HAL
open science

Les surfaces gagnent du volume

Damien Rohmer

To cite this version:

Damien Rohmer. Les surfaces gagnent du volume. Quadrature, 2014, 91. hal-01017885

HAL Id: hal-01017885

https://inria.hal.science/hal-01017885

Submitted on 3 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les surfaces gagnent du volume

par Damien ROHMER

Résumé.

Improving the visual appearance of today virtual character of video-games or cinema involves the use of geometry, computer science and a classical theorem of calculus. In this paper, we apply the well known divergence theorem to the field of computer graphics to certify that a virtual character can be deformed while having a constant internal volume during the animation.
Améliorer l'apparence des personnages virtuels modernes des jeux vidéo et du cinéma passe aujourd'hui par le mariage entre un théorème d'analyse vectoriel classique, la géométrie et l'informatique. Nous proposons dans cet article d'expliquer en quoi l'application du théorème de Green-Ostrogradsky dans le domaine de l'image de synthèse permet de garantir que les personnages virtuels maintiennent leur volume constant lorsqu'ils sont animés.

Initialement découverts et utilisés dans les films d'animations au cinéma [9] et jeux vidéo, les personnages et objets virtuels 3D sont aujourd'hui indispensables pour de nombreuses autres applications telles que les effets spéciaux, publicitées, simulateurs virtuels, analyses médicales, et deviendront bientôt courants dans les dispositifs de réalité augmentée mixant image réelle et objets virtuels au sein même de notre vision de tous les jours. La synthèse d'images est un domaine d'activité qui s'intéresse, en partie, à la création de ces objets virtuels. Il s'agit non seulement d'avoir des outils pour créer, modéliser un objet 3D, mais il faut également pouvoir lui donner *vie* en l'animant au cours du temps en le déformant ou l'articulant.
Il existe deux contraintes majeures concernant l'animation de personnages virtuels. Premièrement, ils doivent être visuellement plausibles pour le publique, et deuxièmement, ils doivent être simples et rapides à créer et à manipuler pour l'artiste qui les génère. La satisfaction de ces contraintes est un sujet de recherche de la synthèse d'images. En effet bien que les films d'animations tendent à montrer au publique des personnages 3D proche de la perfection visuelle, les logiciels d'animation d'objet 3D standards du mar-

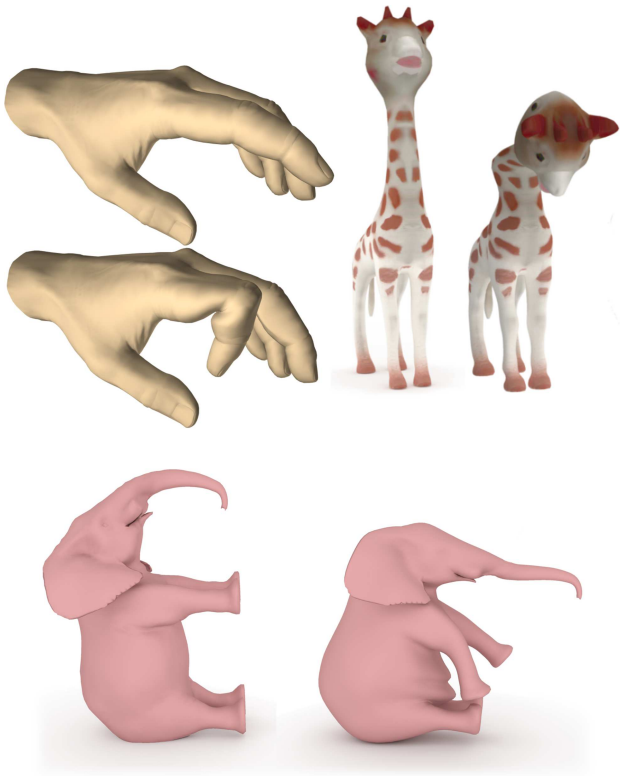

Figure 1. Exemple de déformations de personnages et animaux telles que le volume de chaque objet virtuel soit identique avant, et après déformation.

ché [5] sont aujourd'hui encore particulièrement techniques et complexes à utiliser, de plus les méthodes de déformations ne modélisent pas forcément une animation d'apparence plausible. Ainsi, la mise en oeuvre de ces films d'animation nécessite des équipes complètes d'artistes et ingénieurs travaillant pendant des mois pour corriger de manière manuelle fastidieuse tout défaut visuel.
La recherche de nouvelles méthodes de création et d'animation d'objets 3D est ainsi un sujet de recherche récent et actif du domaine de la synthèse d'images. Il se situe à la croisée des chemins entre mathématique et informatique. Dans cet article, nous proposons un exemple permettant d'améliorer le résultat visuel d'une déformation d'un personnage virtuel qui passera par l'expression mathématique d'un volume.

Tout d'abord, les objets et personnages virtuels sont classiquement modélisés géométriquement par des surfaces. Celles-ci représentent la frontière externe visible des objets. L'intérêt de l'utilisation de surfaces plutôt que de volumes pour représenter les objets 3D est double. Premièrement, seule la partie visible nécessite d'être modélisée ce qui permet d'accélérer la création de celui-ci pour les artistes, et deuxièmement il est beaucoup moins couteux en espace mémoire et en temps de calcul de travailler sur une surface discrète que sur un volume. Ces avantages ne sont pas sans conséquences, en effet en ne représentant que la surface externe, la composition et la structure interne de l'objet n'est pas connue. Ainsi un personnage virtuel modélisé par une surface ne possède ni muscle interne ni squelette qui jouent pourtant un rôle central pour le contrôle du mouvement du personnage (voir fig. 2). Pour pallier à ces limitations, il existe plusieurs approches de déformations géométriques proposées en synthèse d'images permettant de modéliser le mouvement d'un personnage ou d'un objet à partir de l'unique information de sa surface.
Des études ont montré que l'un des critères majeurs permettant d'obtenir une animation visuellement plausible est que l'objet déformé doit maintenir son volume constant [4]. Par exemple, plier la jambe d'un personnage ne doit ni aboutir au gonflement ni au dégonflement de celle-ci. Malheureusement, les approches standards de déformations de surfaces ne permettent pas de garantir la préservation du volume de l'objet modélisé. Les artistes et animateurs sont ainsi contraints de modifier manuellement différentes parties de la surface sur de nombreuses prises de vues afin d'aboutir à un résultat plausible. Ce travail est fastidieux et peut être évité en intégrant directement la contrainte de préservation du volume de l'objet dans le modèle de déformation géométrique. Cet article propose de détailler quelques étapes permettant de réaliser cette intégration.

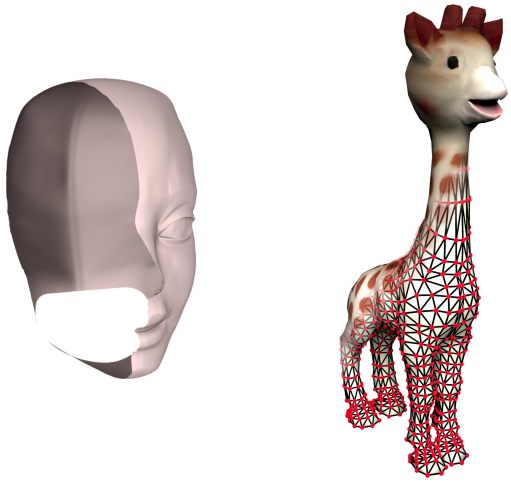

Figure 2. Gauche : La tête de ce personnage est uniquement représentée par sa surface extérieure, l'intérieur étant creux. Droite : Un maillage avec ses sommets, arêtes, et faces.

Le problème mathématique sous-jacent consiste à pouvoir exprimer le volume d'un objet en ayant uniquement connaissant de sa surface externe. Nous montrerons dans la première partie de cette article qu'il existe une solution mathématique exacte et qu'elle découle du théorème classique de Green-Ostrogradsky. La formule obtenue possède l'avantage de pouvoir être calculée à la fois efficacement (rapidement) et de manière robuste par l'ordinateur, permettant ainsi son application dans un contexte d'animation interactive. Dans la seconde partie de cet article, nous proposerons une application dans le domaine de la synthèse d'images en décrivant les différentes étapes permettant d'appliquer des déformations géométriques sur des objets tout en maintenant leur volume constant.

I Liaison entre surface et volume grâce au théorème de Green-Ostrogradsky

I.1 Objectif, notations et contraintes

Soit S, une surface continue plongée dans $\mathbb{R}^3$ définissant la frontière d'un domaine Ω compact (fermé borné) de $\mathbb{R}^3$. On supposera que Ω est connexe (c'est à dire en un seul morceau) et on associe en tout point de S un vecteur unitaire sortant de Ω que l'on appellera normale unitaire n de S.

On appelle volume délimité par S, le volume de Ω, c'est à dire la quantité

$$V = \int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \,, \tag{1}$$

où $\mathrm{d}\Omega$ est un élément différentiel de $\mathbb{R}^3$.

Le problème est le suivant : **connaissant uniquement la surface S, comment calculer le volume V délimité par celle-ci ?**

Un cas particulièrement intéressant de surface correspond aux maillages triangulaires. En effet, les maillages sont les représentations les plus communes de la géométrie d'un objet dans le domaine de la synthèse d'images. Il est possible de définir un maillage par le triplet $(\mathscr{V},\mathscr{E},\mathscr{F})$, où $\mathscr{V}$ désigne l'ensemble des N_s sommets, $\mathscr{E}$ l'ensemble des arêtes liants les sommets, et $\mathscr{F}$ l'ensemble des N_f faces triangulaires. Notons qu'un maillage est une surface continue définie par morceaux, et ne possède pas de plan tangent unique aux sommets et arêtes. Pour donner un ordre de grandeur, un maillage typique de jeux-vidéo contient de l'ordre de 100 à 1000 triangles. Un maillage de film d'animation plus détaillé peut aisément posséder 10^4 à 10^5 triangles.

Nous garderons à l'esprit dans le reste de l'exposé que les contraintes de notre problème liées à l'utilisation de maillages sont telles que le calcul du volume doit se réaliser de manière efficace afin d'être utilisable pour un grand nombre de triangles, et également de manière robuste afin de pouvoir traiter le cas de surfaces possédant des angles vifs.

I.2 Approche naïve

Une idée intuitive permettant de calculer le volume V à partir de la surface S consiste à recréer d'une certaine manière l'information du volume Ω. Nous allons montrer dans cette section que cette approche n'est pas concluante pour notre problème.

Supposons que l'on puisse calculer une fonction indicatrice χ telle qu'en une position p de $\mathbb{R}^3$, $\chi(p) = 1$ si $p \in \Omega$ et $\chi(p) = 0$ sinon. L'équation (1) revient alors à

$$V = \int_{p\in\mathbb{R}^3} \chi(p)\, \mathrm{d}\Omega(p)\ . \tag{2}$$

Supposons également que l'on discrétise un sous domaine de $\mathbb{R}^3$ (englobant Ω) de manière homogène et régulière en K échantillons. Chaque échantillon correspondant à un petit cube de l'espace centré sur la position p_k pour $k \in [0, K-1]$. Une approximation $\tilde{V}$ du volume de Ω est alors obtenue par la relation

$$\tilde{V} = \frac{D}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \chi(p_k)\ , \tag{3}$$

avec D le volume d'un cube de l'échantillonnage. Cette approche revient conceptuellement à *remplir* Ω de petits cubes puis à déduire le volume du nombre de cubes comme illustré en fig. 3. La méthode possède l'avantage d'être intuitive et permet de converger vers la vraie valeur du volume lorsque la taille des cubes tend vers zéro. Cependant, cette approche nécessite la connaissance de la fonction indicatrice χ à partir d'une surface S. Nous expliquons dans la suite de cette section pourquoi la nécessité de la connaissance explicite de χ est problématique dans notre cadre d'application.

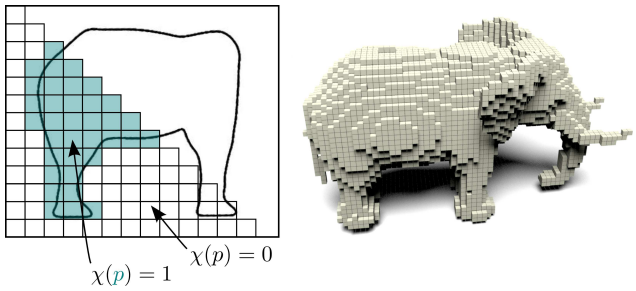

Figure 3. Approximation du volume (ou d'aire en 2D) d'un objet obtenu en comptabilisant les cubes appartenant à l'intérieur de l'objet.

Il existe deux grands types d'approches permettant de calculer explicitement la fonction χ. Premièrement, une position p appartient à l'intérieur de l'objet si la demi-droite formée par p et tout autre point en dehors de l'objet intersecte S en un nombre impair de fois [3]. Cette approche illustrée en fig. 4 permet de calculer χ en un point p de l'espace de manière exacte et indépendante de la discrétisation de Ω. Cependant elle est excessivement lente en temps de calcul de par la nécessité de calculer une intersection avec le maillage potentiellement complexe, et ce, pour tous les points p_k de l'équation (3). De plus, cette approche peut donner des résultats instables lorsque la demi-droite vient toucher de manière tangentielle un sommet ou une arête du maillage. Elle ne permet donc pas de traiter un maillage de manière robuste. D'un autre coté, étant

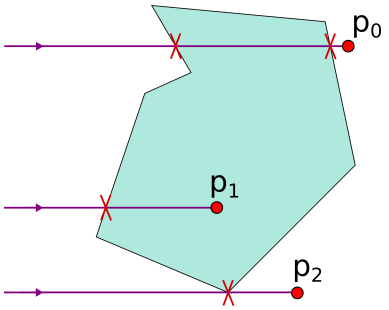

Figure 4. Calcul de la fonction indicatrice par intersection de la surface avec une demi-droite illustré en 2D. p_0 est à l'extérieur de la surface, p_1 est à l'intérieur, mais il existe une ambigüité pour p_2 pour lequel la demi-droite possède une seule intersection bien que la position soit à l'extérieur du polygone.

donné une certaine discrétisation de l'espace, il est

possible de précalculer la fonction χ de manière plus robuste en utilisant des approches de types croissance de région [8]. Pour cela, on considère une grille de voxels dont l'un d'eux est initialisé à l'intérieur (resp. extérieur) de l'objet. L'information est alors propagée de proche en proche de manière discrète jusqu'à rencontrer la surface S de l'objet. Cette approche est robuste mais nécessite une quantité de mémoire excessive lorsqu'une résolution importante est nécessaire. A titre d'exemple, il est courant de subdiviser l'espace en 1024^3 voxels ce qui correspond à plus d'un milliard de cubes traités et demande 1Go de mémoire vive dans le meilleur des cas ce qui n'est pas concevable pour un jeu vidéo.

Sans rentrer dans davantage de détails, on pourra noter que des variantes de ces approches existent et permettent de limiter les effets négatifs cités. Cependant aucune d'entre elles n'est à la fois aussi rapide et robuste à évaluer que l'expression que nous détaillons au chapitre suivant.

I.3 Approche basée sur la formule de Green-Ostrogradsky

Notons dans un premier temps que le problème posé est lié à un changement de dimension. Une surface est intrinsèquement un objet 2D qui n'intègre pas de notion de volume. Celui-ci n'a de sens qu'en considérant la surface globale plongée dans $\mathbb{R}^3$.

La formule de Green-Ostrogradsky, qui découle elle même du théorème fondamentale de l'analyse est connue sous différents noms : théorème de Gauss, ou encore théorème de la divergence. Il s'agit d'un théorème classique répandu en physique et connu depuis 1762 [1]. Son intérêt principal est qu'il permet de restreindre une intégrale sur un volume à une simple intégrale de surface, changeant ainsi la dimensionnalité du problème. Pour rappel, l'énoncé est le suivant :

Soit Ω un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ compact possédant des bords lisses par morceaux. Soit F une fonction C^1 de $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie sur Ω, alors

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F)\ \mathrm{d}\Omega = \int_S F \cdot n\ \mathrm{d}S\,, \tag{4}$$

avec $S = \partial\Omega$ le bord de Ω, et n la normale unitaire sortante.

Nous pouvons noter que les hypothèses d'applications sont vérifiées dans notre cas, S étant définie par un maillage, chaque triangle définit bien une frontière lisse.

Définissons désormais F comme étant la fonction linéaire :

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p & \mapsto & (p\cdot e)\, e\,, \end{array} \tag{5}$$

avec e un vecteur unitaire quelconque de $\mathbb{R}^3$. F est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^3$, et on peut vérifier à titre d'exercice que $\operatorname{div}(F) = \|e\|^2 = 1$. En utilisant F dans l'eq. (4), il vient alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega 1\ \mathrm{d}\Omega = & \int_S (F(p)\cdot n)\ \mathrm{d}S \\ \Rightarrow \qquad V = & \int_S (p\cdot e)\,(e\cdot n)\ \mathrm{d}S\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Cette formule est générale, et permet d'exprimer le volume V du domaine bordé par une surface S continue (voir fig. 5). Notons qu'il est commode de prendre e pour l'un des trois vecteurs d'une base orthonormée. Par exemple en prenant e orienté suivant la direction z, il est possible d'écrire $V = \int z_S n_z\ \mathrm{d}S$, avec z_S la coordonnée z de la surface S, et n_z la composante z de la normale.

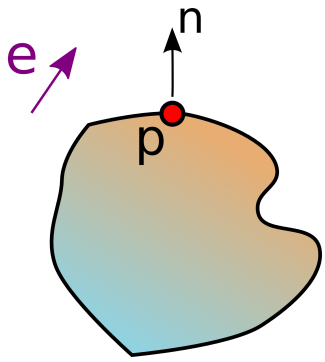

Figure 5. Exemple 2D du calcul du volume. Ici, l'aire de la surface peut être calculée à partir de l'information du bord uniquement en faisant varier p le long de celui-ci.

I.4 Cas d'un maillage

Comme expliqué précédemment, les surfaces utilisées pour modéliser des objets virtuels sont formées par un assemblage de triangles. En décomposant l'intégrale de l'eq. (6) sur chaque triangle du maillage et en notant que la normale n est constante sur chaque triangle, il est possible d'exprimer le résultat de manière analytique en fonction des sommets du maillage comme détaillé en annexe A à la fin de cet article. Le volume peut alors s'exprimer de la manière suivante

$$V = \sum_{k=0}^{N_f} \overline{h}_k \overline{A}_k\,, \tag{7}$$

avec, en notant (p_{ka}, p_{kb}, p_{kc}) les trois sommets définissant le triangle k, $\overline{h}_k = (p_{ka} + p_{kb} + p_{kc})\cdot e/3$, la hauteur moyenne du triangle k le long de la direction e et $\overline{A}_k = ((p_{kb} - p_{ka}) \times (p_{kc} - p_{ka}))\cdot e/2$, l'aire de la projection du triangle k sur le plan orthogonal à e.

Dit autrement, il s'agit de la somme des sous-volumes signés définis par le prisme formé par le triangle k extrudé jusqu'à un plan quelconque de l'espace (ici le plan passant par l'origine et orthogonale à e). Cettre représentation est illustrée en fig. 6.

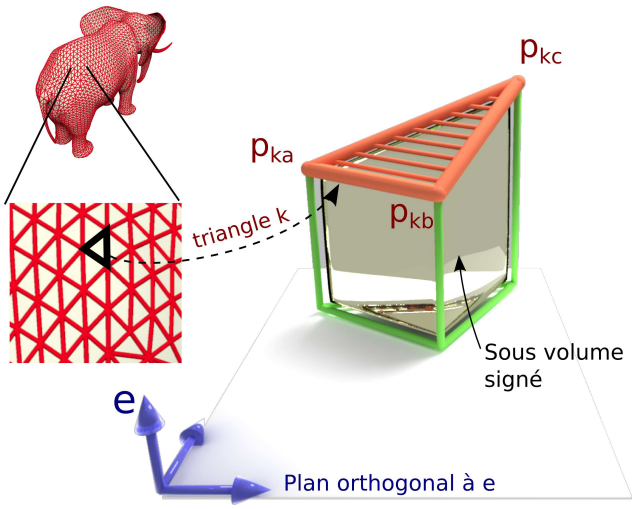

Figure 6. Le volume de la surface est obtenue en sommant l'ensemble des sous-volume signés formés par le prisme représenté sur la figure.

De manière équivalente, il est courant de trouver dans la littérature [2] cette formulation explicitée en fonctions des coordonnées (x,y,z) des positions lorsque l'on considère e orienté suivant l'axe z. En notant $p_{ka} = (x_{ka}, y_{ka}, z_{ka})$ les coordonnées du sommet, et similairement pour p_{kb} et p_{kc}, la relation (7) est équivalente à

$$V = \sum_{k=0}^{N_f-1} \frac{z_{ka}+z_{kb}+z_{kc}}{6} \begin{vmatrix} x_{kb}-x_{ka} & y_{kb}-y_{ka} \\ x_{kc}-x_{ka} & y_{kc}-y_{ka} \end{vmatrix} . \tag{8}$$

Cette formule nous permet ainsi d'exprimer le volume délimité par une surface. Notons que par rapport aux approches décrites précédemment en sec. I.2 cette formule est exacte et particulièrement simple à mettre en oeuvre de manière algorithmique en ne nécessitant aucun calcul d'intersection.
On peut enfin noter de l'eq. (8) que le volume s'exprime de manière trilinéaire en fonction des coordonnées x, y et z des sommets.

II Application pour l'animation à volume constant

Comme décrit en introduction, lorsqu'un modèle virtuel d'objet ou de personnage est animé, il est important de faire en sorte que le volume de celui-ci ne soit pas modifié afin que sa déformation puisse être visuellement plausible. Nous détaillons dans la suite de cet article comment l'utilisation de la formule (7) précédente peut être utile pour assurer cette préservation de volume. Notons que davantage de détails sont disponibles dans les publications originales associées à cette méthode [6, 7].

II.1 Déformation géométrique par skinning

L'une des approches de déformation de personnage sur laquelle nous allons nous appuyer dans la suite de ce document est appelée skinning. Cette approche consiste à paramétrer la déformation de la surface en fonction de la position d'une chaîne articulée appelée squelette d'animation. Le lecteur intéressé peut se référer à l'annexe B pour davantage de détails sur cette méthode de déformation géométrique. Le skinning est l'approche la plus courante pour l'animation de personnages articulés à la fois dans le jeux-vidéo ou le cinéma d'animation. Les artistes spécialisés dans le paramétrage du skinning sont désignés sous l'appellation *skinners*. Cette approche donne cependant des résultats visuels peu réalistes lorsqu'elle est appliquée avec des angles de rotations importants. De manière caractéristique, la surface se contracte localement sur elle même lorsqu'une articulation est pliée au delà d'un certain seuil. Cette limitation majeure de la méthode est appelée *collapsing elbow* et est illustrée en fig. 7. La déformation importante de l'articulation de

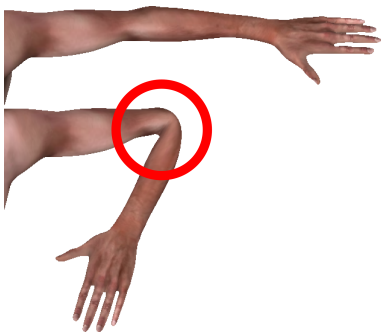

Figure 7. Illustration de l'effet de perte locale de volume d'une surface, ici au coude de ce bras virtuel lorsqu'il est plié de manière importante par une déformation de type skinning.

la surface aboutit à une perte du volume délimitée par celle-ci. Cette perte de volume est due à une contraction locale de la surface autour de la position des articulations. Ce défaut visuel est généralement corrigé manuellement par les artistes qui doivent venir compenser cette contraction par différentes approches fastidieuses : placement de déformations géométriques supplémentaires, ou modification manuelle des sommets du maillage pour différentes étapes de l'animation. Nous montrons que contraindre la surface à définir un volume englobé constant permet d'améliorer

la plausibilité du résultat et évite ainsi un travail de correction manuel fastidieux. Nous décrivons les différentes étapes de cette mise en place dans le reste de cet article.

II.2 Formalisation de notre approche

Considérons une surface initiale dénotée S^0 représentant la géométrie de l'objet de référence. La surface déformée après application du skinning est notée S. Les surfaces S^0 et S ne délimitent alors plus le même volume de l'espace.

Nous désignons par $\mathbf{p}^{S_0} = (p_0^{S_0}, p_1^{S_0}, \ldots, p_{N_s-1}^{S_0})$ l'ensemble des sommets de la surface S^0 (nous rappelons que les surfaces S et S^0 sont des maillages triangulés). De manière similaire, on appelle $\mathbf{p}^S$ les sommets de la surface S. Enfin, on considérera le volume délimité par le maillage comme une fonction de ses sommets. Ainsi $V(\mathbf{p}^{S_0})$ désignera le volume initial, et $V(\mathbf{p}^S)$ désignera le volume de la surface déformée.

Notre but est d'appliquer une légère correction sur les positions de la surface S de manière à ce que le volume délimité par la surface résultante soit égal au volume initiale.
En appelant $\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{N_s-1})$ les vecteurs de déformations de la correction (voir fig. 8), nous cherchons alors à vérifier la relation suivante :

$$V(\mathbf{p}^S + \delta) = V(\mathbf{p}^{S_0}) \ .$$

Cette équation possède une infinité de solutions pour le choix de δ ; cependant comme indiqué précédemment, nous cherchons à appliquer une correction qualifiée de légère, c'est à dire ne venant pas modifier profondément l'aspect visuel de la surface animée par skinning. Pour cela, nous allons imposer au vecteur δ d'être de norme minimale. De plus, comme indiqué au chapitre précédent, les pertes et gains de volumes apparaissent généralement sur des zones localisées de l'espace autour des articulations, il est donc nécessaire de localiser également la correction. Par exemple, en prenant le cas d'un bras humain qui se plie, il n'est pas souhaitable de venir appliquer la correction sur les sommets de la tête du personnage. Pour cela, nous considérons une fonction scalaire définie sur les sommets du maillage qui va permettre de modifier la norme sur δ afin de rendre locale la correction.

Le système final que l'on résout est le suivant :

$$\begin{cases} \min & \|\delta\|_\sigma^2 \\ \text{contraint à} & V(\mathbf{p}^S + \delta) = V(\mathbf{p}^{S_0}) \ , \end{cases} \tag{9}$$

avec $\|.\|_\sigma$ définit comme la norme pondérée avec

$$\|a\|_\sigma^2 = \sum_k \frac{a_k^2}{\sigma_k^2} \ .$$

Ainsi, une valeur σ_k associée à une position k donnée permet de faire en sorte qu'un sommet va pouvoir se déplacer plus aisément si σ est grand, et moins se déplacer dans le cas contraire.

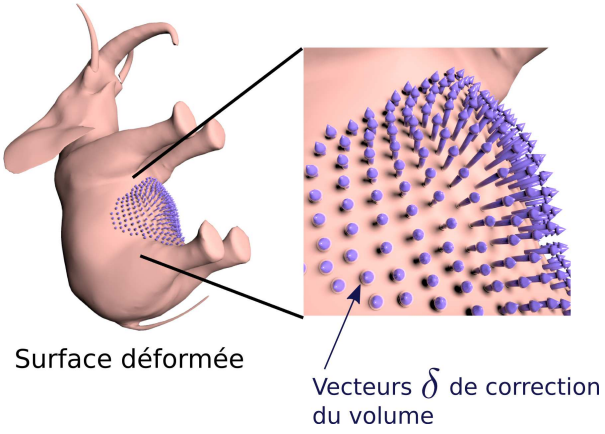

Figure 8. Vecteurs de corrections permettant de faire gonfler la surface afin qu'elle délimite un volume cible. Dans ce cas, les vecteurs sont pondérés de manière à ne faire gonfler que le ventre de l'éléphant.

II.3 Solution de la contrainte de volume

Nous décrivons dans cette section une approche permettant de trouver une solution exacte à l'eq. (9). Le système sous contrainte, est tout d'abord exprimé à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. On définit alors la fonctionnelle Λ, telle que

$$\Lambda(\delta, \lambda) = \|\delta\|_\sigma^2 - \lambda \left[V(\mathbf{p} + \delta) - V(\mathbf{p}^0) \right] \ ,$$

avec λ, le paramètre de Lagrange. La solution du système d'équations est un point stationnaire de la fonction Λ, il est donc également solution du système suivant (on laissera à titre d'exercice la vérification que la solution trouvée est bien un minimum de Λ).

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \delta_k} = 0 \ \text{ et } \ \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 0 \ . \tag{10}$$

Ce système est non linéaire si l'on considère une correction δ quelconque ce qui ne permet pas d'obtenir de solution analytique générale. Il est cependant possible de prendre avantage de la trilinéarité de l'expression du volume en fonction de δ (comme indiqué au chap. I.4). En appliquant une correction suivant un direction unique, par exemple suivant la direction x, le système devient alors linéaire et possède une solution analytique simple.

Supposons que la correction δ soit orientée uniquement suivant l'axe x. Notons $\delta^x \in \mathbb{R}^{N_s}$ le vecteur des coordonnées x de la correction. La trilinéarité de V implique que $V(\mathbf{p}^S + \delta) = V(\mathbf{p}^S) + < \delta^x, \nabla_x V(\mathbf{p}^S) >$,

avec $< , >$ désignant le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{N_s}$, et $\nabla_x V$ désignant le vecteur de $\mathbb{R}^{N_s}$ dont les composantes correspondent à la dérivée de la relation (8) par rapport aux coordonnées x des sommets du maillage. En notant $\Delta V = V(\mathbf{p}^S) - V(\mathbf{p}^{S_0})$ la différence initiale de volume à corriger, il vient

$$V(\mathbf{p}^S + \delta) - V(\mathbf{p}^{S_0}) = < \delta^x, \nabla_x V(\mathbf{p}^S) > + \Delta V \ . \quad (11)$$

En dérivant d'après (10), le système de la relation (9) est alors équivalent à

$$\begin{cases} 2\delta^x - \lambda \nabla_x V(\mathbf{p}^S) = 0 \\ < \delta^x, \nabla_x V(\mathbf{p}^S) > + \Delta V = 0 \ . \end{cases}$$

Le système possède une solution analytique exacte exprimable par

$$\delta^x = -\Delta V \frac{\nabla_x V(\mathbf{p}^S)}{\|\nabla_x V(\mathbf{p}^S)\|_{1/\sigma}} \ . \quad (12)$$

Étant donnée une différence de volume ΔV, il est ainsi possible d'exprimer un déplacement à appliquer dans une direction donnée sur une surface permettant de combler exactement cette différence. Dans le cas d'un personnage animé en 3D, la correction du volume doit cependant pouvoir s'appliquer dans plus d'une direction de l'espace. Nous proposons ainsi une généralisation de l'approche permettant de prendre en compte des corrections dans différentes directions de l'espace.

L'idée consiste à considérer plusieurs étapes de corrections successives dans différentes directions. Chaque correction ne va plus compenser l'erreur totale en volume ΔV en une seule étape, mais corriger uniquement une partie de ce volume $\mu \Delta V$, avec $\mu \in [0,1]$. Une approche possible consiste à considérer 3 étapes de corrections. Une première étape dont la correction est orientée suivant l'axe x et corrigeant l'erreur en volume par un ratio $\mu_x \Delta V$. Une seconde étape s'appliquant sur la surface résultante par une correction suivant l'axe y par un ratio $\mu_y \Delta V$. Enfin, une dernière étape suivant l'axe z par un ratio $\mu_z \Delta V$. En considérant $\mu_x + \mu_y + \mu_z = 1$, la surface finale possède exactement le volume $V(\mathbf{p}^{S_0})$.

La démarche de résolution est similaire à celle proposée pour l'axe x et aboutit à la solution suivante pour chaque déformation que l'on notera δ^x, δ^y, et δ^z.

$$\begin{cases} \delta^x = -\mu_x \Delta V \dfrac{\nabla_x V(\mathbf{p}^S)}{\|\nabla_x V(\mathbf{p}^S)\|^2_{1/\sigma}} \\ \delta^y = -\mu_y \Delta V \dfrac{\nabla_y V(\mathbf{p}^{S^*})}{\|\nabla_y V(\mathbf{p}^{S^*})\|^2_{1/\sigma}} \\ \delta^z = -\mu_z \Delta V \dfrac{\nabla_z V(\mathbf{p}^{S^{**}})}{\|\nabla_z V(\mathbf{p}^{S^{**}})\|^2_{1/\sigma}} \ , \end{cases} \quad (13)$$

avec $\mathbf{p}^{S^*}$ les coordonnées des sommets de la surface intermédiaire après la première correction suivant l'axe x. Et similairement pour $\mathbf{p}^{S^{**}}$ après la seconde correction.

II.4 Contrôle de la correction

La relation (13) permet d'assurer une correction exacte du volume. Différents résultats peuvent être obtenues suivant le choix des paramètres σ, μ, ainsi que des orientations. Nous expliquons dans cette section les rôles de ces paramètres et quelles démarches nous mettons en place afin d'obtenir des effets visuels intéressants.

Considérons un exemple de personnage articulé tel qu'un bras de personnage se pliant (voir fig. 9 haut). Les critères que nous souhaitons modéliser dans ce cas particulier sont les suivants : La pliure du bras ne doit pas impliquer de perte de volume du personnage, et en particulier l'articulation du bras doit garder une taille relativement constante. Également, il peut être intéressant de visualiser un gonflement de la surface au niveau du muscle du biceps.

Premièrement, nous pouvons remarquer que les corrections $\delta^{x/y/z}$ peuvent s'exprimer suivant des axes x, y et z arbitraires. Plutôt que d'utiliser les axes d'une base canonique quelconque, nous choisissons d'associer ces axes aux directions principales liées à l'articulation du bras. Les axes définis ainsi localement prennent une signification particulière : x est ainsi orienté suivant l'axe du bras, y est orienté suivant l'axe de rotation du coude, et enfin z est la direction orthogonale aux deux autres. C'est justement cet axe qui est dans la direction du gonflement du biceps. Afin de privilégier un gonflement le long de cet axe, il est possible de donner un poids préférentiel de correction en choisissant $\mu_z > \mu_y > \mu_x$, ici par exemple, nous considérons $\mu_z = 0.7$.

Enfin, le paramètre σ permet de localiser l'endroit où les corrections vont être le plus visibles. Dans notre cas, nous définissons une fonction $\sigma : p \mapsto \sigma(p)$ de manière à ce que $\sigma(p)$ soit faible pour toute position p éloignée de la région entourant le biceps, et à l'opposé possède des valeurs plus importantes à cet endroit. Notons que la fonction σ peut être définie à l'aide d'un outil artistique en venant *peindre* des valeurs plus ou moins importantes sur la surface, ou bien de manière procédurale. Nous proposons, comme illustré en fig. 9 une approche mixte permettant de définir aisément la géométrie obtenue après correction de volume en traçant les profils des gonflements attendus au niveau d'une articulation. Ainsi un effet de muscle se modélise en traçant une courbe en forme de bosse, alors qu'un effet de bourrelet se modélise en traçant manuel-

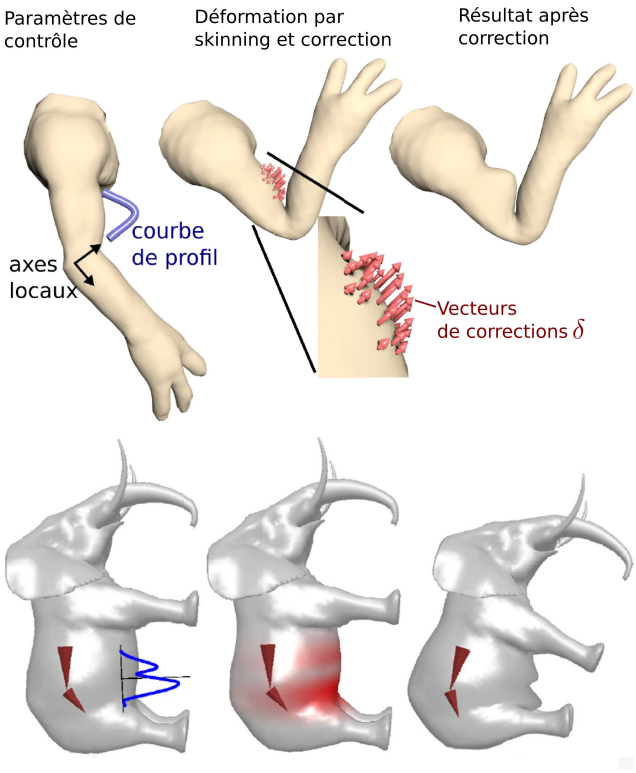

Figure 9. Deux exemples d'applications (gonflement de biceps, et bourrelets sur le ventre). Dans les deux cas on y voit l'étape de paramétrage avec la courbe de profil du gonflement à appliquer (à gauche), la déformation par skinning (au milieu), et le résultat final (à droite).

lement une courbe avec deux maximas. La pondération σ correspond à l'analyse de ces courbes : L'amplitude des courbes est projetée sur la surface le long de l'axe principal du dessin, et l'influence des courbes sur la surface est propagée suivant une gaussienne centrée le long de l'axe.

II.5 Application sur des personnages virtuels

L'application de cette préservation de volume contrôlée pour l'animation de personnage et objets virtuels est illustrée en fig. 1. On pourra y trouver une main dont le doigt se plie, la contrainte de volume localisée autour de l'articulation en mouvement vient faire gonfler la pulpe du doigt. Notons que le gonflement est privilégié dans les zones éloignées des os du squelette. Un second exemple vient illustrer l'articulation du cou d'un jouet en forme de girafe. Ici, on vient modéliser le comportement que pourrait avoir un objet en caoutchouc. Pour cela, la déformation est privilégiée dans la direction orthogonale à la rotation de l'articulation du cou. Enfin, un dernier exemple de bourrelet d'un éléphant à été modélisé en utilisant le contrôle par courbe de profil comme décrit dans le paragraphe précédent.

Dans l'ensemble des cas, la préservation du volume de l'objet permet d'améliorer de manière automatique la qualité visuelle de la déformation en rendant son apparence plus plausible. Cette approche ne permet cependant pas de traiter les cas de déformations extrêmes où la surface viendrait entrer en collision avec elle-même.

III Conclusion

Nous avons présenté comment calculer le volume délimité par une surface fermée. Contrairement à l'approche *naïve directe* consistant à estimer ce volume à l'aide d'une accumulation de petits cubes, nous proposons d'utiliser une approche découlant du théorème classique de Green-Ostrogradsky permettant d'exprimer le problème de manière surfacique. L'expression résultante est exacte, efficace à calculer et peut s'appliquer de manière directe aux surfaces maillées traditionnellement utilisées dans le domaine de la synthèse d'images. Enfin, nous avons présenté une application utilisant cette relation afin de contraindre le volume d'un objet à rester constant pendant une déformation interactive. L'application de cette contrainte ainsi que les différents degrés de contrôles sur le résultat ont permit de créer des effets de gonflements de muscles ou chairs, bourrelets ou encore des effets modélisant la déformation de matière en caoutchouc.

A Annexe : Expression analytique du volume

Nous décrivons dans cette annexe les étapes permettant d'obtenir la relation (7). En scindant l'intégrale de la relation (6) sur chaque triangle T_k, nous obtenons

$$V = \sum_{k=0}^{N_f-1} \int_{p_k \in T_k} (p_k \cdot e)\,(n_k \cdot e)\mathrm{d}S\ ,$$

avec p_k parcourant le triangle k et n_k sa normale unitaire.

Une équation paramétrique du triangle T_k plongé dans l'espace est

$$p_k(u,v) = u(p_{kb} - p_{ka}) + v(p_{kc} - p_{ka}) + p_{ka}\ ,$$

avec (u,v) les paramètres tels que $(u,v) \in [0,1]^2$ et $0 \leq u+v \leq 1$. L'élément d'aire $\mathrm{d}S_k = A_k\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, avec A_k l'aire du triangle k. La normale unitaire n_k est telle que $n_k = 2\,(p_{kb} - p_{ka}) \times (p_{kc} - p_{ka})/A_k$. L'aire $\overline{A}_k$ du triangle T_k projeté sur le plan orthogonal à e est donnée par $\overline{A}_k = A_k\ (n_k \cdot e_k)$. En remplacant ces expressions dans la relation du volume, nous obtenons

$$V = 2\sum_{k=0}^{N_f-1} \overline{A}_k \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1-u} (p_k(u,v) \cdot e)\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\ .$$

L'intégrale sur les paramètres u et v peut se calculer analytiquement et vaut $1/6\,(p_{ka}+p_{kb}+p_{kc})\cdot e$ ce qui permet de retrouver la relation souhaitée.

B Annexe : Déformation par skinning

Cette approche consiste à venir associer au maillage modélisant le personnage, un squelette d'animation. Ce squelette est formé d'un ensemble de repères appelés joints placés aux articulations du personnage, ces repères sont liés de manière hiérarchique entre eux afin de former un arbre articulé. Le lien entre deux repère est appelé os. L'utilisateur vient manipuler un os donné en lui appliquant interactivement une rotation centrée par rapport à son repère parent. Cette rotation est propagée hiérarchiquement permettant ainsi d'articuler de manière rigide le squelette d'animation. Pour propager le mouvement du squelette en tant que déformation du maillage, chaque sommet de la surface est associé à un os prédéfini du squelette d'animation. Ainsi la rotation de l'un des os est transmise à la sous-partie du maillage qui en découle. En déformant le maillage morceaux par morceaux de manière rigide, des auto-intersections ou extensions extrêmes peuvent apparaîtres aux frontières situées autour des articulations. Pour éviter ce phénomène, les déformations rigides sont propagées sur les sommets voisins en interpolant celles-ci. Pour cela, on utilise des poids d'interpolation barycentriques de sorte que la position d'un sommet donné de la surface peut dépendre de l'orientation de plusieurs os.

Cette déformation appelée skinning lisse est décrite par l'équation de déformation suivante

$$p'_k = \sum_{j\in[0,J]} \omega_{jk}\,\mathrm{T}_j\,p_k\ ,$$

avec J, le nombre d'os du squelette d'animation, T la matrice de déformation associée à l'os j, p_k et p'_k les positions du sommet k respectivement avant et après déformation, et enfin ω_{jk} sont les poids d'interpolation de la déformation entre l'os j et le sommet k. Les poids sont définis de manière à réaliser une combinaison barycentrique, avec, pour tout sommet k, $\sum_{j\in[0,J]}\omega_{jk}=1$ et $0\leq\omega_{jk}\leq 1$. On peut noter que cette relation réalise l'interpolation linéaire des composants d'une matrice, il s'agit d'une approche efficace à calculer sur les ordinateurs modernes. De plus, l'utilisation sous-jacente d'un squelette d'animation permet l'articulation d'un personnage virtuel de manière intuitive. Cependant cette procédure ne permet pas de garantir que le volume délimité par la surface reste constant.

Références

[1] Joseph Louis de Lagrange. Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son. 1762.

[2] G. Hirota, R. Maheshwari, and M. C. Lin. Fast volume-preserving free-form deformation using multi-level optimization. *Computer-Aided Design*, 32(8) :499–512, 2000.

[3] Kai Hormann and Alexander Agathos. The point in polygon problem for arbitrary polygons. *Computational Geometry*, 20 :131–144, 2001.

[4] John Lasseter. Principles of traditional animation applied to 3D computer animation. *ACM SIGGRAPH*, pages 35–44, 1987.

[5] MAYA. Autodesk.

[6] Damien Rohmer, Stefanie Hahmann, and Marie-Paule Cani. Local volume preservation for skinned characters. *Computer Graphics Forum (Proc. of Pacific Graphics)*, 27(7) :1919–1927, 2008.

[7] Damien Rohmer, Stefanie Hahmann, and Marie-Paule Cani. Exact volume preserving skinning with shape control. *Symposium on Computer Animation (SCA)*, 2009.

[8] Hanan Samet and Markku Tamminen. Efficient component labeling of images of arbitrary dimension represented by linear bintrees. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(4), 1988.

[9] Toy Story. Pixar.