



## Sur les carreaux B-spline ou NURBS de degré 2

Paul-Louis George, Houman Borouchaki

### ► To cite this version:

Paul-Louis George, Houman Borouchaki. Sur les carreaux B-spline ou NURBS de degré 2. [Rapport de recherche] RR-8550, INRIA. 2014, pp.59. hal-01009703

**HAL Id: hal-01009703**

**<https://inria.hal.science/hal-01009703>**

Submitted on 18 Jun 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Sur les carreaux B-spline ou NURBS de degré 2.

Paul Louis George, Houman Borouchaki

**RESEARCH  
REPORT**

**N° 8550**

Juin 2014

Project-Team Gamma3





## Sur les carreaux B-spline ou NURBS de degré 2.

Paul Louis George\*, Houman Borouchaki†

Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 8550 — Juin 2014 — 59 pages

**Résumé :** Ce rapport fait suite aux papiers discutant des éléments finis classiques de Lagrange de degré 2 et des carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Ici, on regarde le cas des carreaux construits à partir de B-spline ou de NURBS non pas en temps qu'ingrédients de base d'une méthode de définition de surfaces (application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ ) mais en temps qu'éléments support de calculs (application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ ). Dans ce cas, se pose la question de la positivité du jacobien de cette transformation. C'est donc ce point que nous regardons.

**Mots-clés :** Courbe B-spline. Courbe NURBS. Carreau B-spline. Carreau NURBS.

---

\* INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

† UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Technologie de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

## B-spline and NURBS patches of degree 2.

**Abstract:** Following our previous reports related to classical Lagrange finite elements of degree 2 and rational Bézier patches of degree 2, we discuss the B-spline and NURBS patch not as a method to define a surface (and then a mapping from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^3$ ) but as the support of a calculus (therefore a mapping from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^2$ ). In this usage, the jacobian of the mapping must be positive and this is the point discussed.

**Key-words:** B-spline curve. NURBS curve. B-spline patch. NURBS patch.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Courbe B-spline</b>	<b>3</b>
2.1	Fonctions B-spline . . . . .	3
2.2	Courbe B-spline . . . . .	4
2.2.1	Définitions et propriétés de base . . . . .	4
2.2.2	Quelques exemples pour comprendre . . . . .	5
2.2.3	Passage B-spline Bézier et passage inverse . . . . .	12
2.2.4	Raffinement d'une courbe B-spline . . . . .	14
2.2.5	Évaluation d'un point de la courbe . . . . .	14
2.2.6	Évaluation des points de coupe et des points de contrôle locaux . . . .	17
<b>3</b>	<b>Carreau B-spline</b>	<b>17</b>
3.1	Définition et jacobien . . . . .	18
3.2	Écriture en Bézier par morceaux . . . . .	19
3.3	Évaluation d'un point de la surface . . . . .	20
3.4	Les coefficients de contrôle . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Courbe NURBS</b>	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>Carreau NURBS</b>	<b>26</b>
5.1	Définition et jacobien . . . . .	26
5.2	Écriture en Bézier par morceaux . . . . .	28
5.3	Les coefficients de contrôle . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>36</b>
<b>7</b>	<b>Annexe</b>	<b>38</b>

## 1 Introduction

L'idée de prendre comme fonction de forme pour effectuer un calcul, les fonctions définissant la géométrie est une idée ancienne récemment remise à la mode, [8], [2], et largement exploitée depuis. Les fonctions utilisées en CAO peuvent être des Bézier (et on retrouve, entre autres, les éléments finis de Lagrange) ou d'autres type de descriptions comme les Bézier rationnels, les B-splines ou les NURBS. La partie géométrique (la CAO) ne s'est pas directement intéressée au prérequis permettant d'effectuer correctement des calculs avec ses propres fonctions. En particulier, nous n'avons pas réellement trouvé de discussion sur le signe du jacobien<sup>1</sup> des transformations sous-jacentes (seul moyen de s'assurer de la validité géométrique d'un carreau). L'objet de ce rapport est justement de regarder ce problème en examinant le cas des carreaux définis par des B-splines et des NURBS.

Le cas idéal serait celui où le domaine de calcul est définissable au moyen d'un seul carreau. Alors, l'utilisation des algorithmes de raffinement, permet de "mailler" (ou plutôt de "quadriller") aussi finement que désiré le domaine en insérant de nouveaux points de contrôle (et donc de nœuds).

On rappelle très rapidement ce qu'est une fonction B-spline. On indique ensuite comment définir une courbe à partir de ces fonctions et de la donnée de points de contrôle en construisant des séquences de nœuds judicieusement choisies. On ne donne que quelques exemples, la richesse, la souplesse et les multiples possibilités offertes par cette construction n'étant pas l'objet de ce rapport. À partir des 4 courbes frontières et d'un réseau de points de contrôle adéquats, on montre comment se construit un carreau plan. Le calcul du jacobien de la transformation sous-jacente, pour examiner la validité géométrique du carreau considéré, se

<sup>1</sup>Notons que le jacobien n'est défini que pour des applications de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , c'est dire que l'espace des paramètres et l'espace physique sont les mêmes excluant de fait le cas des surfaces.

révèle délicat en regardant l'écriture avec les B-splines, aussi on montre que, par morceau, un tel carreau s'exprime par de simples (sous-)carreaux de Bézier (processus noté "Bézier extraction" dans les papiers anglo-saxons) et, ainsi, le calcul du jacobien devient évident tout comme son contrôle via le signe des coefficients du polynôme obtenu.

On discute ensuite du cas des carreaux construits via des NURBS. On montre, comme cela a été vu dans [5] pour les Bézier rationnels, qu'aux NURBS dans  $\mathbb{R}^2$  correspondent des B-splines dans  $\mathbb{R}^3$  et que ces B-splines permettent de trouver un polynôme dont le signe est celui du jacobien examiné. Ce polynôme se présente comme une forme B-splines et est analysé comme indiqué ci-dessus, à savoir morceau par morceau.

Pour fixer les idées, le degré 2 est discuté, le degré est identique dans les deux directions et les réseaux de contrôle sont des grilles de même nombre de points dans ces directions. Il est clair que le cas général, degré diff  rent et réseau non "carré", se traite de manière analogue et, dans une annexe, nous donnons quelques détails sur le cas des degrés 3 et 4.

## 2 Courbe B-spline

Il ne semble pas superflu de revenir aux définitions de base des fonctions B-spline avant d'aborder les courbes.

### 2.1 Fonctions B-spline

On se donne une séquence ordonnée,  $U$ , de  $m + 1$  *nœuds*, notés  $u_i$ , définie par :

$$U = \{u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, u_m\},$$

avec  $u_i \leq u_{i+1}$  et, par exemple, avec  $u_0 = 0$  et  $u_m = 1$ . La  $i^{\text{ième}}$  fonction de base B-spline de degré  $d$  est construite par récurrence de la façon suivante :

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in [u_i, u_{i+1}[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$N_{i,d}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+d} - u_i} N_{i,d-1}(u) + \frac{u_{i+1+d} - u}{u_{i+1+d} - u_{i+1}} N_{i+1,d-1}(u), \quad (1)$$

la fonction dépend donc du choix de la séquence  $U$  et est non nulle uniquement pour  $u$  dans un certain intervalle. Notons que la récurrence s'écrit aussi :

$$N_{i,d}(u) = \omega_{i,d}(u) N_{i,d-1}(u) + (1 - \omega_{i+1,d}(u)) N_{i+1,d-1}(u)$$

avec

$$\omega_{i,d}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+d} - u_i}.$$

Pour un usage futur éventuel, notons que la dérivée s'écrit :

$$N'_{i,d}(u) = \frac{d}{u_{i+d} - u_i} N_{i,d-1}(u) - \frac{d}{u_{i+1+d} - u_{i+1}} N_{i+1,d-1}(u),$$

et que cette écriture est vraie pour toutes les dérivées successives.

### 2.2 Courbe B-spline

En utilisant les fonctions B-splines, on peut définir les courbes du même nom.

### 2.2.1 Définitions et propriétés de base

À partir des fonctions B-splines, on peut définir les courbes de degré  $d$  dont l'écriture formelle est :

$$\gamma(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,d}(u)P_i, u \in [0, 1], \quad (2)$$

sans oublier que les  $N_{i,d}(u)$  ne sont non nulles que dans certains sous-intervalles de  $[0, 1]$ . Dans cette expression, les  $P_i$ , les points de contrôle sont au nombre de  $n + 1$  où  $n \geq d$ . La donnée est donc constituée de  $n + 1$  *points de contrôle* et d'une *séquence nodale*  $U$  dont les  $d + 1$  premiers nœuds ont la même valeur tout comme les  $d + 1$  derniers. Ceci n'est pas strictement nécessaire mais sera le cas que nous retiendrons afin de construire des carreaux fermés plus tard. La séquence nodale contient  $m + 1$  nœuds avec

$$m = n + d + 1,$$

ce qui impose, pour  $n$  et  $d$  donnés, le choix de  $m$  pour définir cette séquence  $U$ . Les nœuds prennent leur valeur dans une *séquence de valeurs* notée  $\bar{U}$  qui comprend  $k$  valeurs :

$$\bar{U} = \{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\},$$

qui est telle que  $\bar{u}_i < \bar{u}_{i+1}$ , inégalité stricte, et on a :

$$k = n - d + 1.$$

Les deux séquences  $U$  et  $\bar{U}$  se correspondent l'une l'autre, ainsi si :

$$\bar{U} = \{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\},$$

alors :

$$U = \{u_0 = \bar{u}_0, \dots, u_d = \bar{u}_d, u_{d+1} = \bar{u}_1, \dots, u_{m-d-1} = \bar{u}_{k-1}, u_{m-d} = \bar{u}_k, \dots, u_m = \bar{u}_k\}.$$

Notons que, par construction,  $\gamma(0) = P_0$  car les  $d + 1$  premiers nœuds de  $U$  ont été choisis identiques et que, de même,  $\gamma(1) = P_n$ , la courbe part de  $P_0$  et arrive en  $P_n$ .

Pour un usage futur éventuel, indiquons que la dérivée s'écrit :

$$\gamma'(u) = d \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,d-1}(u) \frac{\Delta_i}{\delta_i}, \quad (3)$$

avec :

$$\Delta_i = P_{i+1} - P_i = \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \quad \text{et} \quad \delta_i = u_{i+d+1} - u_{i+1},$$

avec les  $N_{i+1,d-1}(u)$  nulles sauf dans certains sous-intervalles.

### 2.2.2 Quelques exemples pour comprendre

Pour se familiariser avec ces courbes, on va fixer  $d = 2$  et considérer le cas trivial où  $n = 2$  puis le "vrai" cas où  $n > d$ , le cas le plus simple étant d'avoir une répartition uniforme pour  $\bar{U}$ , c'est-à-dire que  $\bar{u}_i = \frac{i}{n-1}$  ou, autre choix identique d'ailleurs,  $\bar{u}_i = i$ , voir plus bas.

**Le cas  $n = d = 2$ .** Cet exemple se trouve en particulier dans [10]. Alors  $m = 5$  et on se donne (avec des notations évidentes) :

$$U = \{u_0 = \bar{u}_0, u_1 = \bar{u}_0, u_2 = \bar{u}_0, u_3 = \bar{u}_1, u_4 = \bar{u}_1, u_5 = \bar{u}_1\} \quad \text{avec} \quad \bar{U} = \{\bar{u}_0, \bar{u}_1\} = \{0, 1\}.$$

La courbe s'écrit :

$$\gamma(u) = \sum_{i=0}^2 N_{i,2}(u)P_i = N_{0,2}(u)P_0 + N_{1,2}(u)P_1 + N_{2,2}(u)P_2.$$



On calcule les différents  $N_{i,0}$ , qui sont au nombre de  $m = 5$ , on a successivement, en parcourant la séquence  $U$  :

$$N_{0,0}(u) = 0 \quad \text{car on n'est pas dans l'intervalle} \quad [u_0, u_1[ = [\bar{u}_0, \bar{u}_0[ = \emptyset,$$

$$N_{1,0}(u) = 0 \quad \text{car on n'est pas dans l'intervalle} \quad [u_1, u_2[ = [\bar{u}_0, \bar{u}_0[ = \emptyset,$$

$$N_{2,0}(u) = 1 \quad \text{dans l'intervalle} \quad [u_2, u_3[ = [\bar{u}_0, \bar{u}_1[ = [0, 1[ \quad \text{et} \quad N_{2,0}(u) = 0 \quad \text{pour} \quad u = \bar{u}_1 = 1,$$

$$N_{3,0}(u) = 0 \quad \text{car on n'est pas dans l'intervalle} \quad [u_3, u_4[ = [\bar{u}_1, \bar{u}_1[ = \emptyset,$$

$$N_{4,0}(u) = 0 \quad \text{car on n'est pas dans l'intervalle} \quad [u_4, u_5[ = [\bar{u}_1, \bar{u}_1[ = \emptyset.$$

À partir de ces  $N_{i,0}$ , on calcule<sup>2</sup> les  $N_{i,1}$ , qui sont au nombre de  $m - 1 = 4$ , il vient :

$$N_{0,1}(u) = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} N_{0,0}(u) + \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} N_{1,0}(u) = \frac{u - 0}{0 - 0} N_{0,0}(u) + \frac{0 - u}{0 - 0} N_{1,0}(u) = 0,$$

$$N_{1,1}(u) = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} N_{1,0}(u) + \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) = \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) = (1 - u) N_{2,0}(u) = (1 - u) \quad \text{si} \quad 0 \leq u < 1, 0 \quad \text{sinon},$$

$$N_{2,1}(u) = \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} N_{3,0}(u) = \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) = u N_{2,0}(u) = u \quad \text{si} \quad 0 \leq u < 1, 0 \quad \text{sinon},$$

$$N_{3,1}(u) = \frac{u - u_3}{u_4 - u_3} N_{3,0}(u) + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_4} N_{4,0}(u) = 0.$$

Enfin à partir de ces  $N_{i,1}$ , on calcule les  $N_{i,2}$ , qui sont au nombre de  $m - 2 = 3$ , il vient :

$$N_{0,2}(u) = \frac{u - u_0}{u_2 - u_0} N_{0,1}(u) + \frac{u_3 - u}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) = \frac{u_3 - u}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) = (1 - u) N_{1,1}(u) = (1 - u) \quad \text{si} \quad 0 \leq u < 1, 0 \quad \text{sinon},$$

$$N_{1,2}(u) = \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u) = u N_{1,1}(u) + (1 - u) N_{1+1,1}(u)$$

$$= u(1 - u) N_{2,0}(u) + (1 - u) u N_{2,0}(u) = 2u(1 - u) N_{2,0} = 2u(1 - u) \quad \text{si} \quad 0 \leq u < 1, 0 \quad \text{sinon},$$

$$N_{2,2}(u) = \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u) + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_3} N_{3,1}(u) = \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u)$$

$$= u N_{2,1}(u) = u^2 N_{2,0}(u) = u^2 \quad \text{si} \quad 0 \leq u < 1, 0 \quad \text{sinon}.$$

Par suite :

$$\gamma(u) = (1 - u)^2 P_0 + 2u(1 - u) P_1 + u^2 P_2 = \sum_{i=0}^2 B_i^2(u) P_i,$$

où  $B_i^2(u)$  est le polynôme de Bernstein de degré 2 numéro  $i$ . La courbe est simplement la courbe de Bézier de degré 2 dans  $[0, 1[$  et, par continuité, dans  $[0, 1]$ .

**Le cas  $d = 2$  et  $n = 5$  avec une séquence entre 0 et 1.** Cet exemple montre une situation plus intéressante, on a 6 points de contrôle. La courbe s'écrit :

$$\gamma(u) = \sum_{i=0}^5 N_{i,2}(u) P_i,$$

la séquence  $U$  avec  $m = n + d + 1 = 8$  possède 9 termes :

$$U = \{u_0 = \bar{u}_0, u_1 = \bar{u}_0, u_2 = \bar{u}_0, u_3 = \bar{u}_1, u_4 = \bar{u}_2, u_5 = \bar{u}_3, u_6 = \bar{u}_4, u_7 = \bar{u}_4, u_8 = \bar{u}_4\}$$

$$\text{avec} \quad \bar{U} = \{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\},$$

---

<sup>2</sup>avec la convention  $\frac{0}{0} = 0$ .

le plus simple étant ce choix uniforme<sup>3</sup>,  $\bar{u}_i = \frac{i}{n-1} = \frac{i}{4}$ . Alors les 8  $N_{i,0}(u)$  valent :

$$N_{0,0}(u) = 0,$$

$$N_{1,0}(u) = 0,$$

$$N_{2,0}(u) = 1 \text{ si } u \in [u_2, u_3[ = [0, \frac{1}{4}[ , 0 \text{ sinon ,}$$

$$N_{3,0}(u) = 1 \text{ si } u \in [u_3, u_4[ = [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}[ , 0 \text{ sinon ,}$$

$$N_{4,0}(u) = 1 \text{ si } u \in [u_4, u_5[ = [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}[ , 0 \text{ sinon ,}$$

$$N_{5,0}(u) = 1 \text{ si } u \in [u_5, u_6[ = [\frac{3}{4}, 1[ , 0 \text{ sinon ,}$$

$$N_{6,0}(u) = 0,$$

$$N_{7,0}(u) = 0.$$

On en déduit les 7  $N_{i,1}$  qui sont nuls sauf dans les intervalles précisés :

$$N_{0,1}(u) = 0 \text{ car } N_{0,0}(u) = 0 \text{ et } N_{1,0}(u) = 0,$$

$$N_{1,1}(u) = \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) = (1 - 4u) N_{2,0}(u) = (1 - 4u) \text{ pour } 0 \leq u < \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} N_{2,1}(u) &= \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} N_{3,0}(u) = 4u N_{2,0}(u) + 2(1 - 2u) N_{3,0}(u) \\ &= 4u \text{ pour } 0 \leq u < \frac{1}{4}, 2(1 - 2u) \text{ pour } \frac{1}{4} \leq u < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{3,1}(u) &= \frac{u - u_3}{u_4 - u_3} N_{3,0}(u) + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_4} N_{4,0}(u) = (4u - 1) N_{3,0}(u) + (3 - 4u) N_{4,0}(u) \\ &= (4u - 1) \text{ pour } \frac{1}{4} \leq u < \frac{1}{2}, (3 - 4u) \text{ pour } \frac{1}{2} \leq u < \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{4,1}(u) &= \frac{u - u_4}{u_5 - u_4} N_{4,0}(u) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_5} N_{5,0}(u) = 2(2u - 1) N_{4,0}(u) + 4(1 - u) N_{5,0}(u) \\ &= 2(2u - 1) \text{ pour } \frac{1}{2} \leq u < \frac{3}{4}, 4(1 - u) \text{ pour } \frac{3}{4} \leq u < 1, \end{aligned}$$

$$N_{5,1}(u) = \frac{u - u_5}{u_6 - u_5} N_{5,0}(u) = (4u - 3) N_{5,0}(u) = (4u - 3) \text{ si } \frac{3}{4} \leq u < 1, 0 \text{ sinon ,}$$

$$N_{6,1}(u) = 0 \text{ car } N_{6,0} = 0 \text{ et } N_{7,0} = 0.$$

On en déduit enfin les 6  $N_{i,2}$  qui sont nuls partout sauf pour les intervalles dûment mentionnés.

En premier, on exprime les  $N_{i,2}$  en fonction des  $N_{i,1}$  :

$$N_{0,2}(u) = \frac{u_3 - u}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) = (1 - 4u) N_{1,1}(u) = (1 - 4u)^2 N_{2,0}(u), \text{ soit } (1 - 4u)^2 \text{ pour } 0 \leq u < \frac{1}{4},$$

$$N_{1,2}(u) = \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u) = 4u N_{1,1}(u) + (1 - 2u) N_{2,1}(u),$$

$$N_{2,2}(u) = \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u) + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_3} N_{3,1}(u) = 2u N_{2,1}(u) + \frac{3 - 4u}{2} N_{3,1}(u),$$

$$N_{3,2}(u) = \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} N_{3,1}(u) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_4} N_{4,1}(u) = \frac{4u - 1}{2} N_{3,1}(u) + 2(1 - u) N_{4,1}(u),$$

$$N_{4,2}(u) = \frac{u - u_4}{u_6 - u_4} N_{4,1}(u) + \frac{u_7 - u}{u_7 - u_5} N_{5,1}(u) = (2u - 1) N_{4,1}(u) + 4(1 - u) N_{5,1}(u),$$

<sup>3</sup>Dans le cas où la répartition n'est pas uniforme, tout se qui suit s'étend, les calculs étant moins évidents, voir plus bas.

$$N_{5,2}(u) = \frac{u - u_5}{u_7 - u_5} N_{5,1}(u) = (4u - 3)N_{5,1}(u) = (4u - 3)^2 N_{5,0}(u), \text{ soit } (4u - 3)^2 \quad \text{pour } \frac{3}{4} \leq u < 1,$$

et, pour finir, on explicite les  $N_{i,1}$  dans les  $N_{i,2}$  restant à calculer :

$$\begin{aligned} N_{1,2}(u) &= 4uN_{1,1}(u) + (1 - 2u)N_{2,1}(u), \\ N_{2,2}(u) &= 2uN_{2,1}(u) + \frac{3 - 4u}{2}N_{3,1}(u), \\ N_{3,2}(u) &= \frac{4u - 1}{2}N_{3,1}(u) + 2(1 - u)N_{4,1}(u), \\ N_{4,2}(u) &= (2u - 1)N_{4,1}(u) + 4(1 - u)N_{5,1}(u), \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned} N_{1,2}(u) &= 4u(1 - 4u)N_{2,0}(u) + (1 - 2u) \{4uN_{2,0}(u) + 2(1 - 2u)N_{3,0}(u)\}, \\ N_{2,2}(u) &= 2u \{4uN_{2,0}(u) + 2(1 - 2u)N_{3,0}(u)\} + \frac{3 - 4u}{2} \{(4u - 1)N_{3,0}(u) + (3 - 4u)N_{4,0}(u)\}, \\ N_{3,2}(u) &= \frac{4u - 1}{2} \{(4u - 1)N_{3,0}(u) + (3 - 4u)N_{4,0}(u)\} + 2(1 - u) \{2(2u - 1)N_{4,0}(u) + 4(1 - u)N_{5,0}(u)\}, \\ N_{4,2}(u) &= (2u - 1) \{2(2u - 1)N_{4,0}(u) + 4(1 - u)N_{5,0}(u)\} + 4(1 - u)(4u - 3)N_{5,0}(u), \end{aligned}$$

on en déduit la forme de la courbe dans les sous-intervalles. Par exemple, pour  $u \in [0, \frac{1}{4}]$ , on prend les termes facteurs de  $N_{2,0}$ , soit :

$$\gamma_0(u) = (1 - 4u)^2 P_0 + 8u(1 - 3u)P_1 + 8u^2 P_2 \quad u \in [0, \frac{1}{4}],$$

et, de même :

$$\begin{aligned} \gamma_1(u) &= 2(1 - 2u)^2 P_1 + (-16u^2 + 12u - \frac{3}{2})P_2 + \frac{(4u - 1)^2}{2}P_3 \quad u \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(u) &= \frac{(3 - 4u)^2}{2}P_2 + (-16u^2 + 20u - \frac{11}{2})P_3 + 2(2u - 1)^2 P_4 \quad u \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \gamma_3(u) &= 8(1 - u)^2 P_3 + 8(1 - u)(3u - 2)P_4 + (4u - 3)^2 P_5 \quad u \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{aligned} \quad (4)$$

On vérifie immédiatement que ces  $\gamma_i(u)$  se raccordent, continuité  $\mathcal{C}^0$ . Par exemple  $\gamma_0(u)$ , par continuité, vaut  $\frac{P_1 + P_2}{2}$  en  $u = \frac{1}{4}$  et  $\gamma_1(u)$ , en  $u = \frac{1}{4}$ , vaut également  $\frac{P_1 + P_2}{2}$ , etc. Les points de raccord sont les milieux des arêtes définies par les points de contrôle en partant de  $P_1 P_2$  jusqu'à  $P_3 P_4$ . En  $u = 0$ ,  $\gamma(u) = \gamma_0(u) = P_0$ , en  $u = 1$ ,  $\gamma(u) = \gamma_3(u) = P_5$ . On vérifie également que les dérivées en  $u = \frac{1}{4}$ , à droite pour  $\gamma_0(u)$ , à gauche pour  $\gamma_1(u)$ , sont égales ( $4\overrightarrow{P_1 P_2}$ ), continuité  $\mathcal{C}^1$ , etc.

**Le cas  $d = 2$  et  $n = 5$  avec, maintenant, une séquence entre 0 et  $n - 1$ .** On reprend le même exemple, on a 6 points de contrôle. La courbe s'écrit :

$$\gamma(u) = \sum_{i=0}^5 N_{i,2}(u)P_i,$$

la séquence  $U$  avec  $m = n + d + 1 = 8$  possède 9 termes :

$$U = \{u_0 = \bar{u}_0, u_1 = \bar{u}_0, u_2 = \bar{u}_0, u_3 = \bar{u}_1, u_4 = \bar{u}_2, u_5 = \bar{u}_3, u_6 = \bar{u}_4, u_7 = \bar{u}_4, u_8 = \bar{u}_4\}$$

$$\text{avec } \bar{U} = \{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

autre choix naturel pour construire une répartition uniforme. Alors les 8  $N_{i,0}(u)$  valent :

$$N_{0,0}(u) = 0,$$

$$\begin{aligned}
N_{1,0}(u) &= 0, \\
N_{2,0}(u) &= 1 \text{ si } u \in [u_2, u_3[ = [0, 1[, 0 \text{ sinon,} \\
N_{3,0}(u) &= 1 \text{ si } u \in [u_3, u_4[ = [1, 2[, 0 \text{ sinon,} \\
N_{4,0}(u) &= 1 \text{ si } u \in [u_4, u_5[ = [2, 3[, 0 \text{ sinon,} \\
N_{5,0}(u) &= 1 \text{ si } u \in [u_5, u_6[ = [3, 4[, 0 \text{ sinon,} \\
N_{6,0}(u) &= 0, \\
N_{7,0}(u) &= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit les 7  $N_{i,1}$  qui sont nuls sauf dans les intervalles où les  $N_{i,0}$  incriminés sont non nuls :

$$\begin{aligned}
N_{0,1}(u) &= 0 \quad \text{car } N_{0,0}(u) = 0 \quad \text{et } N_{1,0}(u) = 0, \\
N_{1,1}(u) &= \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) = (1 - u) N_{2,0}(u), \\
N_{2,1}(u) &= \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} N_{3,0}(u) = u N_{2,0}(u) + (2 - u) N_{3,0}(u), \\
N_{3,1}(u) &= \frac{u - u_3}{u_4 - u_3} N_{3,0}(u) + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_4} N_{4,0}(u) = (u - 1) N_{3,0}(u) + (3 - u) N_{4,0}(u), \\
N_{4,1}(u) &= \frac{u - u_4}{u_5 - u_4} N_{4,0}(u) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_5} N_{5,0}(u) = (u - 2) N_{4,0}(u) + (4 - u) N_{5,0}(u), \\
N_{5,1}(u) &= \frac{u - u_5}{u_6 - u_5} N_{5,0}(u) = (u - 3) N_{5,0}(u), \\
N_{6,1}(u) &= 0 \quad \text{car } N_{6,0} = 0 \quad \text{et } N_{7,0} = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit enfin les 6  $N_{i,2}$  qui sont nuls partout sauf pour les intervalles où les  $N_{i,0}$  incriminés sont non nuls. En premier, on exprime les  $N_{i,2}$  en fonction des  $N_{i,1}$  :

$$\begin{aligned}
N_{0,2}(u) &= \frac{u_3 - u}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) = (1 - u) N_{1,1}(u) = (1 - u)^2 N_{2,0}(u), \text{ soit } (1 - u)^2 \quad \text{pour } 0 \leq u < 1, \\
N_{1,2}(u) &= \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u) = u N_{1,1}(u) + \frac{2 - u}{2} N_{2,1}(u), \\
N_{2,2}(u) &= \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u) + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_3} N_{3,1}(u) = \frac{u}{2} N_{2,1}(u) + \frac{3 - u}{2} N_{3,1}(u), \\
N_{3,2}(u) &= \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} N_{3,1}(u) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_4} N_{4,1}(u) = \frac{u - 1}{2} N_{3,1}(u) + \frac{4 - u}{2} N_{4,1}(u), \\
N_{4,2}(u) &= \frac{u - u_4}{u_6 - u_4} N_{4,1}(u) + \frac{u_7 - u}{u_7 - u_5} N_{5,1}(u) = \frac{u - 2}{2} N_{4,1}(u) + (4 - u) N_{5,1}(u), \\
N_{5,2}(u) &= \frac{u - u_5}{u_7 - u_5} N_{5,1}(u) = (u - 3) N_{5,1}(u) = (u - 3)^2 N_{5,0}(u), \text{ soit } (u - 3)^2 \quad \text{pour } 3 \leq u < 4,
\end{aligned}$$

et, pour finir, on explicite les  $N_{i,1}$  dans les  $N_{i,2}$  restant à calculer :

$$\begin{aligned}
N_{1,2}(u) &= u N_{1,1}(u) + \frac{2 - u}{2} N_{2,1}(u), \\
N_{2,2}(u) &= \frac{u}{2} N_{2,1}(u) + \frac{3 - u}{2} N_{3,1}(u), \\
N_{3,2}(u) &= \frac{u - 1}{2} N_{3,1}(u) + \frac{4 - u}{2} N_{4,1}(u), \\
N_{4,2}(u) &= \frac{u - 2}{2} N_{4,1}(u) + (4 - u) N_{5,1}(u),
\end{aligned}$$

il vient :

$$N_{1,2}(u) = u(1 - u) N_{2,0}(u) + \frac{2 - u}{2} \{u N_{2,0}(u) + (2 - u) N_{3,0}(u)\},$$

$$\begin{aligned}
N_{2,2}(u) &= \frac{u}{2} \{uN_{2,0}(u) + (2-u)N_{3,0}(u)\} + \frac{3-u}{2} \{(u-1)N_{3,0}(u) + (3-u)N_{4,0}(u)\} , \\
N_{3,2}(u) &= \frac{u-1}{2} \{(u-1)N_{3,0}(u) + (3-u)N_{4,0}(u)\} + \frac{4-u}{2} \{(u-2)N_{4,0}(u) + (4-u)N_{5,0}(u)\} , \\
N_{4,2}(u) &= \frac{u-2}{2} \{(u-2)N_{4,0}(u) + (4-u)N_{5,0}(u)\} + (4-u)(u-3)N_{5,0}(u) ,
\end{aligned}$$

on en déduit la forme de la courbe dans les sous-intervalles. Par exemple, pour  $u \in [0, 1[$ , on prend les termes facteurs de  $N_{2,0}$ , soit :

$$\gamma_0(u) = (1-u)^2 P_0 + \frac{u}{2}(4-3u)P_1 + \frac{u^2}{2}P_2 \quad u \in [0, 1[ ,$$

et, de même :

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u) &= \frac{(2-u)^2}{2}P_1 + (-\frac{u^2}{2} + 3u - \frac{3}{2})P_2 + \frac{(u-1)^2}{2}P_3 \quad u \in [1, 2[ , \\
\gamma_2(u) &= \frac{(3-u)^2}{2}P_2 + (u^2 + 3u - \frac{11}{2})P_3 + \frac{(u-2)^2}{2}P_4 \quad u \in [2, 3[ , \\
\gamma_3(u) &= \frac{(4-u)^2}{2}P_3 + (4-u)(\frac{3u}{2} - 4)P_4 + (u-3)^2P_5 \quad u \in [3, 4[ . \tag{5}
\end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que ces  $\gamma_i(u)$  se raccordent, continuité  $\mathcal{C}^0$ . Par exemple  $\gamma_0(u)$ , par continuité, vaut  $\frac{P_1+P_2}{2}$  en  $u = 1$  et  $\gamma_1(u)$ , en  $u = 1$ , vaut également  $\frac{P_1+P_2}{2}$ , etc. Les points de raccord sont les milieux des arêtes définies par les points de contrôle en partant de  $P_1P_2$  jusqu'à  $P_3P_4$ . En  $u = 0$ ,  $\gamma(u) = \gamma_0(u) = P_0$ , en  $u = 4$ ,  $\gamma(u) = \gamma_3(u) = P_5$ . On vérifie également que les dérivées en  $u = 1$ , à droite pour  $\gamma_0(u)$ , à gauche pour  $\gamma_1(u)$ , sont égales ( $4\vec{P_1P_2}$ ), continuité  $\mathcal{C}^1$ , etc.

À noter, que les calculs sont à peine moins pénibles qu'avec l'autre choix développé juste avant et que, bien entendu, ces deux exemples avec une répartition uniforme définissent la même courbe.

**Le cas  $d = 2$  et  $n = 5$  avec une séquence non uniforme.** On reprend un exemple analogue avec 6 points de contrôle et une séquence non uniforme. La courbe s'écrit :

$$\gamma(u) = \sum_{i=0}^5 N_{i,2}(u)P_i ,$$

la séquence  $U$  avec  $m = n + d + 1 = 8$  possède 9 termes :

$$U = \{u_0 = \bar{u}_0, u_1 = \bar{u}_0, u_2 = \bar{u}_0, u_3 = \bar{u}_1, u_4 = \bar{u}_2, u_5 = \bar{u}_3, u_6 = \bar{u}_4, u_7 = \bar{u}_4, u_8 = \bar{u}_4\}$$

$$\text{avec } \bar{U} = \{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\} = \{0, 1, 2, 5, 9\} .$$

Les  $N_{i,0}$  sont comme ci-dessus, à savoir :

$$\begin{aligned}
N_{0,0}(u) &= 0 , \\
N_{1,0}(u) &= 0 , \\
N_{2,0}(u) &= 1 \text{ si } u \in [u_2, u_3[ = [0, 1[ , 0 \text{ sinon} , \\
N_{3,0}(u) &= 1 \text{ si } u \in [u_3, u_4[ = [1, 2[ , 0 \text{ sinon} , \\
N_{4,0}(u) &= 1 \text{ si } u \in [u_4, u_5[ = [2, 5[ , 0 \text{ sinon} , \\
N_{5,0}(u) &= 1 \text{ si } u \in [u_5, u_6[ = [5, 9[ , 0 \text{ sinon} , \\
N_{6,0}(u) &= 0 , \\
N_{7,0}(u) &= 0 .
\end{aligned}$$

On en déduit les 7  $N_{i,1}$  qui sont nuls sauf dans les intervalles où les  $N_{i,0}$  incriminés sont non nuls :

$$N_{0,1}(u) = 0 \quad \text{car } N_{0,0}(u) = 0 \quad \text{et } N_{1,0}(u) = 0,$$

$$N_{1,1}(u) = \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) = (1 - u) N_{2,0}(u),$$

$$N_{2,1}(u) = \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} N_{3,0}(u) = u N_{2,0}(u) + (2 - u) N_{3,0}(u),$$

$$N_{3,1}(u) = \frac{u - u_3}{u_4 - u_3} N_{3,0}(u) + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_4} N_{4,0}(u) = (u - 1) N_{3,0}(u) + \frac{5 - u}{3} N_{4,0}(u),$$

$$N_{4,1}(u) = \frac{u - u_4}{u_5 - u_4} N_{4,0}(u) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_5} N_{5,0}(u) = \frac{u - 2}{3} N_{4,0}(u) + \frac{9 - u}{4} N_{5,0}(u),$$

$$N_{5,1}(u) = \frac{u - u_5}{u_6 - u_5} N_{5,0}(u) = \frac{u - 5}{4} N_{5,0}(u),$$

$$N_{6,1}(u) = 0 \quad \text{car } N_{6,0} = 0 \quad \text{et } N_{7,0} = 0.$$

On en déduit enfin les 6  $N_{i,2}$  qui sont nuls partout sauf pour les intervalles où les  $N_{i,0}$  incriminés sont non nuls. En premier, on exprime les  $N_{i,2}$  en fonction des  $N_{i,1}$  :

$$N_{0,2}(u) = \frac{u_3 - u}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) = (1 - u) N_{1,1}(u) = (1 - u)^2 N_{2,0}(u), \text{ soit } (1 - u)^2 \quad \text{pour } 0 \leq u < 1,$$

$$N_{1,2}(u) = \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u) = u N_{1,1}(u) + \frac{2 - u}{2} N_{2,1}(u),$$

$$N_{2,2}(u) = \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u) + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_3} N_{3,1}(u) = \frac{u}{2} N_{2,1}(u) + \frac{5 - u}{4} N_{3,1}(u),$$

$$N_{3,2}(u) = \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} N_{3,1}(u) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_4} N_{4,1}(u) = \frac{u - 1}{4} N_{3,1}(u) + \frac{9 - u}{7} N_{4,1}(u),$$

$$N_{4,2}(u) = \frac{u - u_4}{u_6 - u_4} N_{4,1}(u) + \frac{u_7 - u}{u_7 - u_5} N_{5,1}(u) = \frac{u - 2}{7} N_{4,1}(u) + \frac{9 - u}{4} N_{5,1}(u),$$

$$N_{5,2}(u) = \frac{u - u_5}{u_7 - u_5} N_{5,1}(u) = \left( \frac{u - 5}{4} N_{5,1}(u) \right) = \frac{(u - 5)^2}{16} N_{5,0}(u), \text{ soit } (u - 3)^2 \quad \text{pour } 3 \leq u < 4,$$

et, pour finir, on explicite les  $N_{i,1}$  dans les  $N_{i,2}$  restant à calculer :

$$N_{1,2}(u) = u N_{1,1}(u) + \frac{2 - u}{2} N_{2,1}(u),$$

$$N_{2,2}(u) = \frac{u}{2} N_{2,1}(u) + \frac{5 - u}{4} N_{3,1}(u),$$

$$N_{3,2}(u) = \frac{u - 1}{4} N_{3,1}(u) + \frac{9 - u}{7} N_{4,1}(u),$$

$$N_{4,2}(u) = \frac{u - 2}{7} N_{4,1}(u) + \frac{9 - u}{4} N_{5,1}(u),$$

il vient :

$$N_{1,2}(u) = u(1 - u) N_{2,0}(u) + \frac{2 - u}{2} \{u N_{2,0}(u) + (2 - u) N_{3,0}(u)\},$$

$$N_{2,2}(u) = \frac{u}{2} \{u N_{2,0}(u) + (2 - u) N_{3,0}(u)\} + \frac{5 - u}{4} \left\{ (u - 1) N_{3,0}(u) + \frac{5 - u}{3} N_{4,0}(u) \right\},$$

$$N_{3,2}(u) = \frac{u - 1}{4} \left\{ (u - 1) N_{3,0}(u) + \frac{5 - u}{3} N_{4,0}(u) \right\} + \frac{9 - u}{7} \left\{ \frac{u - 2}{3} N_{4,0}(u) + \frac{9 - u}{4} N_{5,0}(u) \right\},$$

$$N_{4,2}(u) = \frac{u - 2}{7} \left\{ \frac{u - 2}{3} N_{4,0}(u) + \frac{9 - u}{4} N_{5,0}(u) \right\} + \frac{9 - u}{4} \frac{u - 5}{4} N_{5,0}(u),$$

on en déduit la forme de la courbe dans les sous-intervalles. Par exemple, pour  $u \in [0, 1[$ , on prend les termes facteurs de  $N_{2,0}$ , soit :

$$\gamma_0(u) = (1-u)^2 P_0 + \frac{u}{2}(4-3u)P_1 + \frac{u^2}{2}P_2 \quad u \in [0, 1[ ,$$

et, de même :

$$\begin{aligned} \gamma_1(u) &= \frac{(2-u)^2}{2}P_1 + \left(-\frac{3u^2}{4} + \frac{5u}{2} - \frac{5}{4}\right)P_2 + \frac{(u-1)^2}{4}P_3 \quad u \in [1, 2[ , \\ \gamma_2(u) &= \frac{(5-u)^2}{12}P_2 + \left(-\frac{11u^2}{84} + \frac{86u}{84} - \frac{107}{84}\right)P_3 + \frac{(u-2)^2}{21}P_4 \quad u \in [2, 5[ , \\ \gamma_3(u) &= \frac{(9-u)^2}{28}P_3 + \frac{(9-u)}{4} \frac{(11u-43)}{28}P_4 + \frac{(u-5)^2}{16}P_5 \quad u \in [5, 9[ . \end{aligned} \quad (6)$$

Par rapport à l'exemple précédent, la courbe  $\gamma_0(u)$  est identique car la séquence nodale est la même sur l'intervalle correspondant. On vérifie par ailleurs la continuité  $\mathcal{C}^0$  en calculant les points de raccord :

$$\begin{aligned} \gamma_0(1) &= \frac{P_1 + P_2}{2} = \gamma_1(1) , \\ \gamma_1(2) &= \frac{3P_2 + P_3}{4} = \gamma_2(2) , \\ \gamma_2(5) &= \frac{4P_3 + 3P_4}{7} = \gamma_3(5) , \end{aligned}$$

et, évidemment,  $\gamma_0(0) = P_0$  ainsi que  $\gamma_3(9) = P_5$ . On vérifie également la continuité  $\mathcal{C}^1$  en ces points de raccord. Par exemple, entre  $\gamma_0(u)$  et  $\gamma_1(u)$  pour  $u = 1$ . En effet, on a :

$$\gamma_0'(u) = -2(1-u)P_0 + (2-3u)P_1 + uP_2 ,$$

et

$$\gamma_1'(u) = -(2-u)P_1 + \frac{5-3u}{2}P_2 + \frac{u-1}{2}P_3 ,$$

soit, en  $u = 1$  :

$$\begin{aligned} \gamma_0'(1) &= -P_1 + P_2 = \overrightarrow{P_1 P_2} , \\ \gamma_1'(1) &= -P_1 + P_2 = \overrightarrow{P_1 P_2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \gamma_0'(1) . \end{aligned}$$

Il en va de même pour les autres raccords entre les sous-courbes.

### 2.2.3 Passage B-spline Bézier et passage inverse

**Passage B-spline Bézier.** Il est facile de voir que chaque  $\gamma_i(u)$  est une courbe de Bézier de degré 2. Regardons  $\gamma_0(u)$  et faisons, en repartant des Relations (4), le changement de variable  $v = 4u$ , alors  $u = \frac{v}{4}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \gamma_0(v) &= (1-v)^2 P_0 + 2v(1 - \frac{3v}{4})P_1 + \frac{v^2}{2}P_2 , \\ \gamma_0(v) &= (1-v)^2 P_0 + 2v(1 - v + \frac{v}{4})P_1 + \frac{v^2}{2}P_2 , \\ \gamma_0(v) &= (1-v)^2 P_0 + 2v(1 - v)P_1 + \frac{v^2}{2}P_1 + \frac{v^2}{2}P_2 , \\ \gamma_0(v) &= (1-v)^2 P_0 + 2v(1 - v)P_1 + v^2 \frac{P_1 + P_2}{2} , \end{aligned}$$

qui est la forme classique d'un Bézier sur l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$\gamma_0(u) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(u) Q_i^0 ,$$

avec les points de contrôle  $Q_0^0 = P_0, Q_1^0 = P_1, Q_2^0 = \frac{P_1+P_2}{2}$ . Notons que, si on part de la Relation (5), on retrouve bien ce résultat mais sans différence de coût calcul. À titre de vérification, regardons  $\gamma_1(u)$  avec le changement de variable  $v = u - 1$  donc  $u = v + 1$ , il vient :

$$\begin{aligned}\gamma_1(v) &= \frac{(1-v)^2}{2}P_1 + (-(v+1)^2 + 3(v+1) - \frac{3}{2})P_2 + \frac{v^2}{2}P_3, \\ \gamma_1(v) &= \frac{(1-v)^2}{2}P_1 + (v^2 - v + \frac{1}{2} + 2v(1-v))P_2 + \frac{v^2}{2}P_3, \\ \gamma_1(v) &= \frac{(1-v)^2}{2}P_1 + (\frac{(1-v)^2}{2} + \frac{v^2}{2} + 2v(1-v))P_2 + \frac{v^2}{2}P_3, \\ \gamma_1(v) &= (1-v)^2\frac{P_1+P_2}{2} + 2v(1-v)P_2 + v^2\frac{P_2+P_3}{2},\end{aligned}$$

soit la forme classique d'un Bézier sur l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$\gamma_1(u) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(u)Q_i^1,$$

avec les points de contrôle  $Q_0^1 = \frac{P_1+P_2}{2}, Q_1^1 = P_2, Q_2^1 = \frac{P_2+P_3}{2}$ . Il est clair que les deux autres morceaux ont la même forme. En conclusion, on sait exprimer la courbe B-spline par un ensemble de sous-courbes de Bézier se raccordant avec une continuité  $\mathcal{C}^1$  et dont les points de contrôle sont faciles à calculer (pour notre choix initial des séquences  $\bar{U}$  et  $U$ ).

**Passage Bézier B-spline.** Pour un usage ultérieur, regardons la transformation inverse, à savoir, étant donné un ensemble de Bézier se raccordant avec la continuité voulue, peut on retrouver une courbe B-spline équivalente. La réponse est oui et nous allons voir comment faire en pratique. On se donne plusieurs courbes de Bézier classiquement définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  qui se suivent :

$$\begin{aligned}\gamma_0(u) &= \sum_{i=0}^2 B_i^2(u)Q_i^0, \\ \gamma_1(u) &= \sum_{i=0}^2 B_i^2(u)Q_i^1, \\ &\dots,\end{aligned}$$

avec  $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$  et donc  $Q_2^0 = Q_0^1$  (continuité  $\mathcal{C}^0$ ), ..., et des propriétés<sup>4</sup> sur les tangentes aux points de raccord, à savoir  $\overrightarrow{Q_1^0 Q_2^0}$  colinéaire avec  $\overrightarrow{Q_0^1 Q_1^1}$  (continuité  $\mathcal{G}^1$ ) et égal (continuité  $\mathcal{C}^1$ ), ... On effectue alors un changement de variable pour chaque  $\gamma_i(u)$ . Supposant avoir 4 morceaux,  $n = 5$ , pour fixer les idées, on définit pour  $\gamma_0(u)$ , le changement de variable  $v = \frac{u}{4}$ , puis pour  $\gamma_1(u)$ , le changement de variable  $v = \frac{1+u}{4}$ , ...,  $v = \frac{i+u}{n-1}$  de manière formelle pour la courbe  $\gamma_i$  et en fonction du nombre de points de contrôle.

Pour  $\gamma_0$ , on effectue le changement de variable  $v = \frac{u}{4}$ , soit  $u = 4v$ , pour  $\gamma_1$ , on pose  $v = \frac{1+u}{4}$ , soit  $u = 4v - 1$ , etc. Alors :

$$\gamma_0(u) = (1-u)^2 Q_0^0 + 2u(1-u)Q_1^0 + u^2 Q_2^0, u \in [0, 1],$$

devient :

$$\gamma_0(v) = (1-4v)^2 Q_0^0 + 8v(1-4v)Q_1^0 + 16v^2 Q_2^0, v \in [0, \frac{1}{4}],$$

tandis que

$$\gamma_1(u) = (1-u)^2 Q_0^1 + 2u(1-u)Q_1^1 + u^2 Q_2^1, u \in [0, 1],$$

devient :

$$\gamma_1(v) = 4(1-2v)^2 Q_0^1 + 4(1-2v)(4v-1)Q_1^1 + (4v-1)^2 Q_2^1, v \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}].$$

<sup>4</sup>le résultat dépend évidemment du niveau de continuité.



puis

$$\gamma_2(u) = (1-u)^2 Q_0^2 + 2u(1-u)Q_1^2 + u^2 Q_2^2, \quad u \in [0, 1],$$

devient (avec  $v = \frac{2+u}{4}$ ,  $u = 4v - 2$ ) :

$$\gamma_2(v) = (3-4v)^2 Q_0^2 + 4(2v-1)(3-4v)Q_1^2 + 4(2v-1)^2 Q_2^2, \quad v \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}],$$

et, finalement

$$\gamma_3(u) = (1-u)^2 Q_0^3 + 2u(1-u)Q_1^3 + u^2 Q_2^3, \quad u \in [0, 1],$$

devient (avec  $v = \frac{3+u}{4}$ ,  $u = 4v - 3$ ) :

$$\gamma_3(v) = 16(1-v)^2 Q_0^3 + 8(4v-3)(1-v)Q_1^3 + (4v-3)^2 Q_2^3, \quad v \in [\frac{3}{4}, 1].$$

Donc, on a les quatre morceaux suivants (réécrits en  $u$ ) :

$$\gamma_0(u) = (1-4u)^2 Q_0^0 + 8u(1-4u)Q_1^0 + 16u^2 Q_2^0, \quad u \in [0, \frac{1}{4}],$$

$$\gamma_1(u) = 4(1-2u)^2 Q_0^1 + 4(1-2u)(4u-1)Q_1^1 + (4u-1)^2 Q_2^1, \quad u \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}].$$

$$\gamma_2(u) = (3-4u)^2 Q_0^2 + 4(2u-1)(3-4u)Q_1^2 + 4(2u-1)^2 Q_2^2, \quad u \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}],$$

$$\gamma_3(u) = 16(1-u)^2 Q_0^3 + 8(4u-3)(1-u)Q_1^3 + (4u-3)^2 Q_2^3, \quad u \in [\frac{3}{4}, 1].$$

En conséquence des conditions de raccord et en posant :

$$P_0 = Q_0^0, P_1 = Q_1^0, P_2 = Q_1^1, P_3 = Q_1^2, P_4 = Q_1^3, P_5 = Q_2^3,$$

les courbes se réécrivent :

$$\gamma_0(u) = (1-4u)^2 P_0 + 8u(1-4u)P_1 + 8u^2(P_1 + P_2), \quad u \in [0, \frac{1}{4}],$$

$$\gamma_1(u) = 2(1-2u)^2(P_1 + P_2) + 4(1-2u)(4u-1)P_2 + (4u-1)^2 \frac{P_2 + P_3}{2}, \quad u \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}].$$

$$\gamma_2(u) = (3-4u)^2 \frac{P_2 + P_3}{2} + 4(2u-1)(3-4u)P_3 + 2(2u-1)^2(P_3 + P_4), \quad u \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}],$$

$$\gamma_3(u) = 8(1-u)^2(P_3 + P_4) + 8(4u-3)(1-u)P_4 + (4u-3)^2 P_5, \quad u \in [\frac{3}{4}, 1].$$

En factorisant les  $P_i$ , il vient :

$$\gamma_0(u) = (1-4u)^2 P_0 + 8u(1-3u)P_1 + 8u^2 P_2, \quad u \in [0, \frac{1}{4}],$$

$$\gamma_1(u) = 2(1-2u)^2 P_1 + (-16u^2 + 12u - \frac{3}{2})P_2 + \frac{(4u-1)^2}{2} P_3, \quad u \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}].$$

$$\gamma_2(u) = \frac{(3-4u)^2}{2} P_2 + (-16u^2 + 20u - \frac{11}{2})P_3 + 2(2u-1)^2 P_4, \quad u \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}],$$

$$\gamma_3(u) = 8(1-u)^2 P_3 + 8(3u-2)(1-u)P_4 + (4u-3)^2 P_5, \quad u \in [\frac{3}{4}, 1],$$

qui est exactement la B-spline telle que définie au départ via les Relations (4).

L'intérêt de ce qui précède sera de pouvoir "multiplier" les B-splines entre elles en revenant aux Bézier localement pour lesquels la multiplication est bien définie, opération qui arrivera naturellement lors du calcul du polynôme jacobien des carreaux.

### 2.2.4 Raffinement d'une courbe B-spline

On part de la courbe

$$\gamma(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,d}(u) P_i, u \in [0, 1],$$

construite à partir des  $n + 1$  points de contrôle, les  $P_i$ , d'une séquence nodale  $U$  et de sa séquence associée  $\bar{U}$ . L'opération de raffinement consiste à construire la courbe

$$\gamma_{raf}(u) = \sum_{j=0}^m N_{j,d}(u) Q_j, u \in [0, 1],$$

appuyée sur  $m + 1$  points de contrôle, les  $Q_i$ , une séquence  $V$  et sa séquence associée  $\bar{V}$  données telles que  $m > n$  et que les deux courbes soient identiques, c'est-à-dire que  $\gamma_{raf}(u) = \gamma(u)$ .

On trouve dans [11] l'algorithme permettant ce raffinement :

$$Q_j = \sum_{i=0}^n \alpha_{ij}^d P_i, i = 0, n, j = 0, m,$$

avec :

$$\alpha_{i,j}^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } v_j \in [u_i, u_{i+1}[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\alpha_{i,j}^d(u) = \frac{v_{j+d} - u_i}{u_{i+d} - u_i} \alpha_{i,j}^{d-1} + \frac{u_{i+1+d} - v_{j+d}}{u_{i+1+d} - u_{i+1}} \alpha_{i+1,j}^{d-1}. \quad (7)$$

Ce raffinement permettra d'obtenir une subdivision (uniforme ou non) de la courbe initiale.

### 2.2.5 Évaluation d'un point de la courbe

On part de la courbe

$$\gamma(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,d}(u) P_i, u \in [0, 1],$$

construite à partir des  $n + 1$  points de contrôle, les  $P_i$ , d'une séquence nodale  $U$  et de sa séquence associée  $\bar{U}$ . On pose  $P_i^0 = P_i$  pour  $i = 0, n$ , la courbe s'écrit alors :

$$\gamma(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,d}(u) P_i^0.$$

On fixe  $u$  dans l'intervalle  $[u_{d+dec}, u_{d+1+dec}]$ , avec  $dec = 0, 1, \dots$  et on veut trouver le point  $P = \gamma(u)$ . Pour cette valeur et son intervalle d'appartenance, la courbe se réduit à (les autres  $N_{i,d}(u)$  étant nuls) :

$$\gamma(u) = \sum_{i=dec}^{d+dec} N_{i,d}(u) P_i^0.$$

On applique la formule de récurrence, il vient :

$$\gamma(u) = \sum_{i=dec}^{d+dec} \left\{ \frac{u - u_i}{u_{i+d} - u_i} N_{i,d-1}(u) + \frac{u_{i+1+d} - u}{u_{i+1+d} - u_{i+1}} N_{i+1,d-1}(u) \right\} P_i^0,$$

soit encore, successivement :

$$\gamma(u) = \left[ \frac{u_{i+1+d} - u}{u_{i+1+d} - u_{i+1}} N_{i+1,d-1}(u) P_i^0 \right]_{i=dec} +$$

$$\sum_{i=dec+1}^{d+dec-1} \left\{ \frac{u - u_i}{u_{i+d} - u_i} N_{i,d-1}(u) + \frac{u_{i+1+d} - u}{u_{i+1+d} - u_{i+1}} N_{i+1,d-1}(u) \right\} P_i^0 +$$

$$\left[ \frac{u - u_i}{u_{i+d} - u_i} N_{i,d-1}(u) P_i^0 \right]_{i=d+dec},$$

le dernier terme se regroupe avec les premiers termes de la somme tandis que le premier terme se regroupe avec les seconds termes de la somme, donc :

$$\gamma(u) = \sum_{i=dec+1}^{d+dec} \frac{u - u_i}{u_{i+d} - u_i} N_{i,d-1}(u) P_i^0 + \sum_{i=dec+1}^{d+dec} \frac{u_{i+d} - u}{u_{i+d} - u_i} N_{i,d-1}(u) P_{i-1}^0,$$

soit simplement :

$$\gamma(u) = \sum_{i=dec+1}^{d+dec} N_{i,d-1}(u) P_i^1,$$

avec :

$$P_i^1 = \frac{u - u_i}{u_{i+d} - u_i} P_i^0 + \frac{u_{i+d} - u}{u_{i+d} - u_i} P_{i-1}^0,$$

qui s'exprime de manière générique comme (ici  $r = 1$ ) :

$$P_i^r = \frac{u - u_i}{u_{i+d+1-r} - u_i} P_i^{r-1} + \frac{u_{i+d+1-r} - u}{u_{i+d+1-r} - u_i} P_{i-1}^{r-1}. \quad (8)$$

En réitérant on trouve :

$$\gamma(u) = \sum_{i=dec+2}^{d+dec} N_{i,d-2}(u) P_i^2,$$

avec :

$$P_i^2 = \frac{u - u_i}{u_{i+d-1} - u_i} P_i^1 + \frac{u_{i+d-1} - u}{u_{i+d-1} - u_i} P_{i-1}^1.$$

Si  $d = 2$ , on a fini et le point  $P$  est obtenu,  $P = \gamma(u) = \sum_{i=dec+2}^{d+dec} N_{i,0}(u) P_i^2$ . Pour un degré quelconque, on a :

$$P = \gamma(u) = \sum_{i=dec+d}^{d+dec} N_{i,0}(u) P_i^d = P_{dec+d}^d. \quad (9)$$

À titre d'illustration on va calculer, sur l'exemple déjà pris, la valeur de  $\gamma(1)$ . La séquence nodale est :

$$U = \{u_0 = \bar{u}_0, u_1 = \bar{u}_0, u_2 = \bar{u}_0, u_3 = \bar{u}_1, u_4 = \bar{u}_2, u_5 = \bar{u}_3, u_6 = \bar{u}_4, u_7 = \bar{u}_4, u_8 = \bar{u}_4\}$$

$$\text{avec } \bar{U} = \{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

donc :

$$U = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4\}.$$

Il y a deux façons pour évaluer le point  $\gamma(1)$ , on a  $u = 1$  et  $d = 2$  et on peut considérer ce point comme la fin du premier morceau, alors  $dec = 0$  et  $\gamma(1) = P_2^2$ , ou comme le début du second morceau et, ainsi,  $dec = 1$  et  $\gamma(1) = P_3^2$ . Les deux calculs conduisent évidemment au même résultat mais le choix  $dec = 0$ , seul, permet de trouver les nouveaux points de contrôle de la courbe. On prend donc la Formule (9) :

$$P = \sum_{i=2}^2 N_{i,0}(u) P_i^2 = N_{2,0}(u) P_2^2 = P_2^2.$$

Le diagramme de cette construction est :

$$\begin{array}{ccc} & P_2^2 & \\ & \uparrow & \\ P_1^1 & P_2^1 & \\ \uparrow & \uparrow & \\ P_0^0 & P_1^0 & P_2^0. \end{array}$$

Ceci conduit aux calculs suivants, en partant du rang  $r = 0$ , trois points, puis au rang  $r = 1$ , 2 points, et enfin au rang  $r = 2$ , un point (la solution) :

$$\begin{aligned} P_1^1 &= \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} P_1^0 + \frac{u_3 - u}{u_3 - u_1} P_0^0 = P_1^0, \\ P_2^1 &= \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} P_2^0 + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} P_1^0 = \frac{P_2^0 + P_1^0}{2}, \\ P_2^2 &= \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} P_2^1 + \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} P_1^1 = P_2^1, \end{aligned}$$

donc :

$$P = \gamma(1) = P_2^2 = P_2^1 = \frac{P_1 + P_2}{2},$$

qui est le résultat attendu et les points de contrôle de ce premier morceau de courbe sont successivement  $P_0^0, P_1^1, P_2^2$  soit, de manière générique,  $P_{k+dec}^k$  avec, ici,  $dec = 0$  et  $k = 0, 1, 2 = 0, \dots, d$ . On a donc comme points de contrôle :

$$P_0^0 = P_0, P_1^1 = P_1^0 = P_1, P_2^2 = \frac{P_1 + P_2}{2}.$$

Pour évaluer le point  $\gamma(2)$ , on a les deux choix,  $u = 2$  et  $P_3^2$  ( $dec = 1$ ) ou  $P_4^2$  ( $dec = 2$ ), etc. Schématiquement, les points de coupe et de contrôle des sous-courbes s'organisent selon le diagramme suivant, de  $P_0$  à  $P_5$  :

$$\begin{array}{cccccc} P_0 & - & P_1 & - & P_2 & & P_3 & & P_4 & & P_5 \\ & & 1 & 1/2 & . & & . & & . & & \\ & & & 1 & . & & . & & . & & \\ & & & P & - & . & - & . & & . & \\ & & & & 1 & 1/2 & . & & . & & \\ & & & & & 1 & . & & . & & \\ & & & & & P & - & . & - & . & \\ & & & & & & 1 & 1/2 & . & & \\ & & & & & & & 1 & . & & \\ & & & & & & & P & - & . & - \\ & & & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & P & = & P_5 \end{array}$$

### 2.2.6 Évaluation des points de coupe et des points de contrôle locaux

On peut utiliser ce même algorithme pour trouver, de proche en proche, les différentes sous-courbes avec leurs points de contrôle. Le processus est le suivant :

- calcul de  $P_d^d = \gamma(1)$  par l'algorithme ci-dessus,  $dec = 0, u = 1$ , avec, au vol, les points de contrôle,
- modification de la séquence nodale en rajoutant  $d$  valeurs à 1,
- calcul de  $P_{d+1}^d = \gamma(2)$  avec cette nouvelle séquence et la modification des indices comme indiqué ci-dessous,
- ...

On suppose donc avoir calculé  $\gamma(1)$  et les points de contrôle de ce premier morceau. Pour avoir  $\gamma(2)$  et, de plus, les points de contrôle du second morceau de courbe, on doit choisir le calcul de  $P_3^2$ , donc  $dec = 1$ , avec la nouvelle séquence nodale :

$$U = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4\},$$

en ayant défini un nouveau  $P_1^0$ , alias  $P_{dec}^0$  comme :

$$P_1^0 = P = \gamma(1), \text{ le point trouvé ci-dessus.}$$

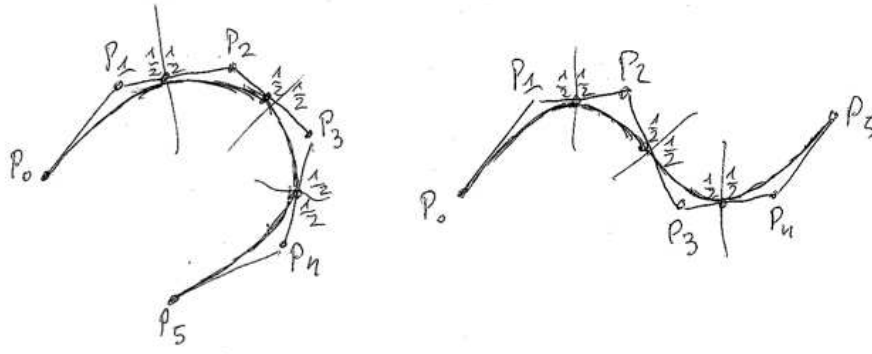


FIG. 1 – La courbe B-spline initiale et ses 4 Bézier locaux pour deux jeux de points de contrôle et une séquence uniforme.

Le diagramme de la construction est :

$$\begin{array}{c} P_3^2 \\ P_2^1 \quad P_3^1 \\ P_1^0 \quad P_2^0 \quad P_3^0. \end{array}$$

Dans la formule de récurrence, l'indice  $i$  des points doit être remplacé par l'indice  $i + d$  dans les nœuds et, ainsi, les calculs sont :

$$\begin{aligned} P_2^1 &= \frac{u - u_4}{u_6 - u_4} P_2^0 + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_4} P_1^0 = P_2^0, \\ P_3^1 &= \frac{u - u_5}{u_7 - u_5} P_3^0 + \frac{u_7 - u}{u_7 - u_5} P_2^0 = \frac{P_3^0 + P_2^0}{2}, \\ P_3^2 &= \frac{u - u_5}{u_6 - u_5} P_3^1 + \frac{u_6 - u}{u_7 - u_5} P_2^1 = P_3^1, \end{aligned}$$

donc :

$$P = \gamma(2) = P_3^2 = P_3^1 = \frac{P_2 + P_3}{2},$$

et les points de contrôle sont successivement  $P_1^0, P_2^1, P_3^2$  dont les valeurs sont

$$P_1^0 = \frac{P_1 + P_2}{2}, P_2^1 = P_2^0 = P_2, P_3^2 = \frac{P_2 + P_3}{2}$$

et qui a la forme générique  $P_{k+dec}^k$ ,  $k = 0, 1, 2$  indiquée ci-dessus.

Pour continuer, on initialise  $P_2^0 = P = \gamma(2)$ , on change la séquence  $U$  en triplant (donc en ajoutant  $d$  valeurs) la valeur 2 et, dans la récurrence, les indices en  $i$  des nœuds deviennent  $i + dec \times d$ , ainsi, dans la Formule (8), pour le morceau associé à  $dec$ , les  $u_{xx}$  associés à  $P_i^r$  sont obtenus en substituant :

$$\begin{aligned} u_i &\text{ par } u_{i+dec \times d}, \\ u_{i+d+1-r} &\text{ par } u_{i+dec \times d+d+1-r} = u_{i+(dec+1)d+1-r}. \end{aligned} \quad (10)$$

Donc, le calcul des  $P_i^r$  fournit les points où les morceaux se raccordent et les points de contrôle des différents morceaux donc les Bézier locaux, voir la Figure 1 et, en annexe, le cas d'une courbe B-spline de degré 3.

### 3 Carreau B-spline

On donne la définition et on calcule le polynôme jacobien en repassant aux Bézier.

### 3.1 Définition et jacobien

On se donne une séquence  $U$  et sa séquence associée  $\bar{U}$  comme ci-dessus et une séquence  $V$  (et  $\bar{V}$ ) dont les nœuds sont organisés comme suit :

$$V = \{v_0, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_{m-d-1}, v_{m-d}, \dots, v_m\},$$

avec  $v_0 = v_1 = \dots = v_d = \bar{v}_0$ , etc. De la sorte, le carreau ainsi défini aura comme frontière 4 courbes se raccordant. On se donne également un réseau de points<sup>5</sup> de contrôle, les  $P_{ij}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , alors le carreau<sup>6</sup> est défini par :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n N_{i,d}(u) N_{j,d}(v) P_{ij}, \quad (11)$$

Le jacobien est le déterminant de la matrice des dérivées, soit :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_1(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix},$$

où  $\sigma_1(u, v)$  et  $\sigma_2(u, v)$  sont les deux coordonnées du point  $\sigma(u, v)$ . Par suite, le jacobien s'exprime comme :

$$d^2 \left| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n N_{i+1,d-1}(u) N_{j,d}(v) \frac{\Delta_{ij}^{10}}{\delta_i^{10}} \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} N_{i,d}(u) N_{j+1,d-1}(v) \frac{\Delta_{ij}^{01}}{\delta_j^{01}} \right|,$$

avec

$$\Delta_{ij}^{10} = P_{i+1,j} - P_{ij} = \overrightarrow{P_{ij}P_{i+1,j}} \quad \text{et} \quad \delta_i^{10} = u_{i+d+1} - u_{i+1},$$

et

$$\Delta_{ij}^{01} = P_{i,j+1} - P_{ij} = \overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}} \quad \text{et} \quad \delta_j^{01} = v_{j+d+1} - v_{j+1}.$$

La question est alors de savoir si on peut regrouper ces sommes (comme pour les Bézier) afin d'obtenir un polynôme de degré  $2d - 1 \times 2d - 1$  pour toutes<sup>7</sup> séquences  $U$  et  $V$  ? On écrit le jacobien comme :

$$d^2 \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^n \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^{n-1} N_{i_1+1,d-1}(u) N_{i_2,d}(u) N_{j_1,d}(v) N_{j_2+1,d-1}(v) \frac{1}{\delta_{i_1}^{10} \delta_{j_2}^{01}} \left| \Delta_{i_1 j_1}^{10} \quad \Delta_{i_2 j_2}^{01} \right|,$$

ce qui semble inextricable. Mais comme on sait passer d'une représentation B-spline à une représentation par une succession de Bézier (en rajoutant, si besoin est, des nœuds dans la séquence  $U$  et dans celle des  $V$ ), on doit pouvoir trouver une écriture relativement compacte du polynôme jacobien en utilisant la multiplication<sup>8</sup> des Bézier entre-eux.

### 3.2 Écriture en Bézier par morceaux

Pour fixer les idées on prend  $d = 2$ ,  $n = 5$ , des séquences, identiques en  $u$  et en  $v$ , soit  $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ , comme dans les exemples des courbes traitées auparavant, et on repart de l'expression (11) que l'on exprime sur chaque morceau, voir la Figure 2. Ainsi :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) P_{ij}. \quad (12)$$

<sup>5</sup>Rappelons que le carreau est plan et que nous ne regardons pas le cas d'un carreau de surface.

<sup>6</sup>Pour simplifier, on prend le même degré en  $u$  et en  $v$  et le même nombre de points de contrôle dans les deux directions. Le cas général avec des degrés différents et des réseaux différents dans les deux directions se traite de la même manière.

<sup>7</sup>certaines séquences redonnant immédiatement des Bézier donc permettant de trouver une expression plus fine des coefficients de contrôle.

<sup>8</sup>rappelons encore que si on multiplie deux B-splines, le résultat n'est pas une B-spline.

Pour le sous-carreau  $0 \times 0$ , voir la figure, défini dans  $[0, 1] \times [0, 1]$ , et pour cet exemple précis, on peut écrire la restriction de

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) P_{ij}$$

à ce sous-carreau comme :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_i^2(u) B_j^2(v) Q_{ij},$$

avec :

$$\begin{aligned} Q_{0j} &= P_{0j} \text{ pour } j = 0, 1 \text{ et } Q_{02} = \frac{P_{01} + P_{02}}{2}, \\ Q_{1j} &= P_{1j} \text{ pour } j = 0, 1 \text{ et } Q_{12} = \frac{P_{11} + P_{12}}{2}, \\ Q_{2j} &= \frac{P_{1j} + P_{2j}}{2} \text{ pour } j = 0, 1 \text{ et } Q_{22} = \frac{P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22}}{4}. \end{aligned}$$

En effet, ceci revient à exprimer les 4 arêtes du sous-carreau dont on a calculé les points de contrôle lors du passage B-spline Bézier. Le processus formel, pour le sous-carreau  $0 \times 0$ , est le suivant, on part de

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) P_{ij}$$

que l'on écrit comme

$$\sigma(u, v) = \sum_{j=0}^5 N_{j,2}(v) \left\{ \sum_{i=0}^5 N_{i,2}(u) P_{ij} \right\}$$

puis

$$\sigma(u, v) = \sum_{j=0}^5 N_{j,2}(v) \left\{ \sum_{i=0}^2 B_i^2(u) R_{ij} \right\}$$

avec  $R_{0j} = P_{0j}$ ,  $R_{1j} = P_{1j}$ ,  $R_{2j} = \frac{P_{1j} + P_{2j}}{2}$  et, ensuite, on fait la même opération en  $v$ , soit

$$\sigma(u, v) = \sum_{j=0}^5 N_{j,2}(v) \left\{ \sum_{i=0}^2 B_i^2(u) R_{ij} \right\}$$

est écrit comme

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(u) \left\{ \sum_{j=0}^5 N_{j,2}(v) R_{ij} \right\}$$

puis

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(u) \left\{ \sum_{j=0}^2 B_j^2(v) Q_{ij} \right\} = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_i^2(u) B_j^2(v) Q_{ij},$$

avec  $Q_{i0} = R_{i0}$ ,  $Q_{i1} = R_{i1}$ ,  $Q_{i2} = \frac{R_{i1} + R_{i2}}{2}$ .

La Figure 3 montre le sous-carreau  $0 \times 0$ , à gauche et ses points de contrôle, à droite. Ces points de contrôle sont de trois types :

- point identique à un point du carreau complet, par exemple  $Q_{00} = P_{00}$ ,
- moyenne entre les deux points "voisins", par exemple  $Q_{20} = \frac{P_{10} + P_{20}}{2}$ ,
- moyenne entre les quatre points voisins", ici  $Q_{22} = \frac{P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22}}{4}$ .

**Expression des points de contrôle.** On rappelle ici l'expression ci-dessus donnant les  $Q_{ij}$  en fonction des  $P_{ij}$  pour le sous-carreau  $0 \times 0$ . Les 9 points de contrôle sont :

$$\begin{aligned} Q_{00} &= P_{00}, Q_{10} = P_{10}, Q_{20} = \frac{P_{10} + P_{20}}{2}, \\ Q_{01} &= P_{01}, Q_{11} = P_{11}, Q_{21} = \frac{P_{11} + P_{21}}{2}, \\ Q_{02} &= \frac{P_{01} + P_{02}}{2}, Q_{12} = \frac{P_{11} + P_{12}}{2}, Q_{22} = \frac{P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22}}{4}. \end{aligned}$$

### 3.3 Évaluation d'un point de la surface

On reprend l'algorithme correspondant aux formules (8) et (9) que l'on applique d'abord en  $u$  puis en  $v$ . Ceci donne :

$$Q_{ij}^r = \frac{u - u_i}{u_{i+d+1-r} - u_i} P_{ij}^{r-1} + \frac{u_{i+d+1-r} - u}{u_{i+d+1-r} - u_i} P_{i-1,j}^{r-1}$$

avec

$$Q = \sigma(u, v) = Q(v) = \sum_{i=dec+d}^{d+dec} N_{i,0}(u) P_{ij}^d = P_{dec+d,j}^d$$

où  $dec$  est le décalage en  $u$ . Ensuite le point  $P$  cherché est obtenu en faisant :

$$P_{ij}^r = \frac{v - v_j}{v_{j+d+1-r} - v_j} Q_{ij}^{r-1} + \frac{v_{j+d+1-r} - v}{v_{j+d+1-r} - v_j} Q_{i,j-1}^{r-1}$$

avec  $i = dec + d$  et  $Q_{ij} = P_{dec+d,j}^d$ . La solution est alors

$$P = \sigma(u, v) = \sum_{j=dec+d}^{d+dec} N_{j,0}(v) Q_{ij}^d = Q_{i,dec+d}^d$$

où  $dec$  est ici le décalage en  $v$  et  $i$  a la valeur indiquée ci-dessus.

### 3.4 Les coefficients de contrôle

De manière générale, chaque sous-carreau a ce type de points de contrôle, voir la Figure 4.

Avec cette formulation, on retrouve, pour chaque sous-carreau, le cas classique, voir [4]. On connaît donc l'expression du jacobien et ses différents coefficients. On peut écrire de manière formelle :

$$\sigma(u, v) = \bigcup_k \bigcup_l \sigma^{kl}(u, v),$$

avec :

$$\sigma^{kl}(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_i^2(u) B_j^2(v) Q_{ij}^{kl},$$

et le jacobien prend la forme connue :

$$\mathcal{J}^{kl}(u, v) = \sum_{I=0,3} \sum_{J=0,3} B_I^3(u) B_J^3(v) N_{IJ}^{kl},$$

où les  $N_{ij}^{kl}$  valent :

$$N_{IJ}^{kl} = 4 \sum_{i_1+i_2=I} \sum_{j_1+j_2=J} \frac{C_{j_1}^2 C_{i_2}^2}{C_I^3 C_J^3} |\Delta_{i_1,j_1}^{1,0} \quad \Delta_{i_2,j_2}^{0,1}|, \quad (13)$$

avec  $\Delta_{ij}^{1,0} = \overrightarrow{Q_{ij}^{kl} Q_{i+1,j}^{kl}}$  et  $\Delta_{ij}^{0,1} = \overrightarrow{Q_{ij}^{kl} Q_{i,j+1}^{kl}}$ . Donc, *in extenso*, sur le sous-carreau  $k \times l$ , les



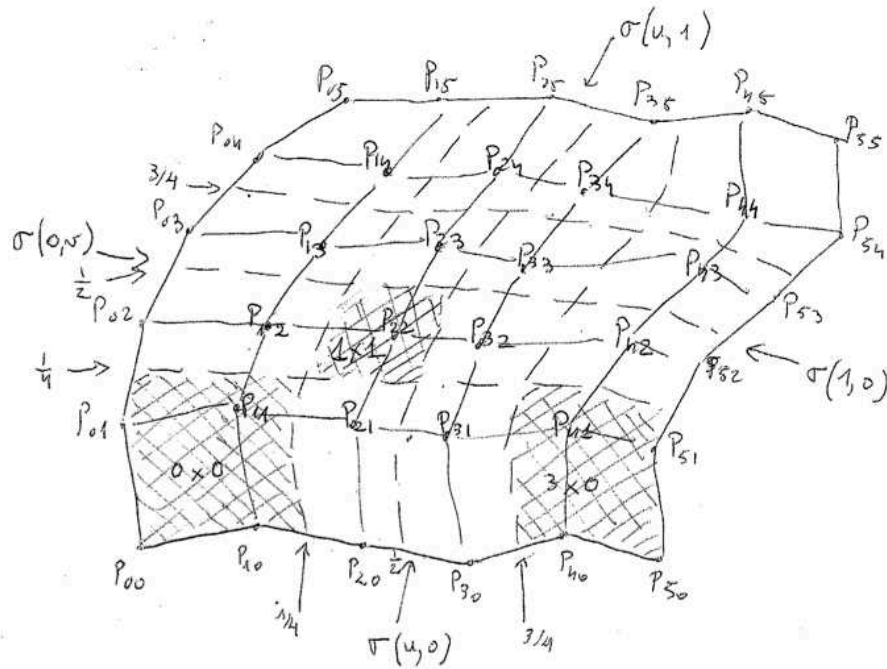


FIG. 2 – Diagramme synthétique du carreau et (matrice) des sous-carreaux dont, en grisé, les sous-carreaux  $0 \times 0$ ,  $1 \times 1$  et  $3 \times 0$ .

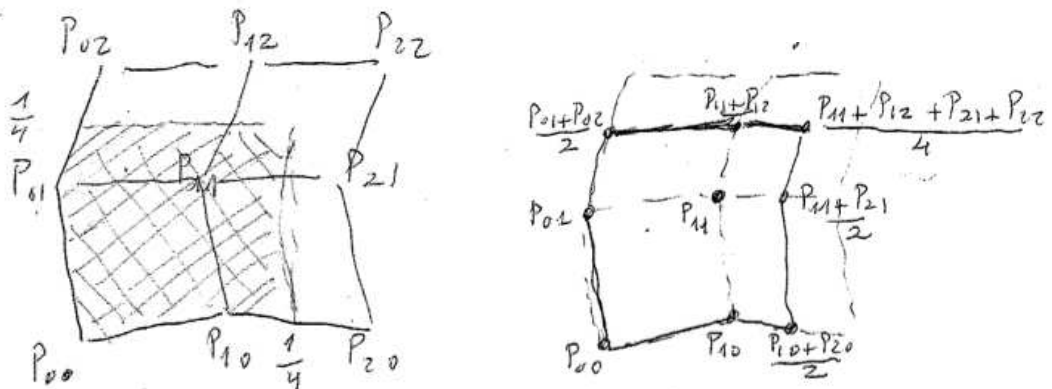


FIG. 3 – Diagramme synthétique pour le sous-carreau  $0 \times 0$  avant la définition des points de contrôle, à gauche. Définition des points de contrôle, à droite.

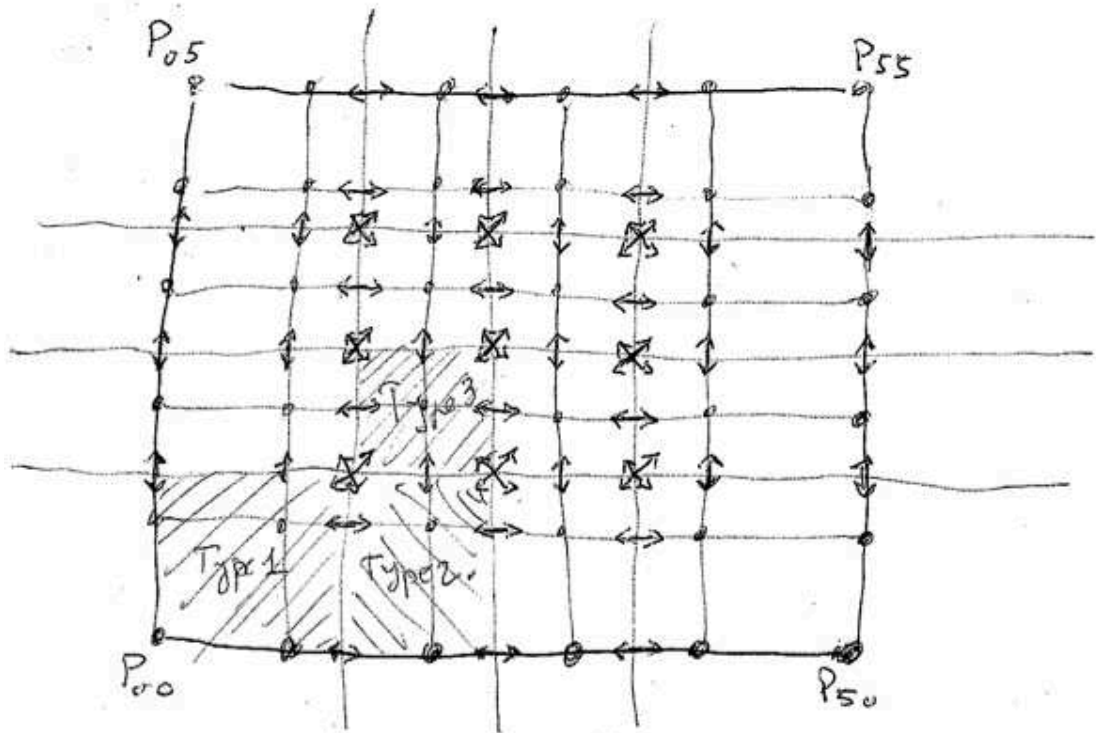


FIG. 4 – Diagramme synthétique des points de contrôle de tous les sous-carreaux du carreau initial (avec une symbolique immédiate : pour notre choix des séquences nodales, un rond indique que le  $Q_{ij}$  est l'un des  $P_{kl}$  initiaux, une double flèche indique que le  $Q_{ij}$  est la moyenne des deux  $P_{kl}$  pointés par cette flèche, une quadruple flèche indique que le  $Q_{ij}$  est la moyenne des quatre  $P_{kl}$  pointés par cette flèche).

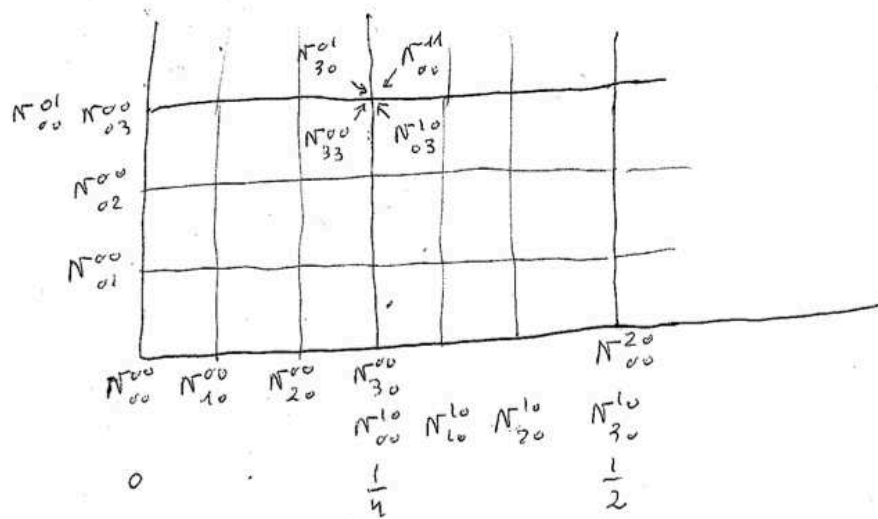


FIG. 5 – Diagramme synthétique des coefficients de contrôle de quelques sous-carreaux du carreau initial.

coefficients de contrôle sont :

$$\begin{aligned}
N_{00}^{kl} &= 4 \left| \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{10}^{kl}} \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{01}^{kl}} \right| \\
N_{01}^{kl} &= \frac{4}{3} \left| \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{10}^{kl}} \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{02}^{kl}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{11}^{kl}} \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{01}^{kl}} \right| \\
N_{02}^{kl} &= \frac{4}{3} \left| \overrightarrow{Q_{02}^{kl} Q_{12}^{kl}} \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{01}^{kl}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{11}^{kl}} \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{02}^{kl}} \right| \\
N_{03}^{kl} &= 4 \left| \overrightarrow{Q_{02}^{kl} Q_{12}^{kl}} \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{02}^{kl}} \right| \\
N_{10}^{kl} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{10}^{kl}} \overrightarrow{Q_{10}^{kl} Q_{11}^{kl}} \right| + \frac{4}{3} \left| \overrightarrow{Q_{10}^{kl} Q_{20}^{kl}} \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{01}^{kl}} \right| \\
N_{11}^{kl} &= \frac{8}{9} \left| \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{10}^{kl}} \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{12}^{kl}} \right| + \frac{16}{9} \left| \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{11}^{kl}} \overrightarrow{Q_{10}^{kl} Q_{11}^{kl}} \right| + \frac{4}{9} \left| \overrightarrow{Q_{10}^{kl} Q_{20}^{kl}} \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{02}^{kl}} \right| + \frac{8}{9} \left| \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{21}^{kl}} \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{01}^{kl}} \right| \\
N_{12}^{kl} &= \frac{8}{9} \left| \overrightarrow{Q_{02}^{kl} Q_{12}^{kl}} \overrightarrow{Q_{10}^{kl} Q_{11}^{kl}} \right| + \frac{16}{9} \left| \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{11}^{kl}} \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{12}^{kl}} \right| + \frac{4}{9} \left| \overrightarrow{Q_{12}^{kl} Q_{22}^{kl}} \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{01}^{kl}} \right| + \frac{8}{9} \left| \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{21}^{kl}} \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{02}^{kl}} \right| \\
N_{13}^{kl} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{Q_{02}^{kl} Q_{12}^{kl}} \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{12}^{kl}} \right| + \frac{4}{3} \left| \overrightarrow{Q_{12}^{kl} Q_{22}^{kl}} \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{02}^{kl}} \right| \\
N_{20}^{kl} &= \frac{1}{3} \left| \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{10}^{kl}} \overrightarrow{Q_{20}^{kl} Q_{21}^{kl}} \right| + \frac{2}{3} \left| \overrightarrow{Q_{10}^{kl} Q_{20}^{kl}} \overrightarrow{Q_{10}^{kl} Q_{11}^{kl}} \right| \\
N_{21}^{kl} &= \frac{4}{9} \left| \overrightarrow{Q_{00}^{kl} Q_{10}^{kl}} \overrightarrow{Q_{21}^{kl} Q_{22}^{kl}} \right| + \frac{8}{9} \left| \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{11}^{kl}} \overrightarrow{Q_{20}^{kl} Q_{21}^{kl}} \right| + \frac{8}{9} \left| \overrightarrow{Q_{10}^{kl} Q_{20}^{kl}} \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{12}^{kl}} \right| + \frac{16}{9} \left| \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{21}^{kl}} \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{12}^{kl}} \right| \\
N_{22}^{kl} &= \frac{4}{9} \left| \overrightarrow{Q_{02}^{kl} Q_{12}^{kl}} \overrightarrow{Q_{20}^{kl} Q_{21}^{kl}} \right| + \frac{8}{9} \left| \overrightarrow{Q_{01}^{kl} Q_{11}^{kl}} \overrightarrow{Q_{21}^{kl} Q_{22}^{kl}} \right| + \frac{8}{9} \left| \overrightarrow{Q_{12}^{kl} Q_{22}^{kl}} \overrightarrow{Q_{10}^{kl} Q_{11}^{kl}} \right| + \frac{16}{9} \left| \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{21}^{kl}} \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{12}^{kl}} \right| \\
N_{23}^{kl} &= \frac{4}{3} \left| \overrightarrow{Q_{02}^{kl} Q_{12}^{kl}} \overrightarrow{Q_{21}^{kl} Q_{22}^{kl}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{Q_{12}^{kl} Q_{22}^{kl}} \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{12}^{kl}} \right| \\
N_{30}^{kl} &= 4 \left| \overrightarrow{Q_{10}^{kl} Q_{20}^{kl}} \overrightarrow{Q_{20}^{kl} Q_{21}^{kl}} \right| \\
N_{31}^{kl} &= \frac{4}{3} \left| \overrightarrow{Q_{10}^{kl} Q_{20}^{kl}} \overrightarrow{Q_{21}^{kl} Q_{22}^{kl}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{21}^{kl}} \overrightarrow{Q_{20}^{kl} Q_{21}^{kl}} \right| \\
N_{32}^{kl} &= \frac{4}{3} \left| \overrightarrow{Q_{12}^{kl} Q_{22}^{kl}} \overrightarrow{Q_{20}^{kl} Q_{21}^{kl}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{Q_{11}^{kl} Q_{21}^{kl}} \overrightarrow{Q_{21}^{kl} Q_{22}^{kl}} \right| \\
N_{33}^{kl} &= 4 \left| \overrightarrow{Q_{12}^{kl} Q_{22}^{kl}} \overrightarrow{Q_{21}^{kl} Q_{22}^{kl}} \right|,
\end{aligned} \tag{14}$$

et il suffit de remplacer les  $Q_{ij}^{kl}$  par leurs expressions, dans chaque sous-carreau, en fonction des  $P_{ij}$  initiaux (voir la Figure 4 et plus bas pour trouver ces  $Q_{ij}^{kl}$ ).

**Quelques remarques.** Les quatre coefficients coins,  $N_{00}^{00}, N_{30}^{30}, N_{33}^{33}$  et  $N_{03}^{03}$  sont identiques aux coefficients coins d'un carreau de Bézier classique. Par contre, pour les autres coefficients, il y a des poids différents. Ainsi, par exemple :

$$N_{10}^{00} = \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{P_{00} P_{10}} \overrightarrow{P_{10} P_{11}} \right| + \frac{2}{3} \left| \overrightarrow{P_{10} P_{20}} \overrightarrow{P_{00} P_{01}} \right|,$$

au lieu de :

$$N_{10} = \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{P_{00} P_{10}} \overrightarrow{P_{10} P_{11}} \right| + \frac{4}{3} \left| \overrightarrow{P_{10} P_{20}} \overrightarrow{P_{00} P_{01}} \right|.$$

Le coefficient coin adéquat de chaque sous-carreau coin contrôle l'angle entre les tangentes des deux courbes frontières correspondantes. Il y a trois types de carreaux, les 4 coins (identiques au sous-carreau  $0 \times 0$ ), les 8 sous-carreaux dont une arête est frontière du carreau entier et les 4 sous-carreaux centraux.

**Remarque sur la généricité des coefficients.** La Formule (13) et donc les coefficients des Relations (14) sont formels et totalement génériques. Néanmoins, il n'est pas possible de donner une expression générique des coefficients en fonction des  $P_{ij}$  car le résultat dépend de la séquence nodale.

Par contre, si cette séquence est fixée, on peut donner la forme des  $Q_{ij}^{kl}$  en fonction des  $P_{..}$  initiaux pour ici  $d = 2$ , une séquence uniforme et  $n$  quelconque. On a vu qu'il y a trois types de sous-carreaux, Figure 4, dont découlent neuf expressions possibles pour les  $Q_{ij}^{kl}$ , quatre pour les sous-carreaux coins, quatre pour les sous-carreaux bords (et non coins) et une seule pour les sous-carreaux autres. Ainsi :

– Le sous-carreau coin,  $k = 0, l = 0$ , adjacent à  $P_{00}$  :

$$Q_{ij}^{00} = P_{ij}, i = 0, 1, j = 0, 1$$

$$Q_{i2}^{00} = \frac{P_{i1} + P_{i2}}{2}, i = 0, 1$$

$$Q_{2j}^{00} = \frac{P_{1j} + P_{2j}}{2}, j = 0, 1$$

$$Q_{22}^{00} = \frac{P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22}}{4}.$$

- Le sous-carreau coin,  $k = n - 2, l = 0$ , adjacent à  $P_{n0}$  :

$$Q_{ij}^{n-2,0} = P_{n-2+i,j}, i = 1, 2, j = 0, 1$$

$$Q_{i2}^{n-2,0} = \frac{P_{i1} + P_{i2}}{2}, i = 1, 2$$

$$Q_{0j}^{n-2,0} = \frac{P_{n-2,j} + P_{n-1,j}}{2}, j = 0, 1$$

$$Q_{02}^{n-2,0} = \frac{P_{n-2,1} + P_{n-2,2} + P_{n-1,1} + P_{n-1,2}}{4}.$$

- Le sous-carreau coin,  $k = n - 2, l = n - 2$ , adjacent à  $P_{nn}$  :

$$Q_{ij}^{n-2,n-2} = P_{n-2+i,n-2+j}, i = 1, 2, j = 1, 2$$

$$Q_{i0}^{n-2,n-2} = \frac{P_{n-2+i,n-2} + P_{n-2+i,n-1}}{2}, i = 1, 2$$

$$Q_{0j}^{n-2,n-2} = \frac{P_{n-2,n-2+j} + P_{n-1,n-2+j}}{2}, j = 1, 2$$

$$Q_{00}^{n-2,n-2} = \frac{P_{n-2,n-1} + P_{n-1,n-1} + P_{n-1,n-2} + P_{n-2,n-2}}{4}.$$

- Le sous-carreau coin,  $k = 0, l = n - 2$ , adjacent à  $P_{0n}$  :

$$Q_{ij}^{0,n-2} = P_{i,n-2+j}, i = 0, 1, j = 1, 2$$

$$Q_{i0}^{0,n-2} = \frac{P_{i,n-1} + P_{i,n-2}}{2}, i = 0, 1$$

$$Q_{2j}^{0,n-2} = \frac{P_{1,n-2+j} + P_{2,n-2+j}}{2}, j = 1, 2$$

$$Q_{22}^{0,n-2} = \frac{P_{1,n-1} + P_{1,n-2} + P_{2,n-1} + P_{2,n-2}}{4}.$$

- Les sous-carreaux bord,  $k = 1, \dots, n - 3, l = 0$ , adjacent à une partie de l'arête courbe  $P_{00}P_{n0}$  :

$$Q_{ij}^{k0} = P_{k+1,j}, i = 1, j = 0, 1$$

$$Q_{ij}^{k0} = \frac{P_{k+1,1} + P_{k+1,2}}{2}, i = 1, j = 2$$

$$Q_{ij}^{k0} = \frac{P_{k,j} + P_{k+1,j}}{2}, i = 0, j = 0, 1$$

$$Q_{ij}^{k0} = \frac{P_{k+1,j} + P_{k+2,j}}{2}, i = 2, j = 0, 1$$

$$Q_{i2}^{k0} = \frac{P_{k+1,1} + P_{k+1,2} + P_{k+i,1} + P_{k+i,2}}{4}, i \neq 1.$$

- Les sous-carreaux bord,  $k = 1, \dots, n - 3, l = n - 2$ , adjacent à une partie de l'arête courbe  $P_{0n}P_{nn}$  :

$$Q_{ij}^{k,n-2} = P_{k+1,n-2+j}, i = 1, j = 1, 2$$

$$Q_{ij}^{k,n-2} = \frac{P_{k+1,n-1} + P_{k+1,n-2}}{2}, i = 1, j = 0$$

$$Q_{ij}^{k,n-2} = \frac{P_{k,n-2+j} + P_{k+1,n-2+j}}{2}, i = 0, j = 1, 2$$

$$Q_{ij}^{k,n-2} = \frac{P_{k+1,n-2+j} + P_{k+2,n-2+j}}{2}, i = 2, j = 1, 2$$

$$Q_{i0}^{k,n-2} = \frac{P_{k+1,n-2} + P_{k+1,n-1} + P_{k+i,n-2} + P_{k+i,n-1}}{4}, i \neq 1.$$

- Les sous-carreaux bord,  $k = 0, l = 1, \dots, n - 3$ , adjacent à une partie de l'arête courbe  $P_{00}P_{0n}$  :

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{0l} &= P_{i,l+1}, i = 0, 1, j = 1 \\ Q_{ij}^{0l} &= \frac{P_{1,l+1} + P_{2,l+1}}{2}, i = 2, j = 1 \\ Q_{ij}^{0l} &= \frac{P_{i,l} + P_{i,l+1}}{2}, i = 0, 1, j = 0 \\ Q_{ij}^{0l} &= \frac{P_{1,l+1} + P_{i,l+2}}{2}, i = 0, 1, j = 2 \\ Q_{2j}^{0l} &= \frac{P_{1,l+1} + P_{2,l+1} + P_{1,l+j} + P_{2,l+j}}{4}, j \neq 1. \end{aligned}$$

- Les sous-carreaux bord,  $k = n - 2, l = 1, \dots, n - 3$ , adjacent à une partie de l'arête courbe  $P_{n0}P_{nn}$  :

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{n-2,l} &= P_{n-2+i,l+1}, i = 1, 2, j = 1 \\ Q_{ij}^{n-2,l} &= \frac{P_{n-2,l+1} + P_{n-1,l+1}}{2}, i = 0, j = 1 \\ Q_{ij}^{n-2,l} &= \frac{P_{n-2+i,l+1} + P_{n-2+i,l+j}}{2}, i = 1, 2, j \neq 1 \\ Q_{0j}^{n-2,l} &= \frac{P_{n-2,l+1} + P_{n-1,l+1} + P_{n-2,l+j} + P_{n-1,l+j}}{4}, j \neq 1. \end{aligned}$$

- Les sous-carreaux autres,  $k = 1, \dots, n - 3, l = 1, \dots, n - 3$  :

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{k,l} &= P_{k+1,l+1}, i = j = 1 \\ Q_{ij}^{k,l} &= \frac{P_{k+1,l+1} + P_{k+1,l+j}}{2}, i = 1, j \neq 1 \\ Q_{ij}^{k,l} &= \frac{P_{k+1,l+1} + P_{k+i,l+1}}{2}, i \neq 1, j = 1 \\ Q_{i0}^{k,l} &= \frac{P_{k+1,l} + P_{k+i,l} + P_{k+1,l+1} + P_{k+i,l+1}}{4}, i \neq 1 \\ Q_{i2}^{k,l} &= \frac{P_{k+1,l+1} + P_{k+i,l+1} + P_{k+1,l+2} + P_{k+i,l+2}}{4}, i \neq 1. \end{aligned}$$

Il ne semble pas évident de trouver une écriture plus compacte pour définir ces points de contrôle.

**Validité du carreau.** Le carreau est valide si chaque sous-carreau est valide. Ceci implique que les coefficients de ces sous-carreaux sont strictement positifs s'ils sont interpolants et non négatifs ailleurs. En pratique, on part de l'expression (11) et des séquences de nœuds, on trouve, morceau par morceau, l'écriture en Bézier, ce qui revient à calculer les points de contrôle  $Q_{ij}^{kl}$  à partir des  $P_{ij}$  (soit ce qui précède si la séquence est uniforme). On en déduit l'expression du polynôme jacobien et ses coefficients de contrôle.

**En conclusion.** Le contrôle du carreau B-spline est plus facilement exprimé comme le contrôle de chaque sous-carreau où l'on retrouve, avec des poids différents en général, les coefficients classiques d'un carreau de Bézier.

Le nombre de coefficients à calculer est de 16 par sous-carreau soit, pour notre exemple, un total de  $16(n - 1)^2$  coefficients. Les coefficients aux interfaces entre sous-carreaux sont calculés plusieurs fois (une fois par sous-carreau), autrement dit, le nombre de coefficients différents n'est que de  $(1 + 3(n - 1))^2$ . La simplicité de la décomposition en sous-carreaux conduit donc à un nombre de calcul plus important.

## 4 Courbe NURBS

On se donne un ensemble de  $n + 1$  points de contrôle dans  $\mathbb{R}^2$  avec un poids associé à chacun ainsi qu'une séquence de nœuds. La courbe définie par :

$$\gamma(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,d}(u) P_i}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,d}(u)}, \quad (15)$$

est la courbe NURBS<sup>9</sup> de degré  $d$  construite sur ces  $n + 1$  points de contrôle. Comme, pour le carreau, on se ramenera au cas des B-splines, nous n'en dirons pas plus sur ces courbes.

## 5 Carreau NURBS

On se donne un réseau de points<sup>10</sup> de contrôle dans  $\mathbb{R}^2$  avec un poids associé à chacun ainsi que deux séquences de nœuds. De manière générale il y a  $(n + 1) \times (m + 1)$  tels points, les  $P_{ij}$ , les poids sont notés  $\omega_{ij}$ .

### 5.1 Définition et jacobien

Le carreau, pour le degré  $d$  ici identique dans chaque direction et pour  $m = n$ , est défini par :

$$\sigma(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \omega_{ij} N_{i,d}(u) N_{j,d}(v) P_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \omega_{ij} N_{i,d}(u) N_{j,d}(v)}, \quad (16)$$

La mécanique utilisée pour les Bézier rationnels dans [5] s'applique sans difficulté aux carreaux définis par des NURBS<sup>11</sup>. On écrit la relation ci-dessus composante par composante, soit (pour le degré 2,  $d = 2$ ) :

$$x = \frac{\sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) \omega_{ij} x_{ij}}{\sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) \omega_{ij}},$$

$$y = \frac{\sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) \omega_{ij} y_{ij}}{\sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) \omega_{ij}}.$$

Le jacobien s'exprime comme le déterminant :

$$\mathcal{J}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Si on note  $D(u, v) = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) \omega_{ij}$ , on a :

$$\mathcal{J}(u, v) = \frac{1}{D(u, v)^4} \begin{vmatrix} D(u, v) \frac{\partial X}{\partial u} - X \frac{\partial D(u, v)}{\partial u} & D(u, v) \frac{\partial X}{\partial v} - X \frac{\partial D(u, v)}{\partial v} \\ D(u, v) \frac{\partial Y}{\partial u} - Y \frac{\partial D(u, v)}{\partial u} & D(u, v) \frac{\partial Y}{\partial v} - Y \frac{\partial D(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix},$$

avec, maintenant,  $X = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) \omega_{ij} x_{ij}$  et  $Y = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) \omega_{ij} y_{ij}$ ,

les numérateurs de ces quantités telles que définies initialement.

<sup>9</sup>NURBS pour Non Uniform Rational B-spline.

<sup>10</sup>Le carreau est plan.

<sup>11</sup>Comme l'a très bien noté Confucius, les NURBS sont aux B-splines ce que les Bézier rationnels sont aux Bézier.

En développant ce déterminant, les termes en  $XY \frac{\partial D(u,v)}{\partial u} \frac{\partial D(u,v)}{\partial v}$  s'annulent,  $D(u,v)$  se factorise et on obtient :

$$\frac{1}{D(u,v)^3} \left\{ D(u,v) \left( \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} \right) + X \left( \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial D(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial D(u,v)}{\partial u} \right) + Y \left( \frac{\partial D(u,v)}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D(u,v)}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) \right\},$$

qui s'écrit aussi comme le déterminant :

$$\mathcal{J}(u,v) = \frac{1}{D(u,v)^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & X \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & Z \end{vmatrix},$$

avec  $Z = D(u,v)$ . Passant dans  $\mathbb{R}^3$ , on définit les points  $Q_{ij}$  par  $Q_{ij} = (P_{ij}, \omega_{ij})$ , c'est-à-dire de coordonnées  $(\omega_{ij}x_{ij}, \omega_{ij}y_{ij}, \omega_{ij}z_{ij})$  avec  $z_{ij} = 1$  puis le point  $Q$  de  $\mathbb{R}^3$  de coordonnées  $(X, Y, Z)$  données par :

$$X = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) \omega_{ij} x_{ij},$$

$$Y = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) \omega_{ij} y_{ij},$$

$$Z = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) \omega_{ij} z_{ij},$$

alors ce point de  $\mathbb{R}^3$  est défini par un B-spline classique :

$$Q(u,v) = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) Q_{ij},$$

et on a (si  $O$  désigne l'origine) :

$$\mathcal{J}(u,v) = \frac{1}{D(u,v)^3} \left| \frac{\partial Q}{\partial u} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

c'est-à-dire que le jacobien a une interprétation dans l'espace de dimension supérieure. Son signe est celui du déterminant :

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial u} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

et le polynôme correspondant est obtenu en exprimant ces quantités.

## 5.2 Écriture en Bézier par morceaux

On reprend le même exemple que ci-dessus,  $d = 2$ ,  $n = 5$  et on repart de (pour des raisons évidentes, on change de notation,  $Q(u,v)$  devient  $M(u,v)$  et  $Q_{ij}$  devient  $M_{ij}$ ) :

$$M(u,v) = \sum_{i=0,5} \sum_{j=0,5} N_{i,2}(u) N_{j,2}(v) M_{ij},$$

que l'on exprime, comme dans la section sur les B-splines, selon les valeurs de  $u$  et  $v$ , par exemple sur le sous-carreaux  $0 \times 0$ , la restriction de  $M(u,v)$  prend la forme :

$$M(u,v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) Q_{ij},$$

avec :

$$Q_{0j} = M_{0j} \text{ pour } j = 0, 1 \text{ et } Q_{02} = \frac{M_{01} + M_{02}}{2},$$

$$Q_{1j} = M_{1j} \text{ pour } j = 0, 1 \text{ et } Q_{12} = \frac{M_{11} + M_{12}}{2},$$

$$Q_{2j} = \frac{M_{1j} + M_{2j}}{2} \text{ pour } j = 0, 1 \text{ et } Q_{22} = \frac{M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22}}{4}.$$

Pour les autres sous-carreaux, on a la même écriture formelle. À partir de cette écriture, on peut calculer le jacobien sur chaque sous-carreau, soit :

$$\mathcal{J}(u, v) = \frac{1}{D(u, v)^3} \left| \frac{\partial M}{\partial u} \quad \frac{\partial M}{\partial v} \quad \overrightarrow{OM} \right|,$$

et, comme dans [5], on trouve un polynôme de degré 4 dans chaque direction et, oubliant le facteur  $\frac{1}{D(u, v)^3}$  qui est positif, il vient les coefficients suivants :

$$N_{IJ} = 4 \sum_{i_1+i_2+i=I+1} \sum_{j_1+j_2+j=J+1} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_I^4 C_J^4} | Q_{i_1 j_1} \quad Q_{i_2 j_2} \quad Q_{ij} |,$$

$$I = 0, 4, J = 0, 4,$$

$$i_1 = 0, 1, i_2 = 0, 2, i = 0, 2, j_1 = 0, 2, j_2 = 0, 1, j = 0, 2$$

que l'on va exprimer en fonction des  $P_{ij}$  et des poids  $\omega_{ij}$  après un passage par les  $M_{ij}$ .

### 5.3 Les coefficients de contrôle

La forme ci-dessus implique des déterminants  $3 \times 3$  avec des  $Q_{ij}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Elle est valable pour chacun des sous-carreaux, formellement, pour le sous-carreau  $k \times l$ , cela donne :

$$N_{IJ}^{kl} = 4 \sum_{i_1+i_2+i=I+1} \sum_{j_1+j_2+j=J+1} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_I^4 C_J^4} | Q_{i_1 j_1}^{kl} \quad Q_{i_2 j_2}^{kl} \quad Q_{ij}^{kl} |,$$

$$I = 0, 4, J = 0, 4,$$

$$i_1 = 0, 1, i_2 = 0, 2, i = 0, 2, j_1 = 0, 2, j_2 = 0, 1, j = 0, 2$$
(17)

que l'on peut exprimer en fonction des  $P_{ij}$  et des  $\omega_{ij}$  initiaux en considérant d'abord les relations liant les  $Q_{ij}^{kl}$  aux  $M_{ij}^{kl}$ , en dimension 3, et, ensuite, en revenant aux  $P_{ij}$ , en dimension 2, opération qui fera intervenir les poids  $\omega_{ij}$ .

Pour préciser la nature des coefficients, on va calculer explicitement quelques uns d'entre eux. Pour ce faire, on reprend le même exemple que pour le carreau B-spline et on explicite quelques coefficients (un par type, pour les coins, pour une arête et à l'intérieur (3 cas)). On considère tout particulièrement le sous-carreau  $0 \times 0$ , les autres ayant la même forme en définissant convenablement les points de contrôle pertinents.

**Quelques coefficients coins,  $N_{00}^{00}, N_{40}^{00}, N_{44}^{00}, N_{04}^{00}$  et  $N_{00}^{10}$ .** Remarquons, en premier, que les coefficients coins sont de plusieurs types selon que le coin (local) soit un coin globalement, un point d'une arête bord ou un point interne.

On a successivement :

$$N_{00}^{00} = 4 \sum_{i_1+i_2+i=1} \sum_{j_1+j_2+j=1} C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2 | Q_{i_1 j_1}^{00} \quad Q_{i_2 j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00} |,$$

donc, on trouve les indices  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  et  $(1, 0, 0)$  tant en  $i$  qu'en  $j$ , soit, *a priori*, 9 termes. Ce calcul a déjà été fait dans [5] et conduit à un seul terme :

$$4 | Q_{10}^{00} \quad Q_{01}^{00} \quad Q_{00}^{00} |,$$

soit, pas à pas :

$$4 | M_{10} \quad M_{01} \quad M_{00} |,$$

$$4 \begin{vmatrix} \omega_{10}x_{10} & \omega_{01}x_{01} & \omega_{00}x_{00} \\ \omega_{10}y_{10} & \omega_{01}y_{01} & \omega_{00}y_{00} \\ \omega_{10} & \omega_{01} & \omega_{00} \end{vmatrix} = 4\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10} \begin{vmatrix} x_{10} & x_{01} & x_{00} \\ y_{10} & y_{01} & y_{00} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10} \begin{vmatrix} x_{10} - x_{00} & x_{01} - x_{00} \\ y_{10} - y_{00} & y_{01} - y_{00} \end{vmatrix},$$



donc

$$N_{00}^{00} = 4\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10}|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}|.$$

Ce coefficient contrôle donc l'angle entre les tangentes en  $P_{00}$ . Les coefficients  $N_{40}^{30}, N_{04}^{03}$  et  $N_{44}^{33}$  ont la même forme.

Pour  $N_{44}^{00}$ , le seul terme (la somme des indices est 5 pour les  $i$  et pour les  $j$ ) est :

$$N_{44}^{00} = 4|Q_{12}^{00} \quad Q_{21}^{00} \quad Q_{22}^{00}|,$$

soit, pas à pas :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}|M_{11} + M_{12} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22}|, \\ & \frac{1}{4}|M_{11} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22}| + \frac{1}{4}|M_{12} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22}|, \\ & \frac{1}{4}|M_{11} \quad M_{21} \quad M_{12} + M_{22}| + \frac{1}{4}|M_{12} \quad M_{11} \quad M_{21} + M_{22}| + \frac{1}{4}|M_{12} \quad M_{21} \quad M_{11} + M_{22}|, \\ & \frac{1}{4}|M_{11} \quad M_{21} \quad M_{12}| + \frac{1}{4}|M_{11} \quad M_{21} \quad M_{22}| + \frac{1}{4}|M_{12} \quad M_{11} \quad M_{22}| + \frac{1}{4}|M_{12} \quad M_{21} \quad M_{22}|, \end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned} 4N_{44}^{00} &= \omega_{11}\omega_{12}\omega_{21}|\overrightarrow{P_{12}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{12}P_{21}}| + \omega_{11}\omega_{21}\omega_{22}|\overrightarrow{P_{22}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{22}P_{21}}| + \\ & \omega_{11}\omega_{12}\omega_{22}|\overrightarrow{P_{22}P_{12}} \quad \overrightarrow{P_{22}P_{11}}| + \omega_{12}\omega_{21}\omega_{22}|\overrightarrow{P_{22}P_{12}} \quad \overrightarrow{P_{22}P_{21}}|, \end{aligned}$$

soit, sous une forme plus parlante :

$$\begin{aligned} N_{44}^{00} &= \frac{\omega_{11}\omega_{12}\omega_{21}}{4}|\overrightarrow{P_{11}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{11}P_{12}}| + \frac{\omega_{11}\omega_{21}\omega_{22}}{4}|\overrightarrow{P_{11}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{21}P_{22}}| + \\ & \frac{\omega_{11}\omega_{12}\omega_{22}}{4}|\overrightarrow{P_{12}P_{22}} \quad \overrightarrow{P_{11}P_{12}}| + \frac{\omega_{12}\omega_{21}\omega_{22}}{4}|\overrightarrow{P_{12}P_{22}} \quad \overrightarrow{P_{21}P_{22}}|. \end{aligned}$$

Pour  $N_{04}^{00}$ , la somme des indices en  $i$  est 1, celle en  $j$  est 5, donc il y a trois termes :

$$N_{04}^{00} = 4|Q_{12}^{00} \quad Q_{01}^{00} \quad Q_{02}^{00}| + 8|Q_{02}^{00} \quad Q_{11}^{00} \quad Q_{02}^{00}| + 8|Q_{02}^{00} \quad Q_{01}^{00} \quad Q_{12}^{00}|,$$

soit, pas à pas :

$$\begin{aligned} & 4|Q_{12}^{00} \quad Q_{01}^{00} \quad Q_{02}^{00}| + 8|Q_{02}^{00} \quad Q_{01}^{00} \quad Q_{12}^{00}|, \\ & 4|Q_{02}^{00} \quad Q_{01}^{00} \quad Q_{12}^{00}|, \\ & |M_{01} + M_{02} \quad M_{01} \quad M_{11} + M_{12}|, \\ & |M_{02} \quad M_{01} \quad M_{11} + M_{12}|, \\ & |M_{02} \quad M_{01} \quad M_{11}| + |M_{02} \quad M_{01} \quad M_{12}|, \end{aligned}$$

par suite :

$$N_{04}^{00} = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{11}|\overrightarrow{P_{11}P_{02}} \quad \overrightarrow{P_{11}P_{01}}| + \omega_{01}\omega_{02}\omega_{12}|\overrightarrow{P_{12}P_{02}} \quad \overrightarrow{P_{12}P_{01}}|,$$

soit, sous une forme plus parlante :

$$N_{04}^{00} = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{11}|\overrightarrow{P_{01}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{11}P_{02}}| + \omega_{01}\omega_{02}\omega_{12}|\overrightarrow{P_{02}P_{12}} \quad \overrightarrow{P_{01}P_{12}}|,$$

et, au final :

$$N_{04}^{00} = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{11}|\overrightarrow{P_{01}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{01}P_{02}}| + \omega_{01}\omega_{02}\omega_{12}|\overrightarrow{P_{02}P_{12}} \quad \overrightarrow{P_{01}P_{02}}|,$$

Enfin pour  $N_{40}^{00}$ , la somme des indices en  $i$  est 5, celle en  $j$  est 1, donc il y a trois termes :

$$N_{40}^{00} = 8|Q_{11}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{20}^{00}| + 4|Q_{10}^{00} \quad Q_{21}^{00} \quad Q_{20}^{00}| + 8|Q_{10}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{21}^{00}|,$$

soit, pas à pas :

$$\begin{aligned} & 4 | Q_{10}^{00} \quad Q_{21}^{00} \quad Q_{20}^{00} | + 8 | Q_{10}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{21}^{00} |, \\ & 4 | Q_{10}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{21}^{00} |, \\ & | M_{10} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21} |, \\ & | M_{10} \quad M_{20} \quad M_{11} + M_{21} |, \\ & | M_{10} \quad M_{20} \quad M_{11} | + | M_{10} \quad M_{20} \quad M_{21} |, \end{aligned}$$

par suite :

$$N_{40}^{00} = \omega_{10}\omega_{20}\omega_{11} | \overrightarrow{P_{11}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{11}P_{20}} | + \omega_{10}\omega_{20}\omega_{21} | \overrightarrow{P_{21}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{21}P_{20}} |,$$

soit, sous une forme plus parlante :

$$N_{40}^{00} = \omega_{10}\omega_{20}\omega_{11} | \overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}} | + \omega_{10}\omega_{20}\omega_{21} | \overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}} |.$$

Pour finir regardons le contrôle à droite du précédent, soit  $N_{00}^{10}$ , on a comme pour le sous-carreau précédent :

$$N_{00}^{10} = 4 \sum_{i_1+i_2+i=1} \sum_{j_1+j_2+j=1} C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2 | Q_{i_1j_1}^{10} \quad Q_{i_2j_2}^{10} \quad Q_{ij}^{10} |,$$

donc, comme ci-dessus :

$$4 | Q_{10}^{10} \quad Q_{01}^{10} \quad Q_{00}^{10} |,$$

soit, pas à pas :

$$\begin{aligned} & | M_{20} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{10} + M_{20} |, \\ & | M_{20} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{10} |, \\ & | M_{20} \quad M_{11} \quad M_{10} | + | M_{20} \quad M_{21} \quad M_{10} |, \end{aligned}$$

par suite :

$$N_{00}^{10} = \omega_{10}\omega_{11}\omega_{20} | \overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}} | + \omega_{10}\omega_{20}\omega_{21} | \overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}} |,$$

et, ainsi  $N_{00}^{10} = N_{40}^{00}$  comme attendu (le polynôme jacobien étant continu).

Ceci amène naturellement, avant même de regarder d'autres coefficients, la remarque suivante :

**Remarque sur la généralité des coefficients.** La Formule (17) est générique mais est exprimée dans  $\mathbb{R}^3$ . Les points de contrôle  $Q_{ij}^{kl}$  peuvent, pour une séquence nodale donnée, être exprimés en fonction des points  $M_{\cdot}$ , dans  $\mathbb{R}^3$  toujours. Le passage aux  $P_{ij}$  avec les  $\omega_{ij}$  ne peut se faire qu'à la fin du calcul et ne peut pas être formalisé par avance. Autrement dit, il faut rester dans  $\mathbb{R}^3$  et on ne peut pas considérer l'expression des coefficients, en  $P_{ij}$  et  $\omega_{ij}$ , d'un carreau de Bézier rationnel et l'utiliser localement comme template.

**Les coefficients d'une arête,  $N_{10}^{00}, \dots, N_{30}^{00}$ .** Comme pour les coefficients coins, les coefficients d'arête sont de plusieurs types selon que l'on soit sur une arête bord ou non.

On a :

$$\begin{aligned} N_{10}^{00} &= 4 \sum_{i_1+i_2+i=2} \sum_{j_1+j_2+j=1} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{4} | Q_{i_1j_1}^{00} \quad Q_{i_2j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00} | \\ &= \sum_{i_1+i_2+i=2} \sum_{j_1+j_2+j=1} C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2 | Q_{i_1j_1}^{00} \quad Q_{i_2j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00} |, \end{aligned}$$

et, tout calcul fait, on trouve :

$$N_{10}^{00} = | Q_{20}^{00} \quad Q_{01}^{00} \quad Q_{00}^{00} | + 2 | Q_{10}^{00} \quad Q_{11}^{00} \quad Q_{00}^{00} |,$$

soit, pas à pas :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{M_{10}^{00} + M_{20}^{00}}{2} \quad M_{01}^{00} \quad M_{00}^{00} \right| + 2 \left| M_{10}^{00} \quad M_{11}^{00} \quad M_{00}^{00} \right|, \\ & \frac{1}{2} \left| M_{10}^{00} \quad M_{01}^{00} \quad M_{00}^{00} \right| + \frac{1}{2} \left| M_{20}^{00} \quad M_{01}^{00} \quad M_{00}^{00} \right| + 2 \left| M_{10}^{00} \quad M_{11}^{00} \quad M_{00}^{00} \right|, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}}{2} \left| \overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}} \right| + \frac{\omega_{00}\omega_{20}\omega_{01}}{2} \left| \overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}} \right| + 2\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11} \left| \overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}} \right|,$$

et on retrouve, comme pour les B-splines, la différence au niveau des poids avec les coefficients des carreaux de Bézier rationnels. À noter que pour un simple carreau rationnel de Bézier, on trouve pour ce coefficient une expression de la forme :

$$\omega_{00}\omega_{20}\omega_{01} \left| \overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}} \right| + 2\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11} \left| \overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}} \right|,$$

sensiblement différente. La différence vient du fait que le NURBS se souvient du premier terme (qui est comme  $N_{00}^{00}$ ) et anticipe la suite via le vecteur  $\overrightarrow{P_{00}P_{20}}$ , sachant que  $P_{20}$  n'est pas dans ce sous-carreau..

Pour le coefficient  $N_{20}^{00}$ , on a :

$$\begin{aligned} N_{20}^{00} &= 4 \sum_{i_1+i_2+i=3} \sum_{j_1+j_2+j=1} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_2^4 C_0^4} \left| Q_{i_1 j_1}^{00} \quad Q_{i_2 j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00} \right|, \\ &= \frac{2}{3} \sum_{i_1+i_2+i=3} \sum_{j_1+j_2+j=1} C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2 \left| Q_{i_1 j_1}^{00} \quad Q_{i_2 j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00} \right|, \end{aligned}$$

ce qui fait 5 combinaisons en  $i$  et 3 combinaisons en  $j$ , soit, *a priori*, 15 termes dont certains sont nuls tandis que les autres se combinent. Il reste simplement :

$$\frac{2}{3} \left| Q_{00}^{00} \quad Q_{10}^{00} \quad Q_{21}^{00} \right| + \frac{2}{3} \left| Q_{01}^{00} \quad Q_{10}^{00} \quad Q_{20}^{00} \right| + \frac{4}{3} \left| Q_{20}^{00} \quad Q_{11}^{00} \quad Q_{00}^{00} \right|,$$

soit, pas à pas :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \left| M_{00} \quad M_{10} \quad M_{11} + M_{21} \right| + \frac{1}{3} \left| M_{01} \quad M_{10} \quad M_{10} + M_{20} \right| + \frac{2}{3} \left| M_{10} + M_{20} \quad M_{11} \quad M_{00} \right|, \\ & \frac{1}{3} \left| M_{00} \quad M_{10} \quad M_{11} + M_{21} \right| + \frac{1}{3} \left| M_{01} \quad M_{10} \quad M_{20} \right| + \frac{2}{3} \left| M_{10} + M_{20} \quad M_{11} \quad M_{00} \right|, \\ & \left| M_{00} \quad M_{10} \quad M_{11} \right| + \frac{1}{3} \left| M_{00} \quad M_{10} \quad M_{21} \right| + \frac{1}{3} \left| M_{01} \quad M_{10} \quad M_{20} \right| + \frac{2}{3} \left| M_{20} \quad M_{11} \quad M_{00} \right|, \\ & \left| M_{10} \quad M_{11} \quad M_{00} \right| + \frac{1}{3} \left| M_{10} \quad M_{21} \quad M_{00} \right| + \frac{1}{3} \left| M_{20} \quad M_{01} \quad M_{10} \right| + \frac{2}{3} \left| M_{20} \quad M_{11} \quad M_{00} \right|, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \omega_{00}\omega_{10}\omega_{11} \left| \overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}} \right| + \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{21}}{3} \left| \overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{21}} \right| + \\ & \frac{\omega_{01}\omega_{10}\omega_{20}}{3} \left| \overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{01}} \right| + \frac{2\omega_{00}\omega_{11}\omega_{20}}{3} \left| \overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}} \right|. \end{aligned}$$

Pour le dernier coefficient de ce morceau d'arête, on a :

$$\begin{aligned} N_{30}^{00} &= 4 \sum_{i_1+i_2+i=4} \sum_{j_1+j_2+j=1} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_3^4 C_0^4} \left| Q_{i_1 j_1}^{00} \quad Q_{i_2 j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00} \right|, \\ &= \sum_{i_1+i_2+i=4} \sum_{j_1+j_2+j=1} C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2 \left| Q_{i_1 j_1}^{00} \quad Q_{i_2 j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00} \right|, \end{aligned}$$

soit 3 combinaisons en  $i$  et 3 combinaisons en  $j$ , au total et *a priori* 9 termes dont il ne reste que :

$$|Q_{00}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{21}^{00}| + 2|Q_{10}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{11}^{00}|,$$

soit, pas à pas :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}|M_{00} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21}| + |M_{10} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11}|, \\ & \frac{1}{4}|M_{00} \quad M_{10} \quad M_{11}| + \frac{1}{4}|M_{00} \quad M_{20} \quad M_{11}| + \frac{1}{4}|M_{00} \quad M_{10} \quad M_{21}| + \frac{1}{4}|M_{00} \quad M_{20} \quad M_{21}| + |M_{10} \quad M_{20} \quad M_{11}|, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11}}{4}|P_{00}P_{10} \quad P_{00}P_{11}| + \frac{\omega_{00}\omega_{11}\omega_{20}}{4}|P_{00}P_{20} \quad P_{00}P_{11}| + \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{21}}{4}|P_{00}P_{10} \quad P_{00}P_{21}| + \\ & \frac{\omega_{00}\omega_{20}\omega_{21}}{4}|P_{00}P_{20} \quad P_{00}P_{21}| + \omega_{10}\omega_{11}\omega_{20}|P_{10}P_{20} \quad P_{10}P_{11}|, \end{aligned}$$

ou, mieux :

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11}}{4}|P_{00}P_{10} \quad P_{10}P_{11}| + \frac{\omega_{00}\omega_{11}\omega_{20}}{4}|P_{00}P_{20} \quad P_{00}P_{11}| + \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{21}}{4}|P_{00}P_{10} \quad P_{10}P_{21}| + \\ & \frac{\omega_{00}\omega_{20}\omega_{21}}{4}|P_{00}P_{20} \quad P_{20}P_{21}| + \omega_{10}\omega_{11}\omega_{20}|P_{10}P_{20} \quad P_{10}P_{11}|. \end{aligned}$$

**Quelques coefficients internes, un de chaque type.** Comme pour les autres les coefficients internes sont de plusieurs types et nous ne donnons un exemple que de quelques uns de ces types, soient  $N_{31}^{00}$  (voisin d'un coin),  $N_{32}^{00}$  (voisin d'un "milieu" d'arête non bord ici) et  $N_{22}^{00}$  (central mais proche d'une arête bord).

$$\begin{aligned} N_{31}^{00} &= 4 \sum_{i_1+i_2+i=4} \sum_{j_1+j_2+j=2} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_3^4 C_1^4} |Q_{i_1 j_1}^{00} \quad Q_{i_2 j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00}|, \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i_1+i_2+i=4} \sum_{j_1+j_2+j=2} C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2 |Q_{i_1 j_1}^{00} \quad Q_{i_2 j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00}|, \end{aligned}$$

soit 3 combinaisons en  $i$  et 5 combinaisons en  $j$ , au total et *a priori* 15 termes dont il ne reste que :

$$\frac{1}{4}|Q_{00}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{21}^{00}| + \frac{1}{2}|Q_{01}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{21}^{00}| - \frac{1}{2}|Q_{10}^{00} \quad Q_{12}^{00} \quad Q_{20}^{00}| - |Q_{10}^{00} \quad Q_{11}^{00} \quad Q_{21}^{00}|,$$

soit, pas à pas :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16}|M_{00} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21}| + \frac{1}{8}|M_{01} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21}| - \\ & \frac{1}{8}|M_{10} \quad M_{11} + M_{12} \quad M_{10} + M_{20}| - \frac{1}{2}|M_{10} \quad M_{11} \quad M_{11} + M_{21}|, \\ & \frac{1}{16}|M_{00} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21}| + \frac{1}{8}|M_{01} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21}| - \\ & \frac{1}{8}|M_{10} \quad M_{11} + M_{12} \quad M_{20}| - \frac{1}{2}|M_{10} \quad M_{11} \quad M_{21}|, \\ & \frac{1}{16}|M_{00} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21}| + \frac{1}{8}|M_{01} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21}| + \\ & \frac{1}{8}|M_{20} \quad M_{11} + M_{12} \quad M_{10}| + \frac{1}{2}|M_{10} \quad M_{21} \quad M_{11}|, \end{aligned}$$

ce qui fait 11 termes (!).

$$\frac{1}{16}|M_{00} \quad M_{10} \quad M_{11}| + \frac{1}{16}|M_{00} \quad M_{10} \quad M_{21}| + \frac{1}{16}|M_{00} \quad M_{20} \quad M_{11}| + \frac{1}{16}|M_{00} \quad M_{20} \quad M_{21}| +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} |M_{01} \quad M_{10} \quad M_{11}| + \frac{1}{8} |M_{01} \quad M_{10} \quad M_{21}| + \frac{1}{8} |M_{01} \quad M_{20} \quad M_{11}| + \frac{1}{8} |M_{01} \quad M_{20} \quad M_{21}| + \\ & \frac{1}{8} |M_{20} \quad M_{11} \quad M_{10}| + \frac{1}{8} |M_{20} \quad M_{12} \quad M_{10}| + \frac{1}{2} |M_{10} \quad M_{21} \quad M_{11}|, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11}}{16} |\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}| + \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{21}}{16} |\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{21}}| + \frac{\omega_{00}\omega_{11}\omega_{20}}{16} |\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}| + \\ & \frac{\omega_{00}\omega_{20}\omega_{21}}{16} |\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{21}}| + \\ & \frac{\omega_{01}\omega_{10}\omega_{11}}{8} |\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{01}P_{11}}| + \frac{\omega_{01}\omega_{10}\omega_{21}}{8} |\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{01}P_{21}}| + \frac{\omega_{01}\omega_{11}\omega_{20}}{8} |\overrightarrow{P_{01}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{01}P_{11}}| + \\ & \frac{\omega_{01}\omega_{20}\omega_{21}}{8} |\overrightarrow{P_{01}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{01}P_{21}}| + \\ & \frac{\omega_{10}\omega_{11}\omega_{20}}{8} |\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}| + \frac{\omega_{10}\omega_{12}\omega_{20}}{8} |\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{12}}| + \frac{\omega_{10}\omega_{11}\omega_{21}}{2} |\overrightarrow{P_{10}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|, \end{aligned}$$

dont une écriture plus parlante est :

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11}}{16} |\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}| + \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{21}}{16} |\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{21}}| + \frac{\omega_{00}\omega_{11}\omega_{20}}{16} |\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}| + \\ & \frac{\omega_{00}\omega_{20}\omega_{21}}{16} |\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}| + \\ & \frac{\omega_{01}\omega_{10}\omega_{11}}{8} |\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}| + \frac{\omega_{01}\omega_{10}\omega_{21}}{8} |\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{01}P_{21}}| + \frac{\omega_{01}\omega_{11}\omega_{20}}{8} |\overrightarrow{P_{01}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{01}P_{11}}| + \\ & \frac{\omega_{01}\omega_{20}\omega_{21}}{8} |\overrightarrow{P_{01}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}| + \\ & \frac{\omega_{10}\omega_{11}\omega_{20}}{8} |\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}| + \frac{\omega_{10}\omega_{12}\omega_{20}}{8} |\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{12}}| + \frac{\omega_{10}\omega_{11}\omega_{21}}{2} |\overrightarrow{P_{10}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|. \end{aligned}$$

Remarquons qu'il n'est pas possible d'éviter cette explicitation pour trouver une expression en fonction des  $P_{ij}$  et des  $\omega_{ij}$  initiaux. On peut toutefois rester dans  $\mathbb{R}^3$  et obtenir le résultat voulu. La méthode la plus simple serait donc de partir de l'expression (17), en  $Q_{ij}^{kl}$ , et de l'exprimer en fonction des  $M_{ij} = (\omega_{ij}x_{ij}, \omega_{ij}y_{ij}, \omega_{ij})$  puis de réduire le résultat (en prenant en compte les colonnes identiques) avant, pour finir, de calculer puis combiner les déterminants  $3 \times 3$  qui restent.

On regarde maintenant  $N_{32}^{00}$ .

$$\begin{aligned} N_{32}^{00} &= 4 \sum_{i_1+i_2+i=4} \sum_{j_1+j_2+j=3} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_3^4 C_2^4} |Q_{i_1j_1}^{00} \quad Q_{i_2j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00}|, \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i_1+i_2+i=4} \sum_{j_1+j_2+j=3} C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2 |Q_{i_1j_1}^{00} \quad Q_{i_2j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00}|, \end{aligned}$$

soit 3 combinaisons en  $i$  et 5 combinaisons en  $j$ , au total et *a priori* 15 termes dont il ne reste que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} |Q_{00}^{00} \quad Q_{21}^{00} \quad Q_{22}^{00}| + \frac{1}{6} |Q_{02}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{21}^{00}| + \\ & \frac{1}{3} |Q_{01}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{22}^{00}| + \frac{1}{3} |Q_{11}^{00} \quad Q_{10}^{00} \quad Q_{22}^{00}| + \\ & \frac{1}{3} |Q_{11}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{12}^{00}| + \frac{2}{3} |Q_{10}^{00} \quad Q_{21}^{00} \quad Q_{12}^{00}|, \end{aligned}$$

soit, pas à pas :

$$\frac{1}{48} |M_{00} \quad M_{11}+M_{21} \quad M_{11}+M_{12}+M_{21}+M_{22}| + \frac{1}{48} |M_{01}+M_{02} \quad M_{10}+M_{20} \quad M_{11}+M_{21}| +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{24} | M_{01} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22} | + \frac{1}{12} | M_{11} \quad M_{10} \quad M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22} | + \\
& \quad \frac{1}{12} | M_{11} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{12} | + \frac{1}{6} | M_{10} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{11} + M_{12} |, \\
\text{ou encore } & \frac{1}{48} | M_{00} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{12} + M_{22} | + \frac{1}{48} | M_{01} + M_{02} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21} | + \\
& \frac{1}{24} | M_{01} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22} | + \frac{1}{12} | M_{11} \quad M_{10} \quad M_{12} + M_{21} + M_{22} | + \\
& \quad \frac{1}{12} | M_{11} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{12} | + \frac{1}{6} | M_{10} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{11} + M_{12} |, \\
\text{ou encore } & \frac{1}{48} | M_{00} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{12} + M_{22} | + \frac{1}{48} | M_{01} + M_{02} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21} | + \\
& \frac{1}{24} | M_{01} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22} | + \frac{1}{12} | M_{11} \quad M_{10} \quad M_{22} | + \\
& \quad \frac{1}{12} | M_{11} \quad M_{20} \quad M_{12} | + \frac{1}{4} | M_{10} \quad M_{21} \quad M_{11} | + \frac{1}{6} | M_{10} \quad M_{21} \quad M_{12} |,
\end{aligned}$$

qui se regroupent<sup>12</sup> en 20 termes (!), 4 autour de  $P_{00}$ , 8 autour de  $P_{01}$ , 4 autour de  $P_{02}$  et 4 autres :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{48} | M_{00} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{12} + M_{22} | + \\
& \frac{1}{16} | M_{01} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21} | + \frac{1}{24} | M_{01} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{12} + M_{22} | + \\
& \quad \frac{1}{48} | M_{02} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{21} | + \\
& \quad \frac{1}{12} | M_{11} \quad M_{10} \quad M_{22} | + \frac{1}{12} | M_{11} \quad M_{20} \quad M_{12} | + \\
& \quad \frac{1}{4} | M_{10} \quad M_{21} \quad M_{11} | + \frac{1}{6} | M_{10} \quad M_{21} \quad M_{12} |.
\end{aligned}$$

On peut alors expliciter tous ces termes puis repasser à la dimension deux en  $P_{ij}$  et  $\omega_{ij}$ .

Le dernier type de coefficient que nous regardons est :

$$\begin{aligned}
N_{22}^{00} &= 4 \sum_{i_1+i_2+i=3} \sum_{j_1+j_2+j=3} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_2^4 C_2^4} | Q_{i_1 j_1}^{00} \quad Q_{i_2 j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00} |, \\
&= \frac{1}{9} \sum_{i_1+i_2+i=3} \sum_{j_1+j_2+j=3} C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2 | Q_{i_1 j_1}^{00} \quad Q_{i_2 j_2}^{00} \quad Q_{ij}^{00} |,
\end{aligned}$$

soit 5 combinaisons en  $i$  et 5 combinaisons en  $j$ , au total et *a priori* 25 termes dont il ne reste que 4 termes :

$$\frac{1}{3} | Q_{01}^{00} \quad Q_{10}^{00} \quad Q_{22}^{00} | + \frac{1}{3} | Q_{00}^{00} \quad Q_{21}^{00} \quad Q_{12}^{00} | + \frac{1}{3} | Q_{01}^{00} \quad Q_{20}^{00} \quad Q_{12}^{00} | + \frac{1}{3} | Q_{02}^{00} \quad Q_{10}^{00} \quad Q_{21}^{00} |,$$

soit, pas à pas :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} | M_{01} \quad M_{10} \quad M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22} | + \frac{1}{12} | M_{00} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{11} + M_{12} | + \\
& \quad \frac{1}{12} | M_{01} \quad M_{10} + M_{20} \quad M_{11} + M_{12} | + \frac{1}{12} | M_{01} + M_{02} \quad M_{10} \quad M_{11} + M_{21} |,
\end{aligned}$$

qui se regroupent en 12 termes, 4 autour de  $P_{00}$ , 6 autour de  $P_{01}$  et 2 autour de  $P_{02}$  :

$$\frac{1}{12} | M_{00} \quad M_{11} + M_{21} \quad M_{11} + M_{12} | +$$

---

<sup>12</sup>merci à l'éditeur de texte.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} |M_{01} \quad M_{10} \quad M_{11}| + \frac{1}{12} |M_{01} \quad M_{10} \quad M_{22}| + \\
& \frac{1}{6} |M_{01} \quad M_{10} \quad M_{12}| + \frac{1}{12} |M_{01} \quad M_{20} \quad M_{11} + M_{12}| + \frac{1}{6} |M_{01} \quad M_{10} \quad M_{21}| + \\
& \frac{1}{12} |M_{02} \quad M_{10} \quad M_{11} + M_{21}|.
\end{aligned}$$

On peut alors expliciter tous ces termes puis repasser à la dimension deux en  $P_{ij}$  et  $\omega_{ij}$ .

**Quelques remarques.** L'ensemble des remarques formulées pour les carreaux B-spline reste vrai. Le coefficient coin adéquat de chaque sous-carreau coin contrôle l'angle entre les tangentes des deux arêtes courbes correspondantes. Il y a trois type de carreaux, les 4 coins (identiques au sous-carreau  $0 \times 0$ ), les (pour notre exemple) 8 sous-carreaux dont une arête est frontière du carreau entier et (toujours pour notre exemple) les 4 sous-carreaux centraux. De plus, ici, les poids interviennent dans le contrôle pour tous les coefficients possédant plus d'un seul terme.

**Validité du carreau.** Le carreau est valide si chaque sous-carreau est valide. Ceci implique que les coefficients de ces sous-carreaux sont strictement positifs s'ils sont interpolants et non négatifs ailleurs. Le calcul explicite des coefficients en fonction des  $P_{ij}$  et des poids  $\omega_{ij}$  est, on l'a vu, fastidieux. Nous proposons donc de rester dans  $\mathbb{R}^3$  ce qui revient à construire les points  $M_{ij}$  qui permettent de remplacer les points  $Q_{ij}^{kl}$  de la formule générique par leur valeur selon le sous-carreau que l'on traite.

**En conclusion.** Le contrôle du carreau NURBS est plus facilement exprimé comme le contrôle de chaque sous-carreau où l'on retrouve, avec des poids différents en général, les coefficients classiques d'un carreau de Bézier rationnel.

Le nombre de coefficients à calculer est de 25 par sous-carreau soit, pour notre exemple, un total de  $25(n-1)^2$  coefficients. Les coefficients aux interfaces entre sous-carreaux sont calculés plusieurs fois (une fois par sous-carreau), autrement dit, le nombre de coefficients différents n'est que de  $(1+4(n-1))^2$ . La simplicité de la décomposition en sous-carreaux conduit donc à un nombre de calcul plus important.

## 6 Conclusion

On a décrit une méthode permettant de calculer le polynôme jacobien d'un carreau B-spline afin d'en exhiber les coefficients de contrôle. Ensuite, on a montré que l'on pouvait trouver un polynôme dont le comportement était celui du jacobien d'un carreau NURBS, permettant ainsi d'en contrôler le signe.

En pratique, pour un carreau B-spline, on décompose le carreau en sous-carreaux en se basant sur la séquence nodale puis on utilise la formule classique des Bézier de degré 2 sur chaque sous-carreaux, le jacobien est alors de degré  $3 \times 3$  localement et s'exprime directement en fonction de combinaisons linéaires de déterminants de vecteurs (de  $\mathbb{R}^2$ ) construits sur les points de contrôle  $P_{ij}$  du carreau.

En pratique pour un carreau NURBS, on construit les points de contrôle  $M_{ij}$  de  $\mathbb{R}^3$  à partir des points  $P_{ij}$  donnés dans  $\mathbb{R}^2$  et des poids  $\omega_{ij}$ . Le carreau, en  $M_{ij}$ , est un carreau B-spline qui permet de trouver un polynôme de même signe que le jacobien. La décomposition en sous-carreaux, qui sont des Bézier classiques dont les points de contrôle sont les  $Q_{ij}$  déduits de la séquence nodale, donne localement un polynôme de degré  $4 \times 4$  et s'exprime en fonction de combinaisons linéaires de déterminants de vecteurs (de  $\mathbb{R}^3$ ) construits sur les  $Q_{ij}$  voulus. Le passage aux  $P_{ij}$  et aux poids  $\omega_{ij}$  peut alors être effectué si on le désire (retour dans  $\mathbb{R}^2$ ).

Notons également que l'on peut de la même façon construire des carreaux volumiques, soit, respectivement (ici de degré et de nombre de points de contrôle identiques dans les trois

directions), le carreau B-spline :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n N_{i,d}(u) N_{j,d}(v) N_{k,d}(w) P_{ijk}, \quad (18)$$

et, le carreau NURBS :

$$\theta(u, v, w) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \omega_{ijk} N_{i,d}(u) N_{j,d}(v) N_{k,d}(w) P_{ijk}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \omega_{ijk} N_{i,d}(u) N_{j,d}(v) N_{k,d}(w)}. \quad (19)$$

Il est néanmoins clair que le volume de calcul pour évaluer le signe des jacobiens de ces éléments est particulièrement important.

De manière concrète, utiliser ce type de carreaux semble obliger à regarder chaque cas, l'un après l'autre, car l'analyse dépend de la séquence nodale. Autrement dit, la définition de la géométrie, pour un cas donné, doit être prise en compte explicitement et, pour un autre cas, doit être reconsidérée depuis le début. Ceci est une différence notable avec les approches plus classiques où la géométrie est utilisée pour créer les éléments (potentiellement courbes) du maillage puis oubliée lors de l'analyse permettant ainsi une totale généralité (ne dépendant plus du cas considéré). Ajouté au fait que, ici, les maillages sont essentiellement des grilles (d'une part la géométrie est *peu ou prou* un quadrilatère déformé et, d'autre part, le maillage est totalement structuré<sup>13</sup>).

On aura compris que nous exprimons, pour le moins, quelques réserves quant à l'intérêt réel des méthodes basées sur de tels éléments (*a fortiori* en trois dimensions) sauf à se restreindre à des géométries du type indiqué ci-dessus et, de plus, à peu près "droites".

## Références

- [1] P. BÉZIER, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, 4, Hermès, Paris, 1986.
- [2] J.A. COTTRELL, T.J.R. HUGHES AND Y. BAZILEVS, *Isogeometric Analysis. Toward Integration of CAD and FEA*, Wiley 2009.
- [3] G. FARIN, *Curves and surfaces for CAGD. A practical guide*. 5<sup>th</sup> edition, Academic Press, 2002.
- [4] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2 (version 2), *RR INRIA* **7964**, 2012.
- [5] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 1, *RR INRIA* **8201**, 2013.
- [6] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 2, *RR INRIA* **8202**, 2013.
- [7] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Validité des éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2, *RR INRIA* **8376**, 2013.
- [8] T.J.R. HUGHES, J.A. COTTRELL, Y. BAZILEVS, Isogeometric analysis : CAD, finite element, NURBS, exact geometry, and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39-41), 4135-4195, 2005.
- [9] J.C. LÉON, *Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO*, Hermès, 1991.
- [10] L. PIEGL AND W. TILLER, *The NURBS Book*, Springer, 1997.
- [11] D.F. ROGERS, *An introduction to NURBS*, Morgan Kaufmann publishers, 2001.

<sup>13</sup>bien que l'on puisse, au prix de constructions terriblement techniques (par exemple en recourant aux T-splines), s'affranchir de cette contrainte.



## 7 Annexe

On regarde, pour les courbes, le cas cubique avec 7 points donc 4 morceaux. On déroule la récursion pour trouver les 4 morceaux. On vérifie le raccord en  $C^2$  entre les deux premiers morceaux. On vérifie également que le premier morceau est un Bézier classique sur des points de contrôle construits à partir des points de contrôle initiaux et on s'assure que le point de coupe entre le premier et ce second morceau est bien ce que donne l'algorithme d'évaluation. Enfin, pour comprendre la mécanique, on commence à regarder le cas  $d = 4$  avant de donner quelques indications sur le cas des carreaux eux-mêmes.

**Le cas  $d = 3$  et  $n = 6$  avec une séquence entre 0 et  $n - 1$ .** On reprend le même exemple, on a 7 points de contrôle. La courbe s'écrit :

$$\gamma(u) = \sum_{i=0}^6 N_{i,3}(u)P_i ,$$

la séquence  $U$  avec  $m = n + d + 1 = 10$  possède 11 termes :

$$U = \{u_0 = \bar{u}_0, u_1 = \bar{u}_0, u_2 = \bar{u}_0, u_3 = \bar{u}_0, u_4 = \bar{u}_1, u_5 = \bar{u}_2, u_6 = \bar{u}_3, u_7 = \bar{u}_4, u_8 = \bar{u}_4, u_9 = \bar{u}_4, u_{10} = \bar{u}_4\}$$

$$\text{avec } \bar{U} = \{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\} ,$$

autre choix naturel pour construire une répartition uniforme. Alors les 10  $N_{i,0}(u)$  valent :

$$N_{0,0}(u) = 0 ,$$

$$N_{1,0}(u) = 0 ,$$

$$N_{2,0}(u) = 0 ,$$

$$N_{3,0}(u) = 1 \text{ si } u \in [u_3, u_4[ = [0, 1[ , 0 \text{ sinon ,}$$

$$N_{4,0}(u) = 1 \text{ si } u \in [u_4, u_5[ = [1, 2[ , 0 \text{ sinon ,}$$

$$N_{5,0}(u) = 1 \text{ si } u \in [u_5, u_6[ = [2, 3[ , 0 \text{ sinon ,}$$

$$N_{6,0}(u) = 1 \text{ si } u \in [u_6, u_7[ = [3, 4[ , 0 \text{ sinon ,}$$

$$N_{7,0}(u) = 0 ,$$

$$N_{8,0}(u) = 0 ,$$

$$N_{9,0}(u) = 0 .$$

On en déduit les 9  $N_{i,1}$  qui sont nuls sauf dans les intervalles où les  $N_{i,0}$  incriminés sont non nuls :

$$N_{0,1}(u) = 0 ,$$

$$N_{1,1}(u) = 0 ,$$

$$N_{2,1}(u) = (1 - u)N_{3,0}(u) ,$$

$$N_{3,1}(u) = uN_{3,0}(u) + (2 - u)N_{4,0}(u) ,$$

$$N_{4,1}(u) = (u - 1)N_{4,0}(u) + (3 - u)N_{5,0}(u) ,$$

$$N_{5,1}(u) = (u - 2)N_{5,0}(u) + (4 - u)N_{6,0}(u) ,$$

$$N_{6,1}(u) = (u - 3)N_{6,0}(u) ,$$

$$N_{7,1}(u) = 0 ,$$

$$N_{8,1}(u) = 0 .$$

On en déduit les 8  $N_{i,2}$  qui sont nuls partout sauf pour les intervalles où les  $N_{i,0}$  incriminés sont non nuls. En premier, on exprime les  $N_{i,2}$  en fonction des  $N_{i,1}$  :

$$N_{0,2}(u) = 0 ,$$

$$\begin{aligned}
N_{1,2}(u) &= (1-u)N_{2,1}(u), \\
N_{2,2}(u) &= uN_{2,1}(u) + \frac{2-u}{2}N_{3,1}(u), \\
N_{3,2}(u) &= \frac{u}{2}N_{3,1}(u) + \frac{3-u}{2}N_{4,1}(u), \\
N_{4,2}(u) &= \frac{u-1}{2}N_{4,1}(u) + \frac{4-u}{2}N_{5,1}(u), \\
N_{5,2}(u) &= \frac{u-2}{2}N_{5,1}(u) + (4-u)N_{6,1}(u), \\
N_{6,2}(u) &= (u-3)N_{6,1}(u), \\
N_{7,2}(u) &= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit les 7  $N_{i,3}$  qui sont nuls partout sauf pour les intervalles où les  $N_{i,0}$  incriminés sont non nuls. En premier, on exprime les  $N_{i,3}$  en fonction des  $N_{i,2}$  puis des  $N_{i,1}$  :

$$\begin{aligned}
N_{0,3}(u) &= (1-u)(1-u)N_{2,1}(u), \\
N_{1,3}(u) &= u(1-u)N_{2,1}(u) + \frac{2-u}{2}(uN_{2,1}(u) + \frac{2-u}{2}N_{3,1}(u)), \\
N_{2,3}(u) &= \frac{u}{2}(uN_{2,1}(u) + \frac{2-u}{2}N_{3,1}(u)) + \frac{3-u}{3}(\frac{u}{2}N_{3,1}(u) + \frac{3-u}{2}N_{4,1}(u)), \\
N_{3,3}(u) &= \frac{u}{3}(\frac{u}{2}N_{3,1}(u) + \frac{3-u}{2}N_{4,1}(u)) + \frac{4-u}{3}(\frac{u-1}{2}N_{4,1}(u) + \frac{4-u}{2}N_{5,1}(u)), \\
N_{4,3}(u) &= \frac{u-1}{3}(\frac{u-1}{2}N_{4,1}(u) + \frac{4-u}{2}N_{5,1}(u)) + \frac{4-u}{2}(\frac{u-2}{2}N_{5,1}(u) + (4-u)N_{6,1}(u)), \\
N_{5,3}(u) &= \frac{u-2}{2}(\frac{u-2}{2}N_{5,1}(u) + (4-u)N_{6,1}(u)) + (4-u)(u-3)N_{6,1}(u), \\
N_{6,3}(u) &= (u-3)(u-3)N_{6,1}(u).
\end{aligned}$$

Et, pour finir, on exprime les  $N_{i,1}$  en fonction des  $N_{i,0}$ .

$$\begin{aligned}
N_{0,3}(u) &= (1-u)(1-u)(1-u)N_{3,0}(u), \\
N_{1,3}(u) &= u(1-u)(1-u)N_{3,0}(u) + \frac{2-u}{2}(u((1-u)N_{3,0}(u)) + \frac{2-u}{2}(uN_{3,0}(u) + (2-u)N_{4,0}(u))), \\
N_{2,3}(u) &= \frac{u}{2}(u(1-u)N_{3,0}(u) + \frac{2-u}{2}(uN_{3,0}(u) + (2-u)N_{4,0}(u)) + \\
&\quad \frac{3-u}{3}(\frac{u}{2}(uN_{3,0}(u) + (2-u)N_{4,0}(u)) + \frac{3-u}{2}((u-1)N_{4,0}(u) + (3-u)N_{5,0}(u))), \\
N_{3,3}(u) &= \frac{u}{3}(\frac{u}{2}(uN_{3,0}(u) + (2-u)N_{4,0}(u)) + \frac{3-u}{2}((u-1)N_{4,0}(u) + (3-u)N_{5,0}(u)) + \\
&\quad \frac{4-u}{3}(\frac{u-1}{2}((u-1)N_{4,0}(u) + (3-u)N_{5,0}(u)) + \frac{4-u}{2}((u-2)N_{5,0}(u) + (4-u)N_{6,0}(u))), \\
N_{4,3}(u) &= \frac{u-1}{3}(\frac{u-1}{2}((u-1)N_{4,0}(u) + (3-u)N_{5,0}(u)) + \frac{4-u}{2}((u-2)N_{5,0}(u) + (4-u)N_{6,0}(u)) \\
&\quad + \frac{4-u}{2}(\frac{u-2}{2}((u-2)N_{5,0}(u) + (4-u)N_{6,0}(u)) + (4-u)((u-3)N_{6,0}(u))), \\
N_{5,3}(u) &= \frac{u-2}{2}(\frac{u-2}{2}((u-2)N_{5,0}(u) + (4-u)N_{6,0}(u)) + (4-u)((u-3)N_{6,0}(u)) + (4-u)(u-3)((u-3)N_{6,0}(u)), \\
N_{6,3}(u) &= (u-3)(u-3)((u-3)N_{6,0}(u)).
\end{aligned}$$

- Premier morceau :  $\gamma_0(u) = (1-u)(1-u)(1-u)P_0 + (u(1-u)(1-u) + \frac{2-u}{2}(u((1-u)) + \frac{2-u}{2}(u)))P_1 +$

$$\left(\frac{u}{2}(u(1-u) + \frac{2-u}{2}(u)) + \frac{3-u}{3}(\frac{u}{2}(u))\right)P_2 + \frac{u}{3}(\frac{u}{2}(u))P_3,$$

soit :

$$\begin{aligned}\gamma_0(u) &= (1-u)^3 P_0 + u((1-u)^2 + \frac{2-u}{2}((1-u) + \frac{2-u}{2}))P_1 + \\ &\quad \frac{u^2}{2}(((1-u) + \frac{2-u}{2}) + \frac{3-u}{3})P_2 + \frac{u^3}{6}P_3,\end{aligned}$$

$u = 0$  donne  $P_0$ ,  $u = 1$  donne  $\frac{P_1}{4} + \frac{7P_2}{12} + \frac{P_3}{6} = \frac{3P_1+7P_2+2P_3}{12}$ .

- Deuxième morceau :  $\gamma_1(u) = \frac{(2-u)^3}{4}P_1 + (\frac{u}{2}\frac{(2-u)^2}{2} + \frac{u}{2}\frac{3-u}{3}(2-u) + \frac{(3-u)^2}{6}(u-1))P_2 +$   
 $(\frac{u^2}{6}(2-u) + \frac{u}{3}\frac{3-u}{2}(u-1) + \frac{4-u}{3}\frac{(u-1)^2}{2})P_3 + \frac{(u-1)^3}{6}P_4,$   
 $u = 1$  donne  $\frac{P_1}{4} + \frac{7P_2}{12} + \frac{P_3}{6}$  soit  $\frac{3P_1+7P_2+2P_3}{12}$  qui est  $\gamma_0(1)$ .  
 $u = 2$  donne  $\frac{P_2}{6} + (\frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{2})P_3 + \frac{1}{6}P_4$  soit  $\frac{2P_2+8P_3+2P_4}{12}$ .

- Troisième morceau :  $\gamma_2(u) = \frac{(3-u)^3}{6}P_2 + (\frac{u}{3}\frac{(3-u)^2}{2} + \frac{4-u}{3}\frac{u-1}{2}(3-u) + \frac{(4-u)^2}{6}(u-2))P_3 +$   
 $(\frac{(u-1)^2}{6}(3-u) + \frac{u-1}{3}\frac{4-u}{2}(u-2) + \frac{4-u}{2}\frac{(u-2)^2}{2})P_4 + \frac{(u-2)^3}{4}P_5,$   
 $u = 2$  donne  $\frac{1}{6}P_2 + \frac{2}{3}P_3 + \frac{1}{6}P_4$ , soit  $\gamma_1(2)$ .  
 $u = 3$  donne  $\frac{1}{6}P_3 + (\frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2})P_4 + \frac{1}{4}P_5$ , soit  $\frac{2P_3+7P_4+3P_5}{12}$ .

- Dernier morceau :  $\gamma_3(u) = \frac{(4-u)^3}{6}P_3 + \frac{(4-u)^2}{2}(\frac{u-1}{3} + \frac{u-2}{2} + (u-3))P_4 +$   
 $(\frac{(u-2)^2}{4}(4-u) + \frac{u-2}{2}(4-u)(u-3) + (4-u)(u-3)^2)P_5 + (u-3)^3P_6,$   
 $u = 4$  donne  $P_6$ .  
 $u = 3$  donne  $\frac{1}{6}P_3 + \frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \frac{1}{2})P_4 + \frac{1}{4}P_5$  soit  $\gamma_2(3)$ .

Raccord  $C^1$ , par exemple en  $u = 1$ . On dérive  $\gamma_0(u)$  :

$$\begin{aligned}\gamma_0(u) &= (1-u)^3 P_0 + u((1-u)^2 + \frac{2-u}{2}((1-u) + \frac{2-u}{2}))P_1 + \\ &\quad \frac{u^2}{2}(((1-u) + \frac{2-u}{2}) + \frac{3-u}{3})P_2 + \frac{u^3}{6}P_3,\end{aligned}$$

explicité en :

$$\begin{aligned}\gamma_0(u) &= (1-u)^3 P_0 + (u(1-u)^2 + u\frac{2-u}{2}(1-u) + u\frac{(2-u)^2}{4})P_1 + \\ &\quad (\frac{u^2}{2}(1-u) + \frac{u^2}{2}\frac{2-u}{2} + \frac{u^2}{2}\frac{3-u}{3})P_2 + \frac{u^3}{6}P_3,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\gamma_0'(u) &= -3(1-u)^2 P_0 + \\ &\quad ((1-u)^2 - 2u(1-u) + \frac{2-u}{2}(1-u) - \frac{u}{2}(1-u) - u\frac{2-u}{2} + \frac{(2-u)^2}{4} - u\frac{2-u}{2})P_1 +\end{aligned}$$

$$(u(1-u) - \frac{u^2}{2} + u\frac{2-u}{2} - \frac{u^2}{4} + u\frac{3-u}{3} - \frac{u^2}{6})P_2 + \frac{u^2}{2}P_3,$$

et pour  $u = 1$ , il vient :

$$\gamma'_0(u) = -\frac{3P_1}{4} + \frac{P_2}{4} + \frac{P_3}{2} = \frac{2\overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_1P_2}}{4}.$$

On dérive maintenant  $\gamma_1(u)$  :

$$\begin{aligned} \gamma_1(u) &= \frac{(2-u)^3}{4}P_1 + (\frac{u}{2}\frac{(2-u)^2}{2} + \frac{u}{2}\frac{3-u}{3}(2-u) + \frac{(3-u)^2}{6}(u-1))P_2 + \\ &(\frac{u^2}{6}(2-u) + \frac{u}{3}\frac{3-u}{2}(u-1) + \frac{4-u}{3}\frac{(u-1)^2}{2})P_3 + \frac{(u-1)^3}{6}P_4, \\ \gamma'_1(u) &= -\frac{3(2-u)^2}{4}P_1 + \\ &(\frac{(2-u)^2}{4} - \frac{u}{2}(2-u) + \frac{1}{2}\frac{3-u}{3}(2-u) - \frac{u}{2}\frac{1}{3}(2-u) - \frac{u}{2}\frac{3-u}{3} - \frac{(3-u)}{3}(u-1) + \frac{(3-u)^2}{6})P_2 + \\ &(\frac{u}{3}(2-u) - \frac{u^2}{6} + \frac{1}{3}\frac{3-u}{2}(u-1) - \frac{u}{3}\frac{1}{2}(u-1) + \frac{u}{3}\frac{3-u}{2} - \frac{1}{3}\frac{(u-1)^2}{2} - \frac{4-u}{3}(u-1))P_3 + \\ &\frac{(u-1)^2}{2}P_4, \end{aligned}$$

et pour  $u = 1$ , il vient :

$$\gamma'_1(u) = -\frac{3}{4}P_1 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{2}{3})P_2 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3})P_3,$$

soit  $-\frac{3P_1}{4} + \frac{P_2}{4} + \frac{P_3}{2}$  donc  $\gamma'_0(1)$ .

Raccord  $C^2$ , toujours par exemple en  $u = 1$ . On dérive encore une fois.

$$\begin{aligned} \gamma''_0(u) &= 6(1-u)P_0 + \\ &(-2(1-u) - 2(1-u) + 2u - \frac{1}{2}(1-u) - \frac{2-u}{2} - \frac{1}{2}(1-u) + \frac{u}{2} - \frac{2-u}{2} + u\frac{1}{2} - \frac{(2-u)}{2} - \frac{2-u}{2} + u\frac{1}{2})P_1 + \\ &((1-u) - u - u + \frac{2-u}{2} - u\frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{3-u}{3} - u\frac{1}{3} - \frac{u}{3})P_2 + \\ &uP_3, \end{aligned}$$

et pour  $u = 1$ , il vient :

$$\begin{aligned} \gamma''_0(u) &= (2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2})P_1 + \\ &(-2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3})P_2 + \\ &P_3, \end{aligned}$$

et pour  $u = 1$ , il vient :

$$\begin{aligned} \gamma''_0(u) &= \frac{3\overrightarrow{P_2P_1} + 2\overrightarrow{P_2P_3}}{2}. \\ \gamma''_1(u) &= \frac{3(2-u)}{2}P_1 + \\ &(-\frac{(2-u)}{2} - \frac{1}{2}(2-u) + \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}(2-u) - \frac{1}{2}\frac{3-u}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}(2-u) + \frac{u}{2}\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{3-u}{3} + \frac{u}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(u-1) - \frac{(3-u)}{3} - \frac{(3-u)}{3})P_2 + \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{3}(2-u) - \frac{u}{3} - \frac{u}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{2}(u-1) + \frac{1}{3} \frac{3-u}{2} - \frac{1}{3} \frac{1}{2}(u-1) - \frac{u}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{3-u}{2} - \frac{u}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(u-1) - \frac{1}{3}(u-1) + \frac{4-u}{3}\right) P_3 \\ -(u-1)P_4,$$

et pour  $u = 1$ , il vient :

$$\gamma_1''(u) = \frac{3}{2}P_1 + \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) P_2 + \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{2} + 1\right) P_3,$$

soit exactement  $\frac{3\overrightarrow{P_2P_1} + 2\overrightarrow{P_2P_3}}{2}$  donc  $\gamma_0''(1)$ .

On va vérifier que  $\gamma_0(u)$  est un Bézier classique. On repart de :

$$\gamma_0(u) = (1-u)^3P_0 + \left(u(1-u)^2 + u\frac{2-u}{2}(1-u) + u\frac{(2-u)^2}{4}\right)P_1 + \\ \left(\frac{u^2}{2}(1-u) + \frac{u^2}{2}\frac{2-u}{2} + \frac{u^2}{2}\frac{3-u}{3}\right)P_2 + \frac{u^3}{6}P_3,$$

qui s'écrit comme (on ajoute et on enlève les termes qui manquent) :

$$\gamma_0(u) = (1-u)^3P_0 + 3u(1-u)^2P_1 - 3u(1-u)^2P_1 \\ \left(u(1-u)^2 + u\frac{2-u}{2}(1-u) + u\frac{(2-u)^2}{4}\right)P_1 + \\ \left(\frac{u^2}{2}(1-u) + \frac{u^2}{2}\frac{2-u}{2} + \frac{u^2}{2}\frac{3-u}{3}\right)P_2 + \\ u^3\frac{3P_1 + 7P_2 + 2P_3}{12} - u^3\frac{3P_1 + 7P_2}{12},$$

ou encore :

$$\gamma_0(u) = (1-u)^3P_0 + 3u(1-u)^2P_1 \\ \left(u(1-u)^2 + u\frac{2-u}{2}(1-u) + u\frac{(2-u)^2}{4} - 3u(1-u)^2 - \frac{u^3}{4}\right)P_1 + \\ \left(\frac{u^2}{2}(1-u) + \frac{u^2}{2}\frac{2-u}{2} + \frac{u^2}{2}\frac{3-u}{3} - \frac{7u^3}{12}\right)P_2 + \\ u^3\frac{3P_1 + 7P_2 + 2P_3}{12},$$

et on cherche à trouver  $Q_2$  tel que :

$$3u^2(1-u)Q_2 = \left(u(1-u)^2 + u\frac{2-u}{2}(1-u) + u\frac{(2-u)^2}{4} - 3u(1-u)^2 - \frac{u^3}{4}\right)P_1 + \\ \left(\frac{u^2}{2}(1-u) + \frac{u^2}{2}\frac{2-u}{2} + \frac{u^2}{2}\frac{3-u}{3} - \frac{7u^3}{12}\right)P_2, \\ = u\left((1-u)^2 + \frac{2-u}{2}(1-u) + \frac{(2-u)^2}{4} - 3(1-u)^2 - \frac{u^2}{4}\right)P_1 + \\ \frac{u^2}{2}\left((1-u) + \frac{2-u}{2} + \frac{3-u}{3} - \frac{7u}{6}\right)P_2, \\ = u\left(u\frac{3}{2}(1-u)\right)P_1 + \frac{u^2}{2}(3(1-u))P_2,$$

et ainsi :

$$Q_2 = \frac{P_1 + P_2}{2},$$

d'où le résultat cherché :

$$\gamma_0(u) = \sum_{i=0,3} B_i^3(u) Q_i,$$

avec

$$Q_0 = P_0, Q_1 = P_1, Q_2 = \frac{P_1 + P_2}{2} \text{ et } Q_3 = \frac{3P_1 + 7P_2 + 2P_3}{12}.$$

On va vérifier que  $\gamma_1(u)$  est également un Bézier classique. On repart de :

$$\begin{aligned} \gamma_1(u) = & \frac{(2-u)^3}{4} P_1 + \left( \frac{u(2-u)^2}{2} + \frac{u(3-u)}{2} (2-u) + \frac{(3-u)^2}{6} (u-1) \right) P_2 + \\ & \left( \frac{u^2}{6} (2-u) + \frac{u(3-u)}{3} (u-1) + \frac{4-u}{3} \frac{(u-1)^2}{2} \right) P_3 + \frac{(u-1)^3}{6} P_4, \end{aligned}$$

on pose  $v = u - 1$  donc  $u = v + 1$ , alors :

$$\begin{aligned} \gamma_1(v) = & \frac{(1-v)^3}{4} P_1 + \left( \frac{(v+1)(1-v)^2}{2} + \frac{(v+1)(2-v)}{2} (1-v) + \frac{(2-v)^2}{6} v \right) P_2 + \\ & \left( \frac{(v+1)^2}{6} (1-v) + \frac{(v+1)(2-v)}{3} v + \frac{3-v}{3} \frac{v^2}{2} \right) P_3 + \frac{v^3}{6} P_4, \end{aligned}$$

qui s'écrit comme (on ajoute et on enlève les termes qui manquent) :

$$\begin{aligned} \gamma_1(v) = & \frac{(1-v)^3}{4} P_1 + \left( \frac{(v+1)(1-v)^2}{2} + \frac{(v+1)(2-v)}{2} (1-v) + \frac{(2-v)^2}{6} v \right) P_2 + \\ & \left( \frac{(v+1)^2}{6} (1-v) + \frac{(v+1)(2-v)}{3} v + \frac{3-v}{3} \frac{v^2}{2} \right) P_3 + \frac{v^3}{6} P_4 + \\ & (1-v)^3 \left( \frac{7P_2 + 2P_3}{12} \right) + v^3 \left( \frac{2P_2 + 8P_3}{12} \right) - \\ & (1-v)^3 \left( \frac{7P_2 + 2P_3}{12} \right) - v^3 \left( \frac{2P_2 + 8P_3}{12} \right), \end{aligned}$$

et, en  $(1-v)^3$ , vient le terme

$$(1-v)^3 \left( \frac{3P_1 + 7P_2 + 2P_3}{12} \right)$$

tandis que, en  $v^3$ , vient le terme

$$v^3 \left( \frac{2P_2 + 8P_3 + 2P_4}{12} \right),$$

ainsi, ne reste que :

$$\begin{aligned} \gamma_1(v) = & (1-v)^3 \left( \frac{3P_1 + 7P_2 + 2P_3}{12} \right) + \left( \frac{(v+1)(1-v)^2}{2} + \frac{(v+1)(2-v)}{2} (1-v) + \frac{(2-v)^2}{6} v \right) P_2 + \\ & \left( \frac{(v+1)^2}{6} (1-v) + \frac{(v+1)(2-v)}{3} v + \frac{3-v}{3} \frac{v^2}{2} \right) P_3 + v^3 \left( \frac{2P_2 + 8P_3 + 2P_4}{12} \right) - \\ & (1-v)^3 \left( \frac{7P_2 + 2P_3}{12} \right) - v^3 \left( \frac{2P_2 + 8P_3}{12} \right), \end{aligned}$$

et on cherche  $Q_1$  et  $Q_2$  tels que :

$$3v(1-v)^2 Q_1 + 3v^2(1-v) Q_2 = \left( \frac{(v+1)(1-v)^2}{2} + \frac{(v+1)(2-v)}{2} (1-v) + \frac{(2-v)^2}{6} v \right) P_2 +$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{(v+1)^2}{6}(1-v) + \frac{(v+1)}{3} \frac{2-v}{2} v + \frac{3-v}{3} \frac{v^2}{2} \right) P_3 - \\ & (1-v)^3 \left( \frac{7P_2 + 2P_3}{12} \right) - v^3 \left( \frac{2P_2 + 8P_3}{12} \right). \end{aligned}$$

Tout calcul fait, le terme en  $P_2$  est

$$v(1-v)(2-v)$$

mais ceci s'écrit aussi

$$2v(1-v)^2 + v^2(1-v),$$

qui est la forme voulue. De la même façon, on calcule le terme en  $P_3$  et, tout calcul fait, on trouve

$$v(1-v)(1+v)$$

qui s'écrit aussi :

$$v(1-v)^2 + 2v^2(1-v),$$

par suite, on a :

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{3P_1 + 7P_2 + 2P_3}{12} \\ Q_1 &= \frac{2P_2 + P_3}{3} \\ Q_2 &= \frac{P_2 + 2P_3}{3} \\ Q_3 &= \frac{2P_2 + 8P_3 + 2P_4}{12} \end{aligned}$$

et le Bézier classique est obtenu entre 0 et 1 avec ces quatre points de contrôle.

La même mécanique s'applique évidemment aux deux autres sous-courbes. On va néanmoins le faire pour exhiber les points de contrôle des sous-courbes.

On part donc de

$$\begin{aligned} \gamma_2(u) &= \frac{(3-u)^3}{6} P_2 + \left( \frac{u}{3} \frac{(3-u)^2}{2} + \frac{4-u}{3} \frac{u-1}{2} (3-u) + \frac{(4-u)^2}{6} (u-2) \right) P_3 + \\ & \left( \frac{(u-1)^2}{6} (3-u) + \frac{u-1}{3} \frac{4-u}{2} (u-2) + \frac{4-u}{2} \frac{(u-2)^2}{2} \right) P_4 + \frac{(u-2)^3}{4} P_5, \end{aligned}$$

et on fait le changement de variable  $v = u - 2$ , soit  $u = v + 2$ , il vient

$$\begin{aligned} \gamma_2(v) &= \frac{(1-v)^3}{6} P_2 + \left( \frac{v+2}{3} \frac{(1-v)^2}{2} + \frac{2-v}{3} \frac{v+1}{2} (1-v) + \frac{(2-v)^2}{6} v \right) P_3 + \\ & \left( \frac{(v+1)^2}{6} (1-v) + \frac{v+1}{3} \frac{2-v}{2} v + \frac{2-v}{2} \frac{v^2}{2} \right) P_4 + \frac{v^3}{4} P_5, \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \gamma_2(v) &= \frac{(1-v)^3}{6} P_2 + \left( \frac{v+2}{3} \frac{(1-v)^2}{2} + \frac{2-v}{3} \frac{v+1}{2} (1-v) + \frac{(2-v)^2}{6} v \right) P_3 + \\ & \left( \frac{(v+1)^2}{6} (1-v) + \frac{v+1}{3} \frac{2-v}{2} v + \frac{2-v}{2} \frac{v^2}{2} \right) P_4 + \frac{v^3}{4} P_5 + \\ & (1-v)^3 \left( \frac{8P_3 + 2P_4}{12} \right) + v^3 \left( \frac{2P_3 + 7P_4}{12} \right) - \\ & (1-v)^3 \left( \frac{8P_3 + 2P_4}{12} \right) - v^3 \left( \frac{2P_3 + 7P_4}{12} \right), \end{aligned}$$

et, en  $(1-v)^3$ , vient le terme

$$(1-v)^3 \left( \frac{2P_2 + 8P_3 + 2P_4}{12} \right)$$

tandis que, en  $v^3$ , vient le terme

$$v^3 \left( \frac{2P_3 + 7P_4 + 3P_5}{12} \right)$$

ainsi, ne reste que :

$$\begin{aligned} \gamma_2(v) = (1-v)^3 \left( \frac{2P_2 + 8P_3 + 2P_4}{12} \right) + \left( \frac{v+2}{3} \frac{(1-v)^2}{2} + \frac{2-v}{3} \frac{v+1}{2} (1-v) + \frac{(2-v)^2}{6} v \right) P_3 + \\ \left( \frac{(v+1)^2}{6} (1-v) + \frac{v+1}{3} \frac{2-v}{2} v + \frac{2-v}{2} \frac{v^2}{2} \right) P_4 + v^3 \left( \frac{2P_3 + 7P_4 + 3P_5}{12} \right) + \\ -(1-v)^3 \left( \frac{8P_3 + 2P_4}{12} \right) - v^3 \left( \frac{2P_3 + 7P_4}{12} \right), \end{aligned}$$

et on cherche  $Q_1$  et  $Q_2$  tels que :

$$\begin{aligned} 3v(1-v)^2 Q_1 + 3v^2(1-v) Q_2 = \left( \frac{v+2}{3} \frac{(1-v)^2}{2} + \frac{2-v}{3} \frac{v+1}{2} (1-v) + \frac{(2-v)^2}{6} v \right) P_3 + \\ \left( \frac{(v+1)^2}{6} (1-v) + \frac{v+1}{3} \frac{2-v}{2} v + \frac{2-v}{2} \frac{v^2}{2} \right) P_4 \\ -(1-v)^3 \left( \frac{8P_3 + 2P_4}{12} \right) - v^3 \left( \frac{2P_3 + 7P_4}{12} \right). \end{aligned}$$

Tout calcul fait, le terme en  $P_3$  est

$$2v - 3v + v^2$$

mais ceci s'écrit aussi

$$2v(1-v)^2 + v^2(1-v),$$

qui est la forme voulue. De la même façon, on calcule le terme en  $P_4$  et, tout calcul fait, on trouve

$$v(1-v^2)$$

qui s'écrit aussi :

$$v(1-v)^2 + 2v^2(1-v),$$

par suite, on a :

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{2P_2 + 8P_3 + 2P_4}{12} \\ Q_1 &= \frac{2P_3 + P_4}{3} \\ Q_2 &= \frac{P_3 + 2P_4}{3} \\ Q_3 &= \frac{2P_3 + 7P_4 + 3P_5}{12} \end{aligned}$$

et le Bézier classique est obtenu entre 0 et 1 avec ces quatre points de contrôle.

Pour finir cette recherche des points de contrôle, on part de

$$\begin{aligned} \gamma_3(u) = \frac{(4-u)^3}{6} P_3 + \frac{(4-u)^2}{2} \left( \frac{u-1}{3} + \frac{u-2}{2} + (u-3) \right) P_4 + \\ \left( \frac{(u-2)^2}{4} (4-u) + \frac{u-2}{2} (4-u)(u-3) + (4-u)(u-3)^2 \right) P_5 + (u-3)^3 P_6, \end{aligned}$$

et on fait le changement de variable  $v = u - 3$ , soit  $u = v + 3$ , il vient

$$\begin{aligned} \gamma_3(v) = \frac{(1-v)^3}{6} P_3 + \frac{(1-v)^2}{2} \left( \frac{v+2}{3} + \frac{v+1}{2} + v \right) P_4 + \\ \left( \frac{(v+1)^2}{4} (1-v) + \frac{v+1}{2} (1-v)v + (1-v)v^2 \right) P_5 + v^3 P_6, \end{aligned}$$



soit :

$$\begin{aligned}\gamma_3(v) = & \frac{(1-v)^3}{6}P_3 + \frac{(1-v)^2}{2}\left(\frac{v+2}{3} + \frac{v+1}{2} + v\right)P_4 + \\ & \left(\frac{(v+1)^2}{4}(1-v) + \frac{v+1}{2}(1-v)v + (1-v)v^2\right)P_5 + v^3P_6 + \\ & (1-v)^3\left(\frac{7P_4+3P_5}{12}\right) - (1-v)^3\left(\frac{7P_4+3P_5}{12}\right),\end{aligned}$$

et, en  $(1-v)^3$  vient le terme

$$(1-v)^3\left(\frac{2P_3+7P_4+3P_5}{12}\right)$$

tandis que en  $v^3$  on a le terme

$$v^3P_6$$

ainsi, il ne reste que

$$\begin{aligned}\gamma_3(v) = & (1-v)^3\left(\frac{2P_3+7P_4+3P_5}{12}\right) + \frac{(1-v)^2}{2}\left(\frac{v+2}{3} + \frac{v+1}{2} + v\right)P_4 + \\ & \left(\frac{(v+1)^2}{4}(1-v) + \frac{v+1}{2}(1-v)v + (1-v)v^2\right)P_5 + v^3P_6 - (1-v)^3\left(\frac{7P_4+3P_5}{12}\right),\end{aligned}$$

et on cherche  $Q_1$  et  $Q_2$  tels que

$$\begin{aligned}3v(1-v)^2Q_1 + 3v^2(1-v)Q_2 = & \frac{(1-v)^2}{2}\left(\frac{v+2}{3} + \frac{v+1}{2} + v\right)P_4 + \\ & \left(\frac{(v+1)^2}{4}(1-v) + \frac{v+1}{2}(1-v)v + (1-v)v^2\right)P_5 - (1-v)^3\left(\frac{7P_4+3P_5}{12}\right),\end{aligned}$$

Tout calcul fait, le terme en  $P_4$  est

$$\frac{3v(1-v)^2}{2}$$

qui est la forme voulue. De la même façon, on calcule le terme en  $P_5$  et, tout calcul fait, on trouve

$$3v(1-v)\frac{1+v}{2}$$

$$\text{qui s'écrit aussi } \frac{3v(1-v)^2}{2} + 3v^2(1-v),$$

$$\text{par suite, on a } Q_0 = \frac{2P_3+7P_4+3P_5}{12}, \quad Q_1 = \frac{P_4+P_5}{2}, \quad Q_2 = P_5 \text{ et } Q_3 = P_6$$

et le Bézier classique est obtenu entre 0 et 1 avec ces quatre points de contrôle.

Pour finir, on regarde l'algorithme d'évaluation afin de trouver tant les points de coupe que les points de contrôle des sous-courbes. L'idée est de retrouver exactement les résultats obtenus ci-dessus en exhibant explicitement les sous-courbes de Bézier. L'évaluation d'un point est basée sur les Formules (8) et (9) redonnées pour mémoire ici :

$$P = \gamma(u) = \sum_{i=dec+d}^{d+dec} N_{i,0}(u)P_i^d = P_{dec+d}^d,$$

avec

$$P_i^r = \frac{u-u_i}{u_{i+d+1-r}-u_i}P_i^{r-1} + \frac{u_{i+d+1-r}-u}{u_{i+d+1-r}-u_i}P_{i-1}^{r-1}.$$

Par exemple, pour trouver  $Q_3$ , fin du premier morceau et début du second, on fait  $d = 3$ ,  $u = 1$ ,  $dec = 0$  (notons, par continuité, que  $dec = 1$  donne également la solution mais ne permet pas de trouver, au vol, les nouveaux points de contrôle), la solution cherchée est :

$$P = P_3^3$$

et le diagramme de la construction est le suivant :

$$\begin{array}{cccc}
 & & & P_3^3 \\
 & & & \swarrow \quad \searrow \\
 & & P_2^2 & P_3^2 \\
 & & \swarrow \quad \searrow & \\
 & P_1^1 & P_2^1 & P_3^1 \\
 & \swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow & \\
 P_0^0 & P_1^0 & P_2^0 & P_3^0 .
 \end{array}$$

Rappelons la séquence nodale :

$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4\}$$

$$\text{indices } \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Ce qui donne, pour les rangs  $r = 1$  à  $r = 3$  :

$$\begin{aligned}
 P_1^1 &= \frac{u - u_1}{u_4 - u_1} P_1^0 + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_1} P_0^0 = P_1^0 \\
 P_2^1 &= \frac{u - u_2}{u_5 - u_2} P_2^0 + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_2} P_1^0 = \frac{P_2^0}{2} + \frac{P_1^0}{2} \\
 P_3^1 &= \frac{u - u_3}{u_6 - u_3} P_3^0 + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_3} P_2^0 = \frac{P_3^0}{3} + \frac{2P_2^0}{3}, \\
 P_2^2 &= \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} P_2^1 + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} P_1^1 = P_2^1 \\
 P_3^2 &= \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} P_3^1 + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_3} P_2^1 = \frac{P_3^1}{2} + \frac{P_2^1}{2}, \\
 P_3^3 &= \frac{u - u_3}{u_4 - u_3} P_3^2 + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} P_2^2 = P_3^2 \\
 P &= \gamma(1) = P_3^3 = P_3^2 = \frac{P_3^0}{6} + \frac{2P_2^0}{6} + \frac{P_2^0}{4} + \frac{P_1^0}{4} = \frac{3P_1^0 + 7P_2^0 + 2P_3^0}{12}, \\
 \text{soit donc } P &= \frac{3P_1 + 7P_2 + 2P_3}{12},
 \end{aligned}$$

qui n'est autre que  $Q_3$ , au passage on a calculé  $Q_2 = P_2^1$  ainsi que les nouveaux points de contrôle  $P_0^0, P_1^1, P_2^2, P_3^3$ , ce qui donne les points de contrôle qui suivent :

$$P_0, P_1, \frac{P_1 + P_2}{2}, \frac{3P_1 + 7P_2 + 2P_3}{12}.$$

La représentation symbolique de la récurrence est la suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_0^0 & P_1^0 & & P_2^0 & & P_3^0 & P_4^0 & P_5^0 & P_6^0 \\
 & (1) & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & & (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) & & & & \\
 & P_1^1 & P_2^1 & & P_3^1 & & & & \\
 & & (1) & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & & & & & \\
 & & P_2^2 & P_3^2 & & & & & \\
 & & & (1) & & & & & \\
 & & & P_3^3 & & & & & 
 \end{array}$$

On cherche maintenant la fin du second morceau, soit  $d = 3, u = 2, dec = 1$  (ou  $dec = 2$  par continuité) et les nouveaux points de contrôle. Alors  $P = P_4^3$  et la séquence nodale qui était

$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4\}$$

devient

$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4\}$$

indices  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

tandis que l'on définit  $P_1^0 = P = \gamma(1)$  et  $P_2^0 = P_3^1$ , la valeur trouvée ci-dessus. Pour calculer  $P = \gamma(2)$  on utilise la récurrence mais les indices en  $i$  des nœuds deviennent  $i + d$ . Ceci donne le diagramme et les calculs qui suivent :

$$\begin{array}{cccc}
 & & P_4^3 & \\
 & & P_3^2 & P_4^2 \\
 & P_2^1 & P_3^1 & P_4^1 \\
 P_1^0 & P_2^0 & P_3^0 & P_4^0,
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 P_2^1 &= \frac{u - u_5}{u_8 - u_5} P_2^0 + \frac{u_8 - u}{u_8 - u_5} P_1^0 = P_2^0 \\
 P_3^1 &= \frac{u - u_6}{u_9 - u_6} P_3^0 + \frac{u_9 - u}{u_9 - u_6} P_2^0 = \frac{P_3^0}{2} + \frac{P_2^0}{2} \\
 P_4^1 &= \frac{u - u_7}{u_{10} - u_7} P_4^0 + \frac{u_{10} - u}{u_{10} - u_7} P_3^0 = \frac{P_4^0}{3} + \frac{2P_3^0}{3} \\
 P_3^2 &= \frac{u - u_6}{u_8 - u_6} P_3^1 + \frac{u_8 - u}{u_8 - u_6} P_2^1 = P_3^1 \\
 P_4^2 &= \frac{u - u_7}{u_9 - u_7} P_4^1 + \frac{u_9 - u}{u_9 - u_7} P_3^1 = \frac{P_4^1}{2} + \frac{P_3^1}{2} \\
 P_4^3 &= \frac{u - u_7}{u_8 - u_7} P_4^2 + \frac{u_8 - u}{u_8 - u_7} P_3^2 = P_4^2.
 \end{aligned}$$

donc :

$$P = \gamma(2) = P_4^3 = P_4^2 = \frac{P_4^0}{6} + \frac{P_3^0}{3} + \frac{P_3^0}{4} + \frac{P_2^0}{4} = \frac{P_4^0}{6} + \frac{P_3^0}{3} + \frac{P_3^0}{4} + \frac{P_3^0 + 2P_2^0}{12} = \frac{2P_2^0 + 8P_3^0 + 2P_4^0}{12},$$

soit donc  $P = \frac{P_2 + 4P_3 + P_4}{6},$

avec les nouveaux points de contrôle  $P_1^0, P_2^1, P_3^2, P_4^3$ , ce qui donne les points de contrôle qui suivent :

$$\frac{3P_1 + 7P_2 + 2P_3}{12}, \frac{2P_2 + P_3}{3}, \frac{P_2 + 2P_3}{3}, \frac{P_2 + 4P_3 + P_4}{6}.$$

Notons que l'on peut calculer ce point en utilisant la relation

$$P = \frac{3P_1 + 7P_2 + 2P_3}{12},$$

translatée en

$$P = \frac{3P_2 + 7P_3 + 2P_4}{12},$$

où on remplace  $P_2$  par  $\frac{2P_2 + P_3}{3}$ . De manière générale, cette relation translatée convient jusqu'à l'antépénultième morceau compris en mettant simplement à jour le second point de contrôle.

On regarde de troisième morceau,  $d = 3, u = 3, dec = 2$ . Alors

$$P = P_5^3$$

La séquence nodale est maintenant :

$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4\}$$

indices  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$

tandis que l'on définit  $P_2^0 = P = \gamma(2)$  et  $P_3^0 = P_4^1$ , la valeur trouvée ci-dessus. Pour calculer  $P = \gamma(3)$  on utilise la récurrence mais les indices en  $i$  des nœuds deviennent  $i + 2d$ . Ceci donne le diagramme et les calculs qui suivent :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & P_5^3 & & \\
 & & & & P_4^2 & P_5^2 & \\
 & & & P_3^1 & P_4^1 & P_5^1 & \\
 & P_2^0 & P_3^0 & P_4^0 & P_5^0 & & ,
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 P_3^1 &= \frac{u - u_9}{u_{12} - u_9} P_3^0 + \frac{u_{12} - u}{u_{12} - u_9} P_2^0 = P_3^0 . \\
 P_4^1 &= \frac{u - u_{10}}{u_{13} - u_{10}} P_4^0 + \frac{u_{13} - u}{u_{13} - u_{10}} P_3^0 = \frac{P_4^0}{2} + \frac{P_3^0}{2} \\
 P_5^1 &= \frac{u - u_{11}}{u_{14} - u_{11}} P_5^0 + \frac{u_{14} - u}{u_{14} - u_{11}} P_4^0 = \frac{P_5^0}{2} + \frac{P_4^0}{2} , \\
 P_4^2 &= \frac{u - u_{10}}{u_{12} - u_{10}} P_4^1 + \frac{u_{12} - u}{u_{12} - u_{10}} P_3^1 = P_4^1 \\
 P_5^2 &= \frac{u - u_{11}}{u_{13} - u_{11}} P_5^1 + \frac{u_{13} - u}{u_{13} - u_{11}} P_4^1 = \frac{P_5^1}{2} + \frac{P_4^1}{2} , \\
 P_5^3 &= \frac{u - u_{11}}{u_{12} - u_{11}} P_5^2 + \frac{u_{12} - u}{u_{12} - u_{11}} P_4^2 = P_5^2 .
 \end{aligned}$$

donc

$$P = \gamma(3) = P_5^2 = \frac{P_5^1}{2} + \frac{P_4^1}{2} = \frac{P_5^0}{4} + \frac{P_4^0}{4} + \frac{P_4^0}{4} + \frac{P_3^0}{4} = \frac{P_3^0}{4} + \frac{P_4^0}{2} + \frac{P_5^0}{4}$$

et comme  $P_3^0$  est remplacé par  $P_4^1 = \frac{P_4^0}{2} + \frac{P_3^0}{2}$ , on trouve

$$P = \frac{2P_3 + 7P_4 + 3P_5}{12} ,$$

avec les nouveaux points de contrôle  $P_2^0, P_3^1, P_4^2, P_5^3$ , ce qui donne les points de contrôle qui suivent :

$$\frac{P_2 + 4P_3 + P_4}{6}, \frac{2P_3 + P_4}{3}, \frac{P_3 + 2P_4}{3}, \frac{2P_3 + 7P_4 + 3P_5}{12} .$$

La Figure 6 et le diagramme ci-dessous montrent le déroulement de l'algorithme d'évaluation avec la construction, au vol, des points de contrôle de chaque morceau. On remarque les poids  $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$  rang 1, et  $\frac{1}{2}$ , rang 2, sauf pour l'avant dernier morceau où on a les poids  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ , rang 1, et  $\frac{1}{2}$ , rang 2. En fait le premier jeu de poids est valable du début à l'antépénultième morceau. On remarque également que si l'on parcourt la courbe à l'envers, on retrouve exactement cette propriété. Schématiquement, les points de coupe et de contrôle des sous-courbes s'organisent selon le diagramme suivant, de  $P_0$  à  $P_6$  :

P0	-	P1	-	P2	-	P3		P4		P5		P6
		1	1/2		2/3	.		.		.		
			1	1/2	.	.		.		.		
				1	.	.		.		.		
			P	-	.	-	.	.		.		
				1	1/2	.	2/3	.		.		
					1	.	1/2	.		.		
						1	.	.		.		
						P	-	.	-	.		
							1	1/2		1/2	.	
								1	1/2	.	.	
									1	.	.	



Pour le rang  $r = 1$ , on trouve (avec  $u = 3$ ) :

$$\begin{aligned} P_5^1 &= \frac{u - u_1}{u_4 - u_1} P_5^0 + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_1} P_6^0 = P_5^0 \\ P_4^1 &= \frac{u - u_2}{u_5 - u_2} P_4^0 + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_2} P_5^0 = \frac{P_4^0}{2} + \frac{P_5^0}{2} \\ P_3^1 &= \frac{u - u_3}{u_6 - u_3} P_3^0 + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_3} P_4^0 = \frac{P_3^0}{3} + \frac{2P_4^0}{3}. \end{aligned}$$

Pour le rang  $r = 2$ , on trouve (avec  $u = 3$ ) :

$$\begin{aligned} P_4^2 &= \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} P_4^1 + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} P_5^1 = P_4^1 \\ P_3^2 &= \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} P_3^1 + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_3} P_4^1 = \frac{P_3^1}{2} + \frac{P_4^1}{2}, \end{aligned}$$

et, pour le rang  $r = 3$ , on a :

$$P_3^3 = \frac{u - u_3}{u_4 - u_3} P_3^2 + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} P_4^2 = P_3^2,$$

soit

$$\begin{aligned} P = \gamma(3) &= P_3^3 = \frac{P_3^1}{2} + \frac{P_4^1}{2} = \frac{P_3^0}{6} + \frac{P_4^0}{3} + \frac{P_4^0}{4} + \frac{P_5^0}{4} \\ \text{donc } P &= \frac{3P_5^0 + 7P_4^0 + 2P_3^0}{12}, \end{aligned}$$

qui est bien la valeur cherchée, la fin du troisième morceau est en effet le symétrique de la relation utilisée pour le premier morceau, soit :

$$P = \frac{2P_3^0 + 7P_4^0 + 3P_5^0}{12}.$$

**Le cas  $d = 4$  avec  $n$  points de contrôle et une séquence uniforme.** Ici, on va juste regarder comment se décompose la courbe en sous-courbes de Bézier, le nombre  $n$  est fixé à 7 pour retrouver une décomposition en 4 morceaux. La séquence nodale est uniforme et se présente donc comme

$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4\}.$$

Le diagramme de l'algorithme d'évaluation, pour trouver le premier morceau est le suivant,  $u = 1$  :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & P_4^4 \\ & & & & & & P_3^3 \quad P_4^3 \\ & & & & & & P_2^2 \quad P_3^2 \quad P_4^2 \\ & & & & & & P_1^1 \quad P_2^1 \quad P_3^1 \quad P_4^1 \\ & & & & & & P_0^0 \quad P_1^0 \quad P_2^0 \quad P_3^0 \quad P_4^0. \end{array}$$

Pour  $r = 1$ , on calcule :

$$\begin{aligned} P_1^1 &= \frac{u - u_1}{u_5 - u_1} P_1^0 + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_1} P_0^0 = P_1^0 \\ P_2^1 &= \frac{P_2^0}{2} + \frac{P_1^0}{2}, \\ P_3^1 &= \frac{P_3^0}{3} + \frac{2P_2^0}{3}, \\ P_4^1 &= \frac{P_4^0}{4} + \frac{3P_3^0}{4}, \end{aligned}$$

pour  $r = 2$ , il vient :

$$\begin{aligned} P_2^2 &= \frac{u - u_2}{u_5 - u_2} P_2^1 + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_2} P_1^1 = P_2^1 \\ P_3^2 &= \frac{u - u_3}{u_6 - u_3} P_3^1 + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_3} P_2^1 = \frac{P_3^1}{2} + \frac{P_2^1}{2} \\ P_4^2 &= \frac{u - u_4}{u_7 - u_4} P_4^1 + \frac{u_7 - u}{u_7 - u_4} P_4^1 = \frac{P_4^1}{3} + \frac{2P_3^1}{3} \end{aligned}$$

pour  $r = 3$ , on a :

$$\begin{aligned} P_3^3 &= \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} P_3^2 + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_3} P_2^2 = P_3^2 \\ P_4^3 &= \frac{u - u_4}{u_6 - u_4} P_4^2 + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_4} P_3^2 = \frac{P_4^2}{2} + \frac{P_3^2}{2} \end{aligned}$$

et, au final :

$$P_4^4 = \frac{u - u_4}{u_5 - u_4} P_4^3 + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_4} P_3^3 = P_4^3,$$

donc :

$$\begin{aligned} P = \gamma(1) &= P_4^4 = P_4^3 = \frac{P_4^2}{2} + \frac{P_3^2}{2} = \frac{P_4^1}{6} + \frac{P_3^1}{3} + \frac{P_3^1}{4} + \frac{P_2^1}{4} \\ &= \frac{P_4^0}{24} + \frac{P_3^0}{8} + \frac{7P_3^0}{36} + \frac{14P_2^0}{36} + \frac{P_2^0}{8} + \frac{P_1^0}{8} = \frac{9P_1 + 37P_2 + 23P_3 + 3P_4}{72}, \end{aligned}$$

et les points de contrôle sont  $P_0^0, P_1^1, P_2^2, P_3^3, P_4^4$ .

Pour trouver le morceau suivant, on évalue le point  $P_5^4$ , donc  $\gamma(2)$ , pour la nouvelle séquence nodale :

$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4\},$$

avec  $P_1^0 = \gamma(1)$ ,  $P_2^0 = P_4^2$ ,  $P_3^0 = P_4^1$  ci-dessus. Le diagramme de construction est :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & P_5^4 \\ & & & & & & \\ & & & & & & P_4^3 \quad P_5^3 \\ & & & & & & P_3^2 \quad P_4^2 \quad P_5^2 \\ & & & & & & P_2^1 \quad P_3^1 \quad P_4^1 \quad P_5^1 \\ & & & & & & P_1^0 \quad P_2^0 \quad P_3^0 \quad P_4^0 \quad P_5^0. \end{array}$$

Pour  $r = 1$ , on calcule,  $u = 2$  :

$$\begin{aligned} P_2^1 &= \frac{u - u_6}{u_{10} - u_6} P_2^0 + \frac{u_{10} - u}{u_{10} - u_6} P_1^0 = P_2^0 \\ P_3^1 &= \frac{u - u_7}{u_{11} - u_7} P_3^0 + \frac{u_{11} - u}{u_{11} - u_7} P_2^0 = \frac{P_3^0}{2} + \frac{P_2^0}{2} \\ P_4^1 &= \frac{u - u_8}{u_{12} - u_8} P_4^0 + \frac{u_{12} - u}{u_{12} - u_8} P_3^0 = \frac{P_4^0}{3} + \frac{2P_3^0}{3} \\ P_5^1 &= \frac{u - u_9}{u_{13} - u_9} P_5^0 + \frac{u_{13} - u}{u_{13} - u_9} P_4^0 = \frac{P_5^0}{3} + \frac{2P_4^0}{3}, \end{aligned}$$

puis, pour  $r = 2$  :

$$\begin{aligned} P_3^2 &= \frac{u - u_7}{u_{10} - u_7} P_3^1 + \frac{u_{10} - u}{u_{10} - u_7} P_2^1 = P_3^1 \\ P_4^2 &= \frac{u - u_8}{u_{11} - u_8} P_4^1 + \frac{u_{11} - u}{u_{11} - u_8} P_3^1 = \frac{P_4^1}{2} + \frac{P_3^1}{2} \\ P_5^2 &= \frac{u - u_9}{u_{12} - u_9} P_5^1 + \frac{u_{12} - u}{u_{12} - u_9} P_4^1 = \frac{P_5^1}{3} + \frac{2P_4^1}{3}, \end{aligned}$$

et, pour  $r = 3$  :

$$P_4^3 = \frac{u - u_8}{u_{10} - u_8} P_4^2 + \frac{u_{10} - u}{u_{10} - u_8} P_3^2 = P_4^2$$

$$P_5^3 = \frac{u - u_9}{u_{11} - u_9} P_5^2 + \frac{u_{11} - u}{u_{11} - u_9} P_4^2 = \frac{P_5^2}{2} + \frac{P_4^2}{2},$$

et, au final :

$$P_5^4 = \frac{u - u_9}{u_{10} - u_9} P_5^3 + \frac{u_{10} - u}{u_{10} - u_9} P_4^3 = P_5^3,$$

donc

$$P = \gamma(2) = P_5^4 = P_5^3 = \frac{P_5^2}{2} + \frac{P_4^2}{2} = \frac{P_5^1}{6} + \frac{P_4^1}{3} + \frac{P_4^1}{4} + \frac{P_3^1}{4}$$

$$= \frac{P_5^0}{18} + \frac{P_4^0}{9} + \frac{7P_4^0}{36} + \frac{7P_3^0}{18} + \frac{P_3^0}{8} + \frac{P_2^0}{8}$$

et, comme  $P_2^0 = \frac{P_4^1}{3} + \frac{2P_3^1}{3} = \frac{P_4^0}{12} + \frac{P_3^0}{4} + \frac{2P_3^0}{9} + \frac{4P_2^0}{9}$ , et  $P_3^0 = \frac{P_4^0}{4} + \frac{3P_3^0}{4}$ , on trouve :

$$\frac{1}{8} \left( \frac{P_4^0}{12} + \frac{P_3^0}{4} + \frac{2P_3^0}{9} + \frac{4P_2^0}{9} \right) + \frac{74}{144} \left( \frac{P_4^0}{4} + \frac{3P_3^0}{4} \right) + \frac{11}{36} P_4^0 + \frac{P_5^0}{18},$$

$$\frac{P_2}{18} + \left( \frac{1}{32} + \frac{1}{36} + \frac{37}{96} \right) P_3 + \left( \frac{1}{96} + \frac{37}{288} + \frac{11}{36} \right) P_4 + \frac{P_5}{18},$$

$$\frac{1}{18} (P_2 + 8P_3 + 8P_4 + P_5),$$

et les points de contrôle sont  $P_1^0, P_2^1, P_3^2, P_4^3, P_5^4$ . Notons la symétrie de cette expression.

On traite maintenant le morceau suivant et on calcule  $P_6^4$ , c'est-à-dire  $\gamma(3)$  correspondant à  $u = 3$ . La séquence devient :

$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4\},$$

avec  $P_2^0 = \gamma(2)$ ,  $P_3^0 = P_5^2$ ,  $P_4^0 = P_5^1$  ci-dessus. Le diagramme de construction est :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & P_6^4 \\ & & & & & & \\ & & & & & & P_5^3 \quad P_6^3 \\ & & & & & & \\ & & & & & & P_4^2 \quad P_5^2 \quad P_6^2 \\ & & & & & & \\ & & & & & & P_3^1 \quad P_4^1 \quad P_5^1 \quad P_6^1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & P_2^0 \quad P_3^0 \quad P_4^0 \quad P_5^0 \quad P_6^0. \end{array}$$

Pour  $r = 1$ , on calcule,  $u = 3$  :

$$P_3^1 = \frac{u - u_{11}}{u_{15} - u_{11}} P_3^0 + \frac{u_{15} - u}{u_{15} - u_{11}} P_2^0 = P_3^0$$

$$P_4^1 = \frac{u - u_{12}}{u_{16} - u_{12}} P_4^0 + \frac{u_{16} - u}{u_{16} - u_{12}} P_3^0 = \frac{P_4^0}{2} + \frac{P_3^0}{2}$$

$$P_5^1 = \frac{u - u_{13}}{u_{17} - u_{13}} P_5^0 + \frac{u_{17} - u}{u_{17} - u_{13}} P_4^0 = \frac{P_5^0}{2} + \frac{P_4^0}{2}$$

$$P_6^1 = \frac{u - u_{14}}{u_{18} - u_{14}} P_6^0 + \frac{u_{18} - u}{u_{18} - u_{14}} P_5^0 = \frac{P_6^0}{2} + \frac{P_5^0}{2}.$$

Pour  $r = 2$ , on calcule,  $u = 3$  :

$$P_4^2 = \frac{u - u_{12}}{u_{15} - u_{12}} P_4^1 + \frac{u_{15} - u}{u_{15} - u_{12}} P_3^1 = P_4^1$$

$$P_5^2 = \frac{u - u_{13}}{u_{16} - u_{13}} P_5^1 + \frac{u_{16} - u}{u_{16} - u_{13}} P_4^1 = \frac{P_5^1}{2} + \frac{P_4^1}{2}$$



$$P_6^2 = \frac{u - u_{14}}{u_{17} - u_{14}} P_6^1 + \frac{u_{17} - u}{u_{17} - u_{14}} P_5^1 = \frac{P_6^1}{2} + \frac{P_5^1}{2}.$$

Pour  $r = 3$ , on calcule,  $u = 3$  :

$$P_5^3 = \frac{u - u_{13}}{u_{15} - u_{13}} P_5^2 + \frac{u_{15} - u}{u_{15} - u_{13}} P_4^2 = P_5^2$$

$$P_6^3 = \frac{u - u_{14}}{u_{16} - u_{14}} P_6^2 + \frac{u_{16} - u}{u_{16} - u_{14}} P_5^2 = \frac{P_6^2}{2} + \frac{P_5^2}{2}.$$

et, enfin :

$$P_6^4 = \frac{u - u_{14}}{u_{15} - u_{14}} P_6^3 + \frac{u_{15} - u}{u_{15} - u_{14}} P_5^3 = P_6^3.$$

Soit :

$$\begin{aligned} P = \gamma(3) &= P_6^4 = P_6^3 = \frac{P_6^2}{2} + \frac{P_5^2}{2} = \frac{P_6^1}{4} + \frac{P_5^1}{4} + \frac{P_5^1}{4} + \frac{P_4^1}{4} \\ &= \frac{P_6^1}{4} + \frac{P_5^1}{2} + \frac{P_4^1}{4} = \frac{P_6^0}{8} + \frac{P_5^0}{8} + \frac{P_5^0}{4} + \frac{P_4^0}{4} + \frac{P_4^0}{8} + \frac{P_3^0}{8} \\ &= \frac{P_3^0}{8} + \frac{3P_4^0}{8} + \frac{3P_5^0}{8} + \frac{P_6^0}{8} \end{aligned}$$

et, on remplace alors  $P_3^0$  par  $P_5^2 = \frac{P_5^1}{3} + \frac{2P_4^1}{3} = \frac{P_5^0}{9} + \frac{2P_4^0}{9} + \frac{2P_4^0}{9} + \frac{4P_3^0}{9}$  et  $P_4^0$  par  $P_5^1 = \frac{P_5^0}{3} + \frac{2P_4^0}{3}$ . Il vient :

$$P = \frac{P_5^0}{72} + \frac{P_4^0}{36} + \frac{P_4^0}{36} + \frac{4P_3^0}{72} + \frac{P_5^0}{8} + \frac{P_4^0}{4} + \frac{3P_5^0}{8} + \frac{P_6^0}{8}$$

mais  $P_3^0$  vient du précédent précédent, soit  $P_3^0 = P_4^1 = \frac{P_4^0 + 3P_3^0}{4}$ , soit

$$P = \frac{3P_3 + 23P_4 + 37P_5 + 9P_6}{72},$$

qui est bien le symétrique de  $\gamma(1)$ , tandis que les points de contrôle sont  $P_2^0, P_3^1, P_4^2, P_5^3, P_6^4$ .

Pour finir, on cherche le dernier morceau du découpage pour vérifier que l'on retrouve bien le symétrique du premier morceau. Ceci revient à faire  $u = 4$  et prendre la séquence nodale :

$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4\},$$

avec  $P_3^0 = \gamma(3)$ ,  $P_4^0 = P_6^2$ ,  $P_5^0 = P_6^1$  ci-dessus. Le diagramme de construction est :

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & P_7^4 \\ & & & & & \downarrow \\ & & & & & P_6^3 \quad P_7^3 \\ & & & & & \downarrow \quad \downarrow \\ & & & & & P_5^2 \quad P_6^2 \quad P_7^2 \\ & & & & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & & & & & P_4^1 \quad P_5^1 \quad P_6^1 \quad P_7^1 \\ & & & & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & & & & & P_3^0 \quad P_4^0 \quad P_5^0 \quad P_6^0 \quad P_7^0. \end{array}$$

Pour  $r = 1$ , on calcule,  $u = 4$  :

$$P_4^1 = \frac{u - u_{16}}{u_{20} - u_{16}} P_4^0 + \frac{u_{20} - u}{u_{20} - u_{16}} P_3^0 = P_4^0$$

$$P_5^1 = \frac{u - u_{17}}{u_{21} - u_{17}} P_5^0 + \frac{u_{21} - u}{u_{21} - u_{17}} P_4^0 = P_5^0$$

$$P_6^1 = \frac{u - u_{18}}{u_{22} - u_{18}} P_6^0 + \frac{u_{22} - u}{u_{22} - u_{18}} P_5^0 = P_6^0.$$

$$P_7^1 = \frac{u - u_{19}}{u_{23} - u_{19}} P_7^0 + \frac{u_{23} - u}{u_{23} - u_{19}} P_6^0 = P_7^0.$$

Pour  $r = 2$ , on calcule,  $u = 4$  :

$$\begin{aligned} P_5^2 &= \frac{u - u_{17}}{u_{20} - u_{17}} P_5^1 + \frac{u_{20} - u}{u_{20} - u_{17}} P_4^1 = P_5^1 \\ P_6^2 &= \frac{u - u_{18}}{u_{21} - u_{18}} P_6^1 + \frac{u_{21} - u}{u_{21} - u_{18}} P_5^1 = P_6^1 \\ P_7^2 &= \frac{u - u_{19}}{u_{22} - u_{19}} P_7^1 + \frac{u_{22} - u}{u_{22} - u_{19}} P_6^1 = P_7^1 \end{aligned}$$

Pour  $r = 3$ , on calcule,  $u = 4$  :

$$P_6^3 = P_6^2 \quad \text{puis} \quad P_7^3 = P_7^2 \quad \text{et, enfin} \quad P_7^4 = P_7^3.$$

Soit :

$$P = \gamma(4) = P_7^4 = P_7^3 = P_7^2 = P_7^1 = P_7^0 = P_7$$

sans surprise, en arrive au bout de la B-spline et les points de contrôle sont  $P_3^0, P_4^1, P_5^2, P_6^3, P_7^4$ .

Pour finir vraiment, on vérifie que ces points de contrôle sont bien les "symétriques" de ceux trouvés pour le premier morceau de la courbe.

Pour le premier morceau, on avait, successivement :

$$P_0, P_1, \frac{P_1 + P_2}{2}, \frac{P_2^1 + P_3^1}{2} = \frac{3P_1 + 7P_2 + 2P_3}{12}, \gamma(1)$$

donc on cherche ici une expression de la forme :

$$P_7, P_6, \frac{P_6 + P_5}{2}, \frac{3P_6 + 7P_5 + 2P_4}{12}, \gamma(3),$$

que l'on doit trouver être égal, terme à terme, à :

$$P_7^4, P_6^3, P_5^2, P_4^1, P_3^0.$$

Clairement, on a  $P_7^4 = P_7, P_6^3 = P_6^2 = P_6^1 = P_6^0 = P_6$  et  $P_3^0 = \gamma(3)$ . Il ne reste donc que deux vérifications à effectuer. On a :

$$P_5^2 = P_5^1 = P_5^0 = P_6^1 \quad \text{du précédent} \quad = \frac{P_6 + P_5}{2} \quad \text{donc la valeur cherchée.}$$

Pour la dernière vérification, on a :

$$P_4^1 = P_4^0 = P_6^2 \quad \text{du précédent} \quad = \frac{P_6^1}{2} + \frac{P_5^1}{2} = \frac{P_5^0}{4} + \frac{P_4^0}{4} + \frac{P_6^0}{4} + \frac{P_5^0}{4},$$

mais  $P_4^0 = P_5^1$  du précédent précédent soit  $\frac{P_5^0 + 2P_4^0}{3}$ , donc :

$$P = \frac{P_5^0 + 2P_4^0}{12} + \frac{P_5^0}{2} + \frac{P_6^0}{4} = \frac{3P_6 + 7P_5 + 2P_4}{12} \quad \text{soit la valeur cherchée.}$$

Schématiquement, les points de coupe et de contrôle des sous-courbes s'organisent selon le diagramme suivant, de  $P_0$  à  $P_7$  :

P0	-	P1	-	P2	-	P3	-	P4		P5		P6		P7
		1	1/2		2/3		3/4		.		.			
			1	1/2		2/3		.		.				
				1	1/2	.	.	.		.				
					1	.	.	.		.				
				P	-	.	-	.	-	.	-	.		
					1	1/2	.	2/3	.	2/3	.			
						1		1/2	2/3	.	.			
							1	1/2	.	.	.			

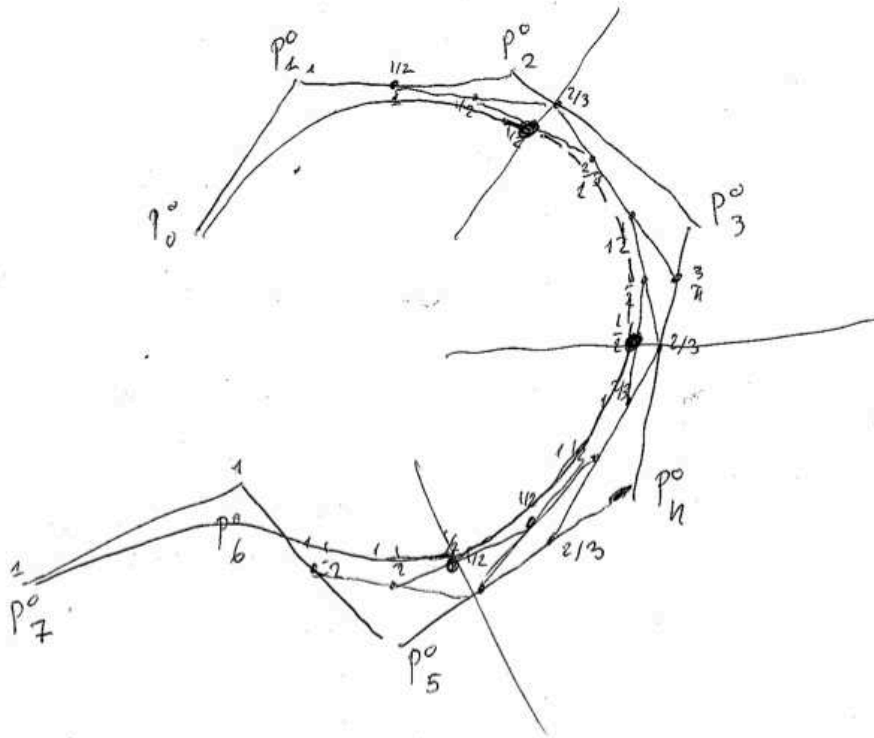


FIG. 7 – La courbe B-spline initiale et les quatre Bézier locaux pour un jeu de points de contrôle (les  $P_i^0$ ) et une séquence uniforme, à comparer avec la figure précédente.

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
 P & - & . & - & . & - & . & - \\
 & & 1 & 1/2 & 1/2 & . & 1/2 & . \\
 & & & 1 & 1/2 & . & 1/2 & . \\
 & & & & 1 & 1/2 & & . \\
 & & & & & 1 & . & . \\
 & & & & & & P & - . - . - . - \\
 & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & & P = P7
 \end{array}$$

**Le cas  $d$  quelconque avec  $n$  points de contrôle et une séquence uniforme.** La récurrence fait venir :

- des 1 et des  $\frac{1}{2}$  pour  $d = 2$ ,
- des 1, des  $\frac{1}{2}$ , des  $\frac{1}{3}$  et des  $\frac{2}{3}$  pour  $d = 3$ ,
- des 1, des  $\frac{1}{2}$ , des  $\frac{1}{3}$ , des  $\frac{2}{3}$ , des  $\frac{1}{4}$  et des  $\frac{3}{4}$  pour  $d = 4$ ,
- etc.

La construction (le graphe), pour  $d$  quelconque fait donc venir des points correspondants à des barycentres de barycentres dont les poids sont, *a priori*, les valeurs suivantes :

- des 1, des  $\frac{1}{2}$ , des  $\frac{1}{3}$ , des  $\frac{2}{3}$ , des  $\frac{1}{4}$ , des  $\frac{3}{4}$ , ..., des  $\frac{1}{d}$  et des  $\frac{d-1}{d}$  pour le rang  $r = 1$ ,
- des 1, des  $\frac{1}{2}$ , des  $\frac{1}{3}$ , des  $\frac{2}{3}$ , des  $\frac{1}{4}$ , des  $\frac{3}{4}$ , ..., des  $\frac{1}{d-1}$  et des  $\frac{d-2}{d-1}$  pour le rang  $r = 2$ ,
- etc,
- soit de manière générique : des 1, des  $\frac{1}{2}$ , des  $\frac{1}{3}$ , des  $\frac{2}{3}$ , des  $\frac{1}{4}$ , des  $\frac{3}{4}$ , ..., des  $\frac{1}{d-r+1}$  et des  $\frac{d-r}{d-r+1}$  pour le rang  $r$ .

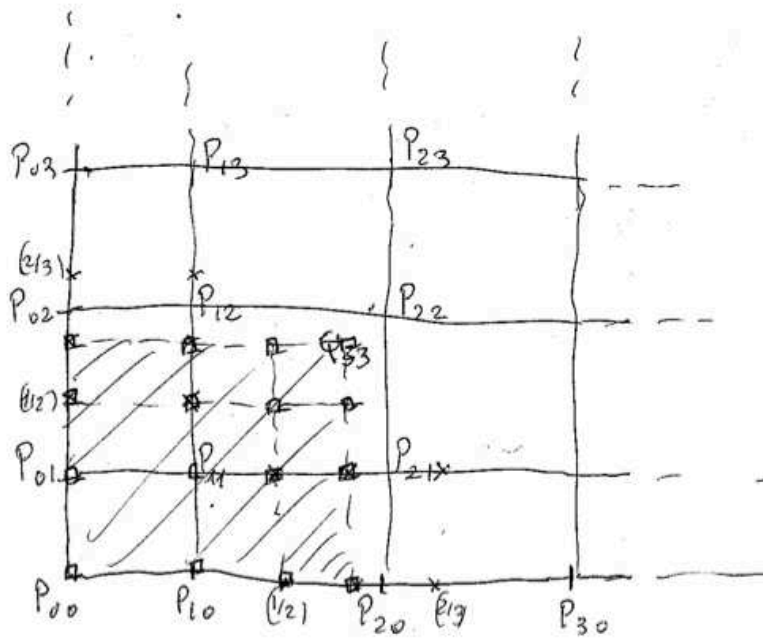


FIG. 8 – Le carreau B-spline initial (en partie) et le sous-carreau de Bézier local  $0 \times 0$  avec ses points de contrôle pour l'exemple décrit.

Les points de coupe et les nouveaux points de contrôle sont obtenus par la même formule, simplement en glissant les indices et en introduisant, au vol, les nouveaux points de contrôle précédemment construits. Ce processus s'applique pour trouver les "premiers" morceaux, du tout premier à l'antépénultième. Les séquences de poids ont, au départ, la forme générale, puis, au fur et à mesure s'adaptent (par exemple, un  $\frac{3}{4}$  va devenir un  $\frac{2}{3}$ , ou un  $\frac{2}{3}$  va devenir un  $\frac{1}{2}$ ). Ce dernier étant atteint, la découpe s'achève (les deux derniers morceaux) par des séquences de poids, à tous les rangs, de la forme  $1, \frac{1}{2}, \dots$ . Si le nombre de morceaux est réduit à deux, quel que soit le degré, ce sont des séquences de cette forme que l'on doit considérer.

**Le cas d'une courbe NURBS.** Sur le principe, il suffit de passer dans la dimension supérieure pour retrouver le cas d'une courbe B-spline puis de reprojeter.

**Le cas des carreaux B-spline et NURBS.** Sur le principe, il suffit de faire ce qui a été fait dans les deux directions (si on reste en dimension 2) pour découper le carreau complet en sous-carreaux. Ces sous-carreaux sont des Bézier classiques dont on sait contrôler le polynôme jacobien. Pour les NURBS, le polynôme jacobien s'exprime comme un polynôme B-spline dans la dimension supérieure et son analyse se fait comme décrit pour  $d = 2$ .

Les calculs explicites donnés ci-dessus ne sont pas si fastidieux que cela puisque, à l'éditeur de texte, chaque pas de calcul se déduit de la simple recopie d'un autre pas en faisant glisser les indices des nœuds et des points. Il est néanmoins clair que l'écriture d'un code est encore plus simple, il suffit d'appliquer les formules de récurrence sans état d'âme, les poids, par exemple, arrivent automatiquement.

À titre d'illustration on va donner le sous-carreau  $0 \times 0$  d'un carreau B-spline de degré  $d = 3$  avec des séquences uniformes et  $n = 6$  dans les deux directions. Ce sous-carreau est un Bézier de degré 3 dans chaque direction :

$$\sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} B_i^3(u) B_j^3(v) Q_{ij},$$

$$\begin{aligned}
& \text{avec } Q_{i0} = R_{i0}, \quad Q_{i1} = R_{i1} \\
& Q_{i2} = \frac{R_{i1} + R_{i2}}{2}, \quad Q_{i3} = \frac{3R_{i1} + 7R_{i2} + 2R_{i3}}{12} \\
& \text{et } R_{0j} = P_{0j}, \quad R_{1j} = P_{1j} \\
& R_{2j} = \frac{P_{1j} + P_{2j}}{2}, \quad R_{3j} = \frac{3P_{1j} + 7P_{2j} + 2P_{3j}}{12},
\end{aligned}$$

ce qui donne la Figure 8 et le tableau associé.

$$\begin{array}{cccc}
\frac{3P_{01}+7P_{02}+2P_{03}}{12} & \frac{3P_{11}+7P_{12}+2P_{13}}{12} & \frac{3P_{11}+3P_{21}+7P_{12}+7P_{22}+2P_{13}+2P_{23}}{24} & \frac{9P_{11}+21P_{21}+6P_{31}+21P_{12}+49P_{22}+14P_{32}+6P_{13}+14P_{23}+4P_{33}}{144} \\
\frac{P_{01}+P_{02}}{2} & \frac{P_{11}+P_{12}}{2} & \frac{P_{11}+P_{21}+P_{12}+P_{22}}{4} & \frac{3P_{11}+7P_{21}+2P_{31}+3P_{12}+7P_{22}+2P_{32}}{24} \\
P_{01} & P_{11} & \frac{P_{11}+P_{21}}{2} & \frac{3P_{11}+7P_{21}+2P_{31}}{12} \\
P_{00} & P_{10} & \frac{P_{10}+P_{20}}{2} & \frac{3P_{10}+7P_{20}+2P_{30}}{12},
\end{array}$$

tableau qui correspond à l'arrangement classique suivant :

$$\begin{array}{cccc}
Q_{03} & Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \\
Q_{02} & Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\
Q_{01} & Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\
Q_{00} & Q_{10} & Q_{20} & Q_{30} .
\end{array}$$





**RESEARCH CENTRE  
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt  
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher  
Inria  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex  
[inria.fr](http://inria.fr)

ISSN 0249-6399