \\ \cdot & 11 & 21 & 31 & \cdot \\ \cdot & 10 & 20 & 30 & \cdot \end{array}$$

..., le dernier, pour  $A_{22}$  est :

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 13 & 23 & 33 & \cdot \\ \cdot & 12 & 22 & 32 & \cdot \\ \cdot & 11 & 21 & 31 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

À chaque sous-motif correspond une relation comme ci-dessus, soit :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{s11} q(s) - 2 \sum_{a11} q(a) + 4q(A_{11}), \\ C_{21} &= \sum_{s21} q(s) - 2 \sum_{a21} q(a) + 4q(A_{21}), \\ &\quad \dots \\ &\quad \dots \\ C_{22} &= \sum_{s22} q(s) - 2 \sum_{a22} q(a) + 4q(A_{22}), \end{aligned}$$

ces 9 relations donnent 8 équations car on a :

$$C_{11} = C_{21} = \dots = C_{22},$$

il faut donc considérer la fonction centrale comme connue, indice  $_{22}$  ou  $_{17}$  en séquentiel. Ceci fait, on trouve un système  $8 \times 8$  à résoudre.

La première équation,  $C_{11} = C_{21}$ , est :

$$\begin{aligned} 4q(A_{11}) + q(A_{00}) + q(A_{20}) + q(A_{22}) + q(A_{02}) - 2(q(A_{10}) + q(A_{21}) + q(A_{12}) + q(A_{01})) = \\ 4q(A_{21}) + q(A_{10}) + q(A_{30}) + q(A_{32}) + q(A_{12}) - 2(q(A_{20}) + q(A_{31}) + q(A_{22}) + q(A_{11})), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} 6q(A_{11}) - 6q(A_{21}) + 2q(A_{31}) - 3q(A_{12}) + 3q(A_{22}) - q(A_{32}) = \\ -q(A_{00}) + 3q(A_{10}) - 3q(A_{20}) + q(A_{30}) + 2q(A_{01}) - q(A_{02}). \end{aligned}$$

La seconde équation,  $C_{21} = C_{31}$ , est :

$$\begin{aligned} 4q(A_{21}) + q(A_{10}) + q(A_{30}) + q(A_{32}) + q(A_{12}) - 2(q(A_{20}) + q(A_{31}) + q(A_{22}) + q(A_{11})) = \\ 4q(A_{31}) + q(A_{20}) + q(A_{40}) + q(A_{42}) + q(A_{22}) - 2(q(A_{30}) + q(A_{41}) + q(A_{32}) + q(A_{21})), \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} -2q(A_{11}) + 6q(A_{21}) - 6q(A_{31}) + q(A_{12}) - 3q(A_{22}) + 3q(A_{32}) = \\ -q(A_{10}) + 3q(A_{20}) - 3q(A_{30}) + q(A_{40}) - 2q(A_{41}) + q(A_{42}). \end{aligned}$$

La troisième équation,  $C_{31} = C_{32}$ , est :

$$\begin{aligned} 4q(A_{31}) + q(A_{20}) + q(A_{40}) + q(A_{42}) + q(A_{22}) - 2(q(A_{30}) + q(A_{41}) + q(A_{32}) + q(A_{21})) = \\ 4q(A_{32}) + q(A_{21}) + q(A_{41}) + q(A_{43}) + q(A_{23}) - 2(q(A_{31}) + q(A_{42}) + q(A_{33}) + q(A_{22})), \end{aligned}$$

soit :

$$-3q(A_{21}) + 6q(A_{31}) + 3q(A_{22}) - 6q(A_{32}) - q(A_{23}) + 2q(A_{33}) =$$

$$-q(A_{20}) + 2q(A_{30}) - q(A_{40}) + 3q(A_{41}) - 3q(A_{42}) + q(A_{43}).$$

La quatrième équation,  $C_{32} = C_{33}$ , est :

$$4q(A_{32}) + q(A_{21}) + q(A_{41}) + q(A_{43}) + q(A_{23}) - 2(q(A_{31}) + q(A_{42}) + q(A_{33}) + q(A_{22})) =$$

$$4q(A_{33}) + q(A_{22}) + q(A_{42}) + q(A_{44}) + q(A_{24}) - 2(q(A_{32}) + q(A_{43}) + q(A_{34}) + q(A_{23})),$$

soit :

$$q(A_{21}) - 2q(A_{31}) - 3q(A_{22}) + 6q(A_{32}) + 3q(A_{23}) - 6q(A_{33}) =$$

$$q(A_{24}) - 2q(A_{34}) - q(A_{41}) + 3q(A_{42}) - 3q(A_{43}) + q(A_{44}).$$

La cinquième équation,  $C_{33} = C_{23}$ , est :

$$4q(A_{33}) + q(A_{22}) + q(A_{42}) + q(A_{44}) + q(A_{24}) - 2(q(A_{32}) + q(A_{43}) + q(A_{34}) + q(A_{23})) =$$

$$4q(A_{23}) + q(A_{12}) + q(A_{32}) + q(A_{34}) + q(A_{14}) - 2(q(A_{22}) + q(A_{33}) + q(A_{24}) + q(A_{13})),$$

soit :

$$3q(A_{22}) - 3q(A_{32}) - 6q(A_{23}) + 6q(A_{33}) - q(A_{12}) + 2q(A_{13}) =$$

$$-3q(A_{24}) + 3q(A_{34}) + q(A_{14}) - q(A_{42}) + 2q(A_{43}) - q(A_{44}).$$

La sixième équation,  $C_{23} = C_{13}$ , est :

$$4q(A_{23}) + q(A_{12}) + q(A_{32}) + q(A_{34}) + q(A_{14}) - 2(q(A_{22}) + q(A_{33}) + q(A_{24}) + q(A_{13})) =$$

$$4q(A_{13}) + q(A_{02}) + q(A_{22}) + q(A_{24}) + q(A_{04}) - 2(q(A_{12}) + q(A_{23}) + q(A_{14}) + q(A_{03})),$$

soit :

$$3q(A_{12}) - 3q(A_{22}) - 6q(A_{13}) + 6q(A_{23}) + q(A_{32}) - 2q(A_{33}) =$$

$$-3q(A_{14}) + 3q(A_{24}) - q(A_{34}) + q(A_{02}) - 2q(A_{03}) + q(A_{04}).$$

La septième équation,  $C_{13} = C_{12}$ , est :

$$4q(A_{13}) + q(A_{02}) + q(A_{22}) + q(A_{24}) + q(A_{04}) - 2(q(A_{12}) + q(A_{23}) + q(A_{14}) + q(A_{03})) =$$

$$4q(A_{12}) + q(A_{01}) + q(A_{21}) + q(A_{23}) + q(A_{03}) - 2(q(A_{11}) + q(A_{22}) + q(A_{13}) + q(A_{02})),$$

soit :

$$-6q(A_{12}) + 3q(A_{22}) + 6q(A_{13}) - 3q(A_{23}) - q(A_{21}) + 2q(A_{11}) =$$

$$-3q(A_{02}) - q(A_{24}) - q(A_{04}) + 2q(A_{14}) + 3q(A_{03}) + q(A_{01}).$$

La huitième et dernière équation,  $C_{12} = C_{22}$ , est :

$$4q(A_{12}) + q(A_{01}) + q(A_{21}) + q(A_{23}) + q(A_{03}) - 2(q(A_{11}) + q(A_{22}) + q(A_{13}) + q(A_{02})) =$$

$$4q(A_{22}) + q(A_{11}) + q(A_{31}) + q(A_{33}) + q(A_{13}) - 2(q(A_{21}) + q(A_{32}) + q(A_{23}) + q(A_{12})),$$

soit :

$$-3q(A_{11}) + 3q(A_{21}) - q(A_{31}) + 6q(A_{12}) - 6q(A_{22}) + 2q(A_{32}) - 3q(A_{13}) + 3q(A_{23}) - q(A_{33}) =$$

$$-q(A_{01}) + 2q(A_{02}) - q(A_{03}).$$

Le système à résoudre a comme inconnues le vecteur :

$$q(A_{11}), q(A_{21}), q(A_{31}), q(A_{32}), q(A_{33}), q(A_{23}), q(A_{13}), q(A_{12}),$$

avec la matrice :

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & -6 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -1 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix},$$

et pour le second membre, les données sont :

$$q(A_{00}), q(A_{10}), q(A_{20}), q(A_{30}), q(A_{40}), q(A_{01}), q(A_{41}),$$

$$q(A_{02}), q(A_{22}), q(A_{42}), q(A_{03}), q(A_{43}), q(A_{04}), q(A_{14}), q(A_{24}), q(A_{34}), q(A_{44})$$

et ses lignes sont :

$$\begin{aligned} & -q(A_{00}) + 3q(A_{10}) - 3q(A_{20}) + q(A_{30}) + 2q(A_{01}) - q(A_{02}) - 3q(A_{22}) . \\ & -q(A_{10}) + 3q(A_{20}) - 3q(A_{30}) + q(A_{40}) - 2q(A_{41}) + q(A_{42}) + 3q(A_{22}) . \\ & -q(A_{20}) + 2q(A_{30}) - q(A_{40}) + 3q(A_{41}) - 3q(A_{42}) + q(A_{43}) - 3q(A_{22}) . \\ & q(A_{24}) - 2q(A_{34}) - q(A_{41}) + 3q(A_{42}) - 3q(A_{43}) + q(A_{44}) + 3q(A_{22}) . \\ & -3q(A_{24}) + 3q(A_{34}) + q(A_{14}) - q(A_{42}) + 2q(A_{43}) - q(A_{44}) - 3q(A_{22}) . \\ & -3q(A_{14}) + 3q(A_{24}) - q(A_{34}) + q(A_{02}) - 2q(A_{03}) + q(A_{04}) + 3q(A_{22}) . \\ & -3q(A_{02}) - q(A_{24}) - q(A_{04}) + 2q(A_{14}) + 3q(A_{03}) + q(A_{01}) - 3q(A_{22}) . \\ & -q(A_{01}) + 2q(A_{02}) - q(A_{03}) + 6q(A_{22}) . \end{aligned}$$

La solution (Maple) est, *in extenso*, la suivante :

$$\begin{aligned} q(A_{11}) &= -27/64q(A_{00}) + 3/4q(A_{10}) + 3/4q(A_{01}) - 3/64q(A_{40}) + 1/4q(A_{41}) + 1/4q(A_{14}) + 5/64q(A_{44}) - 3/64q(A_{04}) \\ &\quad - 9/32q(A_{20}) - 9/32q(A_{02}) + 9/16q(A_{22}) - 9/32q(A_{42}) - 9/32q(A_{24}) . \\ q(A_{21}) &= -3/16q(A_{00}) + 3/8q(A_{20}) + 1/2q(A_{01}) - 3/8q(A_{02}) + 3/4q(A_{22}) - 3/16q(A_{40}) + 1/2q(A_{41}) - 3/8q(A_{42}) \\ &\quad - 1/8q(A_{24}) + 1/16q(A_{44}) + 1/16q(A_{04}) . \\ q(A_{31}) &= -3/64q(A_{00}) - 9/32q(A_{20}) + 3/4q(A_{30}) + 1/4q(A_{01}) - 9/32q(A_{02}) + 9/16q(A_{22}) - 27/64q(A_{40}) + 3/4q(A_{41}) \\ &\quad - 9/32q(A_{42}) - 9/32q(A_{24}) + 1/4q(A_{34}) - 3/64q(A_{44}) + 5/64q(A_{04}) . \\ q(A_{32}) &= 1/16q(A_{00}) - 3/8q(A_{20}) + 1/2q(A_{30}) - 1/8q(A_{02}) + 3/4q(A_{22}) - 3/16q(A_{40}) + 3/8q(A_{42}) - 3/8q(A_{24}) \\ &\quad + 1/2q(A_{34}) - 3/16q(A_{44}) + 1/16q(A_{04}) . \\ q(A_{33}) &= 5/64q(A_{00}) - 9/32q(A_{20}) + 1/4q(A_{30}) - 9/32q(A_{02}) + 9/16q(A_{22}) - 3/64q(A_{40}) - 9/32q(A_{42}) + 3/4q(A_{43}) \\ &\quad - 9/32q(A_{24}) + 3/4q(A_{34}) - 27/64q(A_{44}) + 1/4q(A_{03}) - 3/64q(A_{04}) . \\ q(A_{23}) &= 1/16q(A_{00}) - 1/8q(A_{20}) - 3/8q(A_{02}) + 3/4q(A_{22}) + 1/16q(A_{40}) - 3/8q(A_{42}) + 1/2q(A_{43}) \\ &\quad + 3/8q(A_{24}) - 3/16q(A_{44}) + 1/2q(A_{03}) - 3/16q(A_{04}) . \\ q(A_{13}) &= -3/64q(A_{00}) + 1/4q(A_{10}) - 9/32q(A_{20}) - 9/32q(A_{02}) + 9/16q(A_{22}) + 5/64q(A_{40}) - 9/32q(A_{42}) \\ &\quad + 1/4q(A_{43}) + 3/4q(A_{14}) - 9/32q(A_{24}) - 3/64q(A_{44}) + 3/4q(A_{03}) - 27/64q(A_{04}) . \\ q(A_{12}) &= -3/16q(A_{00}) + 1/2q(A_{10}) - 3/8q(A_{20}) + 3/8q(A_{02}) + 3/4q(A_{22}) + 1/16q(A_{40}) - 1/8q(A_{42}) + 1/2q(A_{14}) \\ &\quad - 3/8q(A_{24}) + 1/16q(A_{44}) - 3/16q(A_{04}) . \end{aligned} \tag{15}$$

Les relations de serendipité pour le quadrilatère de degré 4 à 17 nœuds

Soit, au facteur 64 près :

$$\begin{aligned} q(A_{11}) &= -27q(A_{00}) + 48q(A_{10}) + 48q(A_{01}) - 3q(A_{40}) + 16q(A_{41}) + 16q(A_{14}) + 5q(A_{44}) - 3q(A_{04}) \\ &\quad - 18q(A_{20}) - 18q(A_{02}) + 36q(A_{22}) - 18q(A_{42}) - 18q(A_{24}) , \end{aligned}$$

ce qui correspond au schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 -3 & 16 & -18 & 0 & 5 \\
 0 & & & & 0 \\
 -18 & & 36 & & -18 \\
 48 & (1.1) & & & 16 \\
 -27 & 48 & -18 & 0 & -3
 \end{array}$$

On vérifie que la répartition pour  $A_{31}, A_{33}$  et  $A_{03}$  est analogue à une rotation près et on trouve les répartitions suivantes :

$$\begin{array}{ccccc}
 5 & 0 & -18 & 16 & -3 \\
 0 & & & & 0 \\
 -18 & & 36 & & -18 \\
 16 & & & (3.1) & 48 \\
 -3 & 0 & -18 & 48 & -27
 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{ccccc}
 -3 & 0 & -18 & 48 & -27 \\
 16 & & & (3.3) & 48 \\
 -18 & & 36 & & -18 \\
 0 & & & & 0 \\
 5 & 0 & -18 & 16 & -3
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 -27 & 48 & -18 & 0 & -3 \\
 48 & (1.3) & & & 16 \\
 -18 & & 36 & & -18 \\
 0 & & & & 0 \\
 -3 & 16 & -18 & 0 & 5
 \end{array}$$

Il reste donc à regarder  $q(A_{21})$ , pour couvrir tous les cas, on a :

$$\begin{aligned}
 q(A_{21}) = & -3q(A_{00}) + 6q(A_{20}) + 8q(A_{01}) - 6q(A_{02}) + 12q(A_{22}) - 3q(A_{40}) + 8q(A_{41}) - 6q(A_{42}) \\
 & - 2q(A_{24}) + 1q(A_{44}) + 1q(A_{04}),
 \end{aligned}$$

soit le schéma, au facteur 16 près :

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
 0 & & & & 0 \\
 -6 & & 12 & & -6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 8 & & (2.1) & & 8 \\ -3 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array}$$

et les 3 derniers s'en déduisent par rotation, soit :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -6 & 8 & -3 \\ 0 & & & & 0 \\ -2 & & 12 & (3.2) & 6 \\ 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 8 & -3 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{ccccc} -3 & 0 & 6 & 0 & -3 \\ 8 & & (2.3) & & 8 \\ -6 & & 12 & & -6 \\ 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} -3 & 8 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ 6 & (1.2) & 12 & & -2 \\ 0 & & & & 0 \\ -3 & 8 & -6 & 0 & 1 \end{array}$$

**L'espace de Serendipité.** Les monômes de cet espace sont représentés dans le schéma suivant :

$$\begin{array}{cccccc} & & & 1 & & \\ & & & & & \\ & & & & u & v \\ & & & & & & \\ & & & & u^2 & uv & v^2 \\ & & & & & & & \\ & & & & u^3 & u^2v & uv^2 & v^3 \\ & & & & & & & & \\ & & & & u^4 & u^3v & u^2v^2 & uv^3 & v^4 \\ & & & & & & & & & \\ & & & & u^4v & & & & & uv^4 \end{array}$$

où l'on retrouve l'espace  $P^4$  enrichi par les monômes  $u^4v$  et  $uv^4$ . Notons que  $P^4$  est trouvé par construction tandis que  $u^4v$  et  $uv^4$  arrivent car ces deux fonctions vérifient les Relations (15).

## 5.2 Les fonctions de forme à partir de l'espace trouvé via Taylor

Comme pour les cas précédents, on cherche les fonctions réduites sous la forme :

$$q_i = q_i^c + \sum_l \alpha_i^l q_l^c,$$

que l'on note comme :

$$q_i = q_i^c + \alpha_i^{11} q_{11}^c + \alpha_i^{21} q_{21}^c + \alpha_i^{31} q_{31}^c + \alpha_i^{12} q_{12}^c + \alpha_i^{32} q_{32}^c + \alpha_i^{13} q_{13}^c + \alpha_i^{23} q_{23}^c + \alpha_i^{33} q_{33}^c,$$

et il suffit de trouver les coefficients  $\alpha_i^{kl}$  pour avoir la solution.

Pour  $i = 1$ , on remplace  $q$  par  $q_1$  dans le système ci-dessus et il donne les coefficients :

$$\alpha_1^{11} = -\frac{27}{64}, \quad \alpha_1^{31} = -\frac{3}{64}, \quad \alpha_1^{33} = \frac{5}{64}, \quad \alpha_1^{13} = -\frac{3}{64}$$

$$\alpha_1^{21} = -\frac{3}{16} = -\frac{12}{64}, \quad \alpha_1^{32} = \frac{1}{16} = \frac{4}{64}, \quad \alpha_1^{23} = \frac{1}{16} = \frac{4}{64}, \quad \alpha_1^{12} = -\frac{3}{16} = -\frac{12}{64},$$

et, via des symétries, on a ces mêmes coefficients pour  $i = 2, 3, 4$ .

Pour  $i = 5$ , on trouve :

$$\alpha_5^{11} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}, \quad \alpha_5^{31} = 0, \quad \alpha_5^{33} = 0, \quad \alpha_5^{13} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha_5^{21} = 0, \quad \alpha_5^{32} = 0, \quad \alpha_5^{23} = 0, \quad \alpha_5^{12} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2},$$

et par des combinaisons de symétries et de rotations on a ces mêmes coefficients pour  $i = 8, 11, 14$  et pour  $i = 7, 10, 13, 16$ .

Pour  $i = 6$ , on trouve :

$$\alpha_6^{11} = -\frac{18}{64} = -\frac{9}{32}, \quad \alpha_6^{31} = -\frac{9}{32}, \quad \alpha_6^{33} = -\frac{9}{32}, \quad \alpha_6^{13} = -\frac{9}{32}$$

$$\alpha_6^{21} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}, \quad \alpha_6^{32} = -\frac{3}{8}, \quad \alpha_6^{23} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}, \quad \alpha_6^{12} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8},$$

et par symétries et rotations on a ces mêmes coefficients pour  $i = 9, 12, 15$ .

Pour finir, le dernier,  $i = 17$ , soit :

$$\alpha_{17}^{11} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}, \quad \alpha_{17}^{31} = \frac{9}{16}, \quad \alpha_{17}^{33} = \frac{9}{16}, \quad \alpha_{17}^{13} = \frac{9}{16}$$

$$\alpha_{17}^{21} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{17}^{32} = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{17}^{23} = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{17}^{12} = \frac{3}{4}.$$

Avant de poursuivre, nous avons vérifié explicitement que  $\sum_i \alpha_i^{11} = 1$ , ce qui est encourageant puis que  $\sum_i \sum_{jk} \alpha_i^{jk} = 8$ , ce qui est réconfortant.

On peut alors donner l'expression de  $q_1$ , alias  $q_{00}$ , de  $q_5$ , alias  $q_{10}$ , de  $q_6$ , alias  $q_{20}$ , et de  $q_{17}$ , alias  $q_{22}$ , qui, par symétries, rotations et permutations, permettront de trouver facilement toutes les autres fonctions. Pour ce faire, il faut d'abord donner la forme des fonctions complètes  $q_{00}^c, q_{10}^c, q_{20}^c$  et les fonctions centrales,  $q_{11}^c, q_{21}^c, q_{31}^c, \dots, q_{33}^c$ . On applique la formule générique de la Relation (9) et il vient :

$$q_{00}^c = \frac{1}{24 \times 24} (1-4u)(2-4u)(3-4u)(4-4u)(1-4v)(2-4v)(3-4v)(4-4v)$$

$$= \frac{1}{9} (1-4u)(1-2u)(3-4u)(1-u)(1-4v)(1-2v)(3-4v)(1-v),$$

$$q_{10}^c = \frac{-1}{6 \times 24} (-4u)(2-4u)(3-4u)(4-4u)(1-4v)(2-4v)(3-4v)(4-4v)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{9}u(1-2u)(3-4u)(1-u)(1-4v)(1-2v)(3-4v)(1-v), \\
q_{20}^c &= \frac{1}{4 \times 24}(-4u)(1-4u)(3-4u)(4-4u)(1-4v)(2-4v)(3-4v)(4-4v) \\
&= -\frac{4}{3}u(1-4u)(3-4u)(1-u)(1-4v)(1-2v)(3-4v)(1-v), \\
q_{11}^c &= \frac{1}{36}(-4u)(2-4u)(3-4u)(4-4u)(-4v)(2-4v)(3-4v)(4-4v) \\
&= \frac{256}{9}u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v), \\
q_{21}^c &= \frac{-1}{24}(-4u)(1-4u)(3-4u)(4-4u)(-4v)(2-4v)(3-4v)(4-4v) \\
&= -\frac{64}{3}u(1-4u)(3-4u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v), \\
q_{31}^c &= \frac{1}{36}(-4u)(1-4u)(2-4u)(4-4u)(-4v)(2-4v)(3-4v)(4-4v) \\
&= \frac{256}{9}u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v), \\
q_{12}^c &= -\frac{64}{3}u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(3-4v)(1-v), \\
q_{22}^c &= \frac{1}{16}(-4u)(1-4u)(3-4u)(4-4u)(-4v)(1-4v)(3-4v)(4-4v) \\
&= 16u(1-4u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(3-4v)(1-v). \\
q_{32}^c &= -\frac{1}{24}(-4u)(1-4u)(2-4u)(4-4u)(-4v)(1-4v)(3-4v)(4-4v) \\
&= -\frac{64}{3}u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-4v)(3-4v)(1-v), \\
q_{13}^c &= \frac{1}{36}(-4u)(2-4u)(3-4u)(4-4u)(-4v)(1-4v)(2-4v)(4-4v) \\
&= \frac{256}{9}u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v), \\
q_{23}^c &= -\frac{1}{24}(-4u)(1-4u)(3-4u)(4-4u)(-4v)(1-4v)(2-4v)(4-4v) \\
&= -\frac{64}{3}u(1-4u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v), \\
q_{33}^c &= \frac{1}{36}(-4u)(1-4u)(2-4u)(4-4u)(-4v)(1-4v)(2-4v)(4-4v) \\
&= \frac{256}{9}u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v).
\end{aligned}$$



**La première fonction de forme réduite.** On a vu que :

$$q_1 = q_1^c + \frac{1}{64}(-27q_{11}^c - 12q_{21}^c - 3q_{31}^c - 12q_{12}^c + 4q_{32}^c - 3q_{13}^c + 4q_{23}^c + 5q_{33}^c)$$

soit (avec un éditeur de texte) :

$$\begin{aligned} q_1 = & \frac{1}{9}(1-4u)(1-2u)(3-4u)(1-u)(1-4v)(1-2v)(3-4v)(1-v)+ \\ & (-12u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v))+ \\ & (4u(1-4u)(3-4u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v))+ \\ & (-\frac{4}{3}u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v))+ \\ & (4u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(3-4v)(1-v))+ \\ & (-\frac{4}{3}u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-4v)(3-4v)(1-v))+ \\ & (-\frac{4}{3}u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v))+ \\ & (-\frac{4}{3}u(1-4u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v))+ \\ & (\frac{20}{9}u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v)), \end{aligned}$$

et  $(1-u)(1-v)$  se factorise et reste à considérer :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9}(1-4u)(1-2u)(3-4u)(1-4v)(1-2v)(3-4v)+ \\ & (-12u(1-2u)(3-4u)v(1-2v)(3-4v)) + (4u(1-4u)(3-4u)v(1-2v)(3-4v))+ \\ & (-\frac{4}{3}u(1-4u)(1-2u)v(1-2v)(3-4v)) + (4u(1-2u)(3-4u)v(1-4v)(3-4v))+ \\ & (-\frac{4}{3}u(1-4u)(1-2u)v(1-4v)(3-4v)) + (-\frac{4}{3}u(1-2u)(3-4u)v(1-4v)(1-2v))+ \\ & (-\frac{4}{3}u(1-4u)(3-4u)v(1-4v)(1-2v)) + (\frac{20}{9}u(1-4u)(1-2u)v(1-4v)(1-2v)), \end{aligned}$$

qui se développe en (Maple) :

$$1 - \frac{22}{3}u - \frac{22}{3}v + 16u^2 + 4uv + 16v^2 - \frac{32}{3}u^3 - \frac{32}{3}v^3,$$

et la fonction de forme a pour expression :

$$q_1 = q_{00} = \frac{1}{3}(1-u)(1-v)(3-22u-22v+48u^2+12uv+48v^2-32u^3-32v^3),$$

et on a bien  $q_1(A_j) = \delta_{1j}$ . il est alors facile de trouver  $q_2, q_3$  et  $q_4$ , voir la liste exhaustive ci-dessous.

**La cinquième fonction de forme réduite.** On a vu que :

$$q_5 = q_5^c + \frac{1}{4}(3q_{11}^c + 2q_{12}^c + q_{13}^c)$$

soit :

$$\begin{aligned} q_5 = & \frac{16}{9}u(1-2u)(3-4u)(1-u)(1-4v)(1-2v)(3-4v)(1-v)+ \\ & \frac{1}{4}\left(3\frac{256}{9}u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v)\right)+ \\ & \frac{1}{4}\left(-2\frac{64}{3}u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(3-4v)(1-v)\right)+ \\ & \frac{1}{4}\left(\frac{256}{9}u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v)\right), \end{aligned}$$

et comme  $u(1-u)(1-2u)(3-4u)(1-v)$  se factorise, il reste à considérer :

$$\frac{16}{9}(1-4v)(1-2v)(3-4v) + \frac{64}{3}v(1-2v)(3-4v) - \frac{32}{3}v(1-4v)(3-4v) + \frac{64}{9}v(1-4v)(1-2v),$$

qui se développe en simplement  $\frac{16}{3}$ , et la fonction de forme a pour expression :

$$q_5 = q_{10} = \frac{16}{3}u(1-u)(1-2u)(3-4u)(1-v).$$

On trouve alors la fonction  $q_7$  par symétrie :

$$q_7 = q_{30} = \frac{16}{3}u(1-u)(1-2u)(1-4u)(1-v),$$

et 6 autres par symétrie ou rotation, voir la liste.

**La sixième fonction de forme réduite.** On a vu que :

$$q_6 = q_6^c + \frac{1}{32}(-9q_{11}^c + 12q_{21}^c - 9q_{31}^c - 12q_{12}^c - 12q_{32}^c - 9q_{13}^c - 4q_{23}^c - 9q_{33}^c)$$

soit :

$$\begin{aligned} q_6 = & -\frac{4}{3}u(1-4u)(3-4u)(1-u)(1-4v)(1-2v)(3-4v)(1-v)- \\ & 8u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v)- \\ & 8u(1-4u)(3-4u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v)- \\ & 8u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v)+ \\ & 8u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(3-4v)(1-v)+ \\ & 8u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-4v)(3-4v)(1-v)- \\ & 8u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v)+ \\ & \frac{8}{3}u(1-4u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v)- \\ & 8u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v), \end{aligned}$$

et comme  $u(1-u)(1-v)$  se factorise, il reste à considérer :

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{3}(1-4u)(3-4u)(1-4v)(1-2v)(3-4v)- \\ & 8(1-2u)(3-4u)v(1-2v)(3-4v) - 8(1-4u)(3-4u)v(1-2v)(3-4v)- \\ & 8(1-4u)(1-2u)v(1-2v)(3-4v) + 8(1-2u)(3-4u)v(1-4v)(3-4v)+ \\ & 8(1-4u)(1-2u)v(1-4v)(3-4v) - 8(1-2u)(3-4u)v(1-4v)(1-2v)+ \\ & \frac{8}{3}(1-4u)(3-4u)v(1-4v)(1-2v) - 8(1-4u)(1-2u)v(1-4v)(1-2v), \end{aligned}$$

qui se simplifie en  $-12 - 8v + 64u - 64u^2$ , et la fonction de forme a pour expression :

$$q_6 = q_{20} = 4u(1-u)(1-v)(-3 + 16u - 2v - 16u^2).$$

On trouve alors 3 autres fonctions par symétrie ou rotation, voir la liste.

**La dernière fonction de forme réduite.** On a vu que :

$$q_{17} = q_{22}^c + \frac{1}{16}(9q_{11}^c + 12q_{21}^c + 9q_{31}^c + 12q_{12}^c + 12q_{32}^c + 9q_{13}^c + 12q_{23}^c + 9q_{33}^c)$$

soit :

$$\begin{aligned} q_{17} = & 16u(1-4u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(3-4v)(1-v) + \\ & 16u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v) - \\ & 16u(1-4u)(3-4u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v) + \\ & 16u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-2v)(3-4v)(1-v) - \\ & 16u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(3-4v)(1-v) - \\ & 16u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-4v)(3-4v)(1-v) + \\ & 16u(1-2u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v) - \\ & 16u(1-4u)(3-4u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v) + \\ & 16u(1-4u)(1-2u)(1-u)v(1-4v)(1-2v)(1-v), \end{aligned}$$

et  $16u(1-u)v(1-v)$  se factorise, donc il reste à considérer :

$$\begin{aligned} & (1-4u)(3-4u)(1-4v)(3-4v) + (1-2u)(3-4u)(1-2v)(3-4v) - \\ & (1-4u)(3-4u)(1-2v)(3-4v) + (1-4u)(1-2u)(1-2v)(3-4v) - \\ & (1-2u)(3-4u)(1-4v)(3-4v) - (1-4u)(1-2u)(1-4v)(3-4v) + \\ & (1-2u)(3-4u)(1-4v)(1-2v) - (1-4u)(3-4u)(1-4v)(1-2v) + \\ & (1-4u)(1-2u)(1-4v)(1-2v), \end{aligned}$$

qui se simplifie tout simplement (!) en 1, et la fonction de forme a pour simple expression :

$$q_{17} = 16u(1-u)v(1-v).$$

Ces quatre exemples de fonctions de base permettent d'établir, par symétries et rotations, la liste complète donnée ci-dessous :

1	$q_1 = \frac{1}{3}(1-u)(1-v)(3-22u-22v+48u^2+12uv+48v^2-32u^3-32v^3)$
2	$q_2 = \frac{1}{3}u(1-v)(-3+22u-10v-48u^2-12uv+48v^2+32u^3-32v^3)$
3	$q_3 = \frac{1}{3}uv(3+10u+10v-48u^2+12uv-48v^2+32u^3+32v^3)$
4	$q_4 = \frac{1}{3}(1-u)v(-3-10u+22v+48u^2-12uv-48v^2-32u^3+32v^3)$
5	$q_5 = \frac{16}{3}u(1-u)(1-2u)(3-4u)(1-v)$
6	$q_6 = 4u(1-u)(1-v)(-3+16u-2v-16u^2)$
7	$q_7 = \frac{16}{3}u(1-u)(1-2u)(1-4u)(1-v)$
8	$q_8 = \frac{16}{3}uv(1-v)(1-2v)(3-4v)$
9	$q_9 = 4v(1-v)u(-3+16v-2u-16v^2)$
10	$q_{10} = \frac{16}{3}uv(1-v)(1-2v)(1-4v)$
11	$q_{11} = \frac{16}{3}u(1-u)(1-2u)(1-4u)v$
12	$q_{12} = 4u(1-u)v(-3+16u-2v-16u^2)$
13	$q_{13} = \frac{16}{3}u(1-u)(1-2u)(3-4u)v$
14	$q_{14} = \frac{16}{3}(1-u)v(1-v)(1-2v)(1-4v)$
15	$q_{15} = 4v(1-v)(1-u)(-3+16v-2u-16v^2)$
16	$q_{16} = \frac{16}{3}(1-u)v(1-v)(1-2v)(3-4v)$
17	$q_{17} = 16u(1-u)v(1-v)$

Fonctions de forme du quadrilatère de degré 4 à 17 nœuds

### 5.3 Construction directe des fonctions de forme dans les Bézier

Par symétrie, il suffira d'examiner les quatre fonctions *type* qui correspondent aux indices 00, 10, 20 et 22. On pose *a priori* :

$$B'_{ij}(u, v) = B_i^4(u)B_j^4(v) + \sum_{kl} \alpha_{ij}^{kl} B_k^4(u)B_l^4(v),$$

où  $B'_{ij}$  désigne une fonction réduite et les  $kl$  sont les indices des fonctions "centrales".

Par symétrie les coefficients de répartition, les  $\alpha_{ij}^{kl}$ , prennent leurs valeurs dans deux ensembles (indépendants) de 10 paramètres qui correspondent aux schémas qui suivent (lire  $ai$  comme  $a_i$  et  $bi$  comme  $b_i$ ) :

a5	a6	a7	a8	a9		b7	b8	b9	b8	b7
a4			a8			b6				b6
a3		a10		a7		b5		b10		b5
a2	[11]			a6		b4		[21]		b4
a1	a2	a3	a4	a5		b1	b2	b3	b2	b1

Les  $a_i$  indiquent (avec les symétries voulues) la répartition pour les contributions en 11, 31, 13 et 33, les  $b_i$  donnent (idem) la répartition pour les contributions en 21, 23, 12 et 32,

**Détermination des coefficients  $a_i$ .** Les premières relations sur les  $a_i$  sont obtenues en imposant  $u^4v$ . Comme on a :

$$\begin{aligned} u^4v &= u^4v(1-v+v)^3 = B_4^4(u) \left\{ \frac{1}{4}B_1^4(v) + \frac{1}{2}B_2^4(v) + \frac{3}{4}B_3^4(v) + B_4^4(v) \right\} \\ &= \frac{1}{4}B_4^4(u)B_1^4(v) + \frac{1}{2}B_4^4(u)B_2^4(v) + \frac{3}{4}B_4^4(u)B_3^4(v) + B_4^4(u)B_4^4(v), \end{aligned}$$

il vient quatre relations, dont la première est :

$$\frac{1}{4}a_6 + \frac{1}{2}a_7 + \frac{3}{4}a_8 + a_9 = 0$$

dont on déduit les quatre équations :

$$(E1) \quad a_6 + 2a_7 + 3a_8 + 4a_9 = 0,$$

$$(E2) \quad a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 = 0,$$

$$(E3) \quad 4a_5 + 3a_6 + 2a_7 + a_8 = 0,$$

$$(E4) \quad 4a_1 + 3a_2 + 2a_3 + a_4 = 0.$$

L'existence de  $u^4v$  implique successivement celles de  $u^4(1-v)$ ,  $u^4$  et  $(1-u)^4$ . Pour continuer à trouver des relations entre les paramètres, on impose  $u^3v$ . On a :

$$\begin{aligned} u^3v &= u^3(1-u+v)v(1-v+v)^3 = \{u^3(1-u) + u^4\} \{v(1-v)^3 + 3v^2(1-v)^2 + 3v^3(1-v) + v^4\} \\ &= \left\{ \frac{1}{4}B_3^4(u) + B_4^4(u) \right\} \left\{ \frac{1}{4}B_1^4(v) + \frac{1}{2}B_2^4(v) + \frac{3}{4}B_3^4(v) + B_4^4(v) \right\} \\ &= \frac{1}{16}B_3^4(u)B_1^4(v) + \frac{1}{8}B_3^4(u)B_2^4(v) + \frac{3}{16}B_3^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{4}B_3^4(u)B_4^4(v) \\ &\quad + \frac{1}{4}B_4^4(u)B_1^4(v) + \frac{1}{2}B_4^4(u)B_2^4(v) + \frac{3}{4}B_4^4(u)B_3^4(v) + B_4^4(u)B_4^4(v), \end{aligned}$$

d'où on va déduire quatre relations.

$$\begin{aligned} \text{en } B_1^4(u)B_1^4(v) &: -\frac{1}{4}a_8 - \frac{1}{4}a_6 - \frac{1}{2}a_7 - \frac{3}{4}a_8 - a_9, \\ \text{en } B_3^4(u)B_1^4(v) &: \frac{1}{16} - \frac{1}{4}a_6 - \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_3 - \frac{3}{4}a_4 - a_5, \\ \text{en } B_1^4(u)B_3^4(v) &: -\frac{1}{4}a_4 - \frac{1}{4}a_8 - \frac{1}{2}a_7 - \frac{3}{4}a_6 - a_5, \\ \text{en } B_3^4(u)B_3^4(v) &: -\frac{3}{16} - \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{4}a_4 - \frac{1}{2}a_3 - \frac{3}{4}a_2 - a_1, \end{aligned}$$

soit quatre équations :

$$(E5) \quad a_6 + 2a_7 + 4a_8 + 4a_9 = 0,$$

$$(E6) \quad 4a_2 + 8a_3 + 12a_4 + 16a_5 + 4a_6 = 1,$$

$$(E7) \quad a_4 + 4a_5 + 3a_6 + 2a_7 + a_8 = 0,$$

$$(E8) \quad 16a_1 + 16a_2 + 8a_3 + 4a_4 = 3.$$

L'existence de  $u^3v$  implique successivement celles de  $u^3(1-v)$ ,  $u^3$  et  $(1-u)^3$ . Pour continuer à trouver des relations, on impose  $u^2v^2$  dans l'espace. Comme on a :

$$\begin{aligned} u^2v^2 &= u^2(1-u+u)^2v^2(1-v+v)^2 = (u^2(1-u)^2 + u^4 + 2u^3(1-u))(v^2(1-v)^2 + v^4 + 2v^3(1-v)) \\ &= \left\{ \frac{1}{6}B_2^4(u) + B_4^4(u) + \frac{1}{2}B_3^4(u) \right\} \left\{ \frac{1}{6}B_2^4(v) + B_4^4(v) + \frac{1}{2}B_3^4(v) \right\} \\ &= \frac{1}{36}B_2^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{6}B_4^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{12}B_3^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{6}B_2^4(u)B_4^4(v) + B_4^4(u)B_4^4(v) \\ &\quad + \frac{1}{2}B_3^4(u)B_4^4(v) + \frac{1}{12}B_2^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{2}B_4^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{4}B_3^4(u)B_3^4(v), \end{aligned}$$

ce qui donne quatre autres relations :

$$\frac{1}{36}a_{10} + \frac{1}{6}a_7 + \frac{1}{6}a_7 + a_9 + \frac{1}{2}a_8 + \frac{1}{2}a_8 = 0,$$

$$\frac{1}{36}a_{10} + \frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{6}a_7 + a_5 + \frac{1}{2}a_6 + \frac{1}{2}a_4 = 0,$$

$$\frac{1}{36}a_{10} + \frac{1}{6}a_7 + \frac{1}{6}a_3 + a_5 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_6 = 0,$$

$$\frac{1}{36}a_{10} + \frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{6}a_3 + a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{4},$$

soit les trois (deux lignes sont redondantes) équations :

$$(E9) \quad 12a_7 + 36a_8 + 36a_9 + a_{10} = 0,$$

$$(E10) \quad 6a_3 + 18a_4 + 36a_5 + 18a_6 + 6a_7 + a_{10} = 0,$$

$$(E11) \quad 36a_1 + 36a_2 + 12a_3 + a_{10} = 9.$$

L'existence de  $u^2v^2$  implique successivement celles de  $u^2(1-v)^2$ ,  $(1-u)^2v^2$ ,  $(1-u)^2(1-v)^2$  donc il manque un élément dans la base, logiquement on devrait imposer  $u^2v$  mais comme c'est plus simple on impose la relation :

$$a_1 + 2 \sum_{i=2,8} a_i + a_9 + a_{10} = 1.$$

Par suite, on a 10 paramètres et les 12 équations :

$$(E1) \quad a_6 + 2a_7 + 3a_8 + 4a_9 = 0,$$

$$\begin{aligned}
(E2) \quad & a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 = 0, \\
(E3) \quad & 4a_5 + 3a_6 + 2a_7 + a_8 = 0, \\
(E4) \quad & 4a_1 + 3a_2 + 2a_3 + a_4 = 0, \\
(E5) \quad & a_6 + 2a_7 + 4a_8 + 4a_9 = 0, \\
(E6) \quad & 4a_2 + 8a_3 + 12a_4 + 16a_5 + 4a_6 = 1, \\
(E7) \quad & a_4 + 4a_5 + 3a_6 + 2a_7 + a_8 = 0, \\
(E8) \quad & 16a_1 + 16a_2 + 8a_3 + 4a_4 = 3, \\
(E9) \quad & 12a_7 + 36a_8 + 36a_9 + a_{10} = 0, \\
(E10) \quad & 6a_3 + 18a_4 + 36a_5 + 18a_6 + 6a_7 + a_{10} = 0, \\
(E11) \quad & 36a_1 + 36a_2 + 12a_3 + a_{10} = 9, \\
(E12) \quad & a_1 + 2 \sum_{i=2,8} a_i + a_9 + a_{10} = 1.
\end{aligned}$$

Ce système admet une solution (**Maple**) qui est représentée sur le diagramme suivant (au facteur  $\frac{1}{64}$  près) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{a5} & \mathbf{a6} & \mathbf{a7} & \mathbf{a8} & \mathbf{a9} & & -3 & 16 & -18 & 0 & 5 \\
\mathbf{a4} & & & & \mathbf{a8} & & 0 & & & & 0 \\
\mathbf{a3} & & \mathbf{a10} & & \mathbf{a7} & = & -18 & & 36 & & -18 \\
\mathbf{a2} & [11] & & & \mathbf{a6} & & 48 & [11] & & & 16 \\
\mathbf{a1} & \mathbf{a2} & \mathbf{a3} & \mathbf{a4} & \mathbf{a5} & & -27 & 48 & -18 & 0 & -3
\end{array}$$

et le mystère s'épaissit, on retrouve les mêmes coefficients que pour les  $A_{ij}$ .

**Détermination des coefficients  $b_i$ .** Pour poursuivre, on va calculer la valeur des paramètres  $b_i$ . Imposer  $u^4v$  donnent les 4 équations :

$$\begin{aligned}
(E1) \quad & b_4 + 2b_5 + 3b_6 + 4b_7 = 0, \\
(E2) \quad & 4b_1 + 3b_4 + 2b_5 + b_6 = 0, \\
(E3) \quad & 2b_7 + 2b_8 + b_9 = 0, \\
(E4) \quad & 2b_1 + 2b_2 + b_3 = 0.
\end{aligned}$$

Imposer  $u^3v$  revient à considérer à nouveau l'expression

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16}B_3^4(u)B_1^4(v) + \frac{1}{8}B_3^4(u)B_2^4(v) + \frac{3}{16}B_3^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{4}B_3^4(u)B_4^4(v) \\
& + \frac{1}{4}B_4^4(u)B_1^4(v) + \frac{1}{2}B_4^4(u)B_2^4(v) + \frac{3}{4}B_4^4(u)B_3^4(v) + B_4^4(u)B_4^4(v),
\end{aligned}$$

ce qui donnent les 4 relations aux indices 21, 23, 12 et 32 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}b_8 + \frac{1}{4}b_4 + \frac{1}{2}b_5 + \frac{3}{4}b_6 + b_7 &= 0, \\
\frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{4}b_6 + \frac{1}{2}b_5 + \frac{3}{4}b_4 + b_1 &= 0, \\
\frac{1}{4}b_6 + \frac{1}{4}b_8 + \frac{1}{2}b_9 + \frac{3}{4}b_8 + b_7 &= 0, \\
\frac{1}{4}b_4 + \frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{2}b_3 + \frac{3}{4}b_2 + b_1 &= \frac{1}{8},
\end{aligned}$$

donc les 4 équations :

$$(E5) \quad b_8 + b_4 + 2b_5 + 3b_6 + 4b_7 = 0,$$

$$(E6) \quad b_2 + b_6 + 2b_5 + 3b_4 + 4b_1 = 0,$$

$$(E7) \quad b_6 + b_8 + 2b_9 + 3b_8 + 4b_7 = 0,$$

$$(E8) \quad 2b_4 + 2b_2 + 4b_3 + 6b_2 + 8b_1 = 1.$$

Imposer  $u^2v^2$  revient à considérer à nouveau l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{36}B_2^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{6}B_4^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{12}B_3^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{6}B_2^4(u)B_4^4(v) + B_4^4(u)B_4^4(v) \\ & + \frac{1}{2}B_3^4(u)B_4^4(v) + \frac{1}{12}B_2^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{2}B_4^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{4}B_3^4(u)B_3^4(v), \end{aligned}$$

ce qui donne quatre autres relations aux indices 21, 23, 12 et 32 :

$$\frac{1}{36}b_{10} + \frac{1}{6}b_5 + \frac{1}{6}b_9 + b_7 + \frac{1}{2}b_8 + \frac{1}{2}b_6 = 0,$$

$$\frac{1}{36}b_{10} + \frac{1}{6}b_5 + \frac{1}{6}b_3 + b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_4 = \frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{36}b_{10} + \frac{1}{6}b_9 + \frac{1}{6}b_5 + b_7 + \frac{1}{2}b_6 + \frac{1}{2}b_8 = 0,$$

$$\frac{1}{36}b_{10} + \frac{1}{6}b_3 + \frac{1}{6}b_5 + b_1 + \frac{1}{2}b_4 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{1}{12},$$

donc les 2 équations :

$$(E9) \quad b_{10} + 6b_5 + 6b_9 + 36b_7 + 18b_8 + 18b_6 = 0,$$

$$(E10) \quad b_{10} + 6b_5 + 6b_3 + 36b_1 + 18b_2 + 18b_4 = 3.$$

Comme ci-dessus, il faut rajouter la relation

$$2b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4 + 2b_5 + 2b_6 + 2b_7 + 2b_8 + b_9 + b_{10} = 1.$$

On a donc le système suivant (11 équations pour 10 inconnues) :

$$(E1) \quad b_4 + 2b_5 + 3b_6 + 4b_7 = 0,$$

$$(E2) \quad 4b_1 + 3b_4 + 2b_5 + b_6 = 0,$$

$$(E3) \quad 2b_7 + 2b_8 + b_9 = 0,$$

$$(E4) \quad 2b_1 + 2b_2 + b_3 = 0,$$

$$(E5) \quad b_8 + b_4 + 2b_5 + 3b_6 + 4b_7 = 0,$$

$$(E6) \quad b_2 + b_6 + 2b_5 + 3b_4 + 4b_1 = 0,$$

$$(E7) \quad b_6 + b_8 + 2b_9 + 3b_8 + 4b_7 = 0,$$

$$(E8) \quad 2b_4 + 2b_2 + 4b_3 + 6b_2 + 8b_1 = 1,$$

$$(E9) \quad b_{10} + 6b_5 + 6b_9 + 36b_7 + 18b_8 + 18b_6 = 0,$$

$$(E10) \quad b_{10} + 6b_5 + 6b_3 + 36b_1 + 18b_2 + 18b_4 = 3,$$

$$(E11) \quad 2b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4 + 2b_5 + 2b_6 + 2b_7 + 2b_8 + b_9 + b_{10} = 1.$$

Ce système admet une solution (Maple) qui est représentée sur le diagramme suivant (au facteur  $\frac{1}{16}$  près) :

b7	b8	b9	b8	b7		1	0	-2	0	1
b6				b6		0				0
b5		b10		b5	=	-6		12		-6
b4		[21]		b4		8		(2.1)		8
b1	b2	b3	b2	b1		-3	0	6	0	-3

ce qui est troublant car ce sont exactement les valeurs trouvées par la méthode classique (par Taylor) mais pour les  $A_{ij}$ .

Pour obtenir l'expression des quatre fonctions de base réduites type, on suit la même méthode que pour l'élément précédent par regroupement des Bernstein.

#### 5.4 Construction directe des fonctions via un système

On suit la même méthode que pour le degré 2. On écrit la forme générique d'une fonction et on instancie. Il y a 17 inconnues et donc un système  $17 \times 17$  pour chacune des fonctions.

#### 5.5 Validation d'un quadrilatère courant d'un maillage donné

On reprend la méthode utilisée pour les éléments précédents, à savoir on considère un élément d'un maillage et on va reconstruire un quadrilatère complet et l'écrire sous sa forme de Bézier avant d'effectuer l'analyse de son jacobien. La reconstruction consiste à définir les nœuds centraux puis les points de contrôle des arêtes et enfin les points de contrôle centraux.

Étant donné un élément quelconque d'un maillage, noté comme le carreau :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=1,17} q_i(u, v) A_i,$$

où les  $A_i$  désignent les nœuds de l'élément observé, on cherche les conditions assurant sa validité géométrique. On a :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=1,17} q_i(u, v) A_i = \sum_{i=1,17} \left\{ q_i^c(u, v) + \sum_l \alpha_l q_l^c(u, v) \right\} A_i,$$

en définissant

$$A_{11} = \sum_{i=1,17} \alpha_i^{11} A_i,$$

et des expressions analogues pour les autres nœuds manquants, le carreau :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=1,17} q_i(u, v) A_i = \sum_{"i"=1,25} q_{"i"}^c(u, v) A_{"i"},$$

que l'on note, au final :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,4} \sum_{j=0,4} q_{ij}^c(u, v) A_{ij},$$

est un carreau complet pour les nœuds centraux ainsi construits.

L'analyse de la validité géométrique d'un carreau complet, cf. [9], se fait en regardant sa forme de Bézier, en effet

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,4} \sum_{j=0,4} q_{ij}^c(u, v) A_{ij} = \sum_{i=0,4} \sum_{j=0,4} B_i^4(u) B_j^4(v) P_{ij},$$



avec  $P_{ij}$  les points de contrôle de l'élément et  $B_i^4(u)$  les polynômes de Bernstein de degré 4. Sous ce formalisme il est facile d'analyser le signe du jacobien, voir plus bas. Le seul point à effectuer est le calcul des points de contrôle, en particulier les points centraux. Il y a, *a priori*, deux méthodes pour obtenir ces points.

Selon les cas précédents, on pourrait penser que la relation liant les  $P_{ij}$  internes manquants est la même que celle liant les  $A_{ij}$  que l'on a construit, ainsi, par exemple :

$$P_{11} = \sum_{i=1,17} \alpha_i^{11} P_i,$$

mais nous ne savons pas le prouver et, cf. [10], ceci est faux dans le cas du triangle de degré 4, donc on devra résoudre le système  $8 \times 8$  correspondant.

Par contre, les points de contrôle des arêtes sont trouvés simplement en inversant la relation liant les nœuds à ces mêmes points. En effet, arête  $A_{00}A_{40}$ , on a les trois relations :

$$\begin{aligned} A_{10} &= \frac{81A_{00} + 108P_{10} + 54P_{20} + 12P_{30} + A_{40}}{256} \\ A_{20} &= \frac{A_{00} + 4P_{10} + 6P_{20} + 4P_{30} + A_{40}}{16} \\ A_{30} &= \frac{A_{00} + 12P_{10} + 54P_{20} + 108P_{30} + 81A_{40}}{256}, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_{10} &= \frac{-13A_{00} + 48A_{10} - 36A_{20} + 16A_{30} - 3A_{40}}{12} \\ P_{20} &= \frac{13A_{00} - 64A_{10} + 120A_{20} - 64A_{30} + 13A_{40}}{18} \\ P_{30} &= \frac{-3A_{00} + 16A_{10} - 36A_{20} + 48A_{30} - 13A_{40}}{12}, \end{aligned}$$

et des relations analogues pour les autres arêtes.

## 6 Quadrilatère Serendip de degré supérieur ?

**Utilisation d'un développement de Taylor.** On prend le degré 5 et on suit la même méthode en utilisant les sous-motifs du treillis centrés en les nœuds internes, comme, Lemme 2, la somme des dérivées impaires est nulle (ici la cinquième en particulier), le développement est identique à celui du degré 4, à savoir les deux relations (12) et (13), soit, vis-à-vis de  $A_{11}$  :

$$\begin{aligned} & q(A_{00}) + q(A_{20}) + q(A_{22}) + q(A_{02}) = 4q(A_{11}) \\ & + D^2.(\bar{v}_{00}, \bar{v}_{00}) + D^2.(\bar{v}_{20}, \bar{v}_{20}) + D^2.(\bar{v}_{22}, \bar{v}_{22}) + D^2.(\bar{v}_{02}, \bar{v}_{02}) \\ & + D^4.(\bar{v}_{00}, \bar{v}_{00}, \bar{v}_{00}, \bar{v}_{00}) + D^4.(\bar{v}_{20}, \bar{v}_{20}, \bar{v}_{20}, \bar{v}_{20}) + D^4.(\bar{v}_{22}, \bar{v}_{22}, \bar{v}_{22}, \bar{v}_{22}) + D^4.(\bar{v}_{02}, \bar{v}_{02}, \bar{v}_{02}, \bar{v}_{02}). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & q(A_{10}) + q(A_{21}) + q(A_{12}) + q(A_{01}) = 4q(A_{11}) \\ & + D^2.(\bar{v}_{10}, \bar{v}_{10}) + D^2.(\bar{v}_{21}, \bar{v}_{21}) + D^2.(\bar{v}_{12}, \bar{v}_{12}) + D^2.(\bar{v}_{01}, \bar{v}_{01}) \\ & + D^4.(\bar{v}_{10}, \bar{v}_{10}, \bar{v}_{10}, \bar{v}_{10}) + D^4.(\bar{v}_{21}, \bar{v}_{21}, \bar{v}_{21}, \bar{v}_{21}) + D^4.(\bar{v}_{12}, \bar{v}_{12}, \bar{v}_{12}, \bar{v}_{12}) + D^4.(\bar{v}_{01}, \bar{v}_{01}, \bar{v}_{01}, \bar{v}_{01}), \end{aligned}$$

et des relations analogues pour les autres nœuds internes.

Au degré 4, les dérivées quatrièmes sont des constantes et, par suite, on avait trouvé le système liant les polynômes cherchés. Ici, ces dérivées ne sont pas constantes et trouver un lien entre les fonctions pour que l'on puisse, entre les deux relations précédentes, se débarrasser à la fois des dérivées secondes et quatrièmes est hautement improbable, il faudrait que la relation liant les dérivées secondes (Lemme 1) soit vraie pour les dérivées quatrièmes.

Regardons alors le terme :

$$D^4 \cdot (\vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}, \vec{v}_{10}),$$

sachant que  $\vec{v}_{10} = \frac{\vec{v}_{00} + \vec{v}_{20}}{2}$ . Il vient la somme

$$\frac{1}{16} \{ D^4 \cdot (\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}) + 4D^4 \cdot (\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{20}) + 6D^4 \cdot (\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + 4D^4 \cdot (\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) + D^4 \cdot (\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}) \},$$

et, par exemple, le terme croisé  $D^4 \cdot (\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20})$  est impossible à exprimer comme une combinaison de  $D^4 \cdot (\vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{00}, \vec{v}_{00})$  avec  $D^4 \cdot (\vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20}, \vec{v}_{20})$ .

Par ailleurs, on trouve dans la littérature des éléments Serendip a tout ordre mais, dès le degré 5, ils ne sont pas complètement symétriques comme le montre le tableau suivant qui indique la dimension de l'espace  $P^k$ , soit  $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ , la dimension de l'espace de serendipité, le nombre de nœuds internes associés à cet espace et le nombre de nœuds à ajouter pour créer un élément avec des fonctions de forme symétriques et des nœuds, sur l'élément de référence, complètement symétriques.

$k$	$\dim(P^k)$	$\dim(P^k) + x^k y + xy^k$	#noeuds	+
2	6	8	0	0
3	10	12	0	0
4	15	17	1	0
5	21	23	3	1
6	28	30	6	2
7	36	38	10	2

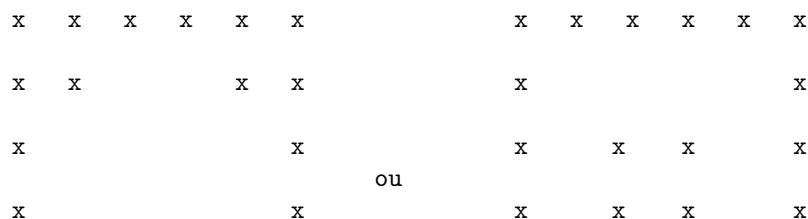
Dimension des espaces polynomiaux et nombre de nœuds internes et manquants

Ce que l'on résume par le théorème suivant :

**Théorème 1.** Les quadrilatères de Lagrange Serendip de degré  $k$  égal ou plus grand que 5 ne sont, *a priori*, pas symétriques. □

En effet, cf. [1] entre autres, un quadrilatère de degré 5 existe avec 3 nœuds internes, mais il est non symétrique et n'est pas de Lagrange. Cet élément possède 23 nœuds ( $4 \times 5 + 3$ ). De manière générale, on trouve aussi les éléments d'ordre supérieur mais ils sont non symétriques. Notons également l'existence de tels éléments qui ne sont pas de Lagrange.

**Une construction possible.** Nous pensons qu'il est possible de trouver des éléments, que nous pourrions continuer à appeler, peut être par abus de langage, Serendip, complètement symétriques à tous les degrés. Par exemple, au degré 5, l'idée est d'ajouter un nœud interne supplémentaire. Par suite, on passe de 3 à 4 nœuds internes qu'il est immédiat de positionner pour avoir une symétrie géométrique parfaite. La symétrie des nœuds devrait alors permettre de construire les fonctions de forme désirées en posant le système d'équations correspondant. Ainsi, cet élément aura 24 nœuds ( $4 \times 5 + 4$ ). On peut, dans ce cas précis, définir deux éléments ayant les bonnes propriétés géométriques car il y a deux façons de choisir les nœuds internes comme l'indique le schéma suivant :





La section suivante discute en détail du cas du quadrilatère de degré 5 afin de vérifier s'il est possible de lui ajouter un nœud interne supplémentaire (passant ainsi de 23 à 24 nœuds) et de voir quelle incidence cela a au niveau de l'espace polynomial engendré.

## 7 Sur un quadrilatère Serendip de degré 5

On considère le choix de droite qui est illustré par les diagrammes suivants qui indiquent également la correspondance entre la numérotation séquentielle et la numérotation naturelle à deux indices.

x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x		05	15	25	35	45	55
x					x		x	13	14	15	16	x		04	14	24	34	44	54
x		x	x		x		x	9	10	11	12	x		03	13	23	33	43	53
x		x	x		x		x	5	6	7	8	x		02	12	22	32	42	52
x					x		x	1	2	3	4	x		01	11	21	31	41	51
x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x		00	10	20	30	40	50

### 7.1 Caractérisation de l'espace des polynômes via Taylor

On reprend la méthode déjà vue en écrivant, via des développements de Taylor sur chaque sous-motif du treillis, les liens entre les valeurs "centrales" et les valeurs aux bords d'une fonction générique  $q$ .

Les expressions trouvées au degré 4 restent vraies et, pour les sous-motifs, on a des relations comme (ici pour  $A_{11}$ ) :

$$4q(A_{11}) + \sum_{s11} q(s) - 2 \sum_{a11} q(a) = \sum_s D^4.(\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s) - 2 \sum_a D^4.(\vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a),$$

écrit comme :

$$C_1 = C_{11} = 4q(A_{11}) + \sum_{s11} q(s) - 2 \sum_{a11} q(a), \quad (16)$$

en notant  $C_1 = C_{11} = \sum_{s11} D^4.(\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s) - 2 \sum_{a11} D^4.(\vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a, \vec{v}_a)$  qui, ici n'est plus une constante mais un polynôme de degré 1 par rapport aux coordonnées de  $A_{11}$  pour la configuration des vecteurs  $\vec{v}_s$  et  $\vec{v}_a$  spécifiés ci-dessus.

Examinons plus en détail ce qu'est  $C_1$ . En fait, la dérivée de la fonction  $q$  est prise en  $A_{11}$  et donc l'écriture complète de son premier terme est :

$$C_1 = C_1(u_{11}, v_{11}) = \sum_{s11} D^4(u_{11}, v_{11}).(\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s) + \dots,$$

où  $u_{11}$  et  $v_{11}$  sont les coordonnées de  $A_{11}$ . On note alors par  $v_{1s}$  et  $v_{2s}$  les composantes du vecteur  $\vec{v}_s$  puis on calcule cette dérivée. Il vient :

$$\begin{aligned} D^4(u_{11}, v_{11}).(\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s) &= \frac{\partial^4 q(u_{11}, v_{11})}{\partial u^4} v_{1s}^4 + 4 \frac{\partial^4 q(u_{11}, v_{11})}{\partial u^3 \partial v} v_{1s}^3 v_{2s} \\ &+ 6 \frac{\partial^4 q(u_{11}, v_{11})}{\partial u^2 \partial v^2} v_{1s}^2 v_{2s}^2 + 4 \frac{\partial^4 q(u_{11}, v_{11})}{\partial u \partial v^3} v_{1s} v_{2s}^3 + \frac{\partial^4 q(u_{11}, v_{11})}{\partial v^4} v_{2s}^4, \end{aligned}$$

que l'on note comme (avec  $C_4^i$  les coefficients du binôme) :

$$D^4(u_{11}, v_{11}).(\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s) = \sum_{i=0}^4 C_4^i \frac{\partial^4 q(u_{11}, v_{11})}{\partial u^i \partial v^{4-i}} v_{1s}^i v_{2s}^{4-i}.$$

Comme  $q$  est de degré 5, les dérivées quatrièmes s'écrivent :

$$\frac{\partial^4 q(u_{11}, v_{11})}{\partial u^i \partial v^{4-i}} = \alpha_i u_{11} + \beta_i v_{11} + \gamma_i,$$

avec les coefficients  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$ . Considérons alors  $C_2 = C_{21}$  et regardons  $C_2 - C_1$ , on a :

$$\begin{aligned} & D^4(u_{21}, v_{21}).(\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s) - D^4(u_{11}, v_{11}).(\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}_s) \\ &= \sum_i C_4^i \{(\alpha_i u_{21} + \beta_i v_{21} + \gamma_i) - (\alpha_i u_{11} + \beta_i v_{11} + \gamma_i)\} v_{1s}^i v_{2s}^{4-i} \\ &= \sum_i C_4^i \alpha_i (u_{21} - u_{11}) v_{1s}^i v_{2s}^{4-i} = \sum_i C_4^i \frac{\alpha_i}{5} v_{1s}^i v_{2s}^{4-i}, \end{aligned}$$

qui est donc indépendant de la position. Dans l'autre direction on a le même résultat. Par suite, la différence entre deux  $C_i$  consécutifs est constante dans les deux directions, ce qui conduit s'exprime par les relations :

$$\begin{aligned} C_2 - C_1 &= C_3 - C_2, \\ C_3 - C_2 &= C_4 - C_3, \\ &\dots \\ C_5 - C_1 &= C_9 - C_5. \end{aligned}$$

On impose, dans la direction des  $u$ , l'égalité entre deux différences de  $C_i$  consécutives, soit 8 relations, 2 par lignes  $v = cste$ . On impose ensuite l'égalité entre les 4 lignes  $v = cste$ . ce qui donne 3 autres relations. Au total on a 11 relations pour la direction  $u$ . Dans la direction  $v$ , on a également 11 relations analogues. Cependant une fois la relation sur les lignes (en  $u$ ) imposée, les 2 relations relatives à la première colonne (en  $v$ ) entraînent les 9 autres à cause de la symétrie de la relation liant 2 lignes et 2 colonnes. Par suite, on dispose de 13 relations pour 12 inconnues. Il existe donc une relation dans les lignes redondante qui donne ainsi la dépendance d'un nœud central aux nœuds libres.

On considère alors les 11 relations en ligne. La décomposition  $LU$  de la matrice augmentée (par le second membre) va permettre d'exhiber une ligne avec 12 zéros et de trouver ainsi la relation de dépendance cherchée, voir plus bas.

Les 11 relations (notées  $(RI)$ ) en ligne s'écrivent comme :

$$12 = 23 \quad \text{soit} \quad C_2 - C_1 = C_3 - C_2,$$

$$\begin{aligned} (R1) \quad & 12q(21) + 4q(10) + 4q(30) + 4q(32) + 4q(12) - 6q(20) - 8q(31) - 6q(22) - 8q(11) \\ & - q(00) - q(02) + 2q(01) - q(40) - q(42) + 2q(41) = 0. \end{aligned}$$

Les autres relations s'obtiennent simplement en jouant sur les indices :

pour  $23 = 34$  on prend  $(R1)$  et on fait  $+1$  en  $i$ ,

$$\begin{aligned} (R2) \quad & 12q(31) + 4q(20) + 4q(40) + 4q(42) + 4q(22) - 6q(30) - 8q(41) - 6q(32) - 8q(21) \\ & - q(10) - q(12) + 2q(11) - q(50) - q(52) + 2q(51) = 0. \end{aligned}$$

$56 = 67$   $(R1) + 1$  en  $j$ ,

$$\begin{aligned} (R3) \quad & 12q(22) + 4q(11) + 4q(31) + 4q(33) + 4q(13) - 6q(21) - 8q(32) - 6q(23) - 8q(12) \\ & - q(01) - q(03) + 2q(02) - q(41) - q(43) + 2q(42) = 0. \end{aligned}$$

$$67 = 78 \quad (R3) + 1 \quad \text{en } i,$$

$$(R4) \quad 12q(32) + 4q(21) + 4q(41) + 4q(43) + 4q(23) - 6q(31) - 8q(42) - 6q(33) - 8q(22) \\ - q(11) - q(13) + 2q(12) - q(51) - q(53) + 2q(52) = 0.$$

$$610 = 1011 \quad (R1) + 2 \quad \text{en } j,$$

$$(R5) \quad 12q(23) + 4q(12) + 4q(32) + 4q(34) + 4q(14) - 6q(22) - 8q(33) - 6q(24) - 8q(13) \\ - q(02) - q(04) + 2q(03) - q(42) - q(44) + 2q(43) = 0.$$

$$1011 = 1112 \quad (R5) + 1 \quad \text{en } i,$$

$$(R6) \quad 12q(33) + 4q(22) + 4q(42) + 4q(44) + 4q(24) - 6q(32) - 8q(43) - 6q(34) - 8q(23) \\ - q(12) - q(14) + 2q(13) - q(52) - q(54) + 2q(53) = 0.$$

$$1314 = 1415 \quad (R1) + 3 \quad \text{en } j,$$

$$(R7) \quad 12q(24) + 4q(13) + 4q(33) + 4q(35) + 4q(15) - 6q(23) - 8q(34) - 6q(25) - 8q(14) \\ - q(03) - q(05) + 2q(04) - q(43) - q(45) + 2q(44) = 0.$$

$$1415 = 1516 \quad (R7) + 1 \quad \text{en } i,$$

$$(R8) \quad 12q(34) + 4q(23) + 4q(43) + 4q(45) + 4q(25) - 6q(33) - 8q(44) - 6q(35) - 8q(24) \\ - q(13) - q(15) + 2q(14) - q(53) - q(55) + 2q(54) = 0.$$

pour (R9) soit  $23 = 67$  ou encore  $C_3 - C_2 = C_7 - C_6$ ,

donc pour  $C_3 - C_2 - C_7 + C_6 = 0$ ,

$$4q(31) + q(20) + q(40) + q(42) + q(22) - 2q(30) - 2q(41) - 2q(32) - 2q(21) \\ - 4q(21) - q(10) - q(30) - q(32) - q(12) + 2q(20) + 2q(31) + 2q(22) + 2q(11) \\ - 4q(32) - q(21) - q(41) - q(43) - q(23) + 2q(31) + 2q(42) + 2q(33) + 2q(22) \\ + 4q(22) + q(11) + q(31) + q(33) + q(13) - 2q(21) - 2q(32) - 2q(23) - 2q(12) = 0,$$

soit :

$$(R9) \quad 9q(31) + 3q(20) + q(40) + 3q(42) + 9q(22) - 3q(30) - 3q(41) - 9q(32) - 9q(21) \\ - q(10) - 3q(12) + 3q(11) - q(43) - 3q(23) + 3q(33) + q(13) = 0,$$

$$1011 = 1415 \quad (R9) + 2 \quad \text{en } j,$$

$$(R10) \quad 9q(33) + 3q(22) + q(42) + 3q(44) + 9q(24) - 3q(32) - 3q(43) - 9q(34) - 9q(23) \\ - q(12) - 3q(14) + 3q(13) - q(45) - 3q(25) + 3q(35) + q(15) = 0,$$

$$67 = 1011 \quad (R9) + 1 \quad \text{en } j,$$

$$(R10') \quad 9q(32) + 3q(21) + q(41) + 3q(43) + 9q(23) - 3q(31) - 3q(42) - 9q(33) - 9q(22) \\ - q(11) - 3q(13) + 3q(12) - q(44) - 3q(24) + 3q(34) + q(14) = 0.$$

On obtient ainsi le système dont la matrice ( $11 \times 12$ ) est :

11	21	31	41	42	43	44	34	24	14	13	12
-8	12	-8	2	-1	0	0	0	0	0	0	4
2	-8	12	-8	4	0	0	0	0	0	0	-1
4	-6	4	-1	2	-1	0	0	0	0	4	-8
-1	4	-6	4	-8	4	0	0	0	0	-1	2
0	0	0	0	-1	2	-1	4	-6	4	-8	4
0	0	0	0	4	-8	4	-6	4	-1	2	-1
0	0	0	0	0	-1	2	-8	12	-8	4	0
0	0	0	0	0	4	-8	12	-8	2	-1	0
3	-9	9	-3	3	-1	0	0	0	0	1	-3
0	0	0	0	1	-3	3	-9	9	-3	3	-1
-1	3	-3	1	-3	3	-1	3	-3	1	-3	3
11	21	31	41	42	43	44	34	24	14	13	12

avec la colonne augmenté (c'est-à-dire le second membre) :

$$\begin{aligned}
& q(00) - 4q(10) + 6q(20) - 4q(30) + q(40) + 6q(22) - 4q(32) - 2q(01) + q(02), \\
& q(10) - 4q(20) + 6q(30) - 4q(40) + q(50) - 4q(22) + 6q(32) - 2q(51) + q(52), \\
& \quad -12q(22) + 8q(32) + 6q(23) - 4q(33) + q(01) - 2q(02) + q(03), \\
& \quad 8q(22) - 12q(32) - 4q(23) + 6q(33) + q(51) - 2q(52) + q(53), \\
& \quad 6q(22) - 4q(32) - 12q(23) + 8q(33) + q(02) - 2q(03) + q(04), \\
& \quad -4q(22) + 6q(32) + 8q(23) - 12q(33) + q(52) - 2q(53) + q(54), \\
& 6q(23) - 4q(33) + q(05) - 4q(15) + 6q(25) - 4q(35) + q(45) + q(03) - 2q(04), \\
& -4q(23) + 6q(33) + q(15) - 4q(25) + 6q(35) - 4q(45) + q(55) + q(53) - 2q(54), \\
& \quad q(10) - 3q(20) + 3q(30) - q(40) - 9q(22) + 9q(32) + 3q(23) - 3q(33), \\
& \quad -q(15) + 3q(25) - 3q(35) + q(45) - 3q(22) + 3q(32) + 9q(23) - 9q(33), \\
& \quad -9q(32) - 9q(23) + 9q(33) + 9q(22).
\end{aligned}$$

La décomposition  $LU$  de cette matrice donne pour  $U$  la matrice donnée en Annexe sur la Figure 3. On observe, comme prévu, que la dernière ligne de  $U$  est nulle et ainsi la dernière composante de la colonne augmentée doit être nulle, ce qui conduit à la relation de dépendance :

$$\begin{aligned}
& 1/15q(00) - 1/3q(20) + 1/3q(30) - 1/15q(50) \\
& \quad -1/15q(05) + 1/15q(55) + 1/3q(25) - 1/3q(35) \\
& -5/3q(32) + 5/3q(22) - 1/3q(02) + 1/3q(52) + 5/3q(33) - 5/3q(23) + 1/3q(03) - 1/3q(53) = 0,
\end{aligned}$$

soit simplement :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{5}q(00) - q(20) + q(30) - \frac{1}{5}q(50) - \frac{1}{5}q(05) + \frac{1}{5}q(55) + q(25) - q(35) \\
& - 5q(32) + 5q(22) - q(02) + q(52) + 5q(33) - 5q(23) + q(03) - q(53) = 0. \quad (17)
\end{aligned}$$

On considère maintenant le système  $12 \times 12$  composé des 10 premières relations en ligne complété des 2 relations de la première colonne définies par :

$$\begin{aligned}
& 15 = 59 \quad (R1) \quad i \text{ en } j \text{ et } j \text{ en } i, \\
(R11) \quad & 12q(12) + 4q(01) + 4q(03) + 4q(23) + 4q(21) - 6q(02) - 8q(13) - 6q(22) - 8q(11) \\
& \quad -q(00) - q(20) + 2q(10) - q(04) - q(24) + 2q(14) = 0, \\
& 59 = 913 \quad (R11) + 1 \text{ en } j, \\
(R12) \quad & 12q(13) + 4q(02) + 4q(04) + 4q(24) + 4q(22) - 6q(03) - 8q(14) - 6q(23) - 8q(12) \\
& \quad -q(01) - q(21) + 2q(11) - q(05) - q(25) + 2q(15) = 0.
\end{aligned}$$

Soit le système (inconnues : 11, 21, 31, 41, 42, 43, 44, 34, 24, 14, 13, 12) :

$$\begin{aligned}
(R1) \quad & -8q(11) + 12q(21) - 8q(31) + 2q(41) - q(42) + 4q(12) \\
& = -4q(10) - 4q(30) - 4q(32) + 6q(20) + 6q(22) + q(00) + q(02) - 2q(01) + q(40), \\
(R2) \quad & + 2q(11) - 8q(21) + 12q(31) - 8q(41) + 4q(42) - q(12) \\
& = -4q(20) - 4q(40) - 4q(22) + 6q(30) + 6q(32) + q(10) + q(50) + q(52) - 2q(51), \\
(R3) \quad & + 4q(11) - 6q(21) + 4q(31) - q(41) + 2q(42) - q(43) + 4q(13) - 8q(12) \\
& = -12q(22) - 4q(33) + 8q(32) + 6q(23) + q(01) + q(03) - 2q(02),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R4) \quad & -q(11) + 4q(21) - 6q(31) + 4q(41) - 8q(42) + 4q(43) - q(13) + 2q(12) \\
& = -12q(32) - 4q(23) + 6q(33) + 8q(22) + q(51) + q(53) - 2q(52), \\
(R5) \quad & -q(42) + 2q(43) - q(44) + 4q(34) - 6q(24) + 4q(14) - 8q(13) + 4q(12) \\
& = -12q(23) - 4q(32) + 6q(22) + 8q(33) + q(02) + q(04) - 2q(03), \\
(R6) \quad & + 4q(42) - 8q(43) + 4q(44) - 6q(34) + 4q(24) - q(14) + 2q(13) - q(12) \\
& = -12q(33) - 4q(22) + 6q(32) + 8q(23) + q(52) + q(54) - 2q(53), \\
(R7) \quad & -q(43) + 2q(44) - 8q(34) + 12q(24) - 8q(14) + 4q(13) \\
& = -4q(33) - 4q(35) - 4q(15) + 6q(23) + 6q(25) + q(45) + q(03) + q(05) - 2q(04), \\
(R8) \quad & + 4q(43) - 8q(44) + 12q(34) - 8q(24) + 2q(14) - q(13) \\
& = -4q(23) - 4q(45) - 4q(25) + 6q(33) + 6q(35) + q(15) + q(53) + q(55) - 2q(54), \\
(R9) \quad & + 3q(11) - 9q(21) + 9q(31) - 3q(41) + 3q(42) - q(43) + q(13) - 3q(12) \\
& = -3q(20) - q(40) - 9q(22) + 3q(30) + 9q(32) + q(10) + 3q(23) - 3q(33), \\
(R10) \quad & + q(42) - 3q(43) + 3q(44) - 9q(34) + 9q(24) - 3q(14) + 3q(13) - q(12) \\
& = -9q(33) - 3q(22) + 3q(32) + 9q(23) + q(45) + 3q(25) - 3q(35) - q(15), \\
(R11) \quad & -8q(11) + 4q(21) - q(24) + 2q(14) - 8q(13) + 12q(12) \\
& = -4q(01) - 4q(03) - 4q(23) + 6q(02) + 6q(22) + q(00) + q(20) - 2q(10) + q(04), \\
(R12) \quad & + 2q(11) - q(21) + 4q(24) - 8q(14) + 12q(13) - 8q(12) \\
& = -4q(02) - 4q(04) - 4q(22) + 6q(03) + 6q(23) + q(01) + q(05) + q(25) - 2q(15).
\end{aligned}$$

D'où la matrice :

11	21	31	41	42	43	44	34	24	14	13	12
-8	12	-8	2	-1	0	0	0	0	0	0	4
2	-8	12	-8	4	0	0	0	0	0	0	-1
4	-6	4	-1	2	-1	0	0	0	0	4	-8
-1	4	-6	4	-8	4	0	0	0	0	-1	2
0	0	0	0	-1	2	-1	4	-6	4	-8	4
0	0	0	0	4	-8	4	-6	4	-1	2	-1
0	0	0	0	0	-1	2	-8	12	-8	4	0
0	0	0	0	0	4	-8	12	-8	2	-1	0
3	-9	9	-3	3	-1	0	0	0	0	1	-3
0	0	0	0	1	-3	3	-9	9	-3	3	-1
-8	4	0	0	0	0	0	0	-1	2	-8	12
2	-1	0	0	0	0	0	0	4	-8	12	-8
11	21	31	41	42	43	44	34	24	14	13	12

et le second membre :

$$\begin{aligned}
& q(00) - 4q(10) + 6q(20) - 4q(30) + q(40) + 6q(22) - 4q(32) - 2q(01) + q(02), \\
& q(10) - 4q(20) + 6q(30) - 4q(40) + q(50) - 4q(22) + 6q(32) - 2q(51) + q(52), \\
& -12q(22) + 8q(32) + 6q(23) - 4q(33) + q(01) - 2q(02) + q(03), \\
& 8q(22) - 12q(32) - 4q(23) + 6q(33) + q(51) - 2q(52) + q(53), \\
& 6q(22) - 4q(32) - 12q(23) + 8q(33) + q(02) - 2q(03) + q(04), \\
& -4q(22) + 6q(32) + 8q(23) - 12q(33) + q(52) - 2q(53) + q(54), \\
& 6q(23) - 4q(33) + q(05) - 4q(15) + 6q(25) - 4q(35) + q(45) + q(03) - 2q(04),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4q(23) + 6q(33) + q(15) - 4q(25) + 6q(35) - 4q(45) + q(55) + q(53) - 2q(54), \\
& \quad q(10) - 3q(20) + 3q(30) - q(40) - 9q(22) + 9q(32) + 3q(23) - 3q(33), \\
& \quad -q(15) + 3q(25) - 3q(35) + q(45) - 3q(22) + 3q(32) + 9q(23) - 9q(33), \\
& \quad q(00) - 4q(01) + 6q(02) - 4q(03) + q(04) + 6q(22) - 4q(23) - 2q(10) + q(20), \\
& \quad q(01) - 4q(02) + 6q(03) - 4q(04) + q(05) - 4q(22) + 6q(23) - 2q(15) + q(25).
\end{aligned}$$

Ce système donne (Maple) la solution suivante (lire  $aij$  comme  $q(A_{ij})$ ) :

$$\begin{aligned}
a11 &= 4/5a10+22/45a30-14/9a32-38/45a20+22/9a22-74/225a00-38/45a02+4/5a01-26/225a50 \\
& -2/45a52+1/5a51+10/9a33-14/9a23+22/45a03-2/45a53-2/45a35+1/5a15-2/45a25-26/225a05+1/225a55 \\
a21 &= 4/15a30-4/3a32+8/3a22-8/75a00-16/15a02+3/5a01-4/25a50-4/15a52+2/5a51+4/3a33-2a23 \\
& \quad +2/3a03 - 4/15a35 + 1/3a25 - 7/75a05 + 2/75a55 \\
a31 &= 3/5a30-1/3a32-1/3a20+5/3a22-1/25a00-13/15a02+2/5a01-17/75a50-7/15a52+3/5a51+a33 \\
& \quad -5/3a23 + 3/5a03 + 1/15a53 - 4/15a35 + 1/3a25 - 7/75a05 + 2/75a55 \\
a41 &= -4/9a30+4/9a32+4/45a20+4/9a22-8/225a00-4/9a02+1/5a01+4/5a40-92/225a50-4/9a52+4/5a51 \\
& +4/9a33-8/9a23+16/45a03+4/45a53-4/9a35+16/45a25+1/5a45-17/225a05-8/225a55 \\
a42 &= -4/5a30+4/3a32+2/5a20-2/3a22-1/25a00+1/15a02+3/5a40-4/25a50+4/15a52-8/15a35+4/15a25 \\
& \quad +2/5a45 - 2/75a05 - 8/75a55 \\
a43 &= -8/15a30+4/15a20-2/75a00+2/5a40-8/75a50+4/3a33-2/3a23+1/15a03+4/15a53-4/5a35+2/5a25 \\
& \quad +3/5a45 - 1/25a05 - 4/25a55 \\
a44 &= -4/9a30+4/9a32+16/45a20-8/9a22-17/225a00+16/45a02+1/5a40-8/225a50+4/45a52+4/9a33 \\
& +4/9a23-4/9a03+1/5a04-4/9a53+4/5a54-4/9a35+4/45a25+4/5a45-8/225a05-92/225a55 \\
a34 &= -4/15a30+a32+1/3a20-5/3a22-7/75a00+3/5a02+2/75a50+1/15a52-1/3a33+5/3a23-13/15a03 \\
& \quad +2/5a04 - 7/15a53 + 3/5a54 + 3/5a35 - 1/3a25 - 1/25a05 - 17/75a55 \\
a24 &= -4/15a30+4/3a32+1/3a20-2a22-7/75a00+2/3a02+2/75a50-4/3a33+8/3a23-16/15a03+3/5a04 \\
& \quad -4/15a53 + 2/5a54 + 4/15a35 - 8/75a05 - 4/25a55 \\
a14 &= 1/5a10-2/45a30+10/9a32-2/45a20-14/9a22-26/225a00+22/45a02+1/225a50-2/45a52 \\
& -14/9a33+22/9a23-38/45a03+4/5a04-2/45a53+1/5a54+22/45a35+4/5a15-38/45a25-74/225a05-26/225a55 \\
a13 &= 2/5a10 + 4/15a30 - 8/15a20 - 8/75a00 - 2/75a50 - 2/3a33 + 4/3a23 + 4/15 \\
& \quad a03 + 1/15a53 + 2/5a35 + 3/5a15 - 4/5a25 - 4/25a05 - 1/25a55 \\
a12 &= 3/5a10+2/5a30-2/3a32-4/5a20+4/3a22-4/25a00+4/15a02-1/25a50+1/15a52+4/15a35+2/5a15 \\
& \quad -8/15a25 - 8/75a05 - 2/75a55.
\end{aligned}$$

À partir de cette solution et de la relation de dépendance, on va reconstruire une solution complètement symétrique. Rappelons cette relation, cf. Relation (17) :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{5}q(00) - q(20) + q(30) - \frac{1}{5}q(50) - \frac{1}{5}q(05) + \frac{1}{5}q(55) + q(25) - q(35) \\
& -5q(32) + 5q(22) - q(02) + q(52) + 5q(33) - 5q(23) + q(03) - q(53) = 0,
\end{aligned}$$

par ailleurs, ceci s'écrit :

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{25}q(00) + \frac{1}{5}q(20) - \frac{1}{5}q(30) + \frac{1}{25}q(50) + \frac{1}{25}q(05) - \frac{1}{25}q(55) - \frac{1}{5}q(25) + \frac{1}{5}q(35) \\
& \quad +q(32) - q(22) + \frac{1}{5}q(02) - \frac{1}{5}q(52) + q(23) - q(33) - \frac{1}{5}q(03) + \frac{1}{5}q(53).
\end{aligned}$$

soit le diagramme suivant :



1/25	0	-1/5	1/5	0	-1/25	
0					0	
-1/5		1	-1		1/5	Relation de dépendance
1/5		-1	1		-1/5	
0					0	
-1/25	0	1/5	-1/5	0	1/25	

On considère les distributions liées aux indices 11 et 41, soit, pour 11, le diagramme

-26/225	1/5	-2/45	-2/45	0	1/225	
0					0	
22/45		-14/9	10/9		-2/45	Distribution pour [11]
-38/45		22/9	-14/9		-2/45	
4/5	[11]				1/5	
-74/225	4/5	-38/45	22/45	0	-26/225	

et, pour 41, le diagramme

-17/225	1/5	16/45	-4/9	1/5	-8/225	
0					0	
16/45		-8/9	4/9		4/45	Distribution pour [41]
-4/9		4/9	4/9		-4/9	
1/5				[41]	4/5	
-8/225	4/5	4/45	-4/9	4/5	-92/225	

L'idée est de répartir les coefficients de la relation de dépendance dans les deux distributions indiquées de façon à les rendre symétriques. En effet, la relation de dépendance, étant une combinaison linéaire à somme nulle, bien que modifiant les coefficients des distributions, ne change pas les relations donnant les distributions. Pour ce faire, on se donne deux paramètres,  $\alpha$  et  $\beta$ , l'un relatif à l'indice 11, l'autre à l'indice 41.

On impose que [11] voit 00 comme [41] voit 50. Ceci donne la contrainte :

$$-\frac{74}{225} - \frac{1}{25}\alpha = -\frac{92}{225} + \frac{1}{25}\beta,$$

soit la relation

$$\alpha + \beta = 2.$$

On en déduit, par symétrie, la même relation pour tous les autres coefficients de ces deux configurations.

Ainsi, on obtient pour la distribution en 11, une solution avec un paramètre ( $\alpha$ ) qui s'écrit comme indiqué sur le diagramme qui suit :

-26/225	1/5	-2/45	-2/45	0	1/225	1/25	0	-1/5	1/5	0	-1/25
0					0	0					0
22/45		-14/9	10/9		-2/45	-1/5		1	-1		1/5
-38/45		22/9	-14/9		-2/45	1/5		-1	1		-1/5
4/5					1/5	0					0
-74/225	4/5	-38/45	22/45	0	-26/225	-1/25	0	1/5	-1/5	0	1/25

qui se lit comme, par exemple pour le coefficient en 00,  $-\frac{74}{225} - \frac{1}{25}\alpha$ .

Notons que par symétrie il est inutile de regarder les cas liés aux indices 14 et 44. Il reste donc à regarder les autres indices, soit 21, 31, 24, 34 et 12, 13, 42, 43. On considère les distributions liées aux indices 21, 12 et 13, soit, pour 21, le diagramme

-7/75	0	1/3	-4/15	0	2/75	
0					0	
2/3		-2	4/3		0	
-16/15		8/3	-4/3		-4/15	Distribution pour [21]
3/5		[21]			2/5	
-8/75	0	0	4/15	0	-4/25	

puis, pour 12, le diagramme

-8/75	2/5	-8/15	4/15	0	-2/75	
0					0	
0		0	0		0	
4/15	[12]	4/3	-2/3		1/15	Distribution pour [12]
0					0	
-4/25	3/5	-4/5	2/5	0	-1/25	

et, pour 13, le diagramme

-4/25	3/5	-4/5	2/5	0	-1/25	
0					0	
4/15	[13]	4/3	-2/3		-1/15	Distribution pour [13]
0		0	0		0	
0					0	
-8/75	2/5	-8/15	4/15	0	-2/75	

Comme ci-dessus, on impose les symétries avec les coefficients  $\beta$  pour 21,  $\gamma$  pour 12 et  $\delta$  pour 13. On impose que [21] voit 00 comme [12] voit 00. Ceci donne la contrainte :

$$-\frac{8}{75} - \frac{1}{25}\beta = -\frac{4}{25} - \frac{1}{25}\gamma,$$

soit la relation

$$\beta - \gamma = \frac{4}{3}.$$

On impose que [12] voit 02 comme [13] voit 03. Ceci donne la contrainte :

$$\frac{4}{15} + \frac{1}{5}\gamma = \frac{4}{15} - \frac{1}{5}\delta,$$

soit la relation

$$\gamma + \delta = 0,$$

en fait, ceci confirme que les coefficients de 12 et ceux de 13 forment deux diagrammes déjà complètement symétriques.

On fixe  $\gamma = \delta = 0$  donc  $\beta = \frac{4}{3}$  et on garde le paramètre  $\alpha$ . La symétrisation des diagrammes est effectuée avec ses valeurs. Donc

$$\begin{array}{cccccccccccc} -26/225 & 1/5 & -2/45 & -2/45 & 0 & 1/225 & & 1/25 & 0 & -1/5 & 1/5 & 0 & -1/25 \\ & 0 & & & & 0 & & 0 & & & & & 0 \\ 22/45 & & -14/9 & 10/9 & & -2/45 & & -1/5 & & 1 & -1 & & 1/5 \\ -38/45 & & 22/9 & -14/9 & & -2/45 & + \alpha & 1/5 & & -1 & 1 & & -1/5 \\ 4/5 & & & & & 1/5 & & 0 & & & & & 0 \\ -74/225 & 4/5 & -38/45 & 22/45 & 0 & -26/225 & & -1/25 & 0 & 1/5 & -1/5 & 0 & 1/25 \end{array}$$

donne, pour les coefficients  $a_i$ , au facteur  $\frac{1}{225}$  près :

$$\begin{array}{cccccccccccc} -26 & 45 & -10 & -10 & 0 & 1 & & 9 & 0 & -45 & 45 & 0 & -9 \\ & 0 & & & & 0 & & 0 & & & & & 0 \\ 110 & -350 & 250 & & -10 & & -45 & 225 & -225 & & & & 45 \\ -190 & 550 & -350 & & -10 & + \alpha & 45 & -225 & 225 & & & & -45 \\ 180 & & & & 45 & & 0 & & & & & & 0 \\ -74 & 180 & -190 & 110 & 0 & -26 & & -9 & 0 & 45 & -45 & 0 & 9 \end{array}$$

soit ( $\alpha$  étant noté  $a$ ) :

$$\begin{array}{cccccccccccc} -26+9a & 45 & -10-45a & -10+45a & 0 & 1-9a & & a6 & a7 & a8 & a9 & a10 & a11 \\ & 0 & & & & 0 & & a5 & & & & & a10 \\ 110-45a & & -350+225a & 250-225a & -10+45a & & a4 & a13 & a14 & & & & a9 \\ -190+45a & & 550-225a & -350+225a & -10-45a & & a3 & a12 & a13 & & & & a8 \\ 180 & [11] & & & 45 & & a2 & & & & & & a7 \\ -74-9a & 180 & -190+45a & 110-45a & 0 & -26+9a & & a1 & a2 & a3 & a4 & a5 & a6 \end{array}$$

Diagramme des  $a_i$  (ici pour l'indice 11)

et, pour les  $b_i$ , on effectue le calcul

-7/75	0	1/3	-4/15	0	2/75							
0					0							
2/3		-2	4/3		0							
												+ beta du meme
-16/15		8/3	-4/3		-4/15							
3/5		[21]			2/5							
-8/75	0	0	4/15	0	-4/25							

avec  $\beta = \frac{4}{3}$ , ce qui donne, au facteur  $\frac{1}{75}$  près :

-3	0	5	0	0	-2		b16	b15	b14	b13	b12	b11
0					0		b17					b10
30	-50	0			20		b18		b24	b23		b9
-60	100	0			-40		b19		b21	b22		b8
45	[21]				30		b20		[21]			b7
-12	0	20	0	0	-8		b1	b2	b3	b4	b5	b6

Diagramme des bi (ici pour l'indice 21)

À partir de ces valeurs des coefficients de répartition, on peut trouver les fonctions de formes en fonction du paramètre  $\alpha$  puis, en observant, par exemple, la première, définir un choix particulier du paramètre pour simplifier l'expression du résultat.

## 7.2 Les fonctions de formes à partir de l'espace trouvé via Taylor

On pose alors

$$q_i = q_i^c + \sum_k \omega_k^i q_k^c,$$

et on regarde l'expression des 24 fonctions.

**La première fonction,  $q_1$  alias  $q_{00}$ .** Des diagrammes ci-dessus, on tire successivement (on ne note pas l'indice  $i$  dans le coefficient  $\omega$ ) :

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= -\frac{74}{225} - \frac{9}{225}\alpha, & \omega_{21} &= -\frac{12}{75}, & \omega_{31} &= -\frac{8}{75}, & \omega_{41} &= -\frac{26}{225} + \frac{9}{225}\alpha \\ & & \omega_{42} &= -\frac{3}{75}, & \omega_{43} &= -\frac{2}{75} \\ \omega_{44} &= \frac{1}{225} - \frac{9}{225}\alpha, & \omega_{34} &= -\frac{2}{75}, & \omega_{24} &= -\frac{3}{75}, & \omega_{14} &= -\frac{26}{225} + \frac{9}{225}\alpha \\ & & \omega_{13} &= -\frac{8}{75}, & \omega_{12} &= -\frac{12}{75}. \end{aligned}$$

La solution (Maple) est la suivante :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{1728}(v-1)(u-1) \\ &(-1728 + 18000u + 18000v - 63000u^2 - 75000uv + 67500\alpha uv - 63000v^2 \\ &+ 90000u^3 + 307500u^2v - 416250\alpha u^2v + 307500uv^2 - 416250\alpha uv^2 + 90000v^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -45000u^4 - 562500u^3v + 843750\alpha u^3v - 1741250u^2v^2 + 2566875\alpha u^2v^2 - 562500uv^3 + 843750\alpha uv^3 - 45000v^4 \\
& + 375000u^4v - 562500\alpha u^4v - 3468750u^3v^2 - 5203125\alpha u^3v^2 + 3468750u^2v^3 - 5203125\alpha u^2v^3 + 375000uv^4 - 562500\alpha uv^4 \\
& - 2312500u^4v^2 + 3468750\alpha u^4v^2 - 7031250u^3v^3 + 10546875\alpha u^3v^3 - 2312500u^2v^4 + 3468750\alpha u^2v^4 \\
& + 4687500u^4v^3 - 7031250\alpha u^4v^3 + 4687500u^3v^4 - 7031250\alpha u^3v^4 \\
& - 3125000u^4v^4 + 4687500\alpha u^4v^4).
\end{aligned}$$

Il semble judicieux de choisir la solution la plus simple possible en prenant un  $\alpha$  particulier. Les termes en  $u^4v^4$ , soit

$$-3125000u^4v^4 + 4687500\alpha u^4v^4$$

s'annule pour  $\alpha = \frac{2}{3}$  et le miracle s'accomplit.

**En fixant le paramètre à la valeur  $\frac{2}{3}$ .** Le résultat est étonnamment simplifié, on trouve en effet :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{72}(v-1)(u-1)(72-750u-750v+2625u^2+1250uv+2625v^2 \\
& -3750u^3-1250u^2v-1250uv^2-3750v^3+1875u^4+1250u^2v^2+1875v^4).
\end{aligned}$$

Nous retenons donc ce choix,  $\alpha = \frac{2}{3}$ , dans ce qui suit et, auparavant, nous mettons à jour les coefficients, soit :

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= -\frac{16}{45}, & \omega_{21} &= -\frac{12}{75}, & \omega_{31} &= -\frac{8}{75}, & \omega_{41} &= -\frac{4}{45} \\
& & \omega_{42} &= -\frac{3}{75}, & \omega_{43} &= -\frac{2}{75} \\
\omega_{44} &= -\frac{1}{45}, & \omega_{34} &= -\frac{2}{75}, & \omega_{24} &= -\frac{3}{75}, & \omega_{14} &= -\frac{4}{45} \\
& & \omega_{13} &= -\frac{8}{75}, & \omega_{12} &= -\frac{12}{75}.
\end{aligned}$$

**La cinquième fonction,  $q_5$  alias  $q_{10}$ .** Les coefficients ne dépendent pas du paramètre et sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= \frac{36}{45}, & \omega_{21} &= 0, & \omega_{31} &= 0, & \omega_{41} &= 0 \\
& & \omega_{42} &= 0, & \omega_{43} &= 0 \\
\omega_{44} &= 0, & \omega_{34} &= 0, & \omega_{24} &= 0, & \omega_{14} &= \frac{9}{45} \\
& & \omega_{13} &= \frac{30}{75}, & \omega_{12} &= \frac{45}{75},
\end{aligned}$$

soit, plus simplement, pour les seuls coefficients non nuls :

$$\omega_{11} = \frac{4}{5}, \quad \omega_{12} = \frac{3}{5}, \quad \omega_{13} = \frac{2}{5}, \quad \omega_{14} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{ca donne } \frac{25}{24}u(2-5u)(3-5u)(4-5u)(1-u)(1-v).$$

**La sixième fonction,  $q_6$  alias  $q_{20}$ .** Les coefficients, pour la valeur du paramètre, sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= -\frac{32}{45}, & \omega_{21} &= \frac{20}{75}, & \omega_{31} &= 0, & \omega_{41} &= \frac{16}{45} \\
& & \omega_{42} &= \frac{30}{75}, & \omega_{43} &= \frac{20}{75} \\
\omega_{44} &= \frac{4}{45}, & \omega_{34} &= 0, & \omega_{24} &= \frac{5}{75}, & \omega_{14} &= -\frac{8}{45} \\
& & \omega_{13} &= -\frac{40}{75}, & \omega_{12} &= -\frac{60}{75}.
\end{aligned}$$

et la solution est :

$$\frac{25}{36}u(5u-3)(u-1)(v-1)(12-75u+25v+75u^2-25v^2).$$

La 17<sup>ieme</sup> fonction,  $q_{17}$  alias  $q_{22}$ . Les coefficients, pour la valeur du paramètre, sont les suivants :

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= \frac{16}{9}, & \omega_{21} &= \frac{100}{75}, & \omega_{31} &= 0, & \omega_{41} &= -\frac{8}{9} \\ \omega_{42} &= -\frac{50}{75}, & \omega_{43} &= 0 \\ \omega_{44} &= \frac{4}{9}, & \omega_{34} &= 0, & \omega_{24} &= -\frac{50}{75}, & \omega_{14} &= -\frac{8}{9} \\ \omega_{13} &= 0, & \omega_{12} &= \frac{100}{75}. \end{aligned}$$

et la solution est :

$$\frac{625}{36}uv(5v-3)(v-1)(5u-3)(u-1).$$

Afin de rechercher les monômes de l'espace, nous dressons les tableaux de l'ensemble des contributions.

**Tableau des contributions pour les fonctions type.**

	$q_{00}(u, v)$	$q_{10}(u, v)$	$q_{20}(u, v)$	$q_{22}(u, v)$
$\omega_{11}$	-16/45	4/5	-32/45	16/9
$\omega_{21}$	-12/75	0	20/75	100/75
$\omega_{31}$	-8/75	0	0	0
$\omega_{41}$	-4/45	0	16/45	-8/9
$\omega_{42}$	-3/75	0	30/75	-50/75
$\omega_{43}$	-2/75	0	20/75	0
$\omega_{44}$	-1/45	0	4/45	4/9
$\omega_{34}$	-2/75	0	0	0
$\omega_{24}$	-3/75	0	5/75	-50/75
$\omega_{14}$	-4/45	1/5	-8/45	-8/9
$\omega_{13}$	-8/75	2/5	-40/75	0
$\omega_{12}$	-12/75	3/5	-60/75	100/75

Coefficients pour les fonctions de forme type du quadrilatère de degré 5 à 24 nœuds

**Tableau des contributions pour les fonctions coin.** On peut alors exprimer les coefficients des fonctions coin par rapport aux coefficients de la première,  $q_{00}(u, v)$ .

$q_{00}(u, v)$	$q_{50}(u, v)$	$q_{55}(u, v)$	$q_{05}(u, v)$
$\omega_{11}$	$\omega_{41}$	$\omega_{44}$	$\omega_{14}$
$\omega_{21}$	$\omega_{31}$	$\omega_{34}$	$\omega_{24}$
$\omega_{31}$	$\omega_{21}$	$\omega_{24}$	$\omega_{34}$
$\omega_{41}$	$\omega_{11}$	$\omega_{14}$	$\omega_{44}$
$\omega_{42}$	$\omega_{12}$	$\omega_{13}$	$\omega_{43}$
$\omega_{43}$	$\omega_{13}$	$\omega_{12}$	$\omega_{42}$
$\omega_{44}$	$\omega_{14}$	$\omega_{11}$	$\omega_{41}$
$\omega_{34}$	$\omega_{24}$	$\omega_{21}$	$\omega_{31}$
$\omega_{24}$	$\omega_{34}$	$\omega_{31}$	$\omega_{21}$
$\omega_{14}$	$\omega_{44}$	$\omega_{41}$	$\omega_{11}$
$\omega_{13}$	$\omega_{43}$	$\omega_{42}$	$\omega_{12}$
$\omega_{12}$	$\omega_{42}$	$\omega_{43}$	$\omega_{13}$

Coefficients pour les fonctions de forme coin du quadrilatère de degré 5 à 24 nœuds

**Tableau des contributions pour les fonctions adjacentes à un coin .** On peut facilement exprimer les coefficients des fonctions analogues à  $q_{10}$  par rapport aux coefficients de cette fonction  $q_{10}$ .

	$q_{10}(u, v)$	$q_{40}(u, v)$	$q_{15}(u, v)$	$q_{45}(u, v)$	$q_{01}(u, v)$	$q_{51}(u, v)$	$q_{04}(u, v)$	$q_{54}(u, v)$
$\omega_{11}$	4/5	0	1/5	0	4/5	1/5	0	0
$\omega_{21}$	0	0	0	0	3/5	2/5	0	0
$\omega_{31}$	0	0	0	0	2/5	3/5	0	0
$\omega_{41}$	0	4/5	0	1/5	1/5	4/5	0	0
$\omega_{42}$	0	3/5	0	2/5	0	0	0	0
$\omega_{43}$	0	2/5	0	3/5	0	0	0	0
$\omega_{44}$	0	1/5	0	4/5	0	0	1/5	4/5
$\omega_{34}$	0	0	0	0	0	0	2/5	3/5
$\omega_{24}$	0	0	0	0	0	0	3/5	2/5
$\omega_{14}$	1/5	0	4/5	0	0	0	4/5	1/5
$\omega_{13}$	2/5	0	3/5	0	0	0	0	0
$\omega_{12}$	3/5	0	2/5	0	0	0	0	0

Coefficients pour les fonctions de forme adjacentes à un coin du quadrilatère de degré 5

**Tableau des contributions pour les fonctions centrales des arêtes.** On peut facilement exprimer les coefficients des fonctions analogues à  $q_{20}$  par rapport aux coefficients de cette fonction  $q_{20}$ .

$q_{20}(u, v)$	$q_{30}(u, v)$	$q_{25}(u, v)$	$q_{35}(u, v)$	$q_{02}(u, v)$	$q_{03}(u, v)$	$q_{52}(u, v)$	$q_{53}(u, v)$
$\omega_{11}$	$\omega_{41}$	$\omega_{14}$	$\omega_{44}$	$\omega_{11}$	$\omega_{14}$	$\omega_{41}$	$\omega_{44}$
$\omega_{21}$	$\omega_{31}$	$\omega_{24}$	$\omega_{34}$	$\omega_{12}$	$\omega_{13}$	$\omega_{42}$	$\omega_{43}$
$\omega_{31}$	$\omega_{21}$	$\omega_{34}$	$\omega_{24}$	$\omega_{13}$	$\omega_{12}$	$\omega_{43}$	$\omega_{42}$
$\omega_{41}$	$\omega_{11}$	$\omega_{44}$	$\omega_{14}$	$\omega_{14}$	$\omega_{11}$	$\omega_{44}$	$\omega_{41}$
$\omega_{42}$	$\omega_{12}$	$\omega_{43}$	$\omega_{13}$	$\omega_{24}$	$\omega_{21}$	$\omega_{34}$	$\omega_{31}$
$\omega_{43}$	$\omega_{13}$	$\omega_{42}$	$\omega_{12}$	$\omega_{34}$	$\omega_{31}$	$\omega_{24}$	$\omega_{21}$
$\omega_{44}$	$\omega_{14}$	$\omega_{41}$	$\omega_{11}$	$\omega_{44}$	$\omega_{41}$	$\omega_{14}$	$\omega_{11}$
$\omega_{34}$	$\omega_{24}$	$\omega_{31}$	$\omega_{21}$	$\omega_{43}$	$\omega_{42}$	$\omega_{13}$	$\omega_{12}$
$\omega_{24}$	$\omega_{34}$	$\omega_{21}$	$\omega_{31}$	$\omega_{42}$	$\omega_{43}$	$\omega_{12}$	$\omega_{13}$
$\omega_{14}$	$\omega_{44}$	$\omega_{11}$	$\omega_{41}$	$\omega_{41}$	$\omega_{44}$	$\omega_{11}$	$\omega_{14}$
$\omega_{13}$	$\omega_{43}$	$\omega_{12}$	$\omega_{42}$	$\omega_{31}$	$\omega_{34}$	$\omega_{21}$	$\omega_{24}$
$\omega_{12}$	$\omega_{42}$	$\omega_{13}$	$\omega_{43}$	$\omega_{21}$	$\omega_{24}$	$\omega_{31}$	$\omega_{34}$

Coefficients pour les fonctions de forme centrales des arêtes du quadrilatère de degré 5

**Tableau des contributions pour les fonctions centrales.** On peut facilement exprimer les coefficients des fonctions analogues à  $q_{22}$  par rapport aux coefficients de cette fonction.

$q_{22}(u, v)$	$q_{32}(u, v)$	$q_{23}(u, v)$	$q_{33}(u, v)$
$\omega_{11}$	$\omega_{41}$	$\omega_{14}$	$\omega_{44}$
$\omega_{21}$	$\omega_{31}$	$\omega_{24}$	$\omega_{34}$
$\omega_{31}$	$\omega_{21}$	$\omega_{34}$	$\omega_{24}$
$\omega_{41}$	$\omega_{11}$	$\omega_{44}$	$\omega_{14}$
$\omega_{42}$	$\omega_{12}$	$\omega_{43}$	$\omega_{13}$
$\omega_{43}$	$\omega_{13}$	$\omega_{42}$	$\omega_{12}$
$\omega_{44}$	$\omega_{14}$	$\omega_{41}$	$\omega_{11}$
$\omega_{34}$	$\omega_{24}$	$\omega_{31}$	$\omega_{21}$
$\omega_{24}$	$\omega_{34}$	$\omega_{21}$	$\omega_{31}$
$\omega_{14}$	$\omega_{44}$	$\omega_{11}$	$\omega_{41}$
$\omega_{13}$	$\omega_{43}$	$\omega_{12}$	$\omega_{42}$
$\omega_{12}$	$\omega_{42}$	$\omega_{13}$	$\omega_{43}$

Coefficients pour les fonctions de forme centrales du quadrilatère de degré 5 à 24 nœuds

**Expression explicite des fonctions type** On part de la Relation (9) qui donne l'expression des fonctions de forme complètes et de la forme choisie des fonctions réduites pour expliciter ces dernières. Pour le choix fixé ci-dessus pour le paramètre, les quatre fonctions type sont les suivantes :

1	$q_{00}(u, v) = \frac{1}{72}(v-1)(u-1)$ $(72 - 750u - 750v + 2625u^2 + 1250uv + 2625v^2$ $- 3750u^3 - 1250u^2v - 1250uv^2 - 3750v^3 + 1875u^4 + 1250u^2v^2 + 1875v^4)$
2	$q_{10}(u, v) = \frac{25}{24}u(2-5u)(3-5u)(4-5u)(1-u)(1-v)$
3	$q_{20}(u, v) = \frac{25}{36}u(5u-3)(u-1)(v-1)(12-75u+25v+75u^2-25v^2)$
21	$q_{22}(u, v) = \frac{625}{36}uv(5v-3)(v-1)(5u-3)(u-1)$

Fonctions de forme type du quadrilatère de degré 5 à 24 nœuds

À partir de ces quatre fonctions type, on peut retrouver toutes les autres, par exemple :

$$q_{30}(u, v) = q_{20}(1-u, v),$$

$$q_{01}(u, v) = q_{10}(v, u),$$

$$q_{51}(u, v) = q_{01}(1-u, v),$$

$$q_{15}(u, v) = q_{10}(u, 1-v),$$

etc. À titre de vérification, nous avons calculé explicitement certaines fonctions pour s'assurer des symétries, nous avons également vu que  $\sum_{ij} q_{ij}(u, v) = 1$ .

**Remarque 4.** L'autre choix pour les nœuds "centraux" (en position 11, 41, 44, 04) permet la construction d'un autre élément de degré 5 mais nous préférons celui-la pour lequel les nœuds "centraux" sont au plus près du barycentre.

### 7.3 Recherche de monômes dans l'espace des fonctions de forme

On a

$$q_i(u, v) = q_i^c(u, v) + \sum_k \omega_k^i q_k^c(u, v),$$

avec les coefficients  $\omega_k^i$  trouvés ci-dessus.

**Recherche du monôme  $u$ .** Il s'agit ici d'une simple vérification. On cherche les coefficients  $\lambda_i$  tels que  $u = \sum_i \lambda_i q_i^c(u, v)$ , par instanciations, on va obtenir ces  $\lambda$  (dont on sait l'existence puisque l'on considère les fonctions complètes).

Par le couple  $(0, 0)$ , on obtient  $\lambda_{00} = 0$  et de même  $\lambda_{0j} = 0$  pour  $j = 0, 5$ .

Par le couple  $(\frac{1}{5}, 0)$ , on obtient  $\lambda_{10} = \frac{1}{5}$  et de même  $\lambda_{1j} = \frac{1}{5}$  pour  $j = 0, 5$ ,

Par le couple  $(\frac{2}{5}, 0)$ , on obtient  $\lambda_{20} = \frac{2}{5}$  et de même  $\lambda_{2j} = \frac{2}{5}$  pour  $j = 0, 5$ ,

Par le couple  $(\frac{3}{5}, 0)$ , on obtient  $\lambda_{30} = \frac{3}{5}$  et de même  $\lambda_{3j} = \frac{3}{5}$  pour  $j = 0, 5$ ,

Par le couple  $(\frac{4}{5}, 0)$ , on obtient  $\lambda_{40} = \frac{4}{5}$  et de même  $\lambda_{4j} = \frac{4}{5}$  pour  $j = 0, 5$ ,

Par le couple  $(1, 0)$ , on obtient  $\lambda_{50} = 1$  et de même  $\lambda_{5j} = 1$  pour  $j = 0, 5$ .

Ainsi, tous les  $\lambda$  sont connus et on a :

$$u = \frac{1}{5} \sum_{j=0}^5 q_{1j}^c(u, v) + \frac{2}{5} \sum_{j=0}^5 q_{2j}^c(u, v) + \frac{3}{5} \sum_{j=0}^5 q_{3j}^c(u, v) + \frac{4}{5} \sum_{j=0}^5 q_{4j}^c(u, v) + \sum_{j=0}^5 q_{5j}^c(u, v).$$



On écrit la relation :

$$q_i(u, v) = q_i^c(u, v) + \sum_k \omega_k^i q_k^c(u, v),$$

pour les indices "bord" mais en sens inverse :

$$q_i^c(u, v) = q_i(u, v) - \sum_k \omega_k^i q_k^c(u, v),$$

et on remplace dans  $u = \sum_i \lambda_i q_i^c(u, v)$ , il vient :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i \left\{ q_i(u, v) - \sum_{k \in \text{centre}} \omega_k^i q_k^c(u, v) \right\} + \sum_{i \in \text{centre}} \lambda_i q_i^c(u, v) \\ &= \sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i q_i(u, v) - \sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i \sum_{k \in \text{centre}} \omega_k^i q_k^c(u, v) + \sum_{i \in \text{centre}} \lambda_i q_i^c(u, v) \\ &= \sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i q_i(u, v) - \sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i \sum_{k \in \text{centre}} \omega_k^i q_k^c(u, v) + \sum_{k \in \text{centre}} \lambda_k q_k^c(u, v) \\ &= \sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i q_i(u, v) + \sum_{k \in \text{centre}} \left\{ \lambda_k - \sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i \omega_k^i \right\} q_k^c(u, v). \end{aligned}$$

On note :

$$\text{coef}_k = \lambda_k - \sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i \omega_k^i.$$

Il y a deux façons de vérifier le résultat. On doit avoir  $\text{coef}_k = 0$  et par suite, soit on calcule explicitement cette valeur, soit on s'assure (via **Maple**) simplement que  $\sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i q_i(u, v) = u$ . On calcule ici explicitement la valeur de  $\text{coef}_k$ , soit :

$$\begin{aligned} \text{coef}_k &= \lambda_k - \lambda_{00}\omega^{00} - \lambda_{10}\omega^{10} - \lambda_{20}\omega^{20} - \lambda_{30}\omega^{30} - \lambda_{40}\omega^{40} - \lambda_{50}\omega^{50} \\ &\quad - \lambda_{05}\omega^{05} - \lambda_{15}\omega^{15} - \lambda_{25}\omega^{25} - \lambda_{35}\omega^{35} - \lambda_{45}\omega^{45} - \lambda_{55}\omega^{55} \\ &\quad - \lambda_{01}\omega^{01} - \lambda_{02}\omega^{02} - \lambda_{03}\omega^{03} - \lambda_{04}\omega^{04} \\ &\quad - \lambda_{51}\omega^{51} - \lambda_{52}\omega^{52} - \lambda_{53}\omega^{53} - \lambda_{54}\omega^{54} \\ &\quad - \lambda_{22}\omega^{22} - \lambda_{32}\omega^{32} - \lambda_{23}\omega^{23} - \lambda_{33}\omega^{33}, \end{aligned}$$

soit, encore :

$$\begin{aligned} 5 \text{coef}_k &= 5\lambda_k - \omega^{10} - 2\omega^{20} - 3\omega^{30} - 4\omega^{40} - 5\omega^{50} \\ &\quad - \omega^{15} - 2\omega^{25} - 3\omega^{35} - 4\omega^{45} - 5\omega^{55} \\ &\quad - 5\omega^{51} - 5\omega^{52} - 5\omega^{53} - 5\omega^{54} \\ &\quad - 2\omega^{22} - 3\omega^{32} - 2\omega^{23} - 3\omega^{33}, \end{aligned}$$

on fixe l'indice  $k$  et on reporte les valeurs des  $\omega^6$ . Nous avons calculés explicitement quelques uns de ces coefficients, ainsi  $\text{coef}_{11} = \text{coef}_{21} = 0$ , etc. Les autres coefficients  $\text{coef}_k$  sont également nuls et ainsi  $u$  est dans l'espace polynomial des fonctions réduites, on a donc :

$$u = \sum_{i=1,36} \lambda_i q_i^c(u, v) = \sum_{i=1,24} \lambda_i q_i(u, v).$$

<sup>6</sup>On cherche dans la colonne de la fonction considérée l'indice examiné et on prend la valeur correspondante dans la première colonne, par exemple, pour  $q_{52}(u, v)$  et la contribution de 21, on prend la contribution de la fonction type, ici  $q_{20}(u, v)$ , à l'indice 13.

**Recherche du monôme  $u^5v$ .** On cherche donc les coefficients  $\lambda_i$  tels que  $u^5v = \sum_i \lambda_i q_i^c(u, v)$ , par instanciations, on va obtenir ces  $\lambda$  (dont on sait l'existence puisque l'on considère les fonctions complètes).

On a immédiatement :

$$\lambda_{0j} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{i0} = 0,$$

il reste à déterminer les  $\lambda_{ij}$  pour  $i = 1, 5$  et  $j = 1, 5$ . Il est facile de voir que :

$$\lambda_{ij} = \frac{i^5 j}{5^6} = \frac{i^5 j}{125 \times 125}.$$

On écrit alors :

$$u^5v = \sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i q_i(u, v) + \sum_{k \in \text{centre}} \left\{ \lambda_k - \sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i \omega_k^i \right\} q_k^c(u, v).$$

On note, comme ci-dessus :

$$\text{coef}_k = \lambda_k - \sum_{i \in \text{bord}} \lambda_i \omega_k^i,$$

soit :

$$\begin{aligned} \text{coef}_k = & \lambda_k - \lambda_{00}\omega^{00} - \lambda_{10}\omega^{10} - \lambda_{20}\omega^{20} - \lambda_{30}\omega^{30} - \lambda_{40}\omega^{40} - \lambda_{50}\omega^{50} \\ & - \lambda_{05}\omega^{05} - \lambda_{15}\omega^{15} - \lambda_{25}\omega^{25} - \lambda_{35}\omega^{35} - \lambda_{45}\omega^{45} - \lambda_{55}\omega^{55} \\ & - \lambda_{01}\omega^{01} - \lambda_{02}\omega^{02} - \lambda_{03}\omega^{03} - \lambda_{04}\omega^{04} \\ & - \lambda_{51}\omega^{51} - \lambda_{52}\omega^{52} - \lambda_{53}\omega^{53} - \lambda_{54}\omega^{54} \\ & - \lambda_{22}\omega^{22} - \lambda_{32}\omega^{32} - \lambda_{23}\omega^{23} - \lambda_{33}\omega^{33}, \end{aligned}$$

soit, encore :

$$\begin{aligned} \text{coef}_k = & \lambda_k - \lambda_{15}\omega^{15} - \lambda_{25}\omega^{25} - \lambda_{35}\omega^{35} - \lambda_{45}\omega^{45} - \lambda_{55}\omega^{55} \\ & - \lambda_{51}\omega^{51} - \lambda_{52}\omega^{52} - \lambda_{53}\omega^{53} - \lambda_{54}\omega^{54} - \lambda_{22}\omega^{22} - \lambda_{32}\omega^{32} - \lambda_{23}\omega^{23} - \lambda_{33}\omega^{33}, \end{aligned}$$

qui donne (au facteur  $125 \times 125$  près) :

$$\begin{aligned} \text{coef}_k = & 125 \times 125 \times \lambda_k - \lambda_{15}\omega^{15} - \lambda_{25}\omega^{25} - \lambda_{35}\omega^{35} - \lambda_{45}\omega^{45} - \lambda_{55}\omega^{55} \\ & - \lambda_{51}\omega^{51} - \lambda_{52}\omega^{52} - \lambda_{53}\omega^{53} - \lambda_{54}\omega^{54} - \lambda_{22}\omega^{22} - \lambda_{32}\omega^{32} - \lambda_{23}\omega^{23} - \lambda_{33}\omega^{33}, \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$\begin{aligned} \text{coef}_k = & 125 \times 125 \times \lambda_k - 5\omega^{15} - 5 \times 2^5\omega^{25} - 5 \times 3^5\omega^{35} - 5 \times 4^5\omega^{45} - 5 \times 5^5\omega^{55} \\ & - 5^5\omega^{51} - 2 \times 5^5\omega^{52} - 3 \times 5^5\omega^{53} - 4 \times 5^5\omega^{54} - 2 \times 2^5\omega^{22} - 2 \times 3^5\omega^{32} - 3 \times 2^5\omega^{23} - 3 \times 3^5\omega^{33}, \end{aligned}$$

on fixe  $k = 11$  et on remplace, il vient  $\text{coef}_{11} = 0$ , nous avons également calculé explicitement les coefficients pour  $k = 14$ ,  $k = 42$  et  $k = 34$ , ces valeurs sont nulles comme espéré et, ainsi, ce monôme est dans l'espace comme attendu, par symétrie  $uv^5$  a la même propriété. À titre de vérification ultime nous avons utilisé **Maple** pour tous les monômes de l'espace.

Dans la mesure où on a ajouté un nœud, on peut se demander si l'espace des polynômes n'est pas enrichi par d'autres monômes ou combinaisons linéaires de monômes. Pour ce faire, on regarde  $u^3v^3$ ,  $u^4v^2$  et  $u^2v^4$ .

**Recherche du monôme  $u^3v^3$ .** On cherche donc les coefficients  $\lambda_i$  tels que  $x^3y^3 = u^3v^3 = \sum_i \lambda_i q_i^e(u, v)$ , par instanciations, on va obtenir ces  $\lambda$  (dont on sait l'existence puisque l'on considère les fonctions complètes).

Comme ci-dessus on a :

$$\lambda_{0j} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{i0} = 0,$$

tandis que

$$\lambda_{ij} = \frac{i^3 j^3}{5^6} = \frac{i^3 j^3}{125 \times 125},$$

et l'expression du coefficient est identique, soit (au facteur près) :

$$\begin{aligned} \text{coef}_k &= 125 \times 125 \times \lambda_k - \lambda_{15}\omega^{15} - \lambda_{25}\omega^{25} - \lambda_{35}\omega^{35} - \lambda_{45}\omega^{45} - \lambda_{55}\omega^{55} \\ &- \lambda_{51}\omega^{51} - \lambda_{52}\omega^{52} - \lambda_{53}\omega^{53} - \lambda_{54}\omega^{54} - \lambda_{22}\omega^{22} - \lambda_{32}\omega^{32} - \lambda_{23}\omega^{23} - \lambda_{33}\omega^{33}, \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$\begin{aligned} \text{coef}_k &= 125 \times 125 \times \lambda_k - 5^3\omega^{15} - 5^3 \times 2^3\omega^{25} - 5^3 \times 3^3\omega^{35} - 5^3 \times 4^3\omega^{45} - 5^3 \times 5^3\omega^{55} \\ &- 5^3\omega^{51} - 2^3 \times 5^3\omega^{52} - 3^3 \times 5^3\omega^{53} - 4^3 \times 5^3\omega^{54} - 2^3 \times 2^3\omega^{22} - 2^3 \times 3^3\omega^{32} - 3^3 \times 2^3\omega^{23} - 3^3 \times 3^3\omega^{33}, \end{aligned}$$

on fixe  $k$  à différentes valeurs et on trouve, au facteur  $5^6$  près :

$$\text{coef}_{11} = 0, \text{coef}_{14} = 0, \text{coef}_{34} = 0, \dots,$$

et, ainsi, ce monôme n'est pas dans l'espace (ceci est confirmé directement en utilisant Maple).

**Recherche des monômes  $u^4v^2$  et  $u^2v^4$ .** Pour  $u^4v^2$ , heureusement, on ne trouve pas.

En conclusion, le nœud ajouté donne la symétrie et, cerise sur le gâteau, **enrichit** l'espace polynomial par le monôme  $u^3v^3$  et cet élément fini est (sans doute) original.

## 7.4 Construction de l'espace réduit directement dans les Bézier

Par symétrie, on garde les contributions aux indices 22, 32, 23 et 33 et on pose *a priori* :

$$B'_{ij}(u, v) = B_i^5(u)B_j^5(v) + \sum_{kl} \alpha_{ij}^{kl} B_k^5(u)B_l^5(v),$$

où  $B'_{ij}$  désigne une fonction réduite et les  $kl$  sont les indices des fonctions "centrales".

Par symétrie les coefficients de répartition, les  $\alpha_{ij}^{kl}$ , prennent leurs valeurs dans deux ensembles (indépendants) de 14 et de 24 paramètres qui correspondent aux schémas qui suivent (lire  $ai$  comme  $a_i$  et  $bi$  comme  $b_i$ ) :

a6	a7	a8	a9	a10	a11		b16	b15	b14	b13	b12	b11
a5					a10		b17					b10
a4		a13	a14		a9		b18		b23	b24		b9
a3		a12	a13		a8		b19		b21	b22		b8
a2	[11]				a7		b20		[21]			b7
a1	a2	a3	a4	a5	a6		b1	b2	b3	b4	b5	b6

Les  $a_i$  indiquent (avec les symétries voulues) la répartition pour les contributions en 11, 41, 14 et 44, les  $b_i$  donnent (idem) la répartition pour les contributions en 21, 31, 24, 34, 42, 43, 12 et 13.

**Détermination des coefficients  $a_i$ .** On impose  $u^5v$ . On a

$$\begin{aligned} u^5v &= u^5v(1-v+v)^4 = u^5 \{v(1-v)^4 + 4v^2(1-v)^3 + 6v^3(1-v)^2 + 4v^4(1-v) + v^5\} \\ &= B_5^5(u) \left\{ \frac{1}{5}B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\}, \\ &= \frac{1}{5}B_5^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v). \end{aligned}$$

Ceci donnent 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}a_7 + \frac{2}{5}a_8 + \frac{3}{5}a_9 + \frac{4}{5}a_{10} + a_{11} &= 0, \\ \frac{1}{5}a_2 + \frac{2}{5}a_3 + \frac{3}{5}a_4 + \frac{4}{5}a_5 + a_6 &= 0, \\ \frac{1}{5}a_{10} + \frac{2}{5}a_9 + \frac{3}{5}a_8 + \frac{4}{5}a_7 + a_6 &= 0, \\ \frac{1}{5}a_5 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{3}{5}a_3 + \frac{4}{5}a_2 + a_1 &= 0. \end{aligned}$$

Il en découle les 4 équations :

$$\begin{aligned} (E1) \quad a_7 + 2a_8 + 3a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} &= 0, \\ (E2) \quad a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 5a_6 &= 0, \\ (E3) \quad a_{10} + 2a_9 + 3a_8 + 4a_7 + 5a_6 &= 0, \\ (E4) \quad a_5 + 2a_4 + 3a_3 + 4a_2 + 5a_1 &= 0. \end{aligned}$$

On impose  $u^4v$ . On a :

$$\begin{aligned} u^4v &= u^4(1-u+u) \{v(1-v)^4 + 4v^2(1-v)^3 + 6v^3(1-v)^2 + 4v^4(1-v) + v^5\} \\ &= \left\{ \frac{1}{5}B_4^5(u) + B_5^5(u) \right\} \left\{ \frac{1}{5}B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\}, \\ &= \frac{1}{25}B_4^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{25}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{25}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ &\quad + \frac{1}{5}B_5^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v). \end{aligned}$$

Ceci donne 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}a_{10} + \frac{1}{5}a_7 + \frac{2}{5}a_8 + \frac{3}{5}a_9 + \frac{4}{5}a_{10} + a_{11} &= 0, \\ \frac{1}{5}a_7 + \frac{1}{5}a_2 + \frac{2}{5}a_3 + \frac{3}{5}a_4 + \frac{4}{5}a_5 + a_6 &= \frac{1}{25}, \\ \frac{1}{5}a_5 + \frac{1}{5}a_{10} + \frac{2}{5}a_9 + \frac{3}{5}a_8 + \frac{4}{5}a_7 + a_6 &= \frac{4}{25}, \\ \frac{1}{5}a_2 + \frac{1}{5}a_5 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{3}{5}a_3 + \frac{4}{5}a_2 + a_1 &= 4. \end{aligned}$$

Il en découle les 4 équations :

$$\begin{aligned} (E5) \quad a_{10} + a_7 + 2a_8 + 3a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} &= 0, \\ (E6) \quad 5a_7 + 5a_2 + 10a_3 + 15a_4 + 20a_5 + 25a_6 &= 1, \\ (E7) \quad a_5 + a_{10} + 2a_9 + 3a_8 + 4a_7 + 5a_6 &= 0, \\ (E8) \quad 5a_2 + 5a_5 + 10a_4 + 15a_3 + 20a_2 + 25a_1 &= 4. \end{aligned}$$

On impose  $u^3v^2$ . On a :

$$\begin{aligned}
u^3v^2 &= u^3(1-u+u)^2v^2(1-v+v)^3 \\
&= \{u^3(1-u)^2 + 2u^4(1-u) + u^5\} \{v^2(1-v)^3 + 3v^3(1-v)^2 + 3v^4(1-v) + v^5\} \\
&= \left\{ \frac{1}{10}B_3^5(u) + \frac{2}{5}B_4^5(u) + B_5^5(u) \right\} \left\{ \frac{1}{10}B_2^5(v) + \frac{3}{10}B_3^5(v) + \frac{3}{5}B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\}, \\
&= \frac{1}{100}B_3^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{100}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) \\
&\quad + \frac{2}{50}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{6}{50}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{6}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\
&\quad + \frac{1}{10}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{10}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v).
\end{aligned}$$

Ceci donne 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{100}a_{13} + \frac{3}{100}a_{14} + \frac{1}{10}a_9 + \frac{2}{5}a_{10} + \frac{1}{10}a_8 + \frac{3}{10}a_9 + \frac{3}{5}a_{10} + a_{11} &= 0, \\
\frac{1}{100}a_{12} + \frac{3}{100}a_{13} + \frac{1}{10}a_8 + \frac{2}{5}a_7 + \frac{1}{10}a_3 + \frac{3}{10}a_4 + \frac{3}{5}a_5 + a_6 &= 0, \\
\frac{1}{100}a_{14} + \frac{3}{100}a_{13} + \frac{1}{10}a_4 + \frac{2}{5}a_5 + \frac{1}{10}a_9 + \frac{3}{10}a_8 + \frac{3}{5}a_7 + a_6 &= 0, \\
\frac{1}{100}a_{13} + \frac{3}{100}a_{12} + \frac{1}{10}a_3 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{1}{10}a_4 + \frac{3}{10}a_3 + \frac{3}{5}a_2 + a_1 &= \frac{6}{25}.
\end{aligned}$$

Il en découle les 4 équations :

$$(E9) \quad a_{13} + 3a_{14} + 10a_9 + 40a_{10} + 10a_8 + 30a_9 + 60a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

$$(E10) \quad a_{12} + 3a_{13} + 10a_8 + 40a_7 + 10a_3 + 30a_4 + 60a_5 + 100a_6 = 0,$$

$$(E11) \quad a_{14} + 3a_{13} + 10a_4 + 40a_5 + 10a_9 + 30a_8 + 60a_7 + 100a_6 = 0,$$

$$(E12) \quad a_{13} + 3a_{12} + 10a_3 + 40a_2 + 10a_4 + 30a_3 + 60a_2 + 100a_1 = 24.$$

On impose  $u^3v$ . On a :

$$\begin{aligned}
u^3v &= u^3(1-u+u)^2v(1-v+v)^4 \\
&= \left\{ \frac{1}{10}B_3^5(u) + \frac{2}{5}B_4^5(u) + B_5^5(u) \right\} \left\{ \frac{1}{5}B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\} \\
&= \frac{1}{50}B_3^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{50}B_3^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{50}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) \\
&\quad + \frac{2}{25}B_4^5(u)B_1^5(v) + \frac{4}{25}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{6}{25}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{8}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\
&\quad + \frac{1}{5}B_5^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v).
\end{aligned}$$

Ceci donne 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\frac{2}{50}a_{13} + \frac{3}{50}a_{14} + \frac{1}{10}a_9 + \frac{2}{5}a_{10} + \frac{1}{5}a_7 + \frac{2}{5}a_8 + \frac{3}{5}a_9 + \frac{4}{5}a_{10} + a_{11} = 0.$$

$$\frac{2}{50}a_{12} + \frac{3}{50}a_{13} + \frac{1}{10}a_8 + \frac{2}{5}a_7 + \frac{1}{5}a_2 + \frac{2}{5}a_3 + \frac{3}{5}a_4 + \frac{4}{5}a_5 + a_6 = \frac{2}{25}.$$

$$\frac{2}{50}a_{14} + \frac{3}{50}a_{13} + \frac{1}{10}a_4 + \frac{2}{5}a_5 + \frac{1}{5}a_{10} + \frac{2}{5}a_9 + \frac{3}{5}a_8 + \frac{4}{5}a_7 + a_6 = 0.$$

$$\frac{2}{50}a_{13} + \frac{3}{50}a_{12} + \frac{1}{10}a_3 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{1}{5}a_5 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{3}{5}a_3 + \frac{4}{5}a_2 + a_1 = \frac{8}{25}.$$

Il en découle les 4 équations :

$$(E13) \quad 2a_{13} + 3a_{14} + 5a_9 + 20a_{10} + 10a_7 + 20a_8 + 30a_9 + 40a_{10} + 50a_{11} = 0.$$

$$(E14) \quad 2a_{12} + 3a_{13} + 5a_8 + 20a_7 + 10a_2 + 20a_3 + 30a_4 + 40a_5 + 50a_6 = 4,$$

$$(E15) \quad 2a_{14} + 3a_{13} + 5a_4 + 20a_5 + 10a_{10} + 20a_9 + 30a_8 + 40a_7 + 50a_6 = 0,$$

$$(E16) \quad 2a_{13} + 3a_{12} + 5a_3 + 20a_2 + 10a_5 + 20a_4 + 30a_3 + 40a_2 + 50a_1 = 16.$$

On impose  $u^2v^2$ . On a :

$$\begin{aligned} & u^2v^2 = u^2(1-u+u)^3v^2(1-v+v)^3 \\ & = \left\{ \frac{1}{10}B_2^5(u) + \frac{3}{10}B_3^5(u) + \frac{3}{5}B_4^5(u) + B_5^5(u) \right\} \left\{ \frac{1}{10}B_2^5(v) + \frac{3}{10}B_3^5(v) + \frac{3}{5}B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\} \\ & = \frac{1}{100}B_2^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{100}B_2^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{50}B_2^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_2^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{3}{100}B_3^5(u)B_2^5(v) + \frac{9}{100}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{9}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{3}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{3}{50}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{9}{50}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{9}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{3}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{1}{10}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{10}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v). \end{aligned}$$

Ceci donne 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\frac{1}{100}a_{12} + \frac{3}{100}a_{13} + \frac{3}{100}a_{13} + \frac{9}{100}a_{14} + \frac{1}{10}a_8 + \frac{3}{10}a_9 + \frac{3}{5}a_{10} + \frac{1}{10}a_8 + \frac{3}{10}a_9 + \frac{3}{5}a_{10} + a_{11} = 0,$$

$$\frac{1}{100}a_{13} + \frac{3}{100}a_{14} + \frac{3}{100}a_{12} + \frac{9}{100}a_{13} + \frac{1}{10}a_9 + \frac{3}{10}a_8 + \frac{3}{5}a_7 + \frac{1}{10}a_3 + \frac{3}{10}a_4 + \frac{3}{5}a_5 + a_6 = 0,$$

$$\frac{1}{100}a_{13} + \frac{3}{100}a_{12} + \frac{3}{100}a_{14} + \frac{9}{100}a_{13} + \frac{1}{10}a_3 + \frac{3}{10}a_4 + \frac{3}{5}a_5 + \frac{1}{10}a_9 + \frac{3}{10}a_8 + \frac{3}{5}a_7 + a_6 = 0,$$

$$\frac{1}{100}a_{14} + \frac{3}{100}a_{13} + \frac{3}{100}a_{13} + \frac{9}{100}a_{12} + \frac{1}{10}a_4 + \frac{3}{10}a_3 + \frac{3}{5}a_2 + \frac{1}{10}a_4 + \frac{3}{10}a_3 + \frac{3}{5}a_2 + a_1 = \frac{9}{25}.$$

Il en découle les 3 équations (deux lignes sont identiques) :

$$(E17) \quad a_{12} + 3a_{13} + 3a_{13} + 9a_{14} + 20a_8 + 60a_9 + 120a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

$$(E18) \quad a_{13} + 3a_{12} + 3a_{14} + 9a_{13} + 10a_3 + 30a_4 + 60a_5 + 10a_9 + 30a_8 + 60a_7 + 100a_6 = 0,$$

$$(E19) \quad a_{14} + 3a_{13} + 3a_{13} + 9a_{12} + 20a_4 + 60a_3 + 120a_2 + 100a_1 = 36.$$

On résoud alors le système obtenu, à savoir :

$$(E1) \quad a_7 + 2a_8 + 3a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} = 0,$$

$$(E2) \quad a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 5a_6 = 0,$$

$$(E3) \quad a_{10} + 2a_9 + 3a_8 + 4a_7 + 5a_6 = 0,$$

$$(E4) \quad a_5 + 2a_4 + 3a_3 + 4a_2 + 5a_1 = 0,$$

$$(E5) \quad a_{10} + a_7 + 2a_8 + 3a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} = 0,$$

$$(E6) \quad 5a_7 + 5a_2 + 10a_3 + 15a_4 + 20a_5 + 25a_6 = 1,$$

$$(E7) \quad a_5 + a_{10} + 2a_9 + 3a_8 + 4a_7 + 5a_6 = 0,$$

$$(E8) \quad 5a_2 + 5a_5 + 10a_4 + 15a_3 + 20a_2 + 25a_1 = 4.$$

$$(E9) \quad a_{13} + 3a_{14} + 10a_9 + 40a_{10} + 10a_8 + 30a_9 + 60a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

$$(E10) \quad a_{12} + 3a_{13} + 10a_8 + 40a_7 + 10a_3 + 30a_4 + 60a_5 + 100a_6 = 0,$$

$$(E11) \quad a_{14} + 3a_{13} + 10a_4 + 40a_5 + 10a_9 + 30a_8 + 60a_7 + 100a_6 = 0,$$

$$(E12) \quad a_{13} + 3a_{12} + 10a_3 + 40a_2 + 10a_4 + 30a_3 + 60a_2 + 100a_1 = 24,$$

$$(E13) \quad 2a_{13} + 3a_{14} + 5a_9 + 20a_{10} + 10a_7 + 20a_8 + 30a_9 + 40a_{10} + 50a_{11} = 0,$$

$$(E14) \quad 2a_{12} + 3a_{13} + 5a_8 + 20a_7 + 10a_2 + 20a_3 + 30a_4 + 40a_5 + 50a_6 = 4,$$

$$(E15) \quad 2a_{14} + 3a_{13} + 5a_4 + 20a_5 + 10a_{10} + 20a_9 + 30a_8 + 40a_7 + 50a_6 = 0,$$

$$(E16) \quad 2a_{13} + 3a_{12} + 5a_3 + 20a_2 + 10a_5 + 20a_4 + 30a_3 + 40a_2 + 50a_1 = 16,$$

$$(E17) \quad a_{12} + 6a_{13} + 9a_{14} + 20a_8 + 60a_9 + 120a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

$$(E18) \quad a_{13} + 3a_{12} + 3a_{14} + 9a_{13} + 10a_3 + 30a_4 + 60a_5 + 10a_9 + 30a_8 + 60a_7 + 100a_6 = 0,$$

$$(E19) \quad a_{14} + 3a_{13} + 3a_{13} + 9a_{12} + 20a_4 + 60a_3 + 120a_2 + 100a_1 = 36.$$

À ce stade, on a une solution avec un paramètre ( `Maple` donne la solution en exhibant  $a_6$  comme paramètre et nous notons ce paramètre  $\alpha$ ), cette solution est la suivante :

$$a_1 = -4/9 - \alpha, a_2 = 4/5, a_3 = -4/15 + 5 * \alpha, a_4 = -4/45 - 5 * \alpha, a_5 = 0, a_6 = \alpha, a_7 = 1/5,$$

$$a_8 = -28/45 - 5 * \alpha, a_9 = 8/15 + 5 * \alpha, a_{10} = 0, a_{11} = -1/9 - \alpha, a_{12} = -25 * \alpha - 4/9,$$

$$a_{13} = 25 * \alpha + 4/3, a_{14} = -25 * \alpha - 16/9$$

soit le diagramme suivant ( $\alpha$  est noté  $a$ ) :

a	9/45	-28/45-5a	24/45+5a	0	-5/45-a	6	7	8	9	10	11
0					0	5					10
-4/45-5a		60/45+25a	-80/45-25a		24/45+5a	4		13	14		9
-12/45+5a		-20/45-25a	60/45+25a		-28/45-5a	3		12	13		8
36/45 [11]					9/45	2					7
-20/45-a	36/45	-12/45+5a	-4/45-5a	0	a	1	2	3	4	5	6

Diagramme des  $a_i$

**Trouver une valeur intéressante pour le paramètre ?** Voir plus bas.

**Détermination des coefficients  $b_i$ .** On reprend les expressions obtenues pour établir les relations liant les  $b_i$ . Ainsi pour  $u^5v$ , on avait

$$(E1) \quad a_7 + 2a_8 + 3a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} = 0,$$

et 3 autres relations qui, par symétries, se déclinent ici, respectivement pour les indices 21, 24, 31, 34, 42, 43, 12 et 13 en :

$$(E1) \quad b_7 + 2b_8 + 3b_9 + 4b_{10} + 5b_{11} = 0,$$

$$(E2) \quad b_{10} + 2b_9 + 3b_8 + 4b_7 + 5b_6 = 0,$$

$$(E3) \quad b_{20} + 2b_{19} + 3b_{18} + 4b_{17} + 5b_{16} = 0,$$

$$(E4) \quad b_{17} + 2b_{18} + 3b_{19} + 4b_{20} + 5b_1 = 0,$$

$$(E5) \quad b_2 + 2b_3 + 3b_4 + 4b_5 + 5b_6 = 0,$$

$$(E6) \quad b_5 + 2b_4 + 3b_3 + 4b_2 + 5b_1 = 0,$$

$$(E7) \quad b_{15} + 2b_{14} + 3b_{13} + 4b_{12} + 5b_{11} = 0,$$

$$(E8) \quad b_{12} + 2b_{13} + 3b_{14} + 4b_{15} + 5b_{16} = 0.$$

Pour trouver les relations liées à  $u^4v$ , on repart de l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{25}B_4^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{25}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{25}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{1}{5}B_5^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

vue comme

$$\begin{aligned} & B_4^5(u)B_1^5(v) + 2B_4^5(u)B_2^5(v) + 3B_4^5(u)B_3^5(v) + 4B_4^5(u)B_4^5(v) + 5B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + 5B_5^5(u)B_1^5(v) + 10B_5^5(u)B_2^5(v) + 15B_5^5(u)B_3^5(v) + 20B_5^5(u)B_4^5(v) + 25B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

soit, pour les indices 21, 24, 31, 34, 42, 43, 12 et 13, un ensemble de 8 équations dont le modèle est :

$$c_{41} + 2c_{42} + 3c_{43} + 4c_{44} + 5c_{45} + 5c_{51} + 10c_{52} + 15c_{53} + 20c_{54} + 25c_{55},$$

ce qui donne :

$$(E9) \quad 5b_{12} + 5b_7 + 10b_8 + 15b_9 + 20b_{10} + 25b_{11} = 0,$$

$$(E10) \quad 5b_5 + 5b_{10} + 10b_9 + 15b_8 + 20b_7 + 25b_6 = 0,$$

$$(E11) \quad 5b_{15} + 5b_{20} + 10b_{19} + 15b_{18} + 20b_{17} + 25b_{16} = 0,$$

$$(E12) \quad 5b_2 + 5b_{17} + 10b_{18} + 15b_{19} + 20b_{20} + 25b_1 = 0,$$

$$(E13) \quad 5b_7 + 5b_2 + 10b_3 + 15b_4 + 20b_5 + 25b_6 = 2,$$

$$(E14) \quad 5b_{20} + 5b_5 + 10b_4 + 15b_3 + 20b_2 + 25b_1 = 3,$$

$$(E15) \quad 5b_{10} + 5b_{15} + 10b_{14} + 15b_{13} + 20b_{12} + 25b_{11} = 0,$$

$$(E16) \quad 5b_{17} + 5b_{12} + 10b_{13} + 15b_{14} + 20b_{15} + 25b_{16} = 0.$$

Pour trouver les relations liées à  $u^3v^2$ , on repart de l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{100}B_3^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{100}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{2}{50}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{6}{50}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{6}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{1}{10}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{10}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

vue comme

$$\begin{aligned} & B_3^5(u)B_2^5(v) + 3B_3^5(u)B_3^5(v) + 6B_3^5(u)B_4^5(v) + 10B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + 4B_4^5(u)B_2^5(v) + 12B_4^5(u)B_3^5(v) + 24B_4^5(u)B_4^5(v) + 40B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + 10B_5^5(u)B_2^5(v) + 30B_5^5(u)B_3^5(v) + 60B_5^5(u)B_4^5(v) + 100B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

soit, pour les indices 21, 24, 31, 34, 42, 43, 12 et 13, un ensemble de 8 équations dont le modèle est :

$$c_{32} + 3c_{33} + 6c_{34} + 10c_{35} + 4c_{42} + 12c_{43} + 24c_{44} + 40c_{45} + 10c_{52} + 30c_{53} + 60c_{54} + 100c_{55},$$

ce qui donne :

$$(E17) \quad b_{22} + 3b_{23} + 10b_{13} + 40b_{12} + 10b_8 + 30b_9 + 60b_{10} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E18) \quad b_{23} + 3b_{22} + 10b_4 + 40b_5 + 10b_9 + 30b_8 + 60b_7 + 100b_6 = 0,$$

$$(E19) \quad b_{21} + 3b_{24} + 10b_{14} + 40b_{15} + 10b_{19} + 30b_{18} + 60b_{17} + 100b_{16} = 0,$$

$$(E20) \quad b_{24} + 3b_{21} + 10b_3 + 40b_2 + 10b_{18} + 30b_{19} + 60b_{20} + 100b_1 = 6,$$

$$(E21) \quad b_{21} + 3b_{22} + 10b_8 + 40b_7 + 10b_3 + 30b_4 + 60b_5 + 100b_6 = 4,$$



$$(E22) \quad b_{22} + 3b_{21} + 10b_{19} + 40b_{20} + 10b_4 + 30b_3 + 60b_2 + 100b_1 = 12,$$

$$(E23) \quad b_{24} + 3b_{23} + 10b_9 + 40b_{10} + 10b_{14} + 30b_{13} + 60b_{12} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E24) \quad b_{23} + 3b_{24} + 10b_{18} + 40b_{17} + 10b_{13} + 30b_{14} + 60b_{15} + 100b_{16} = 0.$$

Pour trouver les relations liées à  $u^3v$ , on repart de l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{50}B_3^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{50}B_3^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{50}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{2}{25}B_4^5(u)B_1^5(v) + \frac{4}{25}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{6}{25}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{8}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{1}{5}B_5^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

vue comme

$$\begin{aligned} & B_3^5(u)B_1^5(v) + 2B_3^5(u)B_2^5(v) + 3B_3^5(u)B_3^5(v) + 4B_3^5(u)B_4^5(v) + 5B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + 4B_4^5(u)B_1^5(v) + 8B_4^5(u)B_2^5(v) + 12B_4^5(u)B_3^5(v) + 16B_4^5(u)B_4^5(v) + 20B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + 10B_5^5(u)B_1^5(v) + 20B_5^5(u)B_2^5(v) + 30B_5^5(u)B_3^5(v) + 40B_5^5(u)B_4^5(v) + 50B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

soit, pour les indices 21, 24, 31, 34, 42, 43, 12 et 13, un ensemble de 8 équations dont le modèle est :

$$c_{31} + 2c_{32} + 3c_{33} + 4c_{34} + 5c_{35} + 4c_{41} + 8c_{42} + 12c_{43} + 16c_{44} + 20c_{45} + 10c_{51} + 20c_{52} + 30c_{53} + 40c_{54} + 50c_{55},$$

ce qui donne :

$$(E25) \quad 2b_{22} + 3b_{23} + 5b_{13} + 20b_{12} + 10b_7 + 20b_8 + 30b_9 + 40b_{10} + 50b_{11} = 0,$$

$$(E26) \quad 2b_{23} + 3b_{22} + 5b_4 + 20b_5 + 10b_{10} + 20b_9 + 30b_8 + 40b_7 + 50b_6 = 0,$$

$$(E27) \quad 2b_{21} + 3b_{24} + 5b_{14} + 20b_{15} + 10b_{20} + 20b_{19} + 30b_{18} + 40b_{17} + 50b_{16} = 1,$$

$$(E28) \quad 2b_{24} + 3b_{21} + 5b_3 + 20b_2 + 10b_{17} + 20b_{18} + 30b_{19} + 40b_{20} + 50b_1 = 4,$$

$$(E29) \quad 2b_{21} + 3b_{22} + 5b_8 + 20b_7 + 10b_2 + 20b_3 + 30b_4 + 40b_5 + 50b_6 = 8,$$

$$(E30) \quad 2b_{22} + 3b_{21} + 5b_{19} + 20b_{20} + 10b_5 + 20b_4 + 30b_3 + 40b_2 + 50b_1 = 12,$$

$$(E31) \quad 2b_{24} + 3b_{23} + 5b_9 + 20b_{10} + 10b_{15} + 20b_{14} + 30b_{13} + 40b_{12} + 50b_{11} = 0,$$

$$(E32) \quad 2b_{23} + 3b_{24} + 5b_{18} + 20b_{17} + 10b_{12} + 20b_{13} + 30b_{14} + 40b_{15} + 50b_{16} = 0.$$

Pour trouver les relations liées à  $u^2v^2$ , on repart de l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{100}B_2^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{100}B_2^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{50}B_2^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_2^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{3}{100}B_3^5(u)B_2^5(v) + \frac{9}{100}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{9}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{3}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{3}{50}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{9}{50}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{9}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{3}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{1}{10}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{10}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

vue comme

$$\begin{aligned} & B_2^5(u)B_2^5(v) + 3B_2^5(u)B_3^5(v) + 6B_2^5(u)B_4^5(v) + 10B_2^5(u)B_5^5(v) \\ & + 3B_3^5(u)B_2^5(v) + 9B_3^5(u)B_3^5(v) + 18B_3^5(u)B_4^5(v) + 30B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + 6B_4^5(u)B_2^5(v) + 18B_4^5(u)B_3^5(v) + 36B_4^5(u)B_4^5(v) + 60B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + 10B_5^5(u)B_2^5(v) + 30B_5^5(u)B_3^5(v) + 60B_5^5(u)B_4^5(v) + 100B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

soit, pour les indices 21, 24, 31, 34, 42, 43, 12 et 13, un ensemble de 8 équations dont le modèle est :

$$c_{22}+3c_{23}+6c_{24}+10c_{25}+3c_{32}+9c_{33}+18c_{34}+30c_{35}+6c_{42}+18c_{43}+36c_{44}+60c_{45}+10c_{52}+30c_{53}+60c_{54}+100c_{55},$$

ce qui donne (il y a deux redondances) :

$$(E33) \quad b_{21} + 3b_{24} + 10b_{14} + 3b_{22} + 9b_{23} + 30b_{13} + 60b_{12} + 10b_8 + 30b_9 + 60b_{10} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E34) \quad b_{24} + 3b_{21} + 10b_3 + 3b_{23} + 9b_{22} + 30b_4 + 60b_5 + 10b_9 + 30b_8 + 60b_7 + 100b_6 = 6,$$

$$(E35) \quad b_{22} + 3b_{23} + 10b_{13} + 3b_{21} + 9b_{24} + 30b_{14} + 60b_{15} + 10b_{19} + 30b_{18} + 60b_{17} + 100b_{16} = 0,$$

$$(E36) \quad b_{23} + 3b_{22} + 10b_4 + 3b_{24} + 9b_{21} + 30b_3 + 60b_2 + 10b_{18} + 30b_{19} + 60b_{20} + 100b_1 = 18,$$

$$(E39) \quad b_{21} + 3b_{22} + 10b_8 + 3b_{24} + 9b_{23} + 30b_9 + 60b_{10} + 10b_{14} + 30b_{13} + 60b_{12} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E40) \quad b_{22} + 3b_{21} + 10b_{19} + 3b_{17} + 9b_{24} + 30b_{18} + 60b_{17} + 10b_{13} + 30b_{14} + 60b_{15} + 100b_{16} = 0.$$

Soit le système au complet :

$$(E1) \quad b_7 + 2b_8 + 3b_9 + 4b_{10} + 5b_{11} = 0,$$

$$(E2) \quad b_{10} + 2b_9 + 3b_8 + 4b_7 + 5b_6 = 0,$$

$$(E3) \quad b_{20} + 2b_{19} + 3b_{18} + 4b_{17} + 5b_{16} = 0,$$

$$(E4) \quad b_{17} + 2b_{18} + 3b_{19} + 4b_{20} + 5b_1 = 0,$$

$$(E5) \quad b_2 + 2b_3 + 3b_4 + 4b_5 + 5b_6 = 0,$$

$$(E6) \quad b_5 + 2b_4 + 3b_3 + 4b_2 + 5b_1 = 0,$$

$$(E7) \quad b_{15} + 2b_{14} + 3b_{13} + 4b_{12} + 5b_{11} = 0,$$

$$(E8) \quad b_{12} + 2b_{13} + 3b_{14} + 4b_{15} + 5b_{16} = 0,$$

$$(E9) \quad 5b_{12} + 5b_7 + 10b_8 + 15b_9 + 20b_{10} + 25b_{11} = 0,$$

$$(E10) \quad 5b_5 + 5b_{10} + 10b_9 + 15b_8 + 20b_7 + 25b_6 = 0,$$

$$(E11) \quad 5b_{15} + 5b_{20} + 10b_{19} + 15b_{18} + 20b_{17} + 25b_{16} = 0,$$

$$(E12) \quad 5b_2 + 5b_{17} + 10b_{18} + 15b_{19} + 20b_{20} + 25b_1 = 0,$$

$$(E13) \quad 5b_7 + 5b_2 + 10b_3 + 15b_4 + 20b_5 + 25b_6 = 2,$$

$$(E14) \quad 5b_{20} + 5b_5 + 10b_4 + 15b_3 + 20b_2 + 25b_1 = 3,$$

$$(E15) \quad 5b_{10} + 5b_{15} + 10b_{14} + 15b_{13} + 20b_{12} + 25b_{11} = 0,$$

$$(E16) \quad 5b_{17} + 5b_{12} + 10b_{13} + 15b_{14} + 20b_{15} + 25b_{16} = 0,$$

$$(E17) \quad b_{22} + 3b_{23} + 10b_{13} + 40b_{12} + 10b_8 + 30b_9 + 60b_{10} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E18) \quad b_{23} + 3b_{22} + 10b_4 + 40b_5 + 10b_9 + 30b_8 + 60b_7 + 100b_6 = 0,$$

$$(E19) \quad b_{21} + 3b_{24} + 10b_{14} + 40b_{15} + 10b_{19} + 30b_{18} + 60b_{17} + 100b_{16} = 0,$$

$$(E20) \quad b_{24} + 3b_{21} + 10b_3 + 40b_2 + 10b_{18} + 30b_{19} + 60b_{20} + 100b_1 = 6,$$

$$(E21) \quad b_{21} + 3b_{22} + 10b_8 + 40b_7 + 10b_3 + 30b_4 + 60b_5 + 100b_6 = 4,$$

$$(E22) \quad b_{22} + 3b_{21} + 10b_{19} + 40b_{20} + 10b_4 + 30b_3 + 60b_2 + 100b_1 = 12,$$

$$(E23) \quad b_{24} + 3b_{23} + 10b_9 + 40b_{10} + 10b_{14} + 30b_{13} + 60b_{12} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E24) \quad b_{23} + 3b_{24} + 10b_{18} + 40b_{17} + 10b_{13} + 30b_{14} + 60b_{15} + 100b_{16} = 0,$$

$$(E25) \quad 2b_{22} + 3b_{23} + 5b_{13} + 20b_{12} + 10b_7 + 20b_8 + 30b_9 + 40b_{10} + 50b_{11} = 0,$$

$$(E26) \quad 2b_{23} + 3b_{22} + 5b_4 + 20b_5 + 10b_{10} + 20b_9 + 30b_8 + 40b_7 + 50b_6 = 0,$$

$$(E27) \quad 2b_{21} + 3b_{24} + 5b_{14} + 20b_{15} + 10b_{20} + 20b_{19} + 30b_{18} + 40b_{17} + 50b_{16} = 1,$$

$$(E28) \quad 2b_{24} + 3b_{21} + 5b_3 + 20b_2 + 10b_{17} + 20b_{18} + 30b_{19} + 40b_{20} + 50b_1 = 4,$$

$$(E29) \quad 2b_{21} + 3b_{22} + 5b_8 + 20b_7 + 10b_2 + 20b_3 + 30b_4 + 40b_5 + 50b_6 = 8,$$

$$(E30) \quad 2b_{22} + 3b_{21} + 5b_{19} + 20b_{20} + 10b_5 + 20b_4 + 30b_3 + 40b_2 + 50b_1 = 12,$$

$$(E31) \quad 2b_{24} + 3b_{23} + 5b_9 + 20b_{10} + 10b_{15} + 20b_{14} + 30b_{13} + 40b_{12} + 50b_{11} = 0,$$

$$(E32) \quad 2b_{23} + 3b_{24} + 5b_{18} + 20b_{17} + 10b_{12} + 20b_{13} + 30b_{14} + 40b_{15} + 50b_{16} = 0,$$

$$(E33) \quad b_{21} + 3b_{24} + 10b_{14} + 3b_{22} + 9b_{23} + 30b_{13} + 60b_{12} + 10b_8 + 30b_9 + 60b_{10} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E34) \quad b_{24} + 3b_{21} + 10b_3 + 3b_{23} + 9b_{22} + 30b_4 + 60b_5 + 10b_9 + 30b_8 + 60b_7 + 100b_6 = 6,$$

$$(E35) \quad b_{22} + 3b_{23} + 10b_{13} + 3b_{21} + 9b_{24} + 30b_{14} + 60b_{15} + 10b_{19} + 30b_{18} + 60b_{17} + 100b_{16} = 0,$$

$$(E36) \quad b_{23} + 3b_{22} + 10b_4 + 3b_{24} + 9b_{21} + 30b_3 + 60b_2 + 10b_{18} + 30b_{19} + 60b_{20} + 100b_1 = 18,$$

$$(E39) \quad b_{21} + 3b_{22} + 10b_8 + 3b_{24} + 9b_{23} + 30b_9 + 60b_{10} + 10b_{14} + 30b_{13} + 60b_{12} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E40) \quad b_{22} + 3b_{21} + 10b_{19} + 3b_{17} + 9b_{24} + 30b_{18} + 60b_{17} + 10b_{13} + 30b_{14} + 60b_{15} + 100b_{16} = 0.$$

Et la solution est (elle est sans paramètre) :

$$b_1 = -4/25, b_{10} = 0, b_{11} = -2/75, b_{12} = 0, b_{13} = 0, b_{14} = 1/15, b_{15} = 0,$$

$$b_{16} = -1/25, b_{17} = 0, b_{18} = 2/5, b_{19} = -4/5, b_2 = 0, b_{20} = 3/5,$$

$$b_{21} = 4/3, b_{22} = 0, b_{23} = 0, b_{24} = -2/3,$$

$$b_3 = 4/15, b_4 = 0, b_5 = 0, b_6 = -8/75, b_7 = 2/5, b_8 = -8/15, b_9 = 4/15,$$

soit le diagramme suivant (en  $1/75$ ) :

-3	0	5	0	0	-2	16	15	14	13	12	11
0					0	17				10	
30	-50	0			20	18	24	23		9	
-60	100	0			-40	19	21	22		8	
45	[21]				30	20	[21]			7	
-12	0	20	0	0	-8	1	2	3	4	5	6

Diagramme des  $b_i$

En conclusion, on a une famille de solutions avec un paramètre ( $\alpha$  qui porte sur les  $a_i$ ) que l'on va essayer de choisir judicieusement pour exhiber une solution particulière ayant quelques propriétés (par exemple la simplicité, voir ce que nous avons fait dans la construction basée sur Taylor). À partir de ce choix, on pourra obtenir les fonctions de formes en suivant la méthode déjà décrite pour les éléments de degré plus faible.

**Trouver une valeur intéressante pour le paramètre.** Comme les  $b_i$  sont parfaitement déterminés, on se penche sur les  $a_i$  pour trouver une valeur intéressante pour le paramètre  $\alpha$ . Pour ce faire, on impose  $u^3v^3$ . Soit :

$$\begin{aligned} u^3v^3 &= \left\{ \frac{1}{10}B_3^5(u) + \frac{2}{5}B_4^5(u) + B_5^5(u) \right\} \left\{ \frac{1}{10}B_3^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\} \\ &= \frac{1}{100}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{2}{50}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{1}{10}B_5^5(u)B_3^5(v) \\ &+ \frac{2}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{4}{15}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{2}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v) \end{aligned}$$

Ceci donne 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{100}a_{14} + \frac{1}{10}a_9 + \frac{2}{5}a_{10} + \frac{1}{10}a_9 + \frac{2}{5}a_{10} + a_{11} &= 0, \\ \frac{1}{100}a_{13} + \frac{1}{10}a_4 + \frac{2}{5}a_5 + \frac{1}{10}a_8 + \frac{2}{5}a_7 + a_6 &= 0, \\ \frac{1}{100}a_{13} + \frac{1}{10}a_8 + \frac{2}{5}a_7 + \frac{1}{10}a_4 + \frac{2}{5}a_5 + a_6 &= 0, \\ \frac{1}{100}a_{12} + \frac{1}{10}a_3 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{1}{10}a_3 + \frac{2}{5}a_2 + a_1 &= \frac{4}{25}.\end{aligned}$$

Ceci donne les 4 nouvelles équations :

$$(E20) \quad a_{14} + 10a_9 + 40a_{10} + 10a_9 + 40a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

$$(E21) \quad a_{13} + 10a_4 + 40a_5 + 10a_8 + 40a_7 + 100a_6 = 0,$$

$$(E22) \quad a_{13} + 10a_8 + 40a_7 + 10a_4 + 40a_5 + 100a_6 = 0,$$

$$(E23) \quad a_{12} + 10a_3 + 40a_2 + 10a_3 + 40a_2 + 100a_1 = 16.$$

Le système complet (23 équations) donne comme solution :

$$a_1 = -16/45, a_2 = 4/5, a_3 = -32/45, a_4 = 16/45, a_5 = 0, a_6 = -4/45, a_7 = 1/5,$$

$$a_8 = -8/45, a_9 = 4/45, a_{10} = 0, a_{11} = -1/45, a_{12} = 16/9, a_{13} = -8/9, a_{14} = 4/9.$$

Et ainsi  $\alpha = -\frac{4}{45}$ .

En fait, il suffit de ne rajouter qu'une seule équation et de résoudre le système résultant.

Plus subtil, on a la solution à la main, on prend la relation

$$a_{14} + 10a_9 + 40a_{10} + 10a_9 + 40a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

soit

$$a_{14} + 20a_9 + 80a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

et on remplace les coefficients en fonction de  $\alpha$ , il vient :

$$-\frac{80}{25} - 25\alpha + \frac{20 \times 24}{45} + 100\alpha + 0 - \frac{100 \times 5}{45} - 100\alpha = 0,$$

et la solution est  $\alpha = -\frac{4}{45}$ .

Pour finir, on reprend les coefficients trouvés via Taylor, par exemple  $a_1$ , et on identifie, on a :

$$-\frac{74}{225} - \frac{\alpha_t}{25} = -\frac{16}{45},$$

et donc :

$$\alpha_t = \frac{2}{3},$$

qui est bien la valeur trouvée dans l'analyse par Taylor.

## 7.5 Construction directe des fonctions de forme via un système

On suit la même méthode que pour le degré 2. On écrit la forme générique d'une fonction et on instancie. L'espace contient les 23 monômes classiques des éléments Serendip mais on a 24 nœuds, le seul moyen de construire un élément est donc de rajouter un monôme, le seul possible (par symétrie) est  $u^3v^3$ .

## 7.6 Validation d'un quadrilatère courant d'un maillage donné

On reprend la méthode utilisée pour les éléments précédents, à savoir on considère un élément d'un maillage et on va reconstruire un quadrilatère complet et l'écrire sous sa forme de Bézier avant d'effectuer l'analyse de son jacobien. La reconstruction consiste à définir les nœuds centraux puis les points de contrôle des arêtes et enfin les points de contrôle centraux.

Étant donné un élément quelconque d'un maillage, noté comme le carreau :

$$\sigma(u, v) = \sum_i q_i(u, v) A_i,$$

où les  $A_i$  désignent les (24) nœuds de l'élément observé, on cherche les conditions assurant sa validité géométrique. On a :

$$\sigma(u, v) = \sum_i q_i(u, v) A_i = \sum_i \left\{ q_i^c(u, v) + \sum_l \alpha_l q_l^c(u, v) \right\} A_i,$$

en définissant

$$A_{11} = \sum_i \alpha_i^{11} A_i,$$

et des expressions analogues pour les autres nœuds manquants, le carreau :

$$\sigma(u, v) = \sum_i q_i(u, v) A_i = \sum_{i''=1,36} q_{i''}^c(u, v) A_{i''},$$

que l'on note, au final :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,5} \sum_{j=0,5} q_{ij}^c(u, v) A_{ij},$$

est un carreau complet pour les nœuds centraux ainsi construits.

L'analyse de la validité géométrique d'un carreau complet, cf. [9], se fait en regardant sa forme de Bézier, en effet

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,5} \sum_{j=0,5} q_{ij}^c(u, v) A_{ij} = \sum_{i=0,5} \sum_{j=0,5} B_i^5(u) B_j^5(v) P_{ij},$$

avec  $P_{ij}$  les points de contrôle de l'élément et  $B_i^5(u)$  les polynômes de Bernstein de degré 5. Sous ce formalisme il est facile d'analyser le signe du jacobien, voir plus bas. Le seul point à effectuer est le calcul des points de contrôle, en particulier les points centraux. Il y a, *a priori*, deux méthodes pour obtenir ces points.

Selon les cas précédents, on pourrait penser que la relation liant les  $P_{ij}$  internes manquants est la même que celle liant les  $A_{ij}$  que l'on a construit, ainsi, par exemple :

$$P_{11} = \sum_i \alpha_i^{11} P_i,$$

mais nous ne savons pas le prouver (voir la remarque pour l'élément précédent) donc on devra résoudre le système  $12 \times 12$  correspondant.

Par contre, les points de contrôle des arêtes sont trouvés simplement en inversant la relation liant les nœuds à ces mêmes points. En effet, arête  $A_{00}A_{50}$ , on a les quatre relations :

$$\begin{aligned} A_{10} &= \frac{1024A_{00} + 1280P_{10} + 640P_{20} + 160P_{30} + 20A_{40} + A_{50}}{3125}, \\ A_{20} &= \frac{243A_{00} + 810P_{10} + 1080P_{20} + 720P_{30} + 240A_{40} + 32A_{50}}{3125}, \\ A_{30} &= \frac{32A_{00} + 240P_{10} + 720P_{20} + 1080P_{30} + 810A_{40} + 243A_{50}}{3125}, \end{aligned}$$

$$A_{40} = \frac{A_{00} + 20P_{10} + 160P_{20} + 640P_{30} + 1280A_{40} + 1024A_{50}}{3125},$$

ce qui donne :

$$P_{10} = \frac{-77A_{00} + 300A_{10} - 300A_{20} + 200A_{30} - 75A_{40} + 12A_{50}}{60},$$

$$P_{20} = \frac{269A_{00} - 1450A_{10} + 2950A_{20} - 2300A_{30} + 925A_{40} - 154A_{50}}{240},$$

$$P_{30} = \frac{-154A_{00} + 925A_{10} - 2300A_{20} + 2950A_{30} - 1450A_{40} + 269A_{50}}{240},$$

$$P_{40} = \frac{12A_{00} - 75A_{10} + 200A_{20} - 300A_{30} + 300A_{40} - 77A_{50}}{60},$$

et des relations analogues pour les autres arêtes.

## 7.7 Degré supérieur ?

À la lumière de cet élément de degré 5, on revient sur cette question. Ainsi, au degré 6, comme la dérivée d'ordre 5 est nulle et que celle d'ordre 6 est une constante, la Relation (16) et les relations analogues pour les autres points "centraux" restent vraies mais, par exemple,  $C_1$  devient :  $C_1 = C_{11} = \sum_{s_{11}} D^4 \cdot (\vec{v}_s^*, \vec{v}_s^*, \vec{v}_s^*, \vec{v}_s^*) - 2 \sum_{a_{11}} D^4 \cdot (\vec{v}_a^*, \vec{v}_a^*, \vec{v}_a^*, \vec{v}_a^*) + cste$  qui, maintenant, est un polynôme de degré 2 par rapport aux coordonnées de  $A_{11}$  pour la configuration des vecteurs  $\vec{v}_s^*$  et  $\vec{v}_a^*$  spécifiés. Par suite, nous pensons qu'il est possible de trouver une combinaison entre trois  $C_i$  consécutifs et de répéter la même construction, en particulier, en construisant quelques nœuds internes (deux ici).

Néanmoins, construire un tel élément, et, *a fortiori*, pour des degrés plus élevés, semble fastidieux. Par suite, nous arrêtons notre étude au degré 5.

## 8 Interpolation transfinie et Serendipité

Les carreaux définis par interpolation transfinie permettent de construire des éléments finis sans nœud interne. La question est de voir si il y a un lien entre de tels éléments et les éléments Serendip.

### 8.1 Rappels sur les formes de Bézier

Les formes de Bézier (polynômes, courbes et carreaux) sont construites à partir des polynômes de Bernstein et d'un réseau de contrôle (respectivement des valeurs, des points). Si on note  $B_i^n(u) = C_i^n(1-u)^{n-i}u^i$ , pour  $u$  entre 0 et 1, les polynômes de Bernstein avec  $C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}$  et  $N_i$  un réseau de valeurs, alors

$$\sum_{i=0,n} B_i^n(u)N_i$$

est un polynôme de Bézier tandis que si  $P_i$  est un réseau de points de contrôle,

$$\sum_{i=0,n} B_i^n(u)P_i$$

est la courbe de Bézier de degré  $n$  engendrée par le réseau des  $P_i$ . De même,

$$\sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} B_i^n(u)B_j^n(v)P_{ij}$$

définit le carreau de Bézier engendré par le réseau des points  $P_{ij}$ .

Ces formes ont des propriétés intéressantes et, en particulier, il est facile d'en calculer diverses quantités (dérivées par exemple). Pour une utilisation ultérieure, nous donnons le lemme suivant :

**Lemme 7 (sur les sommes tronquées des Bernstein).** Pour tout degré, on a :

$$(1-u) = \sum_{i=0, n-1} \frac{C_i^{n-1}}{C_i^n} B_i^n(u) \quad \text{et} \quad u = \sum_{i=1, n} \frac{C_{i-1}^{n-1}}{C_i^n} B_i^n(u)$$

où les  $B_i^n(u)$  sont les polynômes de Bernstein de degré  $n$  et les  $C_i^j$  sont les coefficients du binôme.  $\square$

Preuve : Évidente. En effet, pour la première relation,  $(1-u)$  se factorise et les coefficients sont tels que comme  $B_i^n(u) = C_i^n(1-u)^{n-i}u^i$ , on a  $\frac{C_i^{n-1}}{C_i^n} B_i^n(u) = C_i^{n-1}(1-u)^{n-i}u^i$ , qui, après factorisation donne  $C_i^{n-1}(1-u)^{n-1-i}u^i$  qui est le terme voulu d'un Bernstein de degré  $n-1$ . Par suite, on va trouver  $(1-u)$  en facteur de la somme de ces polynômes qui somment à 1, ce qui établit la relation. L'autre relation se montre de la même manière ( $u$  se factorise).

## 8.2 Construction d'un élément transfini de degré quelconque

Les éléments transfinis sont définis uniquement par les courbes qui forment leurs frontières, autrement dit, les nœuds de ces éléments sont positionnés sur ces frontières et, par suite, il n'y a pas de nœud interne. Une construction directe du quadrilatère de degré 2 à 8 nœuds repose sur une interpolation transfinie, voir [13]. L'idée est donc de voir si ces éléments, en général, sont des éléments Serendip.

### 8.2.1 Formalisme Bézier

On se donne un réseau de points (de contrôle),  $P_{ij}$ , quatre courbes frontières qui correspondent au bord du carreau et deux paramètres  $u$  et  $v$  variant entre 0 et 1, soient :

$$\gamma(u, 0) = \sum_{i=0, n} B_i^n(u) P_{i0}$$

$$\gamma(u, 1) = \sum_{i=0, n} B_i^n(u) P_{in}$$

$$\gamma(0, v) = \sum_{j=0, n} B_j^n(v) P_{0j}$$

$$\gamma(1, v) = \sum_{j=0, n} B_j^n(v) P_{nj},$$

alors

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) = & (1-v)\gamma(u, 0) + v\gamma(u, 1) + (1-u)\gamma(0, v) + u\gamma(1, v) \\ & - \{(1-u)(1-v)P_{00} + (1-u)vP_{0n} + u(1-v)P_{n0} + uvP_{nn}\} \end{aligned} \quad (18)$$

est un carreau transfini. L'intérêt de cette écriture en Bézier et points de contrôle est son caractère systématique (contrairement à l'écriture classique éléments finis en fonctions de forme et nœuds) qui permet, justement, de retrouver facilement les fonctions de forme classiques (par regroupement des Bernstein).

On va montrer maintenant l'équivalence entre ce carreau et un carreau de Bézier complet.

On note  $\alpha_i^n = \frac{C_i^{n-1}}{C_i^n} = \frac{n-i}{n} = 1 - \frac{i}{n}$  et  $\beta_i^n = \frac{C_{i-1}^{n-1}}{C_i^n} = \frac{i}{n} = 1 - \alpha_i^n$  puis on explicite  $\sigma(u, v)$  en fonctions des Bernstein en exprimant complètement les courbes et les fonctions de mélange (*blending functions*). On a :

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) = & \sum_{j=0, n-1} \alpha_j^n B_j^n(v) \sum_{i=0, n} B_i^n(u) P_{i0} + \sum_{j=1, n} \beta_j^n B_j^n(v) \sum_{i=0, n} B_i^n(u) P_{in} \\ & + \sum_{i=0, n-1} \alpha_i^n B_i^n(u) \sum_{j=0, n} B_j^n(v) P_{0j} + \sum_{i=1, n} \beta_i^n B_i^n(u) \sum_{j=0, n} B_j^n(v) P_{nj} \end{aligned}$$

$$- \left\{ \sum_{i=0,n-1} \alpha_i^n B_i^n(u) \sum_{j=0,n-1} \alpha_j^n B_j^n(v) P_{00} + \sum_{i=0,n-1} \alpha_i^n B_i^n(u) \sum_{j=1,n} \beta_j^n B_j^n(v) P_{0n} \right. \\ \left. + \sum_{i=1,n} \beta_i^n B_i^n(u) \sum_{j=0,n-1} \alpha_j^n B_j^n(v) P_{n0} + \sum_{i=1,n} \beta_i^n B_i^n(u) \sum_{j=1,n} \beta_j^n B_j^n(v) P_{nn} \right\},$$

et, en regroupant

$$\sigma(u, v) = \sum_{j=0,n-1} \sum_{i=0,n} \alpha_j^n B_j^n(v) B_i^n(u) P_{i0} + \sum_{j=1,n} \sum_{i=0,n} \beta_j^n B_j^n(v) B_i^n(u) P_{in} \\ + \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=0,n} \alpha_i^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{0j} + \sum_{i=1,n} \sum_{j=0,n} \beta_i^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{nj} \\ - \left\{ \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=0,n-1} \alpha_i^n \alpha_j^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{00} + \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=1,n} \alpha_i^n \beta_j^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{0n} \right. \\ \left. + \sum_{i=1,n} \sum_{j=0,n-1} \alpha_j^n \beta_i^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{n0} + \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,n} \beta_i^n \beta_j^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{nn} \right\},$$

qui s'écrit également :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,n} B_0^n(v) B_i^n(u) P_{i0} + \sum_{j=1,n-1} \sum_{i=0,n} B_j^n(v) B_i^n(u) (\alpha_j^n P_{i0} + \beta_j^n P_{in}) + \sum_{i=0,n} B_n^n(v) B_i^n(u) P_{in} \\ + \sum_{j=0,n} B_0^n(u) B_j^n(v) P_{0j} + \sum_{i=1,n-1} \sum_{j=0,n} B_i^n(u) B_j^n(v) (\alpha_i^n P_{0j} + \beta_i^n P_{nj}) + \sum_{j=0,n} B_n^n(u) B_j^n(v) P_{nj} \\ - \left\{ \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=0,n-1} \alpha_i^n \alpha_j^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{00} + \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=1,n} \alpha_i^n \beta_j^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{0n} \right. \\ \left. + \sum_{i=1,n} \sum_{j=0,n-1} \alpha_j^n \beta_i^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{n0} + \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,n} \beta_i^n \beta_j^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{nn} \right\}.$$

On examine les coins, c'est-à-dire ce qui vient au regard de  $B_0^n(u)B_0^n(v)$ ,  $B_n^n(u)B_0^n(v)$ ,  $B_n^n(u)B_n^n(v)$  et  $B_0^n(u)B_n^n(v)$ . Par exemple pour le premier couple, il vient les contributions du terme (1), du terme (4) et du terme (7), soit le point :

$$Q_{00} = P_{00} + P_{00} - \alpha_0^n \beta_0^n P_{00} = P_{00},$$

et, de même pour les trois autres couples, on a respectivement  $P_{n0}$ ,  $P_{nn}$  et  $P_{0n}$ .

On examine maintenant les "arêtes", hors extrémités, c'est-à-dire, pour les indices entre 1 et  $n-1$ , ce qui vient au regard de  $B_i^n(u)B_0^n(v)$ ,  $B_n^n(u)B_j^n(v)$ ,  $B_i^n(u)B_n^n(v)$  et  $B_0^n(u)B_j^n(v)$ . Pour le premier couple, il vient les contributions des termes (1), (5), (7) et (9), soit le point :

$$Q_{i0} = P_{i0} + (\alpha_i^n P_{00} + \beta_i^n P_{n0}) - \alpha_i^n P_{00} - \beta_i^n P_{n0} = P_{i0},$$

et un résultat analogue pour les trois autres couples.

Pour  $i = 1, n-1$  et  $j = 1, n-1$ , ce qui vient au regard de  $B_i^n(u)B_j^n(v)$  est :

$$Q_{ij} = \alpha_j^n P_{i0} + \beta_j^n P_{in} + \alpha_i^n P_{0j} + \beta_i^n P_{nj} - \alpha_i^n \alpha_j^n P_{00} - \alpha_i^n \beta_j^n P_{0n} - \alpha_j^n \beta_i^n P_{n0} - \beta_i^n \beta_j^n P_{nn}. \quad (19)$$

Alors, on trouve l'écriture classique d'un carreau complet, en posant  $P_{ij} = Q_{ij}$ , à savoir :

$$\sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} B_i^n(u) B_j^n(v) P_{ij}. \quad (20)$$

avec les  $P_{ij}$  (internes) définis comme indiqué ci-dessus en (19).

Ceci est traduit pompeusement par le théorème ci-dessous :



**Théorème 2.** Pour tout degré, le carreau transfini est équivalent à un carreau de Bézier complet dont les points de contrôle sont identiques sur les arêtes du carreau (coins et arêtes courbes) et définis par la Relation (19) pour les points de contrôle internes.  $\square$

**Une méthode alternative pour trouver le carreau complet.** Comme le carreau transfini est équivalent à un carreau de Bézier complet, construire celui-ci peut se faire via la résolution d'un système  $(n - 1) \times (n - 1)$  pour déterminer les points de contrôle internes, les autres étant déjà connus (ce sont ceux du carreau transfini). On évalue par le carreau transfini les  $(n - 1) \times (n - 1)$  nœuds internes puis on écrit leurs expressions dans le carreau complet, d'où le système à résoudre.

**Quelques exemples de construction des points de contrôle de l'élément complet.**

Les schémas ci-dessous montrent le caractère systématique et mécanique de construction des  $P_{ij}$  internes en fonction des  $P_{ij}$  bords en indiquant les valeurs des pondérations. Pour le degré 2, un seul point interne,  $P_{11}$ , avec  $\alpha_1^2 = \frac{1}{2}$  et  $\beta_1^2 = \frac{1}{2}$  :

$$\begin{array}{ccc} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & (1,1) & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}$$

Pour le degré 3, 4 points internes, soit, par exemple pour  $P_{11}$  on a les pondérations :

$$\begin{array}{cccc} -2/9 & 1/3 & . & -1/9 \\ . & . & . & . \\ 2/3 & (1,1) & & 1/3 \\ -4/9 & 2/3 & . & -2/9 \end{array}$$

et pour  $P_{21}$ , les pondérations sont :

$$\begin{array}{cccc} -1/9 & . & 1/3 & -2/9 \\ . & . & . & . \\ 1/3 & . & (2,1) & 2/3 \\ -2/9 & . & 2/3 & -4/9 \end{array}$$

etc. Le cas général se schématise simplement comme :

$$\begin{array}{cccc} & 2 & & 2 \\ -(n-i)j/n & \dots\dots\dots & j/n & \dots\dots & -ij/n \\ . & & . & & . \\ . & & . & & . \\ . & & . & & . \\ (n-i)/n & \dots\dots\dots & (i,j) & \dots\dots & i/n \\ . & & . & & . \\ . & 2 & . & & 2 \\ -(n-i)(n-j)/n & \dots\dots & (n-j)/n & \dots\dots & -i(n-j)/n \end{array}$$

### 8.2.2 Formalisme éléments finis

Dans cette écriture, classiquement, l'élément fini est défini via ses nœuds et ses fonctions de formes, il s'écrit alors de manière formelle comme :

$$\sum_{ij} q_{ij}(u, v) A_{ij}, \quad (21)$$

où les  $q_{ij}$  sont les fonctions de forme et les  $A_{ij}$  sont les nœuds de l'élément. L'indice  $ij$  correspond à ce que serait un élément complet dont on ne considérerait que le bord, ainsi, si  $j = 0$  ou  $j = n$ ,  $i = 0, n$  et de même pour  $i = 0$  ou  $i = n$ , le nombre de nœuds (et de fonctions) est donc  $4(n + 1) - 4 = 4n$ .

Nous allons montrer comment trouver les fonctions de formes, les  $q_{ij}$ , et comment valider géométriquement un élément courant quelconque.

**Expression des fonctions de forme.** Trouver l'expression des  $q_{ij}$  dépend de la nature des données dont on dispose :

- si les données sont les fonctions de forme de l'élément complet :
  - on utilise (19) pour trouver directement comment répartir la fonction de forme centrale sur les autres, voir plus bas.
- sinon (on ne connaît pas les fonctions de forme de l'élément complet) :
  - on utilise (20) en remplaçant les  $P_{ij}$  internes par leur expression, i.e., (19),
  - on distribue la contribution de chaque  $P_{ij}$  interne dans le polynôme  $B_i^n(u)B_j^n(v)$  voulu,
  - on remplace alors les  $P_{ij}$  restants, ceux du bord donc, en fonction de leurs expressions en fonction des nœuds (du bord),
  - on regroupe la contribution de chacun de ces nœuds pour, au final, avoir l'expression des  $q_{ij}$ .

**Validation d'un élément.** La méthode de validation dépend de la nature des données dont on dispose :

- si les données sont les points de contrôle du bord :
  - on utilise (19) pour trouver les points de contrôle manquants et obtenir un élément complet.
- si les données sont les nœuds (du bord) :
  - on construit les points de contrôle du bord,
  - on est alors dans la situation précédente.

À titre d'illustration des méthodes de calcul des fonctions de forme, on va traiter explicitement le cas du quadrilatère à 8 nœuds et donner les fonctions du quadrilatère de degré 3..

**Le cas du quadrilatère à 8 nœuds.** On donne, en premier, le schéma de correspondance entre les deux systèmes d'indice utilisés :

02	12	22	4	7	3
01		21	8		6
00	10	20	1	5	2

**On ne connaît pas les fonctions de forme de l'élément complet.** On rappelle la relation qui lie les nœuds et les points de contrôle, par exemple, pour l'arête 00 – 20 alias 1 – 2, on a :

$$A_5 = \frac{A_1 + 2C_5 + A_2}{4}$$

$$C_5 = \frac{-A_1 + 4A_5 - A_2}{2}$$

où  $C_5$  est le point de contrôle de l'arête donc  $P_{10}$ .

Si la donnée est l'ensemble des nœuds, on calcule les points de contrôle des arêtes,  $P_{10}, P_{21}, P_{12}$  et  $P_{01}$

$$P_{10} = \frac{-P_{00} + 4A_{10} - P_{20}}{2}$$

$$P_{21} = \frac{-P_{20} + 4A_{21} - P_{22}}{2}$$

$$P_{12} = \frac{-P_{22} + 4A_{12} - P_{02}}{2}$$

$$P_{01} = \frac{-P_{02} + 4A_{01} - P_{00}}{2}.$$

Alors

$$P_{11} = -\frac{1}{4}(P_{00} + P_{20} + P_{22} + P_{02}) + \frac{1}{2}(P_{10} + P_{21} + P_{12} + P_{01}),$$

que l'on réécrit en terme de nœuds

$$P_{11} = -\frac{3}{4}(P_{00} + P_{20} + P_{22} + P_{02}) + (A_{10} + A_{21} + A_{12} + A_{01}),$$

Dans (20), on écrit tous les termes sauf celui en  $i = j = 1$  que l'on explicite, il vient :

$$\sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)P_{ij} + B_1^2(u)B_1^2(v)P_{11} \quad \text{sauf le terme en } 1,1 \text{ dans la somme.}$$

Pour expliciter les fonctions  $q_{ij}$ , il suffit de regrouper les contributions pertinentes. Par exemple, la première fonction de forme, facteur de  $A_{00}$  vaut :

$$q_{00} = B_0^2(u)B_0^2(v) - \frac{B_1^2(u)B_0^2(v)}{2} - \frac{B_0^2(u)B_1^2(v)}{2} - \frac{3}{4}B_1^2(u)B_1^2(v)$$

où l'on reconnaît la contribution de  $A_{00}$ , celles de  $P_{10}$  et de  $P_{01}$  puis celle de  $P_{11}$ . Un simple calcul donne :

$$q_{00} = (1-u)(1-v)(1-2u-2v).$$

Pour les autres  $q_{ij}$ , on procède de la même manière. La liste obtenue est la suivante (en indices séquentiels et en indices naturels, voir le schéma ci-dessus) :

$$q_1 = q_{00}(u, v) = (1-u)(1-v)(1-2u-2v)$$

$$q_2 = q_{20}(u, v) = u(1-v)(-1+2u-2v)$$

$$q_3 = q_{22}(u, v) = uv(-3+2u+2v)$$

$$q_4 = q_{02}(u, v) = (1-u)v(-1-2u+2v)$$

$$q_5 = q_{10}(u, v) = 4u(1-u)(1-v)$$

$$q_6 = q_{21}(u, v) = 4uv(1-v)$$

$$q_7 = q_{22}(u, v) = 4u(1-u)v$$

$$q_8 = q_{01}(u, v) = 4(1-u)v(1-v).$$

L'élément s'écrit (indices séquentiels) :

$$\sum_{i=1,8} q_i(u, v)A_i. \tag{22}$$

**On connaît les fonctions de forme de l'élément complet.** On a, pour l'élément complet, cf. (9) :

$$q_1^c = q_{00}^c(u, v) = (1-u)(1-2u)(1-v)(1-2v)$$

$$q_2^c = q_{20}^c(u, v) = -u(1-2u)(1-v)(1-2v)$$

$$q_3^c = q_{22}^c(u, v) = u(1-2u)v(1-2v)$$

$$q_4^c = q_{02}^c(u, v) = -(1-u)(1-2u)v(1-2v)$$

$$q_5^c = q_{10}^c(u, v) = 4u(1-u)(1-v)(1-2v)$$

$$q_6^c = q_{21}^c(u, v) = -4u(1-u)v(1-v)$$

$$q_7^c = q_{22}^c(u, v) = -4u(1-u)v(1-2v)$$

$$q_8^c = q_{01}^c(u, v) = 4(1-u)(1-2u)v(1-v)$$

$$q_9^c = q_{11}^c(u, v) = 16u(1-u)v(1-v),$$

et, par exemple, pour  $q_5$  réduit, on a :

$$q_5 = q_5^c + \frac{1}{2}q_9^c = 4u(1-u)(1-v)(1-2v) + 8u(1-u)v(1-v) = 4u(1-u)(1-v)(1-2v+2v) = 4u(1-u)(1-v),$$

et pour  $q_1$  réduit, on a :

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1^c - \frac{1}{4}q_9^c = (1-u)(1-2u)(1-v)(1-2v) - 4u(1-u)v(1-v) = (1-u)(1-v)((1-2u)(1-2v) - 4uv) \\ &= (1-u)(1-v)(1-2u-2v). \end{aligned}$$

Etc.

Calculons  $q_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , on trouve  $-\frac{1}{4}$ , donc  $4q_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + 1 = 0$ , calculons  $q_5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , on trouve  $\frac{1}{2}$ , donc  $4q_5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - 2 = 0$ , et ainsi de suite. Plus généralement, pour chaque  $q_i$ , on a la relation

$$4q_i(\text{centre}) + \sum_{j=1,4} q_i(\text{sommet}_j) - 2 \sum_{j=1,4} q_i(\text{milieu}_j) = 0, \quad (23)$$

qui est la relation définissante d'un élément Serendip. Par suite, notre élément de degré 2 réduit construit par interpolation transfinie appartient à la famille des éléments Serendip, soit :

**Théorème 3.** Le quadrilatère transfini de degré 2 appartient à la famille Serendip.  $\square$

Ce qui est rassurant, d'ailleurs on a évidemment trouvé le même élément que par la méthode générale.

**Le cas des quadrilatères transfinis de degré quelconque.** Pour trouver les fonctions de formes, on suit la même méthode que ci-dessus selon que l'on connaît ou pas les fonctions de forme de l'élément complet. Pour valider un élément courant, on reconstruit un élément complet.

L'algorithme dont les étapes sont détaillées ci-dessous permet de répondre à ces questions. Les étapes 1 et 2 permettent de reconstruire, étant donnés les nœuds,  $A_{ij}$ , de son bord, un élément complet. Les étapes suivantes donnent les fonctions de forme par regroupement des Bernstein (on est dans le cas où on ne suppose pas connaître les fonctions de l'élément complet).

- 1- Calcul des points de contrôle des 4 arêtes. Par exemple, pour l'arête  $v = 0$ , on a :

$$\sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} B_i^n(u) B_j^n(0) P_{ij} = \sum_{i=0,n} B_i^n(u) B_0^n(0) P_{i0} = \sum_{i=0,n} B_i^n(u) P_{i0}.$$

On instancie alors  $u$  aux valeurs  $u = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ , ce qui donne un système  $(n-1) \times (n-1)$  à  $n-1$  inconnues, les  $P_{i0}$  pour  $i = 1, n-1$ . Plus précisément, le système s'écrit :

$$\begin{aligned} A_{10} &= \sum_{i=0,n} B_i^n\left(\frac{1}{n}\right) P_{i0} \\ A_{20} &= \sum_{i=0,n} B_i^n\left(\frac{2}{n}\right) P_{i0} \\ &\dots \\ A_{n-1,0} &= \sum_{i=0,n} B_i^n\left(\frac{n-1}{n}\right) P_{i0}. \end{aligned}$$

Et la solution donne les  $P_{i0}$ .

- 2- Calcul des points de contrôle internes. On utilise la Relation (19), soit :

$$P_{ij} = \alpha_j^n P_{i0} + \beta_j^n P_{in} + \alpha_i^n P_{0j} + \beta_i^n P_{nj} - \alpha_i^n \alpha_j^n P_{00} - \alpha_i^n \beta_j^n P_{0n} - \alpha_j^n \beta_i^n P_{n0} - \beta_i^n \beta_j^n P_{nn},$$

pour  $i = 1, n-1$  et  $j = 1, n-1$ .

- 3- Expression des points de contrôle en fonction des nœuds. Cette étape revient à trouver quels nœuds se cachent derrière les points de contrôle. Les nœuds des arêtes,  $A_{ij}$  pour les bonnes valeurs des indices, sont présents dans les  $P_{ij}$  de même indices et dans ces mêmes  $P_{ij}$  présents dans la Relation (19). Les nœuds sommet (les coins),  $A_{ij}$  pour les bonnes valeurs des indices, sont présents en tant que tels puis dans tous les points de contrôle des deux arêtes incidentes et dans ces mêmes points présents dans la Relation (19). Chaque contribution étant identifiée avec sa pondération, on passe à l'étape suivante :
- 4- Combinaisons linéaires des produits  $B_i^n(u) B_j^n(v)$  avec les pondérations adéquates.

**Le cas du quadrilatère à 12 nœuds.** Pour le quadrilatère de degré 3, cet algorithme donne :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{9}{2}(1-u)(1-v)\left(\frac{2}{9} - u - v + u^2 + v^2\right) \\ q_5 &= \frac{9}{2}u(1-u)(2-3u)(1-v) \end{aligned}$$

les autres fonctions de forme s'en déduisant simplement. Par exemple pour  $q_2$ , on remplace  $u$  par  $(1-u)$  dans  $q_1$ , soit :

$$q_2 = \frac{9}{2}u(1-v)\left(\frac{2}{9} - u - v + u^2 + v^2\right),$$

et pour  $q_6$ , on remplace  $u$  par  $(1-u)$  dans  $q_5$ , soit :

$$q_6 = \frac{9}{2}u(1-u)(3u-1)(1-v),$$

etc.,  $q_4$  vient de  $q_1$  en changeant  $(1-v)$  par  $v$ ,  $q_3$  vient de  $q_2$  en changeant  $(1-v)$  par  $v$ ,  $q_9$  et  $q_{10}$  viennent de  $q_6$  et  $q_5$  en changeant  $(1-v)$  par  $v$ , enfin  $q_7$  se déduit de  $q_5$  en permutant  $u$  et  $v$  et en changeant  $(1-v)$  par  $u$ , etc. *In extenso*, cela donne :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{9}{2}(1-u)(1-v)\left(\frac{2}{9} - u - v + u^2 + v^2\right), \\ q_2 &= \frac{9}{2}u(1-v)\left(\frac{2}{9} - u - v + u^2 + v^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_3 &= \frac{9}{2}uv\left(\frac{2}{9} - u - v + u^2 + v^2\right), \\
q_4 &= \frac{9}{2}(1-u)v\left(\frac{2}{9} - u - v + u^2 + v^2\right), \\
q_5 &= \frac{9}{2}u(1-u)(2-3u)(1-v), \\
q_6 &= \frac{9}{2}u(1-u)(3u-1)(1-v), \\
q_7 &= \frac{9}{2}v(1-v)(2-3v)u, \\
q_8 &= \frac{9}{2}v(1-v)(3v-1)u, \\
q_9 &= \frac{9}{2}u(1-u)(3u-1)v, \\
q_{10} &= \frac{9}{2}u(1-u)(2-3u)v, \\
q_{11} &= \frac{9}{2}v(1-v)(3v-1)(1-u), \\
q_{12} &= \frac{9}{2}v(1-v)(2-3v)(1-u).
\end{aligned}$$

Cet élément vérifie les relations de Serendipité donc le quadrilatère de degré 3 transfini est un élément Serendip, soit :

**Théorème 4.** Le quadrilatère transfini de degré 3 appartient à la famille Serendip.  $\square$

Ce qui est rassurant, d'ailleurs on a évidemment trouvé le même élément que par la méthode générale.

**Quadrilatères transfinis de degré arbitraire.** On a vu que les quadrilatères transfinis de degré 2 et 3 sont des éléments Serendip (au sens où les polynômes de base contiennent  $P^2, u^2v, uv^2$  et  $P^3, u^3v, uv^3$  respectivement). Par contre, ceci n'est plus vrai aux degrés plus élevés, les quadrilatères transfinis sont des éléments sans nœuds internes mais pas plus. On a vu, en effet, que ce résultat négatif est vrai dès le degré 4 et que l'élément Serendip de degré 4 doit avoir un (seul) nœud interne et, par suite, ce quadrilatère transfini classique (voir dans la conclusion la remarque à ce sujet) tout comme ceux de degré supérieur ne sont pas des carreaux Serendip (l'espace des polynômes n'est pas assez riche ou, vu autrement, le nombre de nœuds est insuffisant).

## 9 Validation d'un élément de degré quelconque

Ayant reconstruit un élément complet (cas Serendip et/ou cas transfini), on le valide comme vu dans diverses références, par exemple [6], [9], en utilisant la condition suffisante, jacobien strictement positif aux sommets et autres coefficients non négatifs. En effet, comme la fonction de définition du carreau, notée  $\sigma(u, v)$ , est :

$$\sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} B_i^n(u)B_j^n(v)P_{ij},$$

son jacobien est le polynôme (de Bézier) suivant :

$$\mathcal{J}(u, v) = n^2 \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=0,n} \sum_{k=0,n} \sum_{l=0,n-1} B_i^{n-1}(u)B_j^n(v)B_k^n(u)B_l^{n-1}(v) \left| \Delta_{i,j}^{1,0} \quad \Delta_{k,l}^{0,1} \quad \vec{n} \right|,$$

avec  $\vec{n} = {}^t(0, 0, 1)$ ,  $\Delta_{i,j}^{1,0} = \overrightarrow{P_{ij}P_{i+1,j}}$  et  $\Delta_{k,l}^{0,1} = \overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}}$ . Ceci s'écrit également :

$$\mathcal{J}(u, v) = n^2 \sum_{I=0,2n-1} \sum_{J=0,2n-1} B_I^{2n-1}(u) B_J^{2n-1}(v) N_{IJ}, \quad (24)$$

avec, pour  $i_1 = 0, n-1, i_2 = 0, n, j_1 = 0, n, j_2 = 0, n-1$  :

$$N_{IJ} = \sum_{i_1+i_2=I} \sum_{j_1+j_2=J} \frac{C_{i_1}^{n-1} C_{i_2}^n}{C_{i_1+i_2}^{2n-1}} \frac{C_{j_1}^n C_{j_2}^{n-1}}{C_{j_1+j_2}^{2n-1}} |\Delta_{i_1,j_1}^{1,0} \Delta_{i_2,j_2}^{0,1} \vec{n}|. \quad (25)$$

Il y a  $4n^2$  tels coefficients de contrôle. Chaque coefficient est une somme pondérée de différents termes, hormis les coefficients coin qui ne possède qu'un seul terme (qui mesure la surface du triangle de sommets le coin et ses deux points de contrôle adjacents et, ainsi, contrôle l'angle entre les tangentes aux deux arêtes (courbes) incidentes, voir par exemple  $N_{00}$ ).

## 10 Le cas de la trois dimensions

On regarde le cas des hexaèdres. En premier on utilise des développements de Taylor pour trouver les relations définissant la Serendipité, ensuite on regarde ce que sont les hexaèdres construits par interpolation transfinie.

### 10.1 Construction de l'hexaèdre Serendip de degré 2

**Relation de Serendipité.** On part de la Relation (3), à savoir :

$$4q(A_{11}) + \sum_{k=1,4} q(\text{sommet}_k) - 2 \sum_{k=1,4} q(\text{noeudarete}_k) = 0,$$

et on l'impose sur les six faces de l'hexaèdre, ce qui donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 4q(A_{110}) + \{q(A_{000}) + q(A_{200}) + q(A_{220}) + q(A_{020})\} - 2\{q(A_{100}) + q(A_{210}) + q(A_{120}) + q(A_{010})\} &= 0, \\ 4q(A_{112}) + \{q(A_{002}) + q(A_{202}) + q(A_{222}) + q(A_{022})\} - 2\{q(A_{102}) + q(A_{212}) + q(A_{122}) + q(A_{012})\} &= 0, \\ 4q(A_{101}) + \{q(A_{000}) + q(A_{200}) + q(A_{002}) + q(A_{202})\} - 2\{q(A_{100}) + q(A_{201}) + q(A_{102}) + q(A_{001})\} &= 0, \\ 4q(A_{121}) + \{q(A_{020}) + q(A_{220}) + q(A_{022}) + q(A_{222})\} - 2\{q(A_{120}) + q(A_{221}) + q(A_{122}) + q(A_{021})\} &= 0, \\ 4q(A_{211}) + \{q(A_{200}) + q(A_{220}) + q(A_{222}) + q(A_{202})\} - 2\{q(A_{201}) + q(A_{210}) + q(A_{221}) + q(A_{212})\} &= 0, \\ 4q(A_{011}) + \{q(A_{000}) + q(A_{020}) + q(A_{022}) + q(A_{002})\} - 2\{q(A_{001}) + q(A_{010}) + q(A_{021}) + q(A_{012})\} &= 0, \end{aligned}$$

et on ajoute une liaison analogue dans le plan<sup>7</sup> défini par  $A_{100}, A_{102}, A_{120}, A_{220}$  pour lier  $A_{111}$ , soit :

$$4q(A_{111}) + \{q(A_{100}) + q(A_{102}) + q(A_{120}) + q(A_{122})\} - 2\{q(A_{101}) + q(A_{121}) + q(A_{110}) + q(A_{112})\} = 0, \quad (26)$$

et l'ensemble de ces 7 relations définit le caractère Serendip de l'élément.

Dans la dernière relation, on remplace  $q(A_{101}) + q(A_{121}) + q(A_{110}) + q(A_{112})$  par les valeurs des 6 premières relations, soit :

$$\begin{aligned} 4q(A_{111}) + \{q(A_{100}) + q(A_{102}) + q(A_{120}) + q(A_{122})\} - 2\{q(A_{101}) + q(A_{121}) + q(A_{110}) + q(A_{112})\} &= \\ 4q(A_{111}) + \{q(A_{100}) + q(A_{102}) + q(A_{120}) + q(A_{122})\} & \\ + \frac{1}{2} \{q(A_{000}) + q(A_{200}) + q(A_{002}) + q(A_{202})\} & \\ - \{q(A_{100}) + q(A_{201}) + q(A_{102}) + q(A_{001})\} & \end{aligned}$$

<sup>7</sup>On aurait pu choisir l'autre plan "médián".

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \{q(A_{020}) + q(A_{220}) + q(A_{022}) + q(A_{222})\} \\
& - \{q(A_{120}) + q(A_{221}) + q(A_{122}) + q(A_{021})\} \\
& + \frac{1}{2} \{q(A_{000}) + q(A_{200}) + q(A_{220}) + q(A_{020})\} \\
& - \{q(A_{100}) + q(A_{210}) + q(A_{120}) + q(A_{010})\} \\
& + \frac{1}{2} \{q(A_{002}) + q(A_{202}) + q(A_{222}) + q(A_{022})\} \\
& - \{q(A_{102}) + q(A_{212}) + q(A_{122}) + q(A_{012})\} = 0,
\end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$\begin{aligned}
& 4q(A_{111}) + \{q(A_{100}) + q(A_{102}) + q(A_{120}) + q(A_{122})\} \\
& + \{q(A_{000}) + q(A_{200}) + q(A_{002}) + q(A_{202})\} \\
& - \{q(A_{100}) + q(A_{201}) + q(A_{102}) + q(A_{001})\} \\
& + \{q(A_{020}) + q(A_{220}) + q(A_{022}) + q(A_{222})\} \\
& - \{q(A_{120}) + q(A_{221}) + q(A_{122}) + q(A_{021})\} \\
& - \{q(A_{100}) + q(A_{210}) + q(A_{120}) + q(A_{010})\} \\
& - \{q(A_{102}) + q(A_{212}) + q(A_{122}) + q(A_{012})\} = 0,
\end{aligned}$$

qui se réduit encore à :

$$\begin{aligned}
& 4q(A_{111}) + \{q(A_{000}) + q(A_{200}) + q(A_{002}) + q(A_{202})\} \\
& - \{q(A_{201}) + q(A_{001})\} \\
& + \{q(A_{020}) + q(A_{220}) + q(A_{022}) + q(A_{222})\} \\
& - \{q(A_{221}) + q(A_{122}) + q(A_{021})\} \\
& - \{q(A_{100}) + q(A_{210}) + q(A_{120}) + q(A_{010})\} \\
& - \{q(A_{102}) + q(A_{212}) + q(A_{012})\} = 0,
\end{aligned}$$

que l'on écrit comme :

$$\begin{aligned}
& 4q(A_{111}) + \{q(A_{000}) + q(A_{200}) + q(A_{002}) + q(A_{202}) + q(A_{020}) + q(A_{220}) + q(A_{022}) + q(A_{222})\} \\
& - \{q(A_{201}) + q(A_{001}) + q(A_{221}) + q(A_{122}) + q(A_{021})\} \\
& + \{q(A_{100}) + q(A_{210}) + q(A_{120}) + q(A_{010}) + q(A_{102}) + q(A_{212}) + q(A_{012})\} = 0,
\end{aligned}$$

ou, simplement :

$$4q(A_{111}) + \sum_{k=1,8} q(\text{sommet}_k) - \sum_{k=1,12} q(\text{noeudarete}_k) = 0, \quad (27)$$

en notant la parfaite symétrie de cette liaison.



**Les fonctions de forme.** On cherche ces fonctions sous la forme :

$$q_{ijk}(u, v, w) = q_{ijk}^c(u, v, w) + \alpha_{110}q_{110}^c(u, v, w) + \alpha_{112}q_{112}^c(u, v, w) + \alpha_{101}q_{101}^c(u, v, w) \\ + \alpha_{121}q_{121}^c(u, v, w) + \alpha_{211}q_{211}^c(u, v, w) + \alpha_{011}q_{011}^c(u, v, w) + \alpha_{0111}q_{0111}^c(u, v, w),$$

où les fonctions complètes sont de la forme (comme à la Relation (9)) :

$$q_{ijk}^c(u, v, w) = \phi_i(u)\phi_j(v)\phi_k(w), \quad (28)$$

avec :

$$\phi_i(u) = \frac{-1^i}{i!(n-i)!} \prod_{l=0, l \neq i}^{l=n} (l - nu),$$

Ainsi pour la première, alias  $q_{000}$ , on a les coefficients issus du système :

$$\alpha_{110} = \alpha_{101} = \alpha_{011} = \alpha_{111} = -\frac{1}{4},$$

les autres étant nuls. Comme :

$$q_{000}^c = (1-2u)(1-u)(1-2v)(1-v)(1-2w)(1-w), \\ q_{111}^c = 64u(1-u)v(1-v)w(1-w), \\ q_{110}^c = 16u(1-u)v(1-v)(1-w)(1-2w), \\ q_{101}^c = 16u(1-u)(1-v)(1-2v)w(1-w), \\ q_{011}^c = 16(1-u)(1-2u)v(1-v)w(1-w),$$

on trouve :

$$q_{000} = (1-u)(1-v)(1-w) \{ (1-2u)(1-2v)(1-2w) - 16uvw - 4uv(1-2w) - 4u(1-2v)w - 4(1-2u)vw \}, \\ q_{000} = (1-u)(1-v)(1-w)(1-2u-2v-2w),$$

qui est l'expression attendue.

Pour avoir l'ensemble des fonctions, il suffit de calculer  $q_{100}$ , on a alors les coefficients :

$$\alpha_{110} = \alpha_{101} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_{111} = \frac{1}{4},$$

les autres étant nuls. Comme :

$$q_{100}^c = 4u(1-u)(1-2v)(1-v)(1-2w)(1-w),$$

il vient

$$q_{100} = (1-u)(1-v)(1-w) \{ 4u(1-2v)(1-2w) + 8uv(1-2w) + 8u(1-2v)w + 16uvw \}, \\ q_{100} = 4u(1-u)(1-v)(1-w),$$

qui est l'expression attendue.

1	$q_1 = q_{000}(u, v, w) = (1-u)(1-v)(1-w)(1-2u-2v-2w)$
9	$q_9 = q_{100}(u, v, w) = 4u(1-u)(1-v)(1-w)$

Les 2 fonctions de forme type de l'hexaèdre de degré 2 à 20 nœuds
---

Toutes les autres fonctions s'en déduisent par symétries et rotations.

**Validation d'un élément courant.** Pour pouvoir utiliser la condition de validation, il faut construire les points de contrôle d'un élément complet correspondant à l'élément réduit courant examiné. La numérotation des nœuds ou points est la suivante (de gauche à droite, la face  $w = 0$ , le plan milieu et la face  $w = 1$ ) :

$$\begin{array}{ccc} 020 & 120 & 220 & 021 & 121 & 221 & 022 & 122 & 222 \\ 010 & 110 & 210 & 011 & 111 & 211 & 012 & 112 & 212 \\ 000 & 100 & 200 & 001 & 101 & 201 & 002 & 102 & 202 \end{array}$$

Les points de contrôle des arêtes sont définis, à partir des nœuds par la relation classique (pour la première arête) :

$$P_{100} = \frac{4A_{100} - A_{000} - A_{200}}{2}.$$

Les points de contrôle des arêtes étant connus, ceux des faces sont définis par la relation déjà vue, à savoir (ici pour la face  $w = 0$ ) :

$$P_{110} = -\frac{1}{4}(P_{000} + P_{200} + P_{220} + P_{020}) + \frac{1}{2}(P_{100} + P_{210} + P_{120} + P_{010}).$$

Pour le dernier point à reconstruire est  $P_{111}$ , la Relation (27) permet de construire le nœud, noté  $A_{111}$ , suivant :

$$A_{111} = -\frac{1}{4} \sum_{k=1,8} \text{sommet}_k + \frac{1}{4} \sum_{k=1,12} \text{noeudarete}_k,$$

mais ce point est aussi défini par :

$$\sum_i \sum_j \sum_k B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) P_{ijk},$$

pour le triplet  $(u, v, w) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  soit l'expression (avec des notations évidentes) :

$$64A_{111} = \sum_{k=1,8} P_{\text{sommet}_k} + 2 \sum_{k=1,12} P_{\text{parete}_k} + 4 \sum_{k=1,6} P_{\text{face}_k} + 8P_{111},$$

et on remplace  $A_{111}$ , il vient :

$$-16 \sum_{k=1,8} \text{sommet}_k + 16 \sum_{k=1,12} \text{noeudarete}_k = \dots,$$

donc :

$$8P_{111} = -16 \sum_{k=1,8} \text{sommet}_k + 16 \sum_{k=1,12} \text{noeudarete}_k - \sum_{k=1,8} P_{\text{sommet}_k} - 2 \sum_{k=1,12} P_{\text{parete}_k} - 4 \sum_{k=1,6} P_{\text{face}_k},$$

on remplace alors les nœuds des arêtes en fonction des points de contrôle, soit, formellement :

$$\begin{aligned} 8P_{111} &= -16 \sum_{k=1,8} \text{sommet}_k + 4 \sum_{k=1,12} (\text{sommet}_{1k} + \text{sommet}_{2k} + 2P_{\text{parete}_k}) \\ &\quad - \sum_{k=1,8} P_{\text{sommet}_k} - 2 \sum_{k=1,12} P_{\text{parete}_k} - 4 \sum_{k=1,6} P_{\text{face}_k}, \end{aligned}$$

et comme les sommets sont des points de contrôle, on regroupe et on obtient :

$$8P_{111} = -5 \sum_{k=1,8} P_{\text{sommet}_k} + 6 \sum_{k=1,12} P_{\text{parete}_k} - 4 \sum_{k=1,6} P_{\text{face}_k},$$

soit, au final :

$$P_{111} = -\frac{5}{8} \sum_{k=1,8} P_{\text{sommet}_k} + \frac{3}{4} \sum_{k=1,12} P_{\text{parete}_k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1,6} P_{\text{face}_k}.$$

**En pratique.** À partir des nœuds de l'élément examiné, on construit les points de contrôle des arêtes puis ceux des faces et pour finir le point central.

## 10.2 Construction de l'hexaèdre Serendip de degré 3

On suit la même méthode, pour les 6 faces on reprend les relations vues pour le quadrilatère de degré 3 (soit  $6 \times 4$  équations) et on considère deux plans<sup>8</sup> transversaux "milieux" (soit  $2 \times 4$  équations) ce qui va nous donner le système des 32 relations définissant la Serendipité.

La numérotation des nœuds ou points est la suivante (de gauche à droite, la face  $w = 0$ , les plans intermédiaires et la face  $w = 1$ ) :

030	130	230	330	031	131	231	331	032	132	232	332	033	133	233	333
020	120	220	320	021	121	221	321	022	122	222	322	023	123	223	323
010	110	210	310	011	111	211	311	012	112	212	312	013	113	213	313
000	100	200	300	001	101	201	301	002	102	202	302	003	103	203	303

On reprend les Relations (8) de la deux dimensions, à savoir :

$$9q(A_{11}) + 4q(A_{00}) + 2q(A_{30}) + q(A_{33}) + 2q(A_{03}) - 6q(A_{10}) - 3q(A_{31}) - 3q(A_{13}) - 6q(A_{01}) = 0,$$

$$9q(A_{21}) + 2q(A_{00}) + 4q(A_{30}) + 2q(A_{33}) + q(A_{03}) - 6q(A_{20}) - 6q(A_{31}) - 3q(A_{23}) - 3q(A_{01}) = 0,$$

$$9q(A_{12}) + 2q(A_{00}) + q(A_{30}) + 2q(A_{33}) + 4q(A_{03}) - 3q(A_{10}) - 3q(A_{32}) - 6q(A_{13}) - 6q(A_{02}) = 0,$$

$$9q(A_{22}) + q(A_{00}) + 2q(A_{30}) + 4q(A_{33}) + 2q(A_{03}) - 3q(A_{20}) - 6q(A_{32}) - 6q(A_{23}) - 3q(A_{02}) = 0,$$

et, par simple substitution<sup>9</sup>, on obtient en mettant 0 en troisième indice, pour la face  $w = 0$  :

(*Fij0*)

$$9q(A_{110}) + 4q(A_{000}) + 2q(A_{300}) + q(A_{330}) + 2q(A_{030}) - 6q(A_{100}) - 3q(A_{310}) - 3q(A_{130}) - 6q(A_{010}) = 0,$$

$$9q(A_{210}) + 2q(A_{000}) + 4q(A_{300}) + 2q(A_{330}) + q(A_{030}) - 6q(A_{200}) - 6q(A_{310}) - 3q(A_{230}) - 3q(A_{010}) = 0,$$

$$9q(A_{120}) + 2q(A_{000}) + q(A_{300}) + 2q(A_{330}) + 4q(A_{030}) - 3q(A_{100}) - 3q(A_{320}) - 6q(A_{130}) - 6q(A_{020}) = 0,$$

$$9q(A_{220}) + q(A_{000}) + 2q(A_{300}) + 4q(A_{330}) + 2q(A_{030}) - 3q(A_{200}) - 6q(A_{320}) - 6q(A_{230}) - 3q(A_{020}) = 0,$$

puis, en changeant le troisième indice en 3, pour la face  $w = 1$  :

(*Fij3*)

$$9q(A_{113}) + 4q(A_{003}) + 2q(A_{303}) + q(A_{333}) + 2q(A_{033}) - 6q(A_{103}) - 3q(A_{313}) - 3q(A_{133}) - 6q(A_{013}) = 0,$$

$$9q(A_{213}) + 2q(A_{003}) + 4q(A_{303}) + 2q(A_{333}) + q(A_{033}) - 6q(A_{203}) - 6q(A_{313}) - 3q(A_{233}) - 3q(A_{013}) = 0,$$

$$9q(A_{123}) + 2q(A_{003}) + q(A_{303}) + 2q(A_{333}) + 4q(A_{033}) - 3q(A_{103}) - 3q(A_{323}) - 6q(A_{133}) - 6q(A_{023}) = 0,$$

$$9q(A_{223}) + q(A_{003}) + 2q(A_{303}) + 4q(A_{333}) + 2q(A_{033}) - 3q(A_{203}) - 6q(A_{323}) - 6q(A_{233}) - 3q(A_{023}) = 0,$$

puis, repartant du quadrilatère, la face  $u = 0$  :

(*F0jk*)

$$9q(A_{011}) + 4q(A_{000}) + 2q(A_{030}) + q(A_{033}) + 2q(A_{003}) - 6q(A_{010}) - 3q(A_{031}) - 3q(A_{013}) - 6q(A_{001}) = 0,$$

$$9q(A_{021}) + 2q(A_{000}) + 4q(A_{030}) + 2q(A_{033}) + q(A_{003}) - 6q(A_{020}) - 6q(A_{031}) - 3q(A_{023}) - 3q(A_{001}) = 0,$$

$$9q(A_{012}) + 2q(A_{000}) + q(A_{030}) + 2q(A_{033}) + 4q(A_{003}) - 3q(A_{010}) - 3q(A_{032}) - 6q(A_{013}) - 6q(A_{002}) = 0,$$

<sup>8</sup>cf. infra.

<sup>9</sup>Ce qui suit peut sembler fastidieux, en fait, c'est mécanique et on passe de l'une à l'autre des équations via de simples substitutions, et un bon éditeur de texte!

$9q(A_{022})+q(A_{000})+2q(A_{030})+4q(A_{033})+2q(A_{003})-3q(A_{020})-6q(A_{032})-6q(A_{023})-3q(A_{002}) = 0$ ,  
et, la face  $u = 1$  :

$$(F3jk)$$

$9q(A_{311})+4q(A_{300})+2q(A_{330})+q(A_{333})+2q(A_{303})-6q(A_{310})-3q(A_{331})-3q(A_{313})-6q(A_{301}) = 0$ ,  
 $9q(A_{321})+2q(A_{300})+4q(A_{330})+2q(A_{333})+q(A_{303})-6q(A_{320})-6q(A_{331})-3q(A_{323})-3q(A_{301}) = 0$ ,  
 $9q(A_{312})+2q(A_{300})+q(A_{330})+2q(A_{333})+4q(A_{303})-3q(A_{310})-3q(A_{332})-6q(A_{313})-6q(A_{302}) = 0$ ,  
 $9q(A_{322})+q(A_{300})+2q(A_{330})+4q(A_{333})+2q(A_{303})-3q(A_{320})-6q(A_{332})-6q(A_{323})-3q(A_{302}) = 0$ ,  
enfin, repartant du quadrialtère, la face  $v = 0$  :

$$(Fi0k)$$

$9q(A_{101})+4q(A_{000})+2q(A_{300})+q(A_{303})+2q(A_{003})-6q(A_{100})-3q(A_{301})-3q(A_{103})-6q(A_{001}) = 0$ ,  
 $9q(A_{201})+2q(A_{000})+4q(A_{300})+2q(A_{303})+q(A_{003})-6q(A_{200})-6q(A_{301})-3q(A_{203})-3q(A_{001}) = 0$ ,  
 $9q(A_{102})+2q(A_{000})+q(A_{300})+2q(A_{303})+4q(A_{003})-3q(A_{100})-3q(A_{302})-6q(A_{103})-6q(A_{002}) = 0$ ,  
 $9q(A_{202})+q(A_{000})+2q(A_{300})+4q(A_{303})+2q(A_{003})-3q(A_{200})-6q(A_{302})-6q(A_{203})-3q(A_{002}) = 0$ ,  
et la face  $v = 1$  :

$$(Fi3k)$$

$9q(A_{131})+4q(A_{030})+2q(A_{330})+q(A_{333})+2q(A_{033})-6q(A_{130})-3q(A_{331})-3q(A_{133})-6q(A_{031}) = 0$ ,  
 $9q(A_{231})+2q(A_{030})+4q(A_{330})+2q(A_{333})+q(A_{033})-6q(A_{230})-6q(A_{331})-3q(A_{233})-3q(A_{031}) = 0$ ,  
 $9q(A_{132})+2q(A_{030})+q(A_{330})+2q(A_{333})+4q(A_{033})-3q(A_{130})-3q(A_{332})-6q(A_{133})-6q(A_{032}) = 0$ ,  
 $9q(A_{232})+q(A_{030})+2q(A_{330})+4q(A_{333})+2q(A_{033})-3q(A_{230})-6q(A_{332})-6q(A_{233})-3q(A_{032}) = 0$ ,  
plus pénibles sont les 2 derniers quadruplets de relations. La première pseudo-face à considérer est :

020 120 220 320	03 13 23 33
021 121 221 321	02 12 22 32
a rapprocher de	
022 122 222 322	01 11 21 31
023 123 223 323	00 10 20 30

donc, par simple substitution, on trouve :

$$(FFF1)$$

$9q(A_{122})+4q(A_{023})+2q(A_{323})+q(A_{320})+2q(A_{020})-6q(A_{123})-3q(A_{322})-3q(A_{120})-6q(A_{022}) = 0$ ,  
 $9q(A_{222})+2q(A_{023})+4q(A_{323})+2q(A_{320})+q(A_{020})-6q(A_{223})-6q(A_{322})-3q(A_{220})-3q(A_{022}) = 0$ ,  
 $9q(A_{121})+2q(A_{023})+q(A_{323})+2q(A_{320})+4q(A_{020})-3q(A_{123})-3q(A_{321})-6q(A_{120})-6q(A_{021}) = 0$ ,  
 $9q(A_{221})+q(A_{023})+2q(A_{323})+4q(A_{320})+2q(A_{020})-3q(A_{223})-6q(A_{321})-6q(A_{220})-3q(A_{021}) = 0$ ,

La seconde pseudo-face à considérer est :

010 110 210 310	03 13 23 33
011 111 211 311	02 12 22 32
a rapprocher de	
012 112 212 312	01 11 21 31
013 113 213 313	00 10 20 30

donc, toujours par simple substitution, on trouve :

$$(FFF2)$$

$$\begin{aligned} 9q(A_{112})+4q(A_{013})+2q(A_{313})+q(A_{310})+2q(A_{010})-6q(A_{113})-3q(A_{312})-3q(A_{110})-6q(A_{012}) &= 0, \\ 9q(A_{212})+2q(A_{013})+4q(A_{313})+2q(A_{310})+q(A_{010})-6q(A_{213})-6q(A_{312})-3q(A_{210})-3q(A_{012}) &= 0, \\ 9q(A_{111})+2q(A_{013})+q(A_{313})+2q(A_{310})+4q(A_{010})-3q(A_{113})-3q(A_{311})-6q(A_{110})-6q(A_{011}) &= 0, \\ 9q(A_{211})+q(A_{013})+2q(A_{313})+4q(A_{310})+2q(A_{010})-3q(A_{213})-6q(A_{311})-6q(A_{210})-3q(A_{011}) &= 0. \end{aligned}$$

Les relations de Serendipité sont les 6 relations notées  $(Fijk)$  complétées par les 2 relations  $(FFFi)$  dans lesquelles il faut reporter ce qui vient des relations  $(Fijk)$ .

Pour la première ligne de  $(FFF1)$ , on a :

$$\begin{aligned} 9q(A_{122}) + 4q(A_{023}) + 2q(A_{323}) + q(A_{320}) + 2q(A_{020}) \\ - 6q(A_{123}) - 3q(A_{322}) - 3q(A_{120}) - 6q(A_{022}) = 0, \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} 9q(A_{122}) + 4q(A_{023}) + 2q(A_{323}) + q(A_{320}) + 2q(A_{020}) \\ + 6/9(2q(A_{003}) + q(A_{303}) + 2q(A_{333}) + 4q(A_{033}) - 3q(A_{103}) - 3q(A_{323}) - 6q(A_{133}) - 6q(A_{023})) \\ + 3/9(q(A_{300}) + 2q(A_{330}) + 4q(A_{333}) + 2q(A_{303}) - 3q(A_{320}) - 6q(A_{332}) - 6q(A_{323}) - 3q(A_{302})) \\ + 3/9(2q(A_{000}) + q(A_{300}) + 2q(A_{330}) + 4q(A_{030}) - 3q(A_{100}) - 3q(A_{320}) - 6q(A_{130}) - 6q(A_{020})) \\ + 6/9(q(A_{000}) + 2q(A_{030}) + 4q(A_{033}) + 2q(A_{003}) - 3q(A_{020}) - 6q(A_{032}) - 6q(A_{023}) - 3q(A_{002})) = 0, \end{aligned}$$

soit, en les huit sommets (qui se regroupent) et le reste (8 termes s'annulent) :

$$(FF11)$$

$$\begin{aligned} 9q(A_{122})+4/3q(A_{000})+2/3q(A_{300})+4/3q(A_{330})+8/3q(A_{030})+8/3q(A_{003})+4/3q(A_{303})+8/3q(A_{333})+16/3q(A_{033}) \\ - 2q(A_{103}) - 2q(A_{323}) - 4q(A_{133}) - 4q(A_{023}) \\ - q(A_{320}) - 2q(A_{332}) - q(A_{302}) - q(A_{100}) - 2q(A_{130}) - 2q(A_{020}) - 4q(A_{032}) - 2q(A_{002}) = 0. \end{aligned}$$

Pour la seconde ligne de  $(FFF1)$ , on a :

$$\begin{aligned} 9q(A_{222}) + 2q(A_{023}) + 4q(A_{323}) + 2q(A_{320}) + q(A_{020}) \\ - 6q(A_{223}) - 6q(A_{322}) - 3q(A_{220}) - 3q(A_{022}) = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} 9q(A_{222}) + 2q(A_{023}) + 4q(A_{323}) + 2q(A_{320}) + q(A_{020}) \\ + 6/9(q(A_{003}) + 2q(A_{303}) + 4q(A_{333}) + 2q(A_{033}) - 3q(A_{203}) - 6q(A_{323}) - 6q(A_{233}) - 3q(A_{023})) \\ + 6/9(q(A_{300}) + 2q(A_{330}) + 4q(A_{333}) + 2q(A_{303}) - 3q(A_{320}) - 6q(A_{332}) - 6q(A_{323}) - 3q(A_{302})) \\ + 3/9(q(A_{000}) + 2q(A_{300}) + 4q(A_{330}) + 2q(A_{030}) - 3q(A_{200}) - 6q(A_{320}) - 6q(A_{230}) - 3q(A_{020})) \\ + 3/9(q(A_{000}) + 2q(A_{030}) + 4q(A_{033}) + 2q(A_{003}) - 3q(A_{020}) - 6q(A_{032}) - 6q(A_{023}) - 3q(A_{002})) = 0, \end{aligned}$$

soit, en les huit sommets (qui se regroupent) et le reste (8 termes s'annulent) :

$$(FF12)$$

$$\begin{aligned} 9q(A_{222})+2/3q(A_{000})+4/3q(A_{300})+8/3q(A_{330})+4/3q(A_{030})+4/3q(A_{003})+8/3q(A_{303})+16/3q(A_{333})+8/3q(A_{033}) \\ - 2q(A_{203}) - 4q(A_{323}) - 4q(A_{233}) - 2q(A_{023}) \\ - 2q(A_{320}) - 4q(A_{332}) - 2q(A_{302}) - q(A_{200}) - 2q(A_{230}) - q(A_{020}) - 2q(A_{032}) - q(A_{002}) = 0. \end{aligned}$$

Pour la troisième ligne de  $(FF1)$ , on a :

$$\begin{aligned} &9q(A_{121}) + 2q(A_{023}) + q(A_{323}) + 2q(A_{320}) + 4q(A_{020}) \\ &- 3q(A_{123}) - 3q(A_{321}) - 6q(A_{120}) - 6q(A_{021}) = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} &9q(A_{121}) + 2q(A_{023}) + q(A_{323}) + 2q(A_{320}) + 4q(A_{020}) \\ &+ 3/9(2q(A_{003}) + q(A_{303}) + 2q(A_{333}) + 4q(A_{033}) - 3q(A_{103}) - 3q(A_{323}) - 6q(A_{133}) - 6q(A_{023})) \\ &+ 3/9(2q(A_{300}) + 4q(A_{330}) + 2q(A_{333}) + q(A_{303}) - 6q(A_{320}) - 6q(A_{331}) - 3q(A_{323}) - 3q(A_{301})) \\ &+ 6/9(2q(A_{000}) + q(A_{300}) + 2q(A_{330}) + 4q(A_{030}) - 3q(A_{100}) - 3q(A_{320}) - 6q(A_{130}) - 6q(A_{020})) \\ &+ 6/9(2q(A_{000}) + 4q(A_{030}) + 2q(A_{033}) + q(A_{003}) - 6q(A_{020}) - 6q(A_{031}) - 3q(A_{023}) - 3q(A_{001})) = 0, \end{aligned}$$

soit, en les huit sommets (qui se regroupent) et le reste (8 termes s'annulent) :

$$(FF13)$$

$$\begin{aligned} &9q(A_{121}) + 8/3q(A_{000}) + 4/3q(A_{300}) + 8/3q(A_{330}) + 16/3q(A_{030}) + 4/3q(A_{003}) + 2/3q(A_{303}) + 4/3q(A_{333}) + 8/3q(A_{033}) \\ &- q(A_{103}) - q(A_{323}) - 2q(A_{133}) - 2q(A_{023}) \\ &- 2q(A_{320}) - 2q(A_{331}) - q(A_{301}) - 2q(A_{100}) - 4q(A_{130}) \\ &- 4q(A_{020}) - 4q(A_{031}) - 4q(A_{001}) = 0. \end{aligned}$$

Pour la quatrième ligne de  $(FF1)$ , on a :

$$\begin{aligned} &9q(A_{221}) + q(A_{023}) + 2q(A_{323}) + 4q(A_{320}) + 2q(A_{020}) \\ &- 3q(A_{223}) - 6q(A_{321}) - 6q(A_{220}) - 3q(A_{021}) = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} &9q(A_{221}) + q(A_{023}) + 2q(A_{323}) + 4q(A_{320}) + 2q(A_{020}) \\ &+ 3/9(q(A_{003}) + 2q(A_{303}) + 4q(A_{333}) + 2q(A_{033}) - 3q(A_{203}) - 6q(A_{323}) - 6q(A_{233}) - 3q(A_{023})) \\ &+ 6/9(2q(A_{300}) + 4q(A_{330}) + 2q(A_{333}) + q(A_{303}) - 6q(A_{320}) - 6q(A_{331}) - 3q(A_{323}) - 3q(A_{301})) \\ &+ 6/9(q(A_{000}) + 2q(A_{300}) + 4q(A_{330}) + 2q(A_{030}) - 3q(A_{200}) - 6q(A_{320}) - 6q(A_{230}) - 3q(A_{020})) \\ &+ 3/9(2q(A_{000}) + 4q(A_{030}) + 2q(A_{033}) + q(A_{003}) - 6q(A_{020}) - 6q(A_{031}) - 3q(A_{023}) - 3q(A_{001})) = 0, \end{aligned}$$

soit, en les huit sommets (qui se regroupent) et le reste (8 termes s'annulent) :

$$(FF14)$$

$$\begin{aligned} &9q(A_{221}) + 4/3q(A_{000}) + 8/3q(A_{300}) + 16/3q(A_{330}) + 8/3q(A_{030}) + 2/3q(A_{003}) + 4/3q(A_{303}) + 8/3q(A_{333}) + 4/3q(A_{033}) \\ &- q(A_{203}) - 2q(A_{323}) - 2q(A_{233}) - q(A_{023}) \\ &- 4q(A_{331}) - 2q(A_{301}) - 2q(A_{200}) - 4q(A_{320}) - 4q(A_{230}) - 2q(A_{020}) - 2q(A_{031}) - q(A_{001}) = 0. \end{aligned}$$

On passe à  $(FF2)$  et pour sa première ligne, on a :

$$\begin{aligned} &9q(A_{112}) + 4q(A_{013}) + 2q(A_{313}) + q(A_{310}) + 2q(A_{010}) \\ &- 6q(A_{113}) - 3q(A_{312}) - 3q(A_{110}) - 6q(A_{012}) = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} &9q(A_{112}) + 4q(A_{013}) + 2q(A_{313}) + q(A_{310}) + 2q(A_{010}) \\ &+ 6/9(4q(A_{003}) + 2q(A_{303}) + q(A_{333}) + 2q(A_{033}) - 6q(A_{103}) - 3q(A_{313}) - 3q(A_{133}) - 6q(A_{013})) \\ &+ 3/9(2q(A_{300}) + q(A_{330}) + 2q(A_{333}) + 4q(A_{303}) - 3q(A_{310}) - 3q(A_{332}) - 6q(A_{313}) - 6q(A_{302})) \\ &+ 3/9(4q(A_{000}) + 2q(A_{300}) + q(A_{330}) + 2q(A_{030}) - 6q(A_{100}) - 3q(A_{310}) - 3q(A_{130}) - 6q(A_{010})) \end{aligned}$$

+6/9(2q(A<sub>000</sub>)+q(A<sub>030</sub>)+2q(A<sub>033</sub>)+4q(A<sub>003</sub>)-3q(A<sub>010</sub>)-3q(A<sub>032</sub>)-6q(A<sub>013</sub>)-6q(A<sub>002</sub>)) = 0 ,  
soit, en les huit sommets (qui se regroupent) et le reste (8 termes s'annulent) :

(FF21)

$$9q(A_{112})+8/3q(A_{000})+4/3q(A_{300})+2/3q(A_{330})+4/3q(A_{030})+16/3q(A_{003})+8/3q(A_{303})+4/3q(A_{333})+8/3q(A_{033}) \\ -4q(A_{103}) - 2q(A_{313}) - 2q(A_{133}) - 4q(A_{013}) \\ -q(A_{332}) - 2q(A_{302}) - 2q(A_{100}) - q(A_{310}) - q(A_{130}) - 2q(A_{010}) - 2q(A_{032}) - 4q(A_{002}) = 0 .$$

Pour (FFF2) et pour sa seconde ligne, on a :

$$9q(A_{212}) + 2q(A_{013}) + 4q(A_{313}) + 2q(A_{310}) + q(A_{010}) \\ -6q(A_{213}) - 6q(A_{312}) - 3q(A_{210}) - 3q(A_{012}) = 0 ,$$

soit

$$9q(A_{212}) + 2q(A_{013}) + 4q(A_{313}) + 2q(A_{310}) + q(A_{010}) \\ +6/9(2q(A_{003}) + 4q(A_{303}) + 2q(A_{333}) + q(A_{033}) - 6q(A_{203}) - 6q(A_{313}) - 3q(A_{233}) - 3q(A_{013})) \\ +6/9(2q(A_{300}) + q(A_{330}) + 2q(A_{333}) + 4q(A_{303}) - 3q(A_{310}) - 3q(A_{332}) - 6q(A_{313}) - 6q(A_{302})) \\ +3/9(2q(A_{000}) + 4q(A_{300}) + 2q(A_{330}) + q(A_{030}) - 6q(A_{200}) - 6q(A_{310}) - 3q(A_{230}) - 3q(A_{010})) \\ +3/9(2q(A_{000})+q(A_{030})+2q(A_{033})+4q(A_{003})-3q(A_{010})-3q(A_{032})-6q(A_{013})-6q(A_{002})) = 0 ,$$

soit, en les huit sommets (qui se regroupent) et le reste (8 termes s'annulent) :

(FF22)

$$9q(A_{212})+4/3q(A_{000})+8/3q(A_{300})+4/3q(A_{330})+2/3q(A_{030})+8/3q(A_{003})+16/3q(A_{303})+8/3q(A_{333})+4/3q(A_{033}) \\ -4q(A_{203}) - 4q(A_{313}) - 2q(A_{233}) - 2q(A_{013}) \\ -2q(A_{310}) - 2q(A_{332}) - 2q(A_{302}) - 2q(A_{200}) - q(A_{230}) - q(A_{010}) - q(A_{032}) - 2q(A_{002}) = 0 .$$

Pour (FFF2) et pour sa troisième ligne, on a :

$$9q(A_{111}) + 2q(A_{013}) + q(A_{313}) + 2q(A_{310}) + 4q(A_{010}) \\ -3q(A_{113}) - 3q(A_{311}) - 6q(A_{110}) - 6q(A_{011}) = 0 ,$$

soit

$$9q(A_{111}) + 2q(A_{013}) + q(A_{313}) + 2q(A_{310}) + 4q(A_{010}) \\ +3/9(4q(A_{003}) + 2q(A_{303}) + q(A_{333}) + 2q(A_{033}) - 6q(A_{103}) - 3q(A_{313}) - 3q(A_{133}) - 6q(A_{013})) \\ +3/9(4q(A_{300}) + 2q(A_{330}) + q(A_{333}) + 2q(A_{303}) - 6q(A_{310}) - 3q(A_{331}) - 3q(A_{313}) - 6q(A_{301})) \\ +6/9(4q(A_{000}) + 2q(A_{300}) + q(A_{330}) + 2q(A_{030}) - 6q(A_{100}) - 3q(A_{310}) - 3q(A_{130}) - 6q(A_{010})) \\ +6/9(4q(A_{000})+2q(A_{030})+q(A_{033})+2q(A_{003})-6q(A_{010})-3q(A_{031})-3q(A_{013})-6q(A_{001})) = 0 ,$$

soit, en les huit sommets (qui se regroupent) et le reste (8 termes s'annulent) :

(FF23)

$$9q(A_{111})+16/3q(A_{000})+8/3q(A_{300})+4/3q(A_{330})+8/3q(A_{030})+8/3q(A_{003})+4/3q(A_{303})+2/3q(A_{333})+4/3q(A_{033}) \\ -2q(A_{103}) - q(A_{133}) - 2q(A_{013}) \\ -2q(A_{310})-q(A_{331})-q(A_{313})-2q(A_{301})-4q(A_{100})-2q(A_{130})-4q(A_{010})-2q(A_{031})-4q(A_{001}) = 0 .$$

Et, enfin, pour la dernière ligne de (FFF2), on a

$$9q(A_{211}) + q(A_{013}) + 2q(A_{313}) + 4q(A_{310}) + 2q(A_{010})$$

$$-3q(A_{213}) - 6q(A_{311}) - 6q(A_{210}) - 3q(A_{011}) = 0,$$

soit

$$\begin{aligned} &9q(A_{211}) + q(A_{013}) + 2q(A_{313}) + 4q(A_{310}) + 2q(A_{010}) \\ &+ 3/9(2q(A_{003}) + 4q(A_{303}) + 2q(A_{333}) + q(A_{033}) - 6q(A_{203}) - 6q(A_{313}) - 3q(A_{233}) - 3q(A_{013})) \\ &+ 6/9(4q(A_{300}) + 2q(A_{330}) + q(A_{333}) + 2q(A_{303}) - 6q(A_{310}) - 3q(A_{331}) - 3q(A_{313}) - 6q(A_{301})) \\ &+ 6/9(2q(A_{000}) + 4q(A_{300}) + 2q(A_{330}) + q(A_{030}) - 6q(A_{200}) - 6q(A_{310}) - 3q(A_{230}) - 3q(A_{010})) \\ &+ 3/9(4q(A_{000}) + 2q(A_{030}) + q(A_{033}) + 2q(A_{003}) - 6q(A_{010}) - 3q(A_{031}) - 3q(A_{013}) - 6q(A_{001})) = 0, \end{aligned}$$

soit, en les huit sommets (qui se regroupent) et le reste (8 termes s'annulent) :

$$(FF24)$$

$$\begin{aligned} &9q(A_{211}) + 8/3q(A_{000}) + 16/3q(A_{300}) + 8/3q(A_{330}) + 4/3q(A_{030}) + 4/3q(A_{003}) + 8/3q(A_{303}) + 4/3q(A_{333}) + 2/3q(A_{033}) \\ &- 2q(A_{203}) - 2q(A_{313}) - q(A_{233}) - q(A_{013}) \\ &- 4q(A_{310}) - 2q(A_{331}) - 4q(A_{301}) - 4q(A_{200}) - 32q(A_{230}) - 2q(A_{010}) - q(A_{031}) - 2q(A_{001}) = 0. \end{aligned}$$

Avec l'ensemble des relations  $(Fijk)$ ,  $(FF1k)$  et  $(FF2k)$ , on va pouvoir trouver les fonctions de forme de l'élément. En fait, il suffit de chercher  $q_{000}$  et  $q_{100}$  pour avoir toutes les autres fonctions par symétries et rotations.

On pose

$$q_{ijk}(u, v, w) = q_{ijk}^c(u, v, w) + \sum_l \alpha_{ijk}^l q_l^c(u, v, w),$$

où l'indice  $l$  prend les valeurs 110, 210, 120, 220, ..., 211 soit 32 possibilités et les fonctions complètes sont de la forme vue à la Relation (28) :

$$q_{ijk}^c(u, v, w) = \phi_i(u)\phi_j(v)\phi_k(w), \tag{29}$$

avec :

$$\phi_i(u) = \frac{-1^i}{i!(n-i)!} \prod_{l=0, l \neq i}^{l=n} (l-nu),$$

On précalcule  $\phi_0(u)$ ,  $\phi_1(u)$  et  $\phi_2(u)$  qui vont nous servir plus tard, soit :

$$\phi_0(u) = \frac{1}{2}(1-3u)(2-3u)(1-u),$$

$$\phi_1(u) = \frac{9}{2}(u)(2-3u)(1-u),$$

$$\phi_2(u) = -\frac{9}{2}(u)(1-3u)(1-u).$$

Pour la première fonction réduite, alias  $q_{000}$ , on a les coefficients (les autres étant nuls) issus du système :

$\alpha_{000}^{110} = -\frac{4}{9}$	$\alpha_{000}^{210} = -\frac{2}{9}$	$\alpha_{000}^{120} = -\frac{2}{9}$	$\alpha_{000}^{220} = -\frac{1}{9}$
$\alpha_{000}^{011} = -\frac{4}{9}$	$\alpha_{000}^{021} = -\frac{2}{9}$	$\alpha_{000}^{012} = -\frac{2}{9}$	$\alpha_{000}^{022} = -\frac{1}{9}$
$\alpha_{000}^{101} = -\frac{4}{9}$	$\alpha_{000}^{201} = -\frac{2}{9}$	$\alpha_{000}^{102} = -\frac{2}{9}$	$\alpha_{000}^{202} = -\frac{1}{9}$
$\alpha_{000}^{122} = -\frac{4}{27}$	$\alpha_{000}^{222} = -\frac{2}{27}$	$\alpha_{000}^{121} = -\frac{8}{27}$	$\alpha_{000}^{221} = -\frac{4}{27}$
$\alpha_{000}^{112} = -\frac{8}{27}$	$\alpha_{000}^{212} = -\frac{4}{27}$	$\alpha_{000}^{111} = -\frac{16}{27}$	$\alpha_{000}^{211} = -\frac{8}{27}$

Coefficients pour  $q_{000}$



Donc :

$$q_{000} = q_{000}^c - \frac{1}{9}(4q_{110}^c + 2q_{210}^c + 2q_{120}^c + q_{220}^c + 4q_{011}^c + 2q_{021}^c + 2q_{012}^c + q_{022}^c + 4q_{101}^c + 2q_{201}^c + 2q_{102}^c + q_{202}^c) \\ - \frac{1}{27}(4q_{122}^c + 2q_{222}^c + 8q_{121}^c + 4q_{221}^c + 8q_{112}^c + 4q_{212}^c + 16q_{111}^c + 8q_{211}^c).$$

On exprime les fonctions complètes :

$$q_{000}^c = \frac{1}{8}(1-3u)(2-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v)(1-3w)(2-3w)(1-w), \\ q_{110}^c = \frac{81}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(2-3v)(1-v)(1-3w)(2-3w)(1-w), \\ q_{210}^c = -\frac{81}{8}(u)(1-3u)(1-u)(v)(2-3v)(1-v)(1-3w)(2-3w)(1-w), \\ q_{120}^c = -\frac{81}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(1-3v)(1-v)(1-3w)(2-3w)(1-w), \\ q_{220}^c = \frac{81}{8}(u)(1-3u)(1-u)(v)(1-3v)(1-v)(1-3w)(2-3w)(1-w), \\ q_{011}^c = \frac{81}{8}(1-3u)(2-3u)(1-u)(v)(2-3v)(1-v)(w)(2-3w)(1-w), \\ q_{021}^c = -\frac{81}{8}(1-3u)(2-3u)(1-u)(v)(1-3v)(1-v)(w)(2-3w)(1-w), \\ q_{012}^c = -\frac{81}{8}(1-3u)(2-3u)(1-u)(v)(2-3v)(1-v)(w)(1-3w)(1-w), \\ q_{022}^c = \frac{81}{8}(1-3u)(2-3u)(1-u)(v)(1-3v)(1-v)(w)(1-3w)(1-w), \\ q_{101}^c = \frac{81}{8}(u)(2-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v)(w)(2-3w)(1-w), \\ q_{201}^c = -\frac{81}{8}(u)(1-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v)(w)(2-3w)(1-w), \\ q_{102}^c = -\frac{81}{8}(u)(2-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v)(w)(1-3w)(1-w), \\ q_{202}^c = \frac{81}{8}(u)(1-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v)(w)(1-3w)(1-w), \\ q_{122}^c = \frac{81 \times 9}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(1-3v)(1-v)(w)(1-3w)(1-w), \\ q_{222}^c = -\frac{81 \times 9}{8}(u)(1-3u)(1-u)(v)(1-3v)(1-v)(w)(1-3w)(1-w), \\ q_{121}^c = -\frac{81 \times 9}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(1-3v)(1-v)(w)(2-3w)(1-w), \\ q_{221}^c = \frac{81 \times 9}{8}(u)(1-3u)(1-u)(v)(1-3v)(1-v)(w)(2-3w)(1-w), \\ q_{112}^c = -\frac{81 \times 9}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(2-3v)(1-v)(w)(1-3w)(1-w), \\ q_{212}^c = \frac{81 \times 9}{8}(u)(1-3u)(1-u)(v)(2-3v)(1-v)(w)(1-3w)(1-w), \\ q_{111}^c = \frac{81 \times 9}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(2-3v)(1-v)(w)(2-3w)(1-w), \\ q_{211}^c = -\frac{81 \times 9}{8}(u)(1-3u)(1-u)(v)(2-3v)(1-v)(w)(2-3w)(1-w),$$

On factorise  $\frac{1}{8}(1-u)(1-v)(1-w)$  et il reste à additionner :

$$\begin{aligned}
 q_{000}^c &=> (1 - 3u)(2 - 3u)(1 - 3v)(2 - 3v)(1 - 3w)(2 - 3w) \\
 q_{110}^c &=> -36(u)(2 - 3u)(v)(2 - 3v)(1 - 3w)(2 - 3w) \\
 q_{210}^c &=> +18(u)(1 - 3u)(v)(2 - 3v)(1 - 3w)(2 - 3w) \\
 q_{120}^c &=> +18(u)(2 - 3u)(v)(1 - 3v)(1 - 3w)(2 - 3w) \\
 q_{220}^c &=> -9(u)(1 - 3u)(v)(1 - 3v)(1 - 3w)(2 - 3w) \\
 q_{011}^c &=> -36(1 - 3u)(2 - 3u)(v)(2 - 3v)(w)(2 - 3w) \\
 q_{021}^c &=> +18(1 - 3u)(2 - 3u)(v)(1 - 3v)(w)(2 - 3w) \\
 q_{012}^c &=> +18(1 - 3u)(2 - 3u)(v)(2 - 3v)(w)(1 - 3w) \\
 q_{022}^c &=> -9(1 - 3u)(2 - 3u)(v)(1 - 3v)(w)(1 - 3w) \\
 q_{101}^c &=> -36(u)(2 - 3u)(1 - 3v)(2 - 3v)(w)(2 - 3w) \\
 q_{201}^c &=> +18(u)(1 - 3u)(1 - 3v)(2 - 3v)(w)(2 - 3w) \\
 q_{102}^c &=> +18(u)(2 - 3u)(1 - 3v)(2 - 3v)(w)(1 - 3w) \\
 q_{202}^c &=> -9(u)(1 - 3u)(1 - 3v)(2 - 3v)(w)(1 - 3w) \\
 q_{122}^c &=> -12 \times 9(u)(2 - 3u)(v)(1 - 3v)(w)(1 - 3w) \\
 q_{222}^c &=> +6 \times 9(u)(1 - 3u)(v)(1 - 3v)(w)(1 - 3w) \\
 q_{121}^c &=> +24 \times 9(u)(2 - 3u)(v)(1 - 3v)(w)(2 - 3w) \\
 q_{221}^c &=> -12 \times 9(u)(1 - 3u)(v)(1 - 3v)(w)(2 - 3w) \\
 q_{112}^c &=> +24 \times 9(u)(2 - 3u)(v)(2 - 3v)(w)(1 - 3w) \\
 q_{212}^c &=> -12 \times 9(u)(1 - 3u)(v)(2 - 3v)(w)(1 - 3w) \\
 q_{111}^c &=> -48 \times 9(u)(2 - 3u)(v)(2 - 3v)(w)(2 - 3w) \\
 q_{211}^c &=> +24 \times 9(u)(1 - 3u)(v)(2 - 3v)(w)(2 - 3w),
 \end{aligned}$$

soit (Maple) :

$$(8 - 36v - 36w - 36u + 36u^2 + 36v^2 + 36w^2),$$

expression que l'on qualifiera de sympathique et donc, simplement :

$$q_{000}(u, v, w) = \frac{1}{2}(1 - u)(1 - v)(1 - w)$$

$$\{2 - 9v - 9w - 9u + 9u^2 + 9v^2 + 9w^2\},$$

qui, au passage (quelle chance inespérée), vérifie  $q_{000}(A_{klm}) = \delta_{000}(A_{klm})$ .

Pour finir, on regarde la neuvième fonction réduite, alias  $q_{100}$ , on a les coefficients (les autres étant nuls) issus du système :

$\alpha_{100}^{110} = \frac{2}{3}$	$\alpha_{100}^{210} = 0$	$\alpha_{100}^{120} = \frac{1}{3}$	$\alpha_{100}^{220} = 0$
$\alpha_{100}^{101} = \frac{2}{3}$	$\alpha_{100}^{201} = 0$	$\alpha_{100}^{102} = \frac{1}{3}$	$\alpha_{100}^{202} = 0$
$\alpha_{100}^{122} = \frac{1}{9}$	$\alpha_{100}^{222} = 0$	$\alpha_{100}^{121} = \frac{2}{9}$	$\alpha_{100}^{221} = 0$
$\alpha_{100}^{112} = \frac{2}{9}$	$\alpha_{100}^{212} = 0$	$\alpha_{100}^{111} = \frac{4}{9}$	$\alpha_{100}^{211} = 0$

Coefficients pour  $q_{100}$

Donc :

$$q_{100} = q_{100}^c + \frac{1}{3}(2q_{110}^c + q_{120}^c + 2q_{101}^c + q_{102}^c) + \frac{1}{9}(q_{122}^c + 2q_{121}^c + 2q_{112}^c + 4q_{111}^c).$$

On exprime les fonctions complètes :

$$\begin{aligned} q_{100}^c &= \frac{9}{8}(u)(2-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v)(1-3w)(2-3w)(1-w), \\ q_{110}^c &= \frac{81}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(2-3v)(1-v)(1-3w)(2-3w)(1-w), \\ q_{120}^c &= -\frac{81}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(1-3v)(1-v)(1-3w)(2-3w)(1-w), \\ q_{101}^c &= \frac{81}{8}(u)(2-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v)(w)(2-3w)(1-w), \\ q_{102}^c &= -\frac{81}{8}(u)(2-3u)(1-u)(1-3v)(2-3v)(1-v)(w)(1-3w)(1-w), \\ q_{122}^c &= \frac{81 \times 9}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(1-3v)(1-v)(w)(1-3w)(1-w), \\ q_{121}^c &= -\frac{81 \times 9}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(1-3v)(1-v)(w)(2-3w)(1-w), \\ q_{112}^c &= -\frac{81 \times 9}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(2-3v)(1-v)(w)(1-3w)(1-w), \\ q_{111}^c &= \frac{81 \times 9}{8}(u)(2-3u)(1-u)(v)(2-3v)(1-v)(w)(2-3w)(1-w). \end{aligned}$$

On factorise  $\frac{1}{8}u(1-u)(2-3u)(1-v)(1-w)$  et il reste à additionner :

$$\begin{aligned} q_{100}^c &\Rightarrow 9(1-3v)(2-3v)(1-3w)(2-3w) \\ q_{110}^c &\Rightarrow 54(v)(2-3v)(1-3w)(2-3w) \\ q_{120}^c &\Rightarrow -27(v)(1-3v)(1-3w)(2-3w) \\ q_{101}^c &\Rightarrow 54(1-3v)(2-3v)(w)(2-3w) \\ q_{102}^c &\Rightarrow -27(1-3v)(2-3v)(w)(1-3w) \\ q_{122}^c &\Rightarrow 81(v)(1-3v)(w)(1-3w) \\ q_{121}^c &\Rightarrow -162(v)(1-3v)(w)(2-3w) \\ q_{112}^c &\Rightarrow -162(v)(2-3v)(w)(1-3w) \\ q_{111}^c &\Rightarrow 324(v)(2-3v)(w)(2-3w), \end{aligned}$$

qui se regroupe comme suit :

$$\begin{aligned} q_{100}^c &\Rightarrow 9(1-3v)(2-3v)(1-3w)(2-3w) \\ q_{110}^c, q_{120}^c &\Rightarrow 81(v)(1-v)(1-3w)(2-3w) \\ q_{101}^c, q_{102}^c &\Rightarrow 81(1-3v)(2-3v)(w)(1-w) \\ q_{122}^c, q_{121}^c &\Rightarrow -3 \times 81(v)(1-3v)(w)(1-w) \\ q_{112}^c, q_{111}^c &\Rightarrow 3 \times 162(v)(2-3v)(w)(1-w) \end{aligned}$$

qui se regroupe encore :

$$\begin{aligned} q_{100}^c &\Rightarrow 9(1-3v)(2-3v)(1-3w)(2-3w) \\ q_{110}^c, q_{120}^c &\Rightarrow 81(v)(1-v)(1-3w)(2-3w) \end{aligned}$$

$$q_{101}^c, q_{102}^c \Rightarrow 81(1-3v)(2-3v)(w)(1-w)$$

$$q_{122}^c, q_{121}^c, q_{112}^c, q_{111}^c \Rightarrow 9 \times 81(v)(1-v)(w)(1-w)$$

soit (Maple) :

$$36,$$

et donc, simplement :

$$q_{100}(u, v, w) = \frac{9}{2}u(1-u)(2-3u)(1-v)(1-w).$$

1	$q_1 = q_{000}(u, v, w) = \frac{1}{2}(1-u)(1-v)(1-w)(2-9v-9w-9u+9u^2+9v^2+9w^2)$
9	$q_9 = q_{100}(u, v, w) = \frac{9}{2}u(1-u)(2-3u)(1-v)(1-w)$

Les 2 fonctions de forme type de l'hexaèdre de degré 3 à 32 nœuds

Avec  $q_{000}$  (et Maple), on déduit les 7 autres fonctions associées aux sommets et avec  $q_{100}$  (à la main), on déduit les 23 autres fonctions aux nœuds des arêtes de cet élément de degré 3 qui possède 32 nœuds.

**Validation d'un élément courant.** Pour pouvoir utiliser la condition de validation, il faut construire les points de contrôle d'un élément complet correspondant à l'élément réduit courant examiné. Les points de contrôle des arêtes sont définis, à partir des nœuds par les relations classiques (pour la première arête) :

$$P_{100} = \frac{-5A_{000} + 18A_{100} - 9A_{200} + 2A_{300}}{6}$$

$$P_{200} = \frac{2A_{000} - 9A_{100} + 18A_{200} - 5A_{300}}{6}.$$

Les points de contrôle des arêtes étant connus, ceux des faces sont définis par la relation déjà vue, à savoir (ici pour la face  $w = 0$ ), via la Formule (11) étendue à la trois dimension comme :

$$P_{ij0} = \alpha_j P_{i00} + \beta_j P_{i30} + \alpha_i P_{0j0} + \beta_i P_{3j0} - \alpha_i \alpha_j P_{000} - \alpha_i \beta_j P_{030} - \alpha_j \beta_i P_{300} - \beta_i \beta_j P_{330}, \quad (30)$$

pour  $i = 1, 2$  et  $j = 1, 2$  et les coefficients suivants :

- $\alpha_i$  est le poids, sur l'élément de référence de  $P_{ij0}$  (ou  $A_{ij0}$ ) par rapport à  $P_{i00}$  (ou  $A_{i00}$ ) sur la "ligne"  $u = \frac{i}{3}$ ,
- $\alpha_j$  est le poids (idem) de  $P_{ij0}$  par rapport à  $P_{0j0}$  sur la "ligne"  $v = \frac{j}{3}$ ,
- $\beta_i = 1 - \alpha_i$ ,
- $\beta_j = 1 - \alpha_j$ .

Pour les points des autres faces, on a la même formule en prenant en compte les sommets et les nœuds de la face considérée.

Pour les derniers points de contrôle à reconstruire, ceux du volume, on va suivre la méthode vue pour un hexaèdre de degré 2. Par exemple, pour le point  $P_{111}$ , on part de la Relation (FF23) qui indique que :

$$9q(A_{111}) + 16/3q(A_{000}) + 8/3q(A_{300}) + 4/3q(A_{330}) + 8/3q(A_{030}) + 8/3q(A_{003}) + 4/3q(A_{303}) + 2/3q(A_{333}) + 4/3q(A_{033})$$

$$- 2q(A_{103}) - q(A_{133}) - 2q(A_{013})$$

$$- 2q(A_{310}) - q(A_{331}) - q(A_{313}) - 2q(A_{301}) - 4q(A_{100}) - 2q(A_{130}) - 4q(A_{010}) - 2q(A_{031}) - 4q(A_{001}) = 0,$$

dont on déduit  $A_{111}$  :

$$9A_{111} = -16/3A_{000} - 8/3A_{300} - 4/3A_{330} - 8/3A_{030} - 8/3A_{003} - 4/3A_{303} - 2/3A_{333} - 4/3A_{033}$$

$+2A_{103} + A_{133} + 2A_{013} + 2A_{310} + A_{331} + A_{313} + 2A_{301} + 4A_{100} + 2A_{130} + 4A_{010} + 2A_{031} + 4A_{001}$ ,  
avec les autres relations on invente les autres nœuds internes. Ensuite on considère l'écriture en Bézier de l'élément, soit :

$$\sum_i \sum_j \sum_k B_i^3(u) B_j^3(v) B_k^3(w) P_{ijk},$$

avec le triplet  $(u, v, w) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  pour  $A_{111}$ , soit l'expression :

$$A_{111} = \sum_i \sum_j \sum_k B_i^3(\frac{1}{3}) B_j^3(\frac{1}{3}) B_k^3(\frac{1}{3}) P_{ijk},$$

et on remplace  $A_{111}$  par son évaluation ci-dessus, ceci donne une équation en  $A_{ijk}$  (qui sont sur des arêtes seulement) et les  $P_{ijk}$  internes. On fait de même pour les autres  $A_{ijk}$  internes puis on remplace les  $A_{ijk}$  en fonction des  $P_{ijk}$  correspondants, via les formules classiques (ici pour la première arête) :

$$A_{100} = \frac{8P_{000} + 12P_{100} + 6P_{200} + P_{300}}{27}$$

$$A_{200} = \frac{P_{000} + 6P_{100} + 12P_{200} + 8P_{300}}{27}.$$

Il en résulte un système  $8 \times 8$  dont la solution donne les 8  $P_{ijk}$  internes.

### 10.3 Construction de l'hexaèdre Serendip de degré 4

La même approche conduit au résultat. Pour les 6 faces on reprend les relations vues pour le quadrilatère de degré 4 (soit  $6 \times 8$  équations) et on considère trois plans<sup>10</sup> transversaux "1/3, milieu et 2/3" (soit  $3 \times 8$  équations). Ceci qui va nous donner le système des 72 relations définissant la Serendipité.

### 10.4 Hexaèdre Serendip de degré supérieur ?

Y a-t-il de tels éléments? La réponse est non dès que l'on cherche des fonctions symétriques en se restreignant à la définition classique des éléments Serendip (et oui sinon, cf. [1]). Par contre, si on ajoute un ou plusieurs nœuds, nous pensons que l'on retrouve les résultats évoqués dans le cas des quadrilatères (par exemple pour le degré 5, les faces sont des quadrilatères Serendip de degré 5 à 24 nœuds<sup>11</sup> et 8 nœuds internes sont à définir, ceci est probablement quelque peu fastidieux).

### 10.5 Construction par interpolation transfinie

L'élément est construit à partir de ses 12 arêtes seulement. Comme ci-dessus, on se place dans le cas où les arêtes sont des courbes de Bézier.

#### 10.5.1 Définition à partir des 12 arêtes

On se donne un réseau de points de contrôle,  $P_{ijk}$ , trois paramètres,  $u, v$  et  $w$  variant entre 0 et 1 et 12 courbes, les arêtes de l'élément. À partir de ces courbes, on définit 6 carreaux de surfaces, les faces de l'élément comme vu dans la section précédente. Ainsi avec les quatre courbes :

$$\gamma(u, 0, 0) = \sum_{i=0,n} B_i^n(u) P_{i00}$$

$$\gamma(u, 1, 0) = \sum_{i=0,n} B_i^n(u) P_{in0}$$

<sup>10</sup>cf. infra.

<sup>11</sup>Nous pensons qu'il n'est pas possible d'utiliser comme face un quadrilatère à 23 nœuds pour des raisons de conformité d'un élément à son voisin.

$$\begin{aligned}
\gamma(0, v, 0) &= \sum_{j=0, n} B_j^n(v) P_{0j0} \\
\gamma(1, v, 0) &= \sum_{j=0, n} B_j^n(v) P_{nj0}, \\
\sigma(u, v, 0) &= (1-v)\gamma(u, 0, 0) + v\gamma(u, 1, 0) + (1-u)\gamma(0, v, 0) + u\gamma(1, v, 0) \\
&\quad - \{(1-u)(1-v)P_{000} + (1-u)vP_{0n0} + u(1-v)P_{n00} + uvP_{nn0}\} \quad (31)
\end{aligned}$$

est la face  $w = 0$  qui s'écrit aussi comme :

$$\sigma(u, v, 0) = \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} B_i^n(u) B_j^n(v) P_{ij0},$$

en posant, pour  $i = 1, n-1$  et  $j = 1, n-1$  :

$$P_{ij0} = \alpha_j^n P_{i00} + \beta_j^n P_{in0} + \alpha_i^n P_{0j0} + \beta_i^n P_{nj0} - \alpha_i^n \alpha_j^n P_{000} - \alpha_i^n \beta_j^n P_{0n0} - \alpha_j^n \beta_i^n P_{n00} - \beta_i^n \beta_j^n P_{nn0} \quad (32)$$

et on procède de même pour les autres faces. À partir de ces faces, ainsi construites, on construit un hexaèdre de Lagrange Serendip via la définition classique, voir [13]. :

$$\begin{aligned}
2\theta(u, v, w) &= (1-w)\sigma(u, v, 0) + (1-v)\sigma(u, 0, w) + (1-u)\sigma(0, v, w) \\
&\quad + w\sigma(u, v, 1) + v\sigma(u, 1, w) + u\sigma(1, v, w) \\
&\quad - \{(1-u)(1-v)(1-w)P_{000} + u(1-v)(1-w)P_{n00} \\
&\quad + uv(1-w)P_{nn0} + (1-u)v(1-w)P_{0n0} + (1-u)(1-v)wP_{00n} \\
&\quad + u(1-v)wP_{n0n} + uvwP_{nnn} + (1-u)vwP_{0nn}\}. \quad (33)
\end{aligned}$$

La construction d'un carreau complet suit la même mécanique que dans le cas précédent. Il suffit de définir les points de contrôle internes par une relation équivalente à la Relation (19). L'extension consiste à reprendre la formule ci-dessus et à exprimer complètement les 6 faces tout comme les  $u, v, w, (1-u), (1-v)$  et  $(1-w)$  en Bernstein puis à isoler les sommes de 1 à  $n-1$  en regardant les termes autres. La relation s'écrira, pour  $i = 1, n-1, j = 1, n-1$  et  $k = 1, n-1$  :

$$\begin{aligned}
2P_{ijk} &= \alpha_k^n P_{ij0} + \beta_k^n P_{ijn} + \alpha_j^n P_{i0k} + \beta_j^n P_{i0n} + \alpha_i^n P_{0jk} + \beta_i^n P_{0jn} \\
&\quad - \alpha_i^n \alpha_j^n \alpha_k^n P_{000} - \alpha_i^n \beta_j^n \alpha_k^n P_{0n0} - \alpha_j^n \beta_i^n \alpha_k^n P_{n00} - \beta_i^n \beta_j^n \alpha_k^n P_{nn0} \\
&\quad - \alpha_i^n \alpha_j^n \beta_k^n P_{00n} - \alpha_i^n \beta_j^n \beta_k^n P_{0nn} - \alpha_j^n \beta_i^n \beta_k^n P_{n0n} - \beta_i^n \beta_j^n \beta_k^n P_{nnn}. \quad (34)
\end{aligned}$$

et le carreau s'écrira de manière classique :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} \sum_{k=0, n} B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{ijk}.$$

Pour vérifier ces résultats, on regarde la contribution de chacun des termes de la Définition (33).

**Contributions liées à la face  $w = 0$ .** Prenons la contribution du terme  $(1-w)\sigma(u, v, 0)$ , notée  $F_{ij0}$ , on a :

$$F_{ij0} = \sum_{k=0, n-1} \alpha_k^n B_k^n(w) \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} B_i^n(u) B_j^n(v) P_{ij0},$$

$$F_{ij0} = \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} \sum_{k=0, n-1} \alpha_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{ij0}.$$

En premier, on ouvre en  $k$  :

$$F_{ij0} = \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} \sum_{k=0} \alpha_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{ij0} + \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} \sum_{k=1, n-1} \alpha_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{ij0},$$

soit (comme  $\alpha_0^n = 1$ ) :

$$F_{ij0} = \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} B_i^n(u) B_j^n(v) B_0^n(w) P_{ij0} + \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} \sum_{k=1, n-1} \alpha_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{ij0}.$$

**Contributions liées à la face  $w = 1$ .** Prenons la contribution du terme  $w\sigma(u, v, 1)$ , notée  $F_{ijn}$ , on a :

$$F_{ijn} = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} \sum_{k=1,n} \beta_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{ijn}.$$

En premier et comme ci-dessus, on ouvre en  $k$  :

$$F_{ijn} = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} \sum_{k=1,n-1} \beta_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{ijn} + \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} \sum_{k=n} \beta_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{ijn},$$

soit (comme  $\beta_n^n = 1$ ) :

$$F_{ijn} = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} \sum_{k=1,n-1} \beta_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{ijn} + \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} B_i^n(u) B_j^n(v) B_n^n(w) P_{ijn},$$

**Contributions des 2 faces  $w = 0$  et  $w = 1$ .** On regarde  $F_{ij0} + F_{ijn}$ . Soit la somme :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} B_i^n(u) B_j^n(v) B_0^n(w) P_{ij0} + \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} \sum_{k=1,n-1} B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) (\alpha_k^n P_{ij0} + \beta_k^n P_{ijn}) \\ & + \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} B_i^n(u) B_j^n(v) B_n^n(w) P_{ijn}, \end{aligned}$$

que l'on note (1) + (2) + (3).

**Contributions des 2 faces  $v = 0$  et  $v = 1$ .** On déduit ce résultat du précédent, soit :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0,n} \sum_{k=0,n} B_i^n(u) B_0^n(v) B_k^n(w) P_{i0k} + \sum_{i=0,n} \sum_{j=1,n-1} \sum_{k=0,n} B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) (\alpha_j^n P_{i0k} + \beta_j^n P_{ink}) \\ & + \sum_{i=0,n} \sum_{k=0,n} B_i^n(u) B_n^n(v) B_k^n(w) P_{ink}, \end{aligned}$$

que l'on note (4) + (5) + (6).

**Contributions des 2 faces  $u = 0$  et  $u = 1$ .** On déduit ce résultat du précédent, soit :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0,n} \sum_{k=0,n} B_0^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{0jk} + \sum_{i=1,n-1} \sum_{j=0,n} \sum_{k=0,n} B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) (\alpha_i^n P_{0jk} + \beta_i^n P_{njk}) \\ & + \sum_{j=0,n} \sum_{k=0,n} B_n^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{njk}, \end{aligned}$$

que l'on note (7) + (8) + (9).

**Contributions du terme correctif.** On exprime ce terme qui vaut, Relation (33) :

$$\begin{aligned} & - \{(1-u)(1-v)(1-w)P_{000} + u(1-v)(1-w)P_{n00} \\ & + uv(1-w)P_{nm0} + (1-u)v(1-w)P_{0n0} + (1-u)(1-v)wP_{00n} \\ & + u(1-v)wP_{n0n} + uvwP_{nln} + (1-u)vwP_{0nn}\}, \end{aligned}$$

en fonction des Bernstein, il vient les termes suivants, au signe moins près :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=0,n-1} \sum_{k=0,n-1} \alpha_i^n \alpha_j^n \alpha_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{000} + \sum_{i=1,n} \sum_{j=0,n-1} \sum_{k=0,n-1} \beta_i^n \alpha_j^n \alpha_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{n00} + \\ & \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,n} \sum_{k=0,n-1} \beta_i^n \beta_j^n \alpha_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{nn0} + \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=1,n} \sum_{k=0,n-1} \alpha_i^n \beta_j^n \alpha_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{0n0} + \\ & \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=0,n-1} \sum_{k=1,n} \alpha_i^n \alpha_j^n \beta_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{00n} + \sum_{i=1,n} \sum_{j=0,n-1} \sum_{k=1,n} \beta_i^n \alpha_j^n \beta_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{n0n} + \\ & \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,n} \sum_{k=1,n} \beta_i^n \beta_j^n \beta_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{nln} + \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=1,n} \sum_{k=1,n} \alpha_i^n \beta_j^n \beta_k^n B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{0nn}, \end{aligned}$$

que l'on note (10) + ... + (17).

**Construction d'un carreau complet.** On reprend ce qui a été fait pour le quadrilatère en cherchant une écriture de la forme :

$$\sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} \sum_{k=0,n} B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) Q_{ijk},$$

où les  $Q_{ijk}$  sont à définir. On regarde en premier ce qui vient au regard de  $B_0^n(u) B_0^n(v) B_0^n(w)$ . Les contributions viennent de termes (1), (4), (7) et (10), soit :

$$P_{000} + P_{000} + P_{000} - \alpha_0^n \alpha_0^n \alpha_0^n P_{000} = 2 P_{000},$$

qui est la valeur cherchée (car  $\theta(u, v, w)$  est avec le facteur 2 dans (33)). Par analogie, les 7 autres coefficients coins ont la même forme.

On regarde maintenant ce qui vient au regard de  $B_i^n(u) B_0^n(v) B_0^n(w)$  pour  $i = 1, n - 1$ , il vient des contributions des termes (1), (4), (8), (10) et (11), soit :

$$P_{i00} + P_{i00} + \alpha_i^n P_{000} + \beta_i^n P_{n00} - \alpha_i^n \alpha_0^n \alpha_0^n P_{000} - \beta_i^n \alpha_0^n \alpha_0^n P_{n00},$$

$$P_{i00} + P_{i00} + \alpha_i^n P_{000} + \beta_i^n P_{n00} - \alpha_i^n P_{000} - \beta_i^n P_{n00} = 2 P_{i00},$$

qui est la valeur cherchée (grâce au facteur 2). Par analogie, on retrouve les autres arêtes.

On regarde maintenant ce qui vient au regard de  $B_i^n(u) B_j^n(v) B_0^n(w)$  pour  $i = 1, n - 1$  et  $j = 1, n - 1$ , il vient des contributions des termes (1), (5), (8), (10), (11), (12) et (13), soit :

$$P_{ij0} + \alpha_j^n P_{i00} + \beta_j^n P_{in0} + \alpha_i^n P_{0j0} + \beta_i^n P_{nj0} - \alpha_i^n \alpha_j^n \alpha_0^n P_{000} - \alpha_i^n \alpha_j^n \alpha_0^n P_{000} - \alpha_i^n \alpha_j^n \alpha_0^n P_{000} - \alpha_i^n \alpha_j^n \alpha_0^n P_{000},$$

$$P_{ij0} + P_{ij0} = 2 P_{ij0},$$

qui est le résultat attendu, on retrouve en effet la Relation (32) donc  $P_{ij0}$  une nouvelle fois. Ceci s'applique aux 5 autres faces.

Au regard de  $B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w)$  pour  $i = 1, n - 1, j = 1, n - 1$  et  $k = 1, n - 1$  vient la Relation (34). Ce qui établit le résultat énoncé comme le théorème suivant :

**Théorème 5.** Pour tout degré, le carreau transfini est équivalent à un carreau de Bézier complet dont les points de contrôle sont identiques sur les arêtes du carreau (coins et arêtes courbes), définis par des relations comme (32) pour les faces et définis par la Relation (34) pour les points de contrôle internes. □

### 10.5.2 Formalisme éléments finis

Dans cette écriture, classiquement, l'élément fini est défini via ses nœuds et ses fonctions de formes, il s'écrit alors de manière formelle comme :

$$\sum_{ijk} q_{ijk}(u, v) A_{ijk}, \tag{35}$$

où les  $q_{ijk}$  sont les fonctions de forme et les  $A_{ijk}$  sont les nœuds. L'indice  $ijk$  correspond à ce que serait un élément complet dont on ne considérerait que le bord. Trouver l'expression des  $q_{ijk}$  dépend de la nature des données dont on dispose, soit à partir des fonctions de forme de l'élément complet soit par regroupement des Bernstein comme on l'a vu dans le cas de la deux dimensions.

À titre d'illustration, on va traiter explicitement le cas de l'hexaèdre à 20 nœuds.

**Le cas de l'hexaèdre à 20 nœuds.** On donne, en premier, le schéma de correspondance entre les deux systèmes d'indice utilisés, de gauche à droite, la face  $w = 0$ , les points pour  $w = \frac{1}{2}$  et la face  $w = 1$  en indices  $ijk$  :

020	120	220	021	221	022	122	222
010		210			012		212
000	100	200	001	201	002	102	202



puis en indices séquentiels :

4	11	3	16	15	8	19	7
12		10			20		18
1	9	2	13	14	5	17	6

On rappelle, ensuite la relation qui lie les nœuds et les points de contrôle, par exemple, pour l'arête 000 – 200 alias 1 – 2, on a :

$$A_9 = \frac{A_1 + 2C_9 + A_2}{4}$$

$$C_9 = \frac{-A_1 + 4A_9 - A_2}{2}$$

où  $C_9$  est le point de contrôle de l'arête donc  $P_{100}$ .

Si la donnée est l'ensemble des nœuds, on calcule les points de contrôle des arêtes, par exemple  $P_{100}, P_{210}, P_{120}$  et  $P_{010}$  pour les 4 arêtes de la face  $w = 0$  :

$$P_{100} = \frac{-P_{000} + 4A_{100} - P_{200}}{2}$$

$$P_{210} = \frac{-P_{200} + 4A_{210} - P_{220}}{2}$$

$$P_{120} = \frac{-P_{220} + 4A_{120} - P_{020}}{2}$$

$$P_{010} = \frac{-P_{020} + 4A_{010} - P_{000}}{2}.$$

Alors, on complète la face  $w = 0$  avec son point central :

$$P_{110} = -\frac{1}{4}(P_{000} + P_{200} + P_{220} + P_{020}) + \frac{1}{2}(P_{100} + P_{210} + P_{120} + P_{010}),$$

que l'on réécrit en terme de nœuds (avec  $P_{000} = A_{000}, \dots$ )

$$P_{110} = -\frac{3}{4}(P_{000} + P_{200} + P_{220} + P_{020}) + (A_{100} + A_{210} + A_{120} + A_{010}),$$

par analogie, on a :

$$P_{112} = -\frac{3}{4}(P_{002} + P_{202} + P_{222} + P_{022}) + (A_{102} + A_{212} + A_{122} + A_{012}),$$

et, pour les 4 autres :

$$P_{101} = -\frac{3}{4}(P_{000} + P_{200} + P_{202} + P_{002}) + (A_{100} + A_{201} + A_{102} + A_{001}),$$

$$P_{121} = -\frac{3}{4}(P_{020} + P_{220} + P_{222} + P_{022}) + (A_{120} + A_{221} + A_{122} + A_{021}),$$

$$P_{011} = -\frac{3}{4}(P_{000} + P_{020} + P_{022} + P_{002}) + (A_{010} + A_{021} + A_{012} + A_{001}),$$

$$P_{211} = -\frac{3}{4}(P_{200} + P_{220} + P_{222} + P_{202}) + (A_{210} + A_{221} + A_{212} + A_{201}),$$

ainsi, on peut calculer  $P_{111}$  par la Relation (34), à savoir

$$P_{111} = \frac{1}{4}(P_{110} + P_{112} + P_{101} + P_{102} + P_{011} + P_{012}) -$$

$$\frac{1}{16}(P_{000} + P_{020} + P_{200} + P_{220} + P_{002} + P_{022} + P_{202} + P_{222}).$$

À ce stade, on dispose d'un élément complet et, ainsi, sa validation est facile. Par ailleurs, tout est en place pour expliciter les fonctions  $q_{ijk}$ , il suffit de regrouper les contributions pertinentes. Par exemple, la première fonction de forme, facteur de  $A_{000}$  (qui est aussi  $P_{000}$ ) vient des contributions de :

- lui-même dans  $B_0^2(u)B_0^2(v)B_0^2(w)$  avec le poids 1,
  - $P_{100}, P_{010}$  et  $P_{001}$  dans  $B_1^2(u)B_0^2(v)B_0^2(w)$ ,  $B_0^2(u)B_1^2(v)B_0^2(w)$  et  $B_0^2(u)B_0^2(v)B_1^2(w)$  avec les poids  $-\frac{1}{2}$ ,
  - $P_{110}, P_{011}$  et  $P_{101}$  dans  $B_1^2(u)B_1^2(v)B_0^2(w)$ ,  $B_0^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w)$  et  $B_1^2(u)B_0^2(v)B_1^2(w)$  avec les poids  $-\frac{3}{4}$ ,
  - $P_{111}$  dans  $B_1^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w)$ , avec le poids  $3\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = -\frac{10}{16}$ ,
- ce qui donne, tout calcul fait :

$$(1 - 2u - 2v - 2w)(1 - u)(1 - v)(1 - w).$$

comme attendu. *In extenso*, les 20 fonctions de forme sont :

- $q_1 = (1 - 2u - 2v - 2w)(1 - u)(1 - v)(1 - w)$
- $q_2 = (-1 + 2u - 2v - 2w)u(1 - v)(1 - w)$
- $q_3 = (-3 + 2u + 2v - 2w)uv(1 - w)$
- $q_4 = (-1 - 2u + 2v - 2w)(1 - u)v(1 - w)$
- $q_9 = 4u(1 - u)(1 - v)(1 - w)$
- $q_{10} = 4uv(1 - v)(1 - w)$
- $q_{11} = 4u(1 - u)v(1 - w)$
- $q_{12} = 4(1 - u)v(1 - v)(1 - w)$
- $q_{13} = 4(1 - u)(1 - v)w(1 - w)$
- $q_{14} = 4u(1 - v)w(1 - w)$
- $q_{15} = 4uvw(1 - w)$
- $q_{16} = 4(1 - u)vw(1 - w)$
- $q_5 = (-1 - 2u - 2v + 2w)(1 - u)(1 - v)w$
- $q_6 = (-3 + 2u - 2v + 2w)u(1 - v)w$
- $q_7 = (-5 + 2u + 2v + 2w)uvw$
- $q_8 = (-3 - 2u + 2v + 2w)(1 - u)vw$
- $q_{17} = 4u(1 - u)(1 - v)w$
- $q_{18} = 4uv(1 - v)w$
- $q_{19} = 4u(1 - u)vw$
- $q_{20} = 4(1 - u)v(1 - v)w$ ,

et l'élément s'écrit (en indices séquentiels) :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0}^{20} q_i(u, v, w)A_i.$$

À noter que la restriction de ces polynômes aux faces vérifie la relation de Serendipité pour les nœuds impliqués.

**Le cas de l'hexaèdre à 32 nœuds.** Il paraît évident de retrouver l'élément déjà vu plus haut.

**Hexaèdres de degrés supérieurs.** Ces éléments ne sont pas les mêmes, car il n'ont pas de nœuds, dès le degré 4, sur les faces.

## 10.6 Validation d'un élément tridimensionnel

Ayant reconstruit un élément complet, on le valide comme vu dans diverses références, par exemple [6], [9], en utilisant la condition suffisante, jacobien strictement positif aux sommets et autres coefficients non négatifs. Ainsi, on a successivement :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} \sum_{k=0, n} B_i^n(u)B_j^n(v)B_k^n(w)P_{ijk},$$

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \sum_{I=0, 3n-1} \sum_{J=0, 3n-1} \sum_{K=0, 3n-1} B_I^{3n-1}(u)B_J^{3n-1}(v)B_K^{3n-1}(w)N_{IJK},$$

avec

$$N_{IJK} = n^3 \sum_{i_1+i_2+i_3=I} \sum_{j_1+j_2+j_3=J} \sum_{k_1+k_2+k_3=K} \frac{C_{i_1}^{n-1} C_{i_2}^n C_{i_3}^n}{C_{i_1+i_2+i_3}^{3n-1}} \frac{C_{j_1}^n C_{j_2}^{n-1} C_{j_3}^n}{C_{j_1+j_2+j_3}^{3n-1}} \frac{C_{k_1}^n C_{k_2}^n C_{k_3}^{n-1}}{C_{k_1+k_2+k_3}^{3n-1}} |\Delta_{i_1, j_1, k_1}^{1,0,0} \Delta_{i_2, j_2, k_2}^{0,1,0} \Delta_{i_3, j_3, k_3}^{0,0,1}|, \quad (36)$$

pour

$$i_1 = 0, n-1, j_1 = 0, n, k_1 = 0, n$$

$$i_2 = 0, n, j_2 = 0, n-1, k_2 = 0, n$$

$$i_3 = 0, n, j_3 = 0, n, k_3 = 0, n-1$$

et avec

$$\Delta_{i,j,k}^{1,0,0} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i+1,jk}}, \quad \Delta_{i,j,k}^{0,1,0} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i,j+1,k}}, \text{ et } \Delta_{i,j,k}^{0,0,1} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i,j,k+1}}.$$

Le degré du polynôme jacobien est donc  $3n - 1$  dans chaque direction, le nombre de coefficients de contrôle est  $27n^3$ . Chaque coefficient est une somme pondérée de différents termes, hormis les coefficients coin qui ne possède qu'un seul terme (qui mesure le volume du tétraèdre de sommets le coin et ses trois points de contrôle adjacents et, ainsi, contrôle l'angle entre les plans tangents aux trois faces (courbes) incidentes, voir par exemple  $N_{000}$ ).

## 11 Conclusion

On a montré de plusieurs façons (en utilisant des développements de Taylor, en raisonnant dans le monde Bézier ou directement via un système) comment construire des éléments de Lagrange quadrilatéraux et hexaédriques Serendip et on a exprimé facilement l'expression des fonctions de forme des quadrilatères de degré 2, 3 et 4 et des hexaèdres de degré 2 et 3. On a montré qu'il n'y avait pas de quadrilatère de Lagrange de degré 5 ou plus vérifiant les propriétés de Serendipité tout en restant parfaitement symétrique vis-à-vis des symétries et rotations naturelles, en effet, un tel élément n'aurait que 23 nœuds. On a suggéré une méthode permettant, au prix d'un nœud supplémentaire au degré 5, de rétablir cette symétrie et d'obtenir ainsi un élément dont l'espace polynomial est celui d'un élément Serendip enrichi par un monôme supplémentaire. Par ailleurs, il nous a semblé fastidieux d'envisager l'étude d'éléments de degré supérieur à 5 en deux dimensions et à 3 en trois dimensions.

On a également indiqué comment valider géométriquement un élément (vu comme un carreau) d'un maillage donné défini de cette façon. Cette validation se fait en raisonnant sur l'écriture des carreaux dans le formalisme Bézier (polynômes de Bernstein et points de contrôle) après avoir reconstruit les points de contrôle de l'élément complet équivalent à l'élément examiné.

On a aussi montré que l'interpolation transfinie est un moyen de construire des éléments finis de Lagrange dont certains (seulement pour les degré 2 et 3) sont les éléments Serendip symétriques classiques et que leur analyse est rendue simple si on en trouve l'élément complet associé. On a montré, pour tout ordre, comment définir les points de contrôle de l'élément complet équivalent. Le point de vue adopté a été, ici aussi, de raisonner sur l'écriture de ces carreaux dans le formalisme Bézier (polynômes de Bernstein et points de contrôle).

Les éléments réduits permettent de diminuer le nombre de nœuds d'un maillage donné, par ailleurs, les fonctions de forme sont plus simples. Une application envisagée, outre les calculs par éléments finis, est d'utiliser ce type d'élément en tant que carreau pour définir la géométrie d'une surface à partir de son bord seulement.

Enfin, en généralisant la construction par interpolation transfinie au cas des éléments avec des nœuds internes, on peut étendre cette méthode et en se basant sur des idées présentées dans [5], on peut obtenir des éléments Serendip pour tous les degrés (ceci fera l'objet d'un autre rapport).

**Remerciements.** Nous tenons à remercier Douglas Arnold et Michael Floater pour de fructueux échanges sur ce vaste sujet.

## Références

- [1] D.L. ARNOLD AND G. AWANOU, The Serendipity Family of Finite Elements, *Found Comput Math*, **11**, 337-344, 2011.
- [2] C. BERNADI, Y. MADAY ET F. RAPETTI, *Discrétisation variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, Collection Mathématiques et Applications, **45**, Springer, 2004.
- [3] P. BÉZIER, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, **4**, Hermès, Paris, 1986.
- [4] G. DHATT, G. TOUZOT ET E. LEFRANÇOIS, *Méthode des éléments finis*, Hermès Science, Lavoisier, Paris, 2007.
- [5] M.S. FLOATER AND A. GILLETTE, Nodal bases for the serendipity family of finite elements, *personal communication*, 2014.
- [6] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2, version 2, *RR INRIA* **7964**, 2012.
- [7] P.L. GEORGE AND H. BOROUCAKI, Validity of Lagrange (Bézier) and rational Bézier quads of degree 2, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **99**, pp. 611-632, 2014.
- [8] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Sur les éléments finis hexaédriques de degré 1 et 2, *RR INRIA* **8039**, 2012.
- [9] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Validité des éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2, *RR INRIA* **8376**, 2013.
- [10] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Construction et validation des éléments réduits associés à un carreau simplicial de degré arbitraire, *RR INRIA* **8571**, 2014.
- [11] W.J. GORDON AND C.A. HALL, Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation, *Int. j. numer. Methods eng.*, **7**, 461-477, 1973.
- [12] M. LENOIR, *Approximation par éléments finis des problèmes elliptiques*, éditions de l'ENSTA, Paris, 2006.
- [13] A. PERRONNET, Interpolation transfinie et maillage, chapitre 6 in série *Mim, Maillage et adaptation*, Hermès Lavoisier, Paris, 2001.

## Annexe

### Les fonctions complètes (quadrilatère de degré 5)

On a :

$$\begin{aligned}\phi_0(u) &= \frac{1}{24}(1-5u)(2-5u)(3-5u)(4-5u)(1-u), \\ \phi_1(u) &= \frac{25}{24}(u)(2-5u)(3-5u)(4-5u)(1-u), \\ \phi_2(u) &= -\frac{25}{12}(u)(1-5u)(3-5u)(4-5u)(1-u), \\ \phi_3(u) &= \frac{25}{12}(u)(1-5u)(2-5u)(4-5u)(1-u), \\ \phi_4(u) &= -\frac{25}{24}(u)(1-5u)(2-5u)(3-5u)(1-u), \\ \phi_5(u) &= \frac{1}{24}(u)(1-5u)(2-5u)(3-5u)(4-5u),\end{aligned}$$

et

$$q_{ij}^c(u, v) = \phi_i(u)\phi_j(v).$$

-8	12	-8	2	-1	0	0	0	0	0	0	4	-4	$a_{10}$	-4	$a_{30}$	-4	$a_{32}$	+6	$a_{20}$	+6	$a_{22}$	+ $a_{00}$	+ $a_{02}$	-2	$a_{01}$	+ $a_{40}$
2	-8	12	-8	4	0	0	0	0	0	0	-1	-4	$a_{20}$	-4	$a_{40}$	-4	$a_{22}$	+6	$a_{30}$	+6	$a_{32}$	+ $a_{10}$	+ $a_{50}$	+ $a_{52}$	-2	$a_{51}$
4	-6	4	-1	2	-1	0	0	0	4	-8	-8	-12	$a_{22}$	-4	$a_{33}$	+8	$a_{32}$	+6	$a_{23}$	+ $a_{01}$	+ $a_{03}$	-2	$a_{02}$			
-1	4	-6	4	-8	4	0	0	0	-1	2	2	-12	$a_{32}$	-4	$a_{23}$	+6	$a_{33}$	+8	$a_{22}$	+ $a_{51}$	+ $a_{53}$	-2	$a_{52}$			
0	0	0	0	-1	2	-1	4	-6	4	-8	4	-12	$a_{23}$	-4	$a_{32}$	+6	$a_{22}$	+8	$a_{33}$	+ $a_{02}$	+ $a_{04}$	-2	$a_{03}$			
0	0	0	0	4	-8	4	-6	4	-1	2	-1	-12	$a_{33}$	-4	$a_{22}$	+6	$a_{32}$	+8	$a_{23}$	+ $a_{52}$	+ $a_{54}$	-2	$a_{53}$			
0	0	0	0	0	-1	2	-8	12	-8	4	0	-4	$a_{33}$	-4	$a_{35}$	-4	$a_{15}$	+6	$a_{23}$	+6	$a_{25}$	+ $a_{45}$	+ $a_{03}$	+ $a_{05}$	-2	$a_{04}$
0	0	0	0	0	4	-8	12	-8	2	-1	0	-4	$a_{23}$	-4	$a_{45}$	-4	$a_{25}$	+6	$a_{33}$	+6	$a_{35}$	+ $a_{15}$	+ $a_{53}$	+ $a_{55}$	-2	$a_{54}$
3	-9	9	-3	3	-1	0	0	0	1	-3	-3	$a_{20}$	- $a_{40}$	-9	$a_{22}$	+3	$a_{30}$	+9	$a_{32}$	+ $a_{10}$	+3	$a_{23}$	-3	$a_{33}$		
0	0	0	0	1	-3	3	-9	9	-3	3	-1	-9	$a_{33}$	-3	$a_{22}$	+3	$a_{32}$	+9	$a_{23}$	+ $a_{45}$	+3	$a_{25}$	-3	$a_{35}$	- $a_{15}$	
-1	3	-3	1	-3	3	-1	3	-3	1	-3	3	-9	$a_{32}$	-9	$a_{23}$	+9	$a_{33}$	+9	$a_{22}$							

FIG. 2 – La matrice augmentée (quadrilatère de degré 5).

-8	12	-8	2	-1	0	0	0	0	0	0	4	
0	-5	10	$-\frac{15}{2}$	$\frac{15}{4}$	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	-3	$\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	0	0	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	
0	0	0	0	-6	4	0	0	0	-1	$\frac{3}{2}$		
0	0	0	0	0	$\frac{4}{5}$	-1	4	-6	4	$-\frac{47}{6}$	$\frac{15}{4}$	
0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{5}{16}$	
0	0	0	0	0	0	0	10	-20	15	-30	15	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	$\frac{9}{2}$	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{15}{4}$	$-\frac{45}{8}$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{75}{2}$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$-4 a_{10} - 4 a_{30} - 4 a_{32} + 6 a_{20} + 6 a_{22} + a_{00} + a_{02} - 2 a_{01} + a_{40}$												
$-\frac{5}{2} a_{20} - \frac{15}{4} a_{40} - \frac{5}{2} a_{22} + 5 a_{30} + 5 a_{32} + a_{50} + a_{52} - 2 a_{51} + \frac{1}{4} a_{00} + \frac{1}{4} a_{02} - \frac{1}{2} a_{01}$												
$\frac{3}{2} a_{20} + \frac{11}{4} a_{40} - \frac{9}{2} a_{22} - 3 a_{30} + 3 a_{32} - \frac{1}{2} a_{10} + 3 a_{23} - 3 a_{33} + \frac{3}{20} a_{00} + \frac{3}{20} a_{02} - \frac{3}{10} a_{01} - \frac{9}{10} a_{50} - \frac{9}{10} a_{52} + \frac{9}{5} a_{51}$												
$\frac{1}{2} a_{10} + 3 a_{30} - 9 a_{32} - 2 a_{20} + 6 a_{22} - 2 a_{40} + \frac{1}{2} a_{50} - \frac{3}{2} a_{52} + 6 a_{33} - 4 a_{23} + a_{53}$												
$-\frac{34}{3} a_{23} - \frac{5}{2} a_{32} + 5 a_{22} + 7 a_{33} + a_{02} + a_{04} - 2 a_{03} - \frac{1}{12} a_{10} - \frac{1}{2} a_{30} + \frac{1}{3} a_{20} + \frac{1}{3} a_{40} - \frac{1}{12} a_{50} + \frac{1}{4} a_{52} - \frac{1}{6} a_{53}$												
$-\frac{5}{2} a_{23} + 6 a_{25} + a_{45} - \frac{1}{2} a_{03} + a_{05} - \frac{5}{4} a_{04} - \frac{15}{8} a_{32} + \frac{15}{4} a_{22} + \frac{3}{4} a_{02} - \frac{1}{16} a_{10} - \frac{3}{8} a_{30} + \frac{1}{4} a_{20} + \frac{1}{4} a_{40} - \frac{1}{16} a_{50} + \frac{3}{16} a_{52} - \frac{1}{8} a_{53}$												
$20 a_{33} - 40 a_{23} + a_{54} - 2 a_{53} - 10 a_{32} + 20 a_{22} + 4 a_{02} + 4 a_{04} - 8 a_{03} + a_{52}$												
$2 a_{32} - 3 a_{22} - \frac{1}{5} a_{02} - 3 a_{33} + 3 a_{23} - \frac{3}{5} a_{03} + \frac{9}{5} a_{04} + a_{35} + 3 a_{15} - 3 a_{25} - a_{05} - \frac{3}{10} a_{54} + \frac{3}{5} a_{53} - \frac{3}{10} a_{52}$												
$-\frac{15}{2} a_{22} - \frac{5}{2} a_{33} + \frac{15}{4} a_{32} + 5 a_{23} + a_{03} - \frac{3}{2} a_{02} - \frac{15}{8} a_{10} - \frac{5}{4} a_{30} + \frac{5}{2} a_{20} + \frac{1}{2} a_{00} + \frac{1}{8} a_{50} - \frac{3}{8} a_{52} + \frac{1}{4} a_{53}$												
$-\frac{45}{2} a_{10} - 15 a_{30} + 25 a_{32} + 30 a_{20} - 50 a_{22} + 6 a_{00} - 10 a_{02} + \frac{3}{2} a_{50} - \frac{5}{2} a_{52} - 10 a_{35} - 15 a_{15} + 20 a_{25} + 4 a_{05} + a_{55}$												
$\frac{1}{3} a_{30} - \frac{5}{3} a_{32} - \frac{1}{3} a_{20} + \frac{5}{3} a_{22} + \frac{1}{15} a_{00} - \frac{1}{3} a_{02} - \frac{1}{15} a_{50} + \frac{1}{3} a_{52} + \frac{5}{3} a_{33} - \frac{5}{3} a_{23} + \frac{1}{3} a_{03} - \frac{1}{3} a_{53} - \frac{1}{3} a_{35} + \frac{1}{3} a_{25} - \frac{1}{15} a_{05} + \frac{1}{15} a_{55}$												

FIG. 3 – La matrice  $U$  de la décomposition  $LU$  de la matrice augmentée (quadrilatère de degré 5).



**RESEARCH CENTRE  
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt  
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher  
Inria  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex  
[inria.fr](http://inria.fr)

ISSN 0249-6399