



HAL
open science

Transformation de Mellin: aspects numériques et dérivation fractionnaire. Application aux lois des variables aléatoires positives.

Roland Badeau

► **To cite this version:**

Roland Badeau. Transformation de Mellin: aspects numériques et dérivation fractionnaire. Application aux lois des variables aléatoires positives.. [Rapport de recherche] 1999. hal-00945248

HAL Id: hal-00945248

<https://inria.hal.science/hal-00945248>

Submitted on 24 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Transformation de Mellin:
Aspects numériques et dérivation fractionnaire
Application aux lois des variables aléatoires positives

Roland Badeau

Stage effectué du 12 avril 1999 au 6 juillet 1999

Table des matières

I	Variables aléatoires positives	7
1	Fonction caractéristique et cumulants de seconde espèce	9
1.1	Transformation de Mellin	9
1.2	Fonction caractéristique de seconde espèce d'une loi de probabilité positive	11
1.3	Propriétés de la fonction caractéristique	11
1.3.1	Critère d'indépendance des variables aléatoires positives	11
1.3.2	Produit de variables aléatoires positives indépendantes	12
1.3.3	Relation entre les fonctions caractéristiques de première et seconde espèce	12
1.3.4	Caractérisation des lois des variables aléatoires positives	13
1.3.5	Holomorphie de la fonction caractéristique de seconde espèce	13
1.3.6	Existence d'une densité de probabilité	13
1.4	Cumulants de seconde espèce d'une loi de probabilité positive	14
1.5	Moyenne géométrique de variables aléatoires positives indépendantes	15
1.5.1	Définition	15
1.5.2	Fonction caractéristique	16
1.5.3	Cumulants	16
2	Exemples de lois de probabilité sur R_+^*	17
2.1	Distribution lognormale	17
2.1.1	Définition	17
2.1.2	Fonction caractéristique	18
2.1.3	Cumulants	19
2.1.4	Estimation des paramètres ν et σ^2 par la méthode des cumulants	19
2.1.5	Estimation des paramètres ν et σ^2 par le principe du maximum de vraisemblance	19
2.1.6	Etude de l'estimateur $\tilde{\nu}$	20
2.2	Distribution exponentielle	21
2.2.1	Définition	21
2.2.2	Fonction caractéristique	22
2.2.3	Cumulants	22
2.2.4	Estimation du paramètre μ_I	22
2.3	Distribution Gamma	22
2.3.1	Définition	22
2.3.2	Fonction caractéristique	23
2.3.3	Cumulants	23
2.3.4	Estimation des paramètres μ_I et L par la méthode des cumulants	24

2.3.5	Estimation des paramètres μ_I et L par le principe du maximum de vraisemblance	24
2.4	Distribution Gamma multiplicative	25
2.4.1	Définition	25
2.4.2	Fonction caractéristique	26
2.4.3	Cumulants	26
2.4.4	Estimation des paramètres μ_I et L	27
2.4.5	Etude de l'estimateur $\widetilde{\mu}_I$	27
2.4.6	Application à la réduction du chatoisement	28
3	Convergence des produits de variables aléatoires positives indépendantes	30
3.1	Convergence en loi	30
3.1.1	Rappel: définition	30
3.1.2	Equivalence entre la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ et la convergence en loi de la suite $(\ln X_n)_{n \geq 1}$	30
3.1.3	Critère de convergence en loi	31
3.2	Théorème de la limite centrale	31
3.2.1	Théorème	31
3.2.2	Démonstration	32
3.3	Théorème de la limite locale	32
3.3.1	Théorème	32
3.3.2	Démonstration	32
II	Transformation de Mellin numérique	34
4	Echantillonnage et transformation numérique	36
4.1	Echantillonnage d'une fonction définie sur R_+^*	37
4.1.1	Multiplication d'une fonction par un peigne de Dirac géométrique	37
4.1.2	Théorème de reconstruction d'une fonction à partir de ses échantillons	38
4.2	Echantillonnage de la transformée de Mellin	40
4.2.1	Multiplication de la transformée par un peigne de Dirac sur l'axe imaginaire	41
4.2.2	Théorème de reconstruction de la transformée à partir de ses échantillons	42
4.3	Transformation de Mellin numérique	42
4.3.1	Définition	42
4.3.2	Algorithmes de calcul rapide	45
5	Approximation de la transformée de Mellin analogique par la transformée de Mellin numérique	48
5.1	Approximation de la transformation directe	48
5.1.1	Méthode	48
5.1.2	Théorème de convergence	49
5.1.3	Exemple	50
5.2	Approximation de la transformation inverse	55
5.2.1	Méthode	55
5.2.2	Théorème de convergence	55

5.2.3	Exemple	57
5.3	Problèmes numériques	58
5.3.1	Restrictions dues aux hypothèses de convergence	58
5.3.2	Stabilité numérique	58
5.3.3	Phénomène de Gibbs	59
5.3.4	Recouvrements	60
6	Estimation de la densité et de la fonction caractéristique d'une loi de probabilité	61
6.1	Estimation de la densité de probabilité et de la fonction caractéristique par des méthodes classiques	61
6.1.1	Estimation de la densité de probabilité	61
6.1.2	Estimation de la fonction caractéristique	63
6.2	Estimation de la densité de probabilité et de la fonction caractéristique utilisant la transformation de Mellin numérique	66
6.2.1	Estimation de la densité de probabilité	66
6.2.2	Estimation de la fonction caractéristique	68
7	Changements de résolution	72
7.1	Changement de résolution au niveau de l'histogramme	72
7.1.1	Lemme	72
7.1.2	Démonstration	73
7.1.3	Application: interpolation de l'histogramme	74
7.2	Changement de résolution au niveau de l'échantillonnage de la fonction caractéristique	75
7.2.1	Lemme	75
7.2.2	Démonstration	75
7.2.3	Application: interpolation des échantillons de la fonction caractéristique	76
III	Dérivation	77
8	Fonction Λ	79
8.1	Définition	80
8.1.1	Théorème	80
8.1.2	Démonstration	80
8.2	Propriétés	80
8.2.1	Valeur en $s = 1$	81
8.2.2	Formule de récurrence	81
8.2.3	Valeurs sur N^*	81
8.2.4	Résidus	82
8.3	Variations	82
8.3.1	Décroissance sur l'axe imaginaire	84
8.3.2	Equivalent en $+\infty$	84

9	Dérivation de la densité de probabilité	86
9.1	Dérivée analogique	86
9.1.1	Dérivée entière	86
9.1.2	Dérivée fractionnaire et complexe	86
9.2	Dérivée numérique	88
9.2.1	Dérivée entière	88
9.2.2	Dérivée fractionnaire	89
9.2.3	Dérivée complexe	91
10	Dérivation de la fonction caractéristique	93
10.1	Dérivée analogique	93
10.1.1	Dérivée entière	93
10.1.2	Dérivée fractionnaire et complexe	93
10.1.3	Estimation de la fonction caractéristique et de ses dérivées	94
10.2	Dérivée numérique	95
10.2.1	Dérivée entière	95
10.2.2	Dérivée fractionnaire et complexe	96

Introduction

Le chatoiement qui caractérise les images de Radar à Synthèse d'Ouverture (RSO) est un bruit multiplicatif. La transformation de Mellin, moins populaire que la transformation de Fourier, est cependant mieux adaptée au traitement de ce type d'images. Par ailleurs, la dérivation fractionnaire, qui a déjà montré un fort potentiel en automatique, semble être un outil prometteur pour résoudre certains problèmes rencontrés en imagerie RSO. Notre objectif était d'une part de définir une transformation de Mellin numérique qui puisse être implémentée sur ordinateur, et d'autre part d'établir un rapprochement entre cette transformation et la dérivation fractionnaire.

Nous commencerons par introduire quelques résultats sur les variables aléatoires positives. Nous établirons ensuite des théorèmes d'échantillonnage axés sur la transformation de Mellin, puis nous définirons une transformation numérique, qui pourra être appliquée aux lois de probabilité. Enfin, nous présenterons un parallèle entre cette transformation et la dérivation fractionnaire.

Notations

- $M[f]$: Transformée de Mellin de la fonction f

$$M[f](s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x) dx$$

- $M^{-1}[\Phi]$: Transformée de Mellin inverse de la fonction Φ

$$M^{-1}[\Phi](s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \Phi(s) ds$$

- p_X : Densité de probabilité de la variable aléatoire X

$$P(X \in]a, b]) = \int_a^b p(x) dx$$

- $E[f(X)]$: Moment généralisé de la variable aléatoire X

$$E[f(X)] = \int_0^{+\infty} f(x) p(x) dx$$

- E_X : Espérance logarithmique de la variable aléatoire X

$$E_X = \exp(E[\ln X])$$

- $Var[X]$: Variance de la variable aléatoire X

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

- Φ_X : Fonction caractéristique de seconde espèce de la variable aléatoire X

$$\Phi_X(s) = M[p_X](s)$$

- $\gamma_n[X]$: Cumulant de seconde espèce d'ordre n de la variable aléatoire X

$$\gamma_n[X] = \frac{d^n \ln(\Phi_X)(s)}{ds^n} (1)$$

- Γ : Fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \exp(-x) dx$$

- Ψ : Fonction Psi

$$\Psi(s) = \frac{d}{ds} \ln \Gamma(s)$$

Première partie

Variables aléatoires positives

En théorie des probabilités, on utilise souvent la fonction caractéristique pour décrire la loi d'une variable aléatoire réelle, à valeurs positives ou négatives. Il s'agit de la transformée de Fourier de la densité de probabilité. Or le chatolement propre aux images RSO est un bruit multiplicatif à valeurs positives uniquement. Dans cette partie, nous allons introduire un objet mathématique plus adapté à l'étude des variables aléatoires positives, que nous appellerons fonction caractéristique de seconde espèce. Il s'agit de la transformée de Mellin de la densité de probabilité, à partir de laquelle nous pourrions définir les cumulants de seconde espèce. Nous commencerons donc par une brève présentation de cette transformation, que nous appliquerons ensuite à quelques lois de probabilité sur R_+^* .

Chapitre 1

Fonction caractéristique et cumulants de seconde espèce

1.1 Transformation de Mellin

Soient f et g deux fonctions définies sur R_+^* . Le produit de convolution de Mellin de f et g est défini de la façon suivante:

$$f \widehat{*} g(x) = \int_0^{+\infty} f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

Fixons f et considérons maintenant l'application linéaire qui à toute fonction g définie sur R_+^* associe $f \widehat{*} g$.

Ses vecteurs propres sont les fonctions $\chi_s(x) = x^{-s}$. En effet,

$$\begin{aligned} f \widehat{*} \chi_s(x) &= \int_0^{+\infty} f(t) \left(\frac{x}{t}\right)^{-s} \frac{dt}{t} \\ &= \chi_s(x) \int_0^{+\infty} t^{s-1} f(t) dt \end{aligned}$$

La valeur propre associée au vecteur propre χ_s sera appelée "transformée de Mellin" de la fonction f [Colombo].

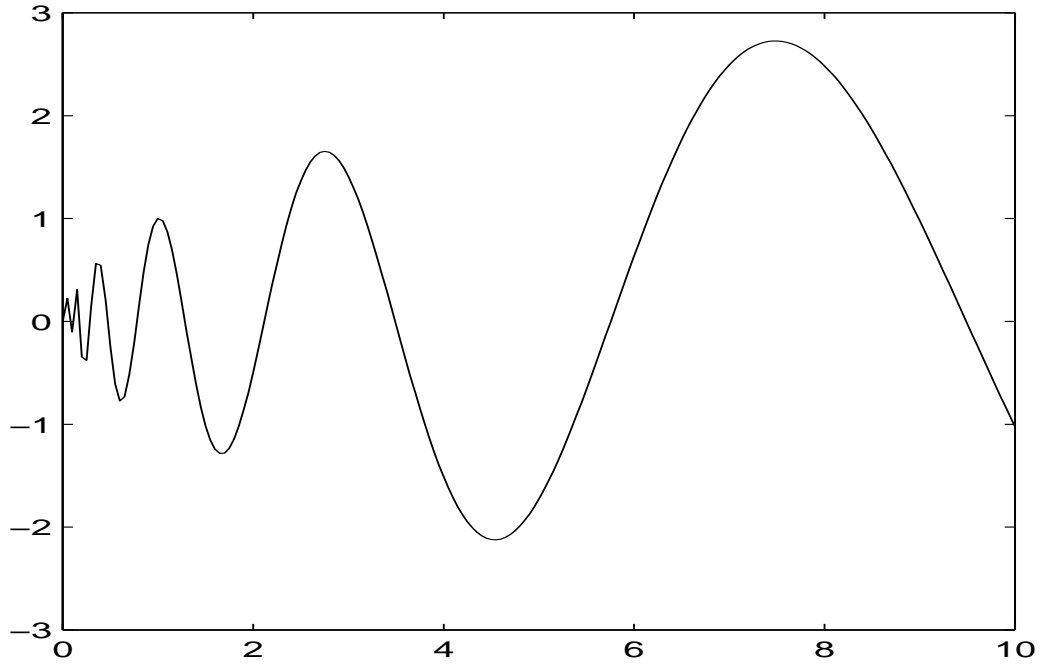
$$M[f](s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x) dx$$

On montre que si f est localement intégrable, cette transformée est définie sur une bande verticale du plan complexe $\{s \in C / Re(s) \in [c_1, c_2]\}$. On peut l'inverser en l'intégrant sur une droite verticale appartenant à cette bande:

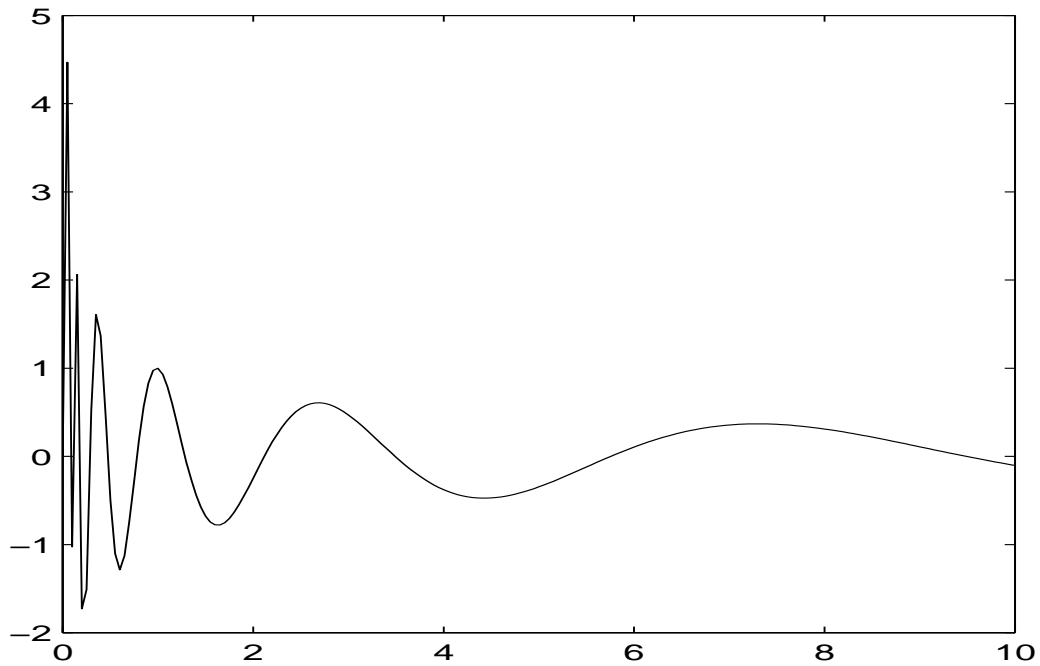
$$M^{-1}[\Phi](s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \Phi(s) ds$$

où $c \in [c_1, c_2]$.

Cette formule d'inversion nous montre que calculer la transformée de Mellin d'une fonction f sur l'axe $c + iR$ revient à décomposer cette fonction sur la famille $\{\chi_s, s \in c + iR\}$.



(a) Fonction $\kappa(s)$ avec $\text{Re}(s)$ negatif



(b) Fonction $\kappa(s)$ avec $\text{Re}(s)$ positif

Enfin, la transformation de Mellin se comporte vis-à-vis de la convolution de Mellin comme

la transformation de Fourier vis-à-vis de la convolution classique:

$$M[f \widehat{*} g] = M[f] \cdot M[g]$$

1.2 Fonction caractéristique de seconde espèce d'une loi de probabilité positive

On définit classiquement la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X comme la transformée de Fourier de sa loi de probabilité [Metivier]:

$$\varphi_X(\xi) = E[\exp(-i\xi X)]$$

Nous l'appellerons dans la suite "fonction caractéristique de première espèce" afin de la distinguer de la fonction caractéristique de deuxième espèce que nous allons maintenant définir.

Soit X une variable aléatoire réelle positive. Nous appellerons "fonction caractéristique de seconde espèce", ou plus simplement "fonction caractéristique" de la variable X la fonction qui à un nombre complexe s associe le moment d'ordre $s - 1$

$$\Phi_X(s) = E[X^{s-1}]$$

Si $s \in 1 + iR$, $|x^{s-1}| = 1 \forall x \in R_+^*$, donc $|\Phi_X(s)| \leq 1$. En particulier, en $s = 1$, $\Phi_X(1) = 1$. Si X possède une densité p_X , cette fonction est égale à la transformée de Mellin de p_X :

$$\Phi_X(s) = M[p_X](s)$$

Enfin, si X est une variable (X_1, \dots, X_n) à valeurs dans $(R_+^*)^n$, nous appellerons fonction caractéristique de seconde espèce de X l'application

$$(s_1, \dots, s_n) \mapsto E[X_1^{s_1-1} \dots X_n^{s_n-1}]$$

1.3 Propriétés de la fonction caractéristique

1.3.1 Critère d'indépendance des variables aléatoires positives

Proposition

Les variables aléatoires positives X_1, \dots, X_n sont indépendantes si et seulement si la fonction caractéristique du vecteur (X_1, \dots, X_n) coïncide avec le produit tensoriel des fonctions caractéristiques des n variables X_k :

$$\Phi_{(X_1, \dots, X_n)}(s_1, \dots, s_n) = \prod_{k=1}^n \Phi_{X_k}(s_k)$$

Démonstration

Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\Phi_{(X_1, \dots, X_n)}(s_1, \dots, s_n) &= E \left[X_1^{s_1-1} \dots X_n^{s_n-1} \right] \\ &= E \left[X_1^{s_1-1} \right] \dots E \left[X_n^{s_n-1} \right] \\ &= \Phi_{X_1}(s_1) \dots \Phi_{X_n}(s_n)\end{aligned}$$

L'injectivité de la transformation de Mellin assure que la condition est suffisante.

1.3.2 Produit de variables aléatoires positives indépendantes

Proposition

La fonction caractéristique du produit $P_n = X_1 \dots X_n$ de n variables aléatoires indépendantes est le produit des fonctions caractéristiques des X_k :

$$\Phi_{P_n}(s) = \prod_{k=1}^n \Phi_{X_k}(s)$$

En particulier, si les X_k sont équidistribuées, c'est à dire suivent la même loi de fonction caractéristique Φ , on a $\Phi_{P_n}(s) = (\Phi(s))^n$.

Démonstration

$$\begin{aligned}\Phi_{P_n}(s) &= E \left[(X_1 \dots X_n)^{s-1} \right] \\ &= E \left[X_1^{s-1} \right] \dots E \left[X_n^{s-1} \right] \\ &= \Phi_{X_1}(s) \dots \Phi_{X_n}(s)\end{aligned}$$

1.3.3 Relation entre les fonctions caractéristiques de première et seconde espèce

Proposition

Soit Φ la fonction caractéristique de seconde espèce d'une variable aléatoire positive X , et φ la fonction caractéristique de première espèce de $\ln X$. Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\xi) = \Phi(1 - i\xi)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\Phi(1 - i\xi) &= E \left[X^{(1-i\xi)-1} \right] \\ &= E \left[X^{-i\xi} \right] \\ &= E \left[\exp(-i\xi \ln X) \right] \\ &= \varphi(\xi)\end{aligned}$$

1.3.4 Caractérisation des lois des variables aléatoires positives

Proposition

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire positive X détermine univoquement sa loi de probabilité.

Démonstration

On utilise le résultat de la section 1.3.3: la fonction Φ_X est égale sur l'axe $1 + iR$ à $\varphi_{\ln X}$. Or d'après un résultat classique, $\varphi_{\ln X}$ détermine univoquement la loi de probabilité de $\ln X$. Donc Φ_X détermine univoquement celle de X .

1.3.5 Holomorphie de la fonction caractéristique de seconde espèce

Proposition

On suppose que tous les moments $M_n = E[(\ln X)^n]$ de la variable aléatoire $\ln X$ existent et que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{|M_n|}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Alors:

1. Pour tout $s \in D(1, \varepsilon)$

$$\Phi_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} M_n \frac{(s-1)^n}{n!}$$

2. La fonction $\Phi_X(s)$ est analytique dans la bande du plan complexe

$$\{s \in C / Re(s) \in]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\}$$

Démonstration

On utilise le résultat de la section 1.3.3. Cette proposition est alors la transposition directe d'un théorème portant sur les fonctions caractéristiques de première espèce [Metivier].

1.3.6 Existence d'une densité de probabilité

Proposition

Soit X une variable aléatoire positive. Si Φ_X est intégrable sur $[1 - i\infty, 1 + i\infty]$, X possède une densité de probabilité continue sur R_+^*

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{-s} \Phi_X(s) ds$$

Démonstration

On utilise encore une fois le résultat de la section 1.3.3: si Φ_X est intégrable sur $[1 - i\infty, 1 + i\infty]$, $\varphi_{\ln X}$ est intégrable sur \mathbb{R} . D'après un résultat classique, $\ln X$ possède alors une densité continue $p_{\ln X}$, donnée par

$$p_{\ln X}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(+it\xi) \varphi_{\ln X}(\xi) d\xi$$

Par conséquent, X possède une densité continue sur \mathbb{R}_+^*

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{x} p_{\ln X}(\ln x) \\ &= \frac{1}{2\pi x} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(+i\xi \ln x) \varphi_{\ln X}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi x} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{i\xi} \Phi_X(1 - i\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{-s} \Phi_X(s) ds \end{aligned}$$

1.4 Cumulants de seconde espèce d'une loi de probabilité positive

On définit classiquement les cumulants $\{\gamma_n, n \geq 1\}$ d'une loi de probabilité de fonction caractéristique de première espèce φ de la façon suivante [Kendall]:

$$c_n = i^n \frac{d^n \ln \varphi(\xi)}{d\xi^n} (0)$$

Nous les appellerons dans la suite “cumulants de première espèce” afin de les distinguer des cumulants de deuxième espèce que nous allons maintenant définir.

Nous supposons ici que les hypothèses qui impliquent l'analyticité de la fonction caractéristique de seconde espèce sont vérifiées. Comme cette dernière prend la valeur 1 en $s = 1$, la fonction $s \mapsto \ln \Phi_X(s)$ est développable en série entière au voisinage de $s = 1$. Nous pouvons donc écrire

$$\ln \Phi_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \frac{(s-1)^n}{n!}$$

On appellera “cumulants de seconde espèce” ou plus simplement “cumulants” associés à la loi de probabilité de la variable aléatoire X les coefficients γ_n . En particulier, le cumulants d'ordre 0 est toujours nul ($\gamma_0 = \ln \Phi_X(1) = 0$). Les autres cumulants s'obtiennent à partir des dérivées de la fonction $s \mapsto \ln \Phi_X(s)$:

$$\gamma_n = \frac{d^n \ln(\Phi_X)(s)}{ds^n} (1)$$

Un calcul simple utilisant le résultat de la section 1.3.3 montre que les cumulants de seconde espèce de la variable aléatoire X sont égaux aux cumulants de première espèce de la variable aléatoire $\ln X$.

Dans la suite, nous allons plus particulièrement nous intéresser aux cumulants d'ordre 1 et 2. Un développement limité à l'ordre 2 de la fonction caractéristique de seconde espèce au voisinage de $s = 1$ va nous permettre de les exprimer simplement en fonction des moments de la variable aléatoire $\ln X$. En effet,

$$\begin{aligned}\Phi_X(s) &= E[X^{s-1}] \\ &= E[\exp((s-1)\ln X)] \\ &= E\left[1 + (s-1)\ln X + \frac{1}{2}((s-1)\ln X)^2 + o((s-1)^2)\right] \\ &= 1 + (s-1)E[\ln X] + \frac{1}{2}(s-1)^2 E[(\ln X)^2] + o((s-1)^2)\end{aligned}$$

Donc

$$\ln \Phi_X(s) = (s-1)E[\ln X] + \frac{1}{2}(s-1)^2 \text{Var}[\ln X] + o((s-1)^2)$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \gamma_1 &= E[\ln X] \\ \gamma_2 &= \text{Var}[\ln X] \end{cases}$$

Ainsi, si X_1, \dots, X_N sont N variables aléatoires indépendantes et de même loi, on peut estimer les cumulants γ_1 et γ_2 en posant

$$\widetilde{\gamma}_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln X_k$$

et

$$\widetilde{\gamma}_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\ln X_k - \widetilde{\gamma}_1)^2$$

1.5 Moyenne géométrique de variables aléatoires positives indépendantes

Nous avons vu que les fonctions caractéristiques de seconde espèce sont bien adaptées à l'étude de produits de variables aléatoires positives indépendantes, de même que les fonctions caractéristiques de première espèce étaient bien adaptées à l'étude de sommes de variables aléatoires indépendantes. Il est donc naturel de nous intéresser ici à la moyenne géométrique de variables aléatoires positives et de même loi.

1.5.1 Définition

Soient $L \in \mathbb{N}^*$ et $X_k, k \in \{1..L\}$ L variables aléatoires réelles positives indépendantes et de même loi. Nous noterons dans cette section X la moyenne géométrique des X_k

$$X = \left(\prod_{k=1}^L X_k \right)^{\frac{1}{L}}$$

1.5.2 Fonction caractéristique

Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned}\Phi_{X_k^{\frac{1}{L}}}(s) &= E\left(\left(X_k^{\frac{1}{L}}\right)^{s-1}\right) \\ &= E\left(X_k^{\left(\frac{s-1}{L}+1\right)-1}\right) \\ &= \Phi_{X_k}\left(\frac{s-1}{L}+1\right)\end{aligned}$$

Comme de plus les variables aléatoires $(X_k)^{\frac{1}{L}}$ sont indépendantes, on en déduit que

$$\Phi_X(s) = \left(\Phi_{X_k}\left(\frac{s-1}{L}+1\right)\right)^L$$

1.5.3 Cumulants

On déduit de l'égalité précédente que

$$\ln \Phi_X(s) = L \ln \Phi_{X_k}\left(\frac{s-1}{L}+1\right)$$

Ainsi, $\forall n \geq 1$,

$$\gamma_n[X] = \frac{\gamma_n[X_k]}{L^{n-1}}$$

Chapitre 2

Exemples de lois de probabilité sur R_+^*

2.1 Distribution lognormale

2.1.1 Définition

La loi normale joue un rôle fondamental en probabilités. Il s'agit d'une distribution à deux paramètres μ et σ^2 :

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

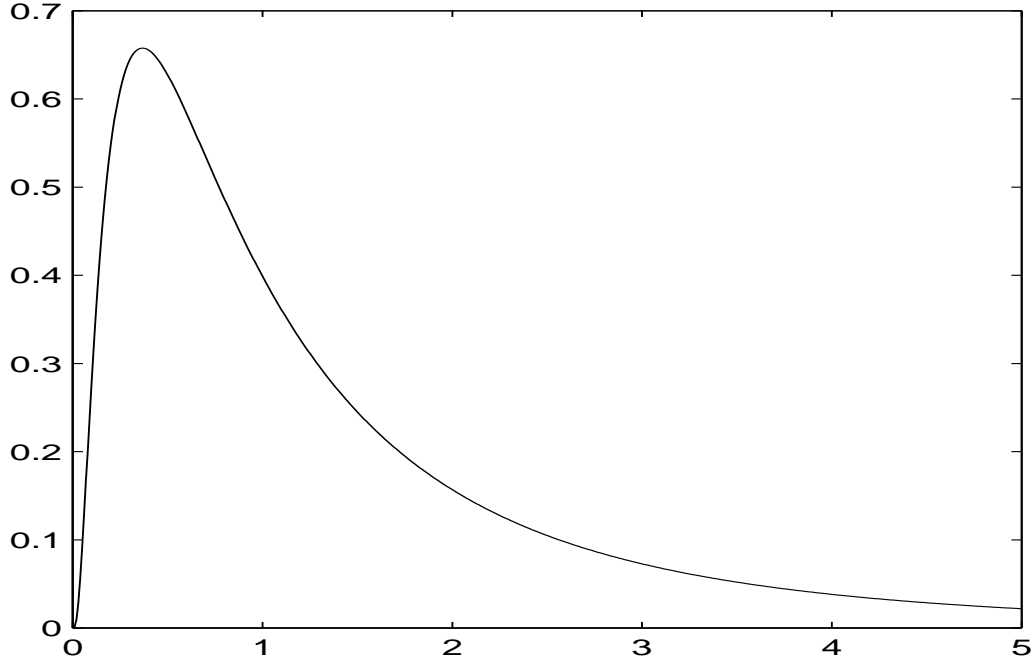
Si Y_1, Y_2, \dots, Y_n sont n variables aléatoires qui suivent respectivement une loi normale de paramètres $(\mu_1, \sigma_1^2), \dots, (\mu_n, \sigma_n^2)$, alors $\delta + \alpha_1 Y_1 + \dots + \alpha_n Y_n$ suit une loi normale de paramètres $\delta + \alpha_1 \mu_1 + \dots + \alpha_n \mu_n$ et $\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_n^2$.

La loi de la variable aléatoire positive $X = \exp Y$, où Y suit une loi normale, est donnée par:

$$p_{\exp Y}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) 1_{\{x>0\}}$$

Nous poserons $\nu = \exp \mu$ et définirons la distribution lognormale de paramètres ν et σ^2 de la façon suivante:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{(\ln \frac{x}{\nu})^2}{2\sigma^2}\right) 1_{\{x>0\}}$$



(c) Densité lognormale avec $\nu=1$ et $\sigma=1$

On peut alors remarquer que $\nu = \exp \mu = \exp (E [\ln X])$ et $\sigma^2 = \text{Var} [\ln X]$.

Par ailleurs, si on pose $X_k = \exp (Y_k) \forall k \in [1..n]$ et $\lambda = \exp \delta$, on a

$$\exp (\delta + \alpha_1 Y_1 + \dots + \alpha_n Y_n) = \lambda X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$$

donc $\lambda X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ suit une loi lognormale de paramètres $\lambda \nu_1^{\alpha_1} \dots \nu_n^{\alpha_n}$ et $\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_n^2$.

2.1.2 Fonction caractéristique

On effectue le changement de variable inverse du précédent:

$$\begin{aligned} \Phi_X (s) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} p_X (x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp (y (s-1)) p_Y (y) dy \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp (y (s-1)) \exp \left(-\frac{(y - \ln \nu)^2}{2\sigma^2} \right) dy \end{aligned}$$

En posant $t = \frac{y - \ln \nu}{\sigma}$, il vient

$$\begin{aligned} \Phi_X (s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp ((\ln \nu + \sigma t) (s-1)) \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt \\ &= \nu^{s-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp (\sigma t (s-1)) \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt \end{aligned}$$

Posons

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\sigma t(s-1)) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Alors $f(1) = 1$ et on peut vérifier que

$$f'(s) = \sigma^2 (s-1) f(s)$$

On en déduit que

$$f(s) = \exp\left(\sigma^2 \frac{(s-1)^2}{2}\right)$$

D'où

$$\Phi_X(s) = \nu^{s-1} \exp\left(\sigma^2 \frac{(s-1)^2}{2}\right)$$

2.1.3 Cumulants

On déduit directement de l'égalité précédente que

$$\ln \Phi_X(s) = (\ln \nu)(s-1) + \sigma^2 \frac{(s-1)^2}{2}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \gamma_1 &= \ln \nu \\ \gamma_2 &= \sigma^2 \\ \gamma_p &= 0 \quad \forall p \geq 3 \end{cases}$$

2.1.4 Estimation des paramètres ν et σ^2 par la méthode des cumulants

Nous avons donc $\nu = \exp \gamma_1$ et $\sigma^2 = \gamma_2$. Si X_1, \dots, X_N sont N variables aléatoires indépendantes de même loi p_X , on peut donc estimer les paramètres ν et σ^2 en utilisant les estimateurs $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ introduits dans la section 1.4:

$$\begin{aligned} \widetilde{\nu} &= \exp \widetilde{\gamma}_1 \\ &= \left(\prod_{k=1}^N X_k \right)^{\frac{1}{N}} \end{aligned}$$

et

$$\widetilde{\sigma}^2 = \widetilde{\gamma}_2$$

2.1.5 Estimation des paramètres ν et σ^2 par le principe du maximum de vraisemblance

Le principe du maximum de vraisemblance est une méthode d'estimation de paramètres très utilisée. Etant données N réalisations de la variable aléatoire X que nous noterons $x_k, k \in \{1..N\}$, nous souhaitons calculer les valeurs de ν et σ^2 les plus "vraisemblables", c'est à dire celles qui maximisent la fonction

$$\Theta(\nu, \sigma^2) = \sum_{k=1}^N \ln p_X(x_k)$$

En annulant les dérivées de Θ par rapport à chacun de ses arguments, on obtient les valeurs optimales de ν et σ^2 , que nous noterons $\tilde{\nu}$ et $\tilde{\sigma}^2$, en fonction des x_k . Commençons par simplifier l'expression de Θ :

$$\begin{aligned} \Theta(\nu, \sigma^2) &= \sum_{k=1}^N \ln \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} x_k} \exp \left(-\frac{(\ln \frac{x_k}{\nu})^2}{2\sigma^2} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N -\ln(\sigma \sqrt{2\pi} x_k) - \frac{(\ln \frac{x_k}{\nu})^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

Dérivons d'abord Θ par rapport à ν ; on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\nu}(\tilde{\nu}, \tilde{\sigma}^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N \frac{(\ln x_k - \ln \tilde{\nu})}{\tilde{\sigma}^2 \tilde{\nu}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \ln \tilde{\nu} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln x_k \end{aligned}$$

Donc la valeur de ν la plus vraisemblable est

$$\tilde{\nu} = \left(\prod_{k=1}^N x_k \right)^{\frac{1}{N}}$$

Dérivons maintenant Θ par rapport à σ^2 ; on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\sigma^2}(\tilde{\nu}, \tilde{\sigma}^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(\ln \frac{x_k}{\tilde{\nu}})^2}{2\sigma^4} &= 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\ln \frac{x_k}{\tilde{\nu}} \right)^2$$

On constate donc que l'on obtient les mêmes estimateurs qu'avec la méthode des cumulants.

2.1.6 Etude de l'estimateur $\tilde{\nu}$

L'espérance de $\tilde{\nu}$ se déduit simplement de la fonction caractéristique:

$$\begin{aligned} E[\tilde{\nu}] &= \left(E \left[X_k^{\frac{1}{N}} \right] \right)^N \\ &= \left(\Phi_X \left(1 + \frac{1}{N} \right) \right)^N \\ &= \nu \exp \left(\frac{\sigma^2}{2N} \right) \end{aligned}$$

Donc l'estimateur $\tilde{\nu}$ est biaisé. De plus,

$$\begin{aligned} E[\tilde{\nu}^2] &= \left(\Phi_X \left(1 + \frac{2}{N} \right) \right)^N \\ &= \nu^2 \exp\left(\frac{2\sigma^2}{N}\right) \end{aligned}$$

donc la variance de $\tilde{\nu}$ est égale à

$$\begin{aligned} Var[\tilde{\nu}] &= \nu^2 \left(\exp\left(\frac{2\sigma^2}{N}\right) - \exp\left(\frac{\sigma^2}{N}\right) \right) \\ &\sim \frac{\nu^2 \sigma^2}{N} \end{aligned}$$

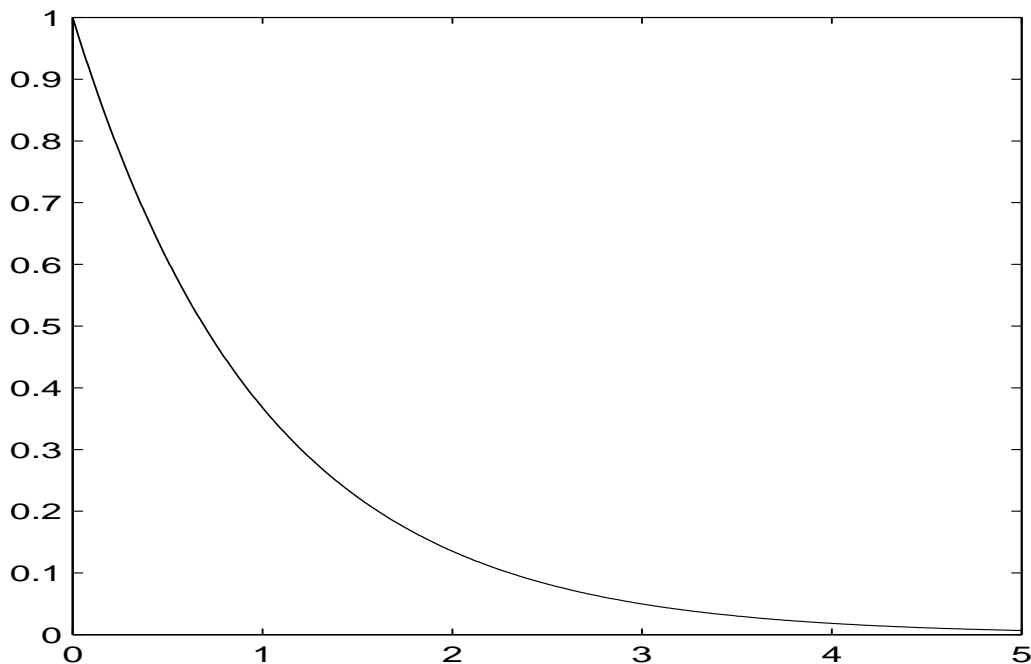
2.2 Distribution exponentielle

La distribution exponentielle est utilisée pour le traitement des images RSO. Il s'agit en effet de la loi de probabilité qui décrit la statistique du chatoiement pleinement développé.

2.2.1 Définition

La distribution exponentielle est une distribution positive à un paramètre μ_I :

$$p_X(x) = \frac{1}{\mu_I} \exp\left(-\frac{x}{\mu_I}\right) 1_{\{x>0\}}$$



(d) Densité exponentielle avec $\mu=1$

2.2.2 Fonction caractéristique

On pose $t = \frac{x}{\mu_I}$:

$$\begin{aligned}\Phi_X(s) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} \exp\left(-\frac{x}{\mu_I}\right) \frac{dx}{\mu_I} \\ &= \int_0^{+\infty} (\mu_I t)^{s-1} \exp(-t) dt \\ &= \mu_I^{s-1} \Gamma(s)\end{aligned}$$

2.2.3 Cumulants

Ainsi,

$$\ln(\Phi_X)(s) = (\ln \mu_I)(s-1) + \ln \Gamma(s)$$

Donc

$$\begin{cases} \gamma_1 &= \ln \mu_I + \Psi(1) \\ \gamma_p &= \Psi^{(p-1)}(1) \quad \forall p \geq 2 \end{cases}$$

2.2.4 Estimation du paramètre μ_I

La distribution exponentielle est un cas particulier de distribution Gamma multiplicative (avec $L = 1$). L'estimateur $\widetilde{\mu_I}$ obtenu par la méthode des cumulants sera donc étudié dans la section 2.4.5. Mais la distribution exponentielle est également un cas particulier de distribution Gamma classique (toujours avec $L = 1$). L'étude de l'estimateur obtenu en appliquant le principe du maximum de vraisemblance sera donc réalisée dans la section 2.3.5. On constatera en particulier que les estimations de μ_I obtenues par ces deux méthodes ne sont pas les mêmes.

2.3 Distribution Gamma

Le chatoiement entraîne une dégradation importante de la lisibilité des images RSO. Pour réduire son effet, on utilise la technique multi-vues. Celle-ci consiste à calculer une moyenne arithmétique de plusieurs images d'une même zone. On montre alors que l'intensité du chatoiement sur l'image obtenue suit une loi Gamma.

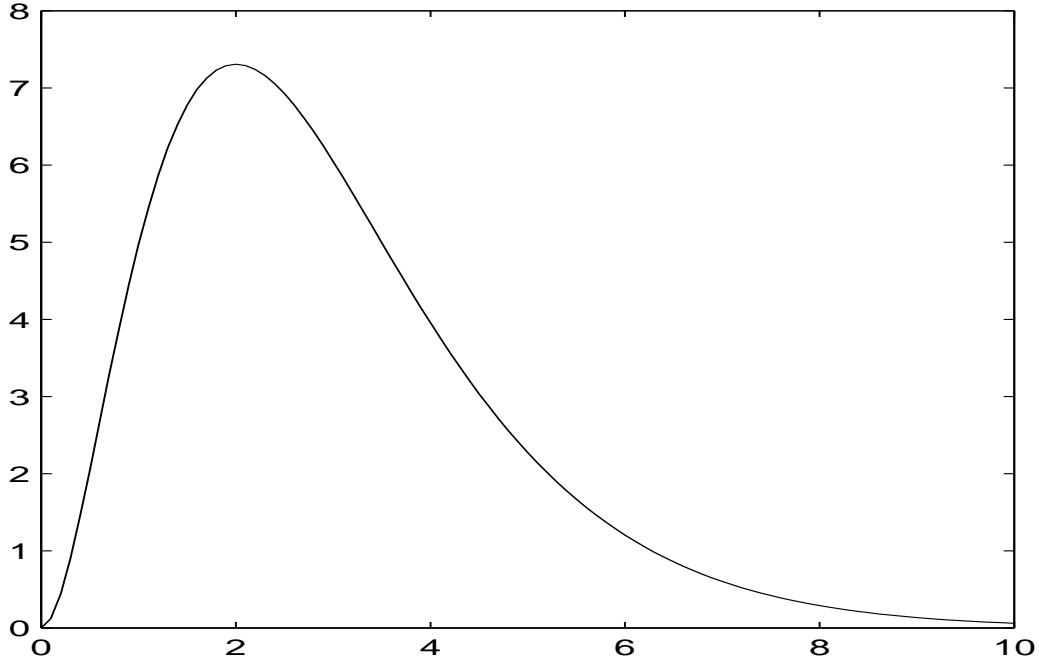
2.3.1 Définition

Soient X_1, \dots, X_L L variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle

$$p_{X_k}(x) = \frac{1}{\mu_I} \exp\left(-\frac{x}{\mu_I}\right) 1_{\{x>0\}}$$

On pose alors $X = \frac{\sum_{k=1}^L X_k}{L}$. On montre alors par récurrence sur L que

$$p_X(x) = \frac{1}{\mu_I} \frac{L^L}{\Gamma(L)} \left(\frac{x}{\mu_I}\right)^{L-1} \exp\left(-L\frac{x}{\mu_I}\right) 1_{\{x>0\}}$$



(e) Densité Gamma avec $\mu=1$ et $L=3$

2.3.2 Fonction caractéristique

On pose $t = L \frac{x}{\mu_I}$. Alors

$$\begin{aligned}
 \Phi_X(s) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} \frac{1}{\mu_I} \frac{L^L}{\Gamma(L)} \left(\frac{x}{\mu_I}\right)^{L-1} \exp\left(-L \frac{x}{\mu_I}\right) dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(L)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mu_I}{L} t\right)^{s-1} t^{L-1} \exp(-t) dt \\
 &= \left(\frac{\mu_I}{L}\right)^{s-1} \frac{\Gamma(s+L-1)}{\Gamma(L)}
 \end{aligned}$$

2.3.3 Cumulants

Ainsi,

$$\ln \Phi_X(s) = \left(\ln \frac{\mu_I}{L}\right) (s-1) + \ln \Gamma(s-1+L) - \ln \Gamma(L)$$

Donc

$$\begin{cases} \gamma_1 = \ln \mu_I + \Psi(L) - \ln L \\ \gamma_p = \Psi^{(p-1)}(L) \quad \forall p \geq 2 \end{cases}$$

2.3.4 Estimation des paramètres μ_I et L par la méthode des cumulants

Ainsi, on a $L = (\Psi')^{-1}(\gamma_2)$ et $\mu_I = \exp(\gamma_1 + \ln L - \Psi(L))$. Soient X_1, \dots, X_N N variables aléatoires indépendantes et de même loi de densité p_X . Pour estimer les paramètres μ_I et L , on peut donc poser

$$\tilde{L} = (\Psi')^{-1}(\tilde{\gamma}_2)$$

dont on déduit

$$\tilde{\mu}_I = \exp\left(\tilde{\gamma}_1 + \ln \tilde{L} - \Psi(\tilde{L})\right)$$

2.3.5 Estimation des paramètres μ_I et L par le principe du maximum de vraisemblance

Pour une distribution Gamma de paramètres μ_I et L , on pose

$$\begin{aligned} \Theta(\mu_I, L) &= \sum_{k=1}^N \ln \left(\frac{1}{\mu_I} \frac{L^L}{\Gamma(L)} \left(\frac{x_k}{\mu_I} \right)^{L-1} \exp\left(-L \frac{x_k}{\mu_I}\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N -L \ln \mu_I + L \ln L - \ln \Gamma(L) + (L-1) \ln(x_k) - L \frac{x_k}{\mu_I} \end{aligned}$$

Dérivons d'abord Θ par rapport à μ_I ; on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\mu_I}(\tilde{\mu}_I, \tilde{L}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N -\frac{\tilde{L}}{\tilde{\mu}_I} + \tilde{L} \frac{x_k}{\tilde{\mu}_I^2} &= 0 \end{aligned}$$

Donc la valeur de μ_I la plus vraisemblable est

$$\tilde{\mu}_I = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

Dérivons maintenant Θ par rapport à L ; on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dL}(\tilde{\mu}_I, \tilde{L}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N -\ln \tilde{\mu}_I + 1 + \ln \tilde{L} - \Psi(\tilde{L}) + \ln x_k - \frac{x_k}{\tilde{\mu}_I} &= 0 \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=1}^N 1 - \frac{x_k}{\tilde{\mu}_I} = 0$$

D'où

$$\Psi(\tilde{L}) - \ln \tilde{L} = -\ln \mu_I + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln x_k$$

On constate donc que l'on n'obtient pas les mêmes estimateurs qu'avec la méthode des cumulants. Toutefois, l'estimateur \tilde{L} aurait très bien pu être obtenu à partir de la relation

$$\gamma_1 = \ln \mu_I + \Psi(L) - \ln L$$

en supposant $\tilde{\mu}_I$ connu.

2.4 Distribution Gamma multiplicative

Dans la section précédente, nous avons vu qu'une méthode utilisée pour réduire l'effet du chatolement consiste à calculer la moyenne arithmétique de plusieurs images. Etant donné que le chatolement est un bruit multiplicatif, pourquoi ne pas en calculer la moyenne géométrique? Nous allons constater que cette deuxième méthode est un peu moins efficace que la précédente.

2.4.1 Définition

Soient X_1, \dots, X_L L variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle

$$p_{X_k}(x) = \frac{1}{\mu_I} \exp\left(-\frac{x}{\mu_I}\right) 1_{\{x>0\}}$$

Comme dans la section 1.5, nous noterons X la moyenne géométrique des X_k :

$$X = \left(\prod_{k=1}^L X_k \right)^{\frac{1}{L}}$$

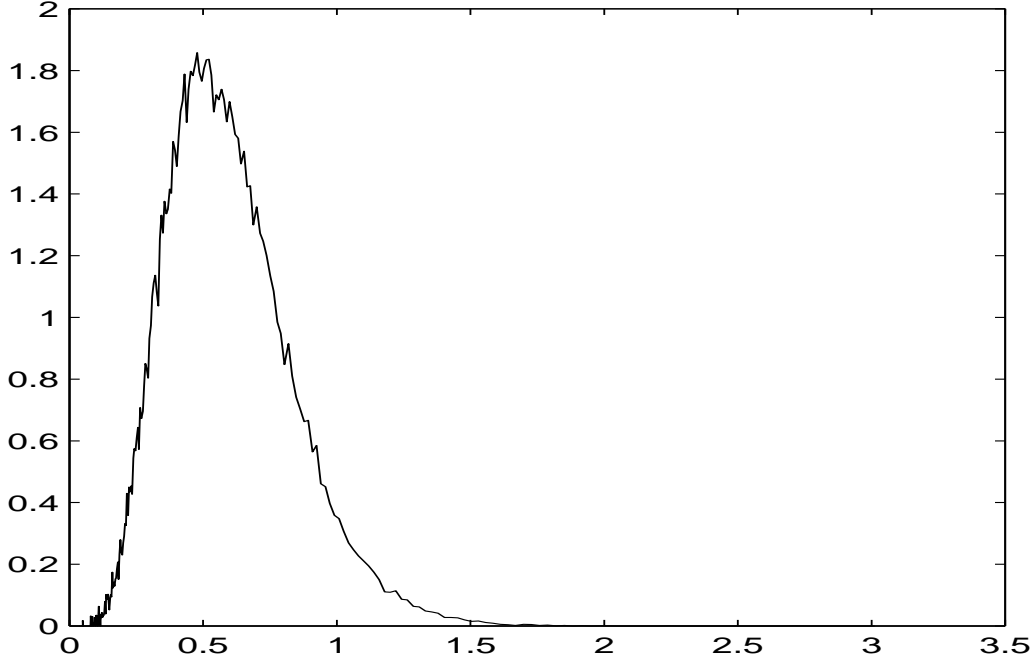
On pose alors

$$\begin{aligned} q_L(x) &= p_{(X_k)^{\frac{1}{L}}}(x) \\ &= p_{X_k}(x^L) Lx^{L-1} \\ &= \frac{L}{\mu_I} x^{L-1} \exp\left(-\frac{x^L}{\mu_I}\right) 1_{\{x>0\}} \end{aligned}$$

On reconnaît une distribution de Weibull de paramètres $\left(\mu_I^{\frac{1}{L}}, L\right)$. On a en particulier

$$p_X = \underbrace{q_L \hat{*} q_L \hat{*} \dots \hat{*} q_L}_{L \text{ fois}}$$

Mais il n'existe malheureusement aucune formule analytique simple qui donne p_X pour $L > 2$. Pour en donner une représentation, nous avons effectué 2^{16} réalisations de la variable X avec $\mu_I = 1$ et $L = 10$, dont nous reproduisons ici l'histogramme à pas logarithmique (comprenant 2^8 intervalles, qui ne seront pas représentés pour des raisons de lisibilité):



(f) Histogramme a pas logarithmique

2.4.2 Fonction caractéristique

On utilise les résultats des sections 1.5 et 2.2:

$$\begin{aligned}
 \Phi_X(s) &= \left(\Phi_{X_k} \left(\frac{s-1}{L} + 1 \right) \right)^L \\
 &= \left(\mu_I^{\left(\frac{s-1}{L} + 1 \right) - 1} \Gamma \left(\frac{s-1}{L} + 1 \right) \right)^L \\
 &= \mu_I^{s-1} \left(\Gamma \left(\frac{s-1}{L} + 1 \right) \right)^L
 \end{aligned}$$

Ce résultat va nous permettre d'exprimer la densité p_X (dont nous ne connaissons pas d'expression analytique) en fonction de la densité de probabilité d'une variable aléatoire plus simple. En effet, notons p_L la densité de probabilité d'un produit de L variables aléatoires qui suivent toutes une densité exponentielle de paramètre 1. Sachant que $M[p_L](s) = (\Gamma(s))^L$, on peut alors vérifier que

$$p_X(x) = \frac{L}{\mu_I} \left(\frac{x}{\mu_I} \right)^{L-1} p_L \left(\left(\frac{x}{\mu_I} \right)^L \right)$$

2.4.3 Cumulants

On utilise encore les résultats des sections 1.5 et 2.2, qui donnent directement

$$\begin{cases} \gamma_1 = \ln \mu_I + \Psi(1) \\ \gamma_p = \frac{\Psi^{(p-1)}(1)}{L^{p-1}} \quad \forall p \geq 2 \end{cases}$$

2.4.4 Estimation des paramètres μ_I et L

Comme nous ne connaissons aucune expression analytique de p_X , nous ne pouvons pas appliquer le principe du maximum de vraisemblance. Nous allons donc nous concentrer sur la méthode des cumulants. On a en particulier

$$\mu_I = \exp(\gamma_1 - \Psi(1))$$

Si $X_1 \dots X_N$ sont N variables aléatoires indépendantes et de même loi p_X , on peut donc estimer μ_I en posant

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_I &= \exp(\widetilde{\gamma}_1 - \Psi(1)) \\ &= \frac{1}{\exp(\Psi(1))} \left(\prod_{k=1}^N X_k \right)^{\frac{1}{N}} \end{aligned}$$

De même, $\forall p \geq 2$,

$$L = \left(\frac{\Psi^{(p-1)}(1)}{\gamma_p} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

En particulier, pour $p = 2$, on a

$$L = \frac{\Psi'(1)}{\text{Var}[\ln X]}$$

On peut donc estimer L en posant

$$\widetilde{L} = \frac{\Psi'(1)}{\widetilde{\gamma}_2}$$

2.4.5 Etude de l'estimateur $\widetilde{\mu}_I$

Tout d'abord, nous allons voir que l'estimateur $\widetilde{\mu}_I$ est biaisé:

$$\begin{aligned} E[\widetilde{\mu}_I] &= \frac{1}{\exp(\Psi(1))} \left(E \left[X_k^{\frac{1}{N}} \right] \right)^N \\ &= \frac{1}{\exp(\Psi(1))} \left(M[X_k] \left(1 + \frac{1}{N} \right) \right)^N \\ &= \frac{1}{\exp(\Psi(1))} \left(\mu_I^{\frac{1}{N}} \left(\Gamma \left(\frac{1}{NL} + 1 \right) \right)^L \right)^N \\ &= \frac{\mu_I}{\exp(\Psi(1))} \left(\Gamma \left(\frac{1}{NL} + 1 \right) \right)^{NL} \\ &\neq \mu_I \end{aligned}$$

Mais si on fait tendre N vers $+\infty$, on voit que

$$\begin{aligned} \left(\Gamma \left(\frac{1}{NL} + 1 \right) \right)^{NL} &= \exp \left(NL \ln \left(\Gamma(1) + \frac{1}{NL} \Gamma'(1) + o \left(\frac{1}{N} \right) \right) \right) \\ &\rightarrow \exp(\Gamma'(1)) = \exp(\Psi(1)) \end{aligned}$$

donc $\widetilde{\mu}_I \rightarrow \mu_I$.
De même,

$$\begin{aligned} E\left(\widetilde{\mu}_I^2\right) &= \frac{1}{\exp(2\Psi(1))} \left(M[X_k] \left(1 + \frac{2}{N}\right)\right)^N \\ &= \left(\frac{\mu_I}{\exp(\Psi(1))}\right)^2 \left(\Gamma\left(\frac{2}{NL} + 1\right)\right)^{NL} \end{aligned}$$

Donc

$$Var[\widetilde{\mu}_I] = \left(\frac{\mu_I}{\exp(\Psi(1))}\right)^2 \left(\left(\Gamma\left(\frac{2}{NL} + 1\right)\right)^{NL} - \left(\Gamma\left(\frac{1}{NL} + 1\right)\right)^{2NL}\right)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left(\Gamma\left(\frac{2}{NL} + 1\right)\right)^{NL} - \left(\Gamma\left(\frac{1}{NL} + 1\right)\right)^{2NL} \\ &= \exp\left(NL \ln\left(\Gamma(1) + \frac{2}{NL}\Gamma'(1) + \frac{2}{N^2L^2}\Gamma''(1) + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)\right) \\ &\quad - \exp\left(2NL \ln\left(\Gamma(1) + \frac{1}{NL}\Gamma'(1) + \frac{1}{2N^2L^2}\Gamma''(1) + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(NL\left(\frac{2}{NL}\Gamma'(1) + \frac{2}{N^2L^2}\left(\Gamma''(1) - \Gamma'(1)^2\right) + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)\right) \\ &\quad - \exp\left(2NL\left(\frac{1}{NL}\Gamma'(1) + \frac{1}{2N^2L^2}\left(\Gamma''(1) - \Gamma'(1)^2\right) + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp(2\Psi(1)) \left(\left(1 + \frac{2}{NL}\Psi'(1)\right) - \left(1 + \frac{1}{NL}\Psi'(1)\right) + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) \\ &\sim \frac{\exp(2\Psi(1))\Psi'(1)}{NL} \end{aligned}$$

Donc

$$Var[\widetilde{\mu}_I] \sim \frac{\mu_I^2\Psi'(1)}{NL}$$

2.4.6 Application à la réduction du chatoiemment

Nous allons maintenant montrer que calculer la moyenne géométrique de N images radar pour réduire l'effet du chatoiemment est un peu moins efficace que calculer leur moyenne arithmétique .

Si X_1, \dots, X_N sont N variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre μ_I , on peut poser

$$\langle X \rangle_+ = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k$$

et

$$\langle X \rangle_* = \frac{1}{\exp(\Psi(1))} \left(\prod_{k=1}^N X_k\right)^{\frac{1}{N}}$$

Le calcul des moments d'ordre 1 et 2 de $\langle X \rangle_+$ est trivial: $E[\langle X \rangle_+] = E[X_k] = \mu_I$ et $Var[\langle X \rangle_+] = \frac{1}{N}Var[X_k] = \frac{\mu_I^2}{N}$. Le calcul des moments d'ordre 1 et 2 de $\langle X \rangle_*$ a été

mené dans la section 2.4.5 (en remarquant que $\langle X \rangle_* = \widetilde{\mu_I}$). En effet, n'oublions pas qu'une distribution exponentielle n'est autre qu'une distribution Gamma multiplicative (avec $L = 1$); on a donc $E[\langle X \rangle_*] \rightarrow \mu_I$ quand $N \rightarrow +\infty$, et $Var[\langle X \rangle_*] \sim \frac{\mu_I^2 \Psi(1)}{N}$ quand $N \rightarrow +\infty$. L'écart type de $\langle X \rangle_+$, que nous noterons σ_+ , est donc égal à $\frac{\mu_I}{\sqrt{N}}$, et celui de $\langle X \rangle_*$, que nous noterons σ_* , est équivalent à $\frac{\mu_I \sqrt{\Psi'(1)}}{\sqrt{N}}$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Or on peut vérifier que $\sqrt{\Psi'(1)} \simeq 1,27$. Donc $\frac{\sigma_*}{\sigma_+} \sim 1,27$. Ainsi, l'atténuation du chatoie-ment obtenue en calculant la moyenne géométrique des X_k est un peu moins efficace que celle obtenue par la méthode classique.

Chapitre 3

Convergence des produits de variables aléatoires positives indépendantes

3.1 Convergence en loi

3.1.1 Rappel: définition

Une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans R converge en loi vers la variable aléatoire X_∞ si et seulement si

$$E[f(X_n)] \rightarrow E[f(X_\infty)]$$

pour toute fonction $f : R \rightarrow R$ continue et bornée, ou pour toute fonction $f : R \rightarrow R$ continue et qui tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

3.1.2 Equivalence entre la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ et la convergence en loi de la suite $(\ln X_n)_{n \geq 1}$

Proposition

Une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans R_+^* converge en loi vers la variable aléatoire X_∞ si et seulement si la suite $(\ln X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\ln X_\infty$.

Démonstration

Supposons que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X_∞ . Soit alors $f : R \rightarrow R$ une fonction continue et tendant vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{f} : R &\rightarrow R \\ x &\mapsto f(\ln x) \quad \text{si } x > 0 \\ x &\mapsto 0 \quad \text{si } x \leq 0 \end{aligned}$$

est également continue et tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$. Donc

$$\begin{aligned} E[\tilde{f}(X_n)] &\rightarrow E[\tilde{f}(X_\infty)] \\ \Leftrightarrow E[f(\ln X_n)] &\rightarrow E[f(\ln X_\infty)] \end{aligned}$$

Donc $\ln X_n$ converge en loi vers $\ln X_\infty$.

Inversement, supposons que $\ln X_n$ converge en loi vers $\ln X_\infty$. Soit alors $f : R \rightarrow R$ une fonction continue et bornée. Alors la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{f} : R &\rightarrow R \\ t &\mapsto f(\exp t) \end{aligned}$$

est également continue et bornée. Donc

$$\begin{aligned} E[\tilde{f}(\ln X_n)] &\rightarrow E[\tilde{f}(\ln X_\infty)] \\ \Leftrightarrow E[f(X_n)] &\rightarrow E[f(X_\infty)] \end{aligned}$$

Donc X_n converge en loi vers X_∞ .

3.1.3 Critère de convergence en loi

Théorème

Une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans R_+^* converge en loi vers la variable aléatoire X_∞ si et seulement si

$$\Phi_{X_n}(s) \rightarrow \Phi_{X_\infty}(s)$$

pour tout $s \in 1 + iR$.

Démonstration

Nous avons vu que la fonction caractéristique de deuxième espèce d'une variable aléatoire X positive est égale sur l'axe $1 + iR$ à la fonction caractéristique de première espèce de la variable aléatoire $\ln X$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Phi_{X_n}(s) &\rightarrow \Phi_{X_\infty}(s) \quad \forall s \in 1 + iR \\ \Leftrightarrow \varphi_{\ln X_n}(\xi) &\rightarrow \varphi_{\ln X_\infty}(\xi) \quad \forall \xi \in R \end{aligned}$$

Or cette dernière propriété est équivalente à la convergence en loi de $\ln X_n$ vers $\ln X_\infty$. La proposition précédente nous permet donc de conclure.

3.2 Théorème de la limite centrale

3.2.1 Théorème

Soient $X_k, k \geq 1$ des variables aléatoires réelles positives indépendantes et de même loi. Considérons la suite de variables aléatoires $\{P_N\}_{N \geq 1}$, définie en posant

$$P_N = \left(\prod_{k=1}^N \frac{X_k}{E_X} \right)^{\frac{1}{\sqrt{N}}}$$

où $E_X = \exp(E(\ln X_k))$.

Alors lorsque $N \rightarrow +\infty$, P_N converge étroitement vers une distribution lognormale de paramètres $(1, \sigma^2)$, où $\sigma^2 = \text{Var}[\ln X_k]$.

3.2.2 Démonstration

Calculons la fonction caractéristique de P_N :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{P_N}(s) &= E[(P_N)^{s-1}] \\
 &= E\left[\left(\left(\prod_{k=1}^N \frac{X_k}{E_X}\right)^{\frac{1}{\sqrt{N}}}\right)^{s-1}\right] \\
 &= E\left[\prod_{k=1}^N \left(\frac{X_k}{E_X}\right)^{\frac{s-1}{\sqrt{N}}}\right] \\
 &= \left(E\left[\left(\frac{X}{E_X}\right)^{\frac{s-1}{\sqrt{N}}}\right]\right)^N \\
 &= \left(E\left[\exp\left(\frac{s-1}{\sqrt{N}} \ln\left(\frac{X}{E_X}\right)\right)\right]\right)^N \\
 &= \left(1 + \frac{s-1}{\sqrt{N}} E\left[\ln\left(\frac{X}{E_X}\right)\right] + \frac{1}{2} \left(\frac{s-1}{\sqrt{N}}\right)^2 E\left[\ln\left(\frac{X}{E_X}\right)^2\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right)^N
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } E\left[\ln\left(\frac{X}{E_X}\right)\right] = E[\ln(X) - E[\ln(X)]] = 0$$

$$\text{et } E\left[\ln\left(\frac{X}{E_X}\right)^2\right] = E[(\ln(X) - E[\ln(X)])^2] = \sigma^2$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \Phi_{P_N}(s) &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(s-1)^2}{N} \sigma^2 + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N \\
 &\rightarrow \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} (s-1)^2\right)
 \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction caractéristique d'une distribution lognormale de paramètres $(1, \sigma^2)$.

3.3 Théorème de la limite locale

3.3.1 Théorème

Soient $X_k, k \geq 1$ des variables aléatoires réelles positives indépendantes et de même loi. Si leur fonction caractéristique commune Φ_X est intégrable sur $[1 - i\infty, 1 + i\infty]$, les variables aléatoires P_N possèdent une densité p_{P_N} continue sur R_+^* qui converge uniformément sur tout compact de R_+^* vers la densité lognormale de paramètres $(1, \sigma^2)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

3.3.2 Démonstration

Si Φ_X est intégrable sur $[1 - i\infty, 1 + i\infty]$, la fonction caractéristique de première espèce $\varphi_{\ln X}$ est intégrable sur R . On peut donc appliquer le théorème classique de la limite locale:

$\forall N$, $\ln P_N$ possède une densité continue $p_{\ln P_N}$, et la suite $(p_{\ln P_N})_{N \geq 1}$ converge uniformément vers la densité normale de paramètres $(0, \sigma^2)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, que nous noterons $p_{\ln P_\infty}$.
Donc P_N possède une densité continue

$$p_{P_N}(X) = \frac{1}{x} p_{\ln P_N}(\ln x)$$

Posons

$$p_{P_\infty}(X) = \frac{1}{x} p_{\ln P_\infty}(\ln x)$$

Comme $\ln P_\infty$ suit une loi normale de paramètres $(0, \sigma^2)$, p_{P_∞} est la densité lognormale de paramètres $(1, \sigma^2)$.

De plus, $\forall x \in R_+^*$,

$$\begin{aligned} & |p_{P_N}(x) - p_{P_\infty}(x)| \\ = & \frac{1}{x} |p_{\ln P_N}(x) - p_{\ln P_\infty}(x)| \\ \leq & \frac{1}{x} \sup |p_{\ln P_N} - p_{\ln P_\infty}| \end{aligned}$$

Or sur un compact K de R_+^* , la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est bornée et de plus

$$\begin{aligned} \sup |p_{\ln P_N} - p_{\ln P_\infty}| & \xrightarrow{\quad} 0 \\ & N \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Donc la fonction p_{P_N} converge uniformément vers p_{P_∞} sur K .

Deuxième partie

**Transformation de Mellin
numérique**

Dans la première partie, nous avons pu constater que la transformation de Mellin est un outil puissant pour l'étude des variables aléatoires positives. Nous allons à présent abandonner la théorie des probabilités pour nous intéresser aux aspects numériques de cette transformation. Nous commencerons par établir des théorèmes d'échantillonnage qui nous permettront d'introduire la transformation numérique, dont nous étudierons ensuite quelques applications.

Chapitre 4

Echantillonnage et transformation numérique

Avertissement:

Les démonstrations proposées dans cette partie n'ont aucune prétention de rigueur mathématique. Nous avons en effet préféré éviter le formalisme de la théorie des distributions, qui aurait sans doute nui à la clarté de l'exposé. Dans la suite, la partie réelle r du nombre complexe s sera fixée. On posera donc $s = r + it$, d'où $ds = idt$. Ainsi,

$$M^{-1}[\Phi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-(r+it)} \Phi(r+it) dt$$

Préliminaires mathématiques

Nous introduisons ici des résultats mathématiques qui seront utilisés par la suite.

Formule de Poisson

Cette formule fondamentale fournit une égalité entre une somme d'exponentielles complexes et une somme de Diracs:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-inT\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$$

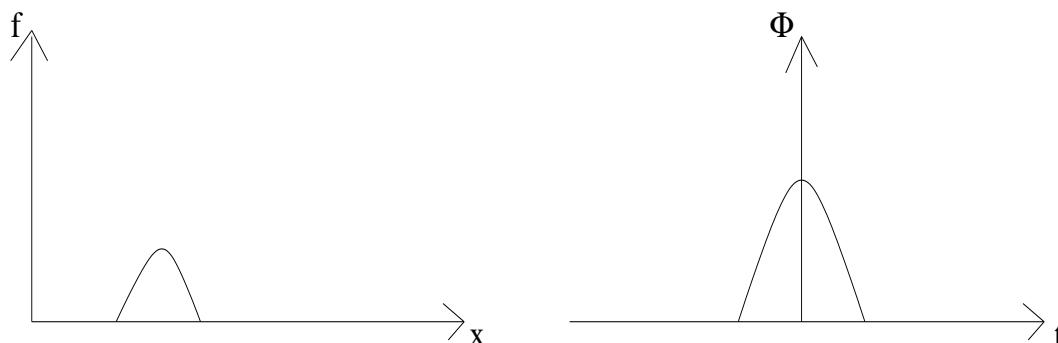
Dirac d'une fonction

Si f est une fonction qui possède N zéros simples en $\{x_i, i \in [1; N]\}$, alors:

$$\delta(f(t)) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(t - x_i)$$

4.1 Echantillonnage d'une fonction définie sur R_+^*

4.1.1 Multiplication d'une fonction par un peigne de Dirac géométrique

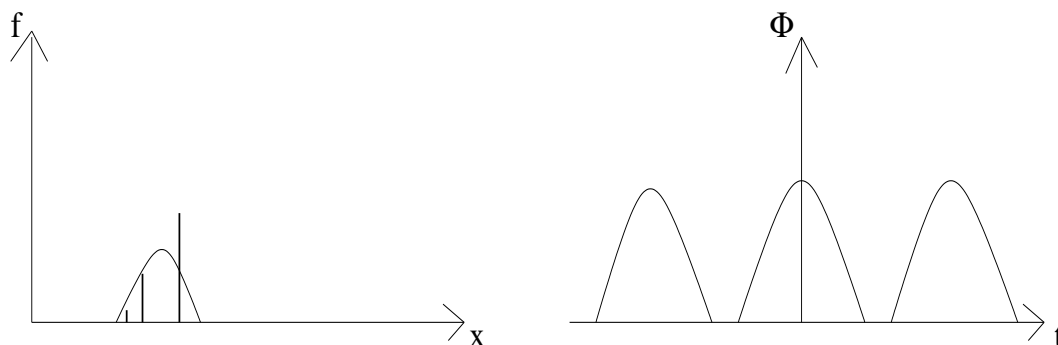


(g) Fonction d'origine et sa transformée de Mellin

Dans cette section, nous allons montrer que multiplier une fonction f par un peigne de Dirac géométrique décentré

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp((k + \theta) P) \delta(x - \exp((k + \theta) P))$$

est équivalent à périodiser sa transformée de Mellin sur l'axe imaginaire, en additionnant les translatées $\exp(2\pi i n \theta) M[f]\left(r + i\left(t - \frac{2n\pi}{P}\right)\right)$. Le théorème de reconstruction donnera alors une condition suffisante sur le support de $M[f]$ pour reconstruire $f(x)$ à partir de ses échantillons $f(\exp((k + \theta) P))$, pris sur une échelle logarithmique.



(h) Fonction échantillonnée et sa transformée pseudo-périodique

Lemme

Soient $\theta \in R$ et $P > 0$. La transformée de Mellin de

$$f(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp((k + \theta) P) \delta(t - \exp((k + \theta) P)) \right)$$

est pseudo-périodique de période $2\pi/P$, le déphasage entre deux périodes successives étant égal à $2\pi\theta$:

$$\begin{aligned} & M \left[f(x) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp((k+\theta)P) \delta(x - \exp((k+\theta)P)) \right) \right] (r+it) \\ = & \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi in\theta) M[f] \left(r + i \left(t - \frac{2n\pi}{P} \right) \right) \end{aligned}$$

Démonstration

On part de la définition de la transformée de Mellin:

$$\begin{aligned} & M \left[f(x) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp((k+\theta)P) \delta(t - \exp((k+\theta)P)) \right) \right] (r+it) \\ = & \int_0^{+\infty} x^{r+it-1} f(x) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp((k+\theta)P) \delta(x - \exp((k+\theta)P)) \right) dx \\ = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp((k+\theta)P) \exp((k+\theta)P(r+it-1)) f(\exp((k+\theta)P)) \\ = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp((k+\theta)P(r+it)) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(k+\theta)P(r+ix)) M[f](r+ix) dx \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} M[f](r+ix) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(-i(k+\theta)P(x-t)) dx \end{aligned}$$

On utilise alors la formule de Poisson:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(-i(k+\theta)P(x-t)) = \exp(-i\theta P(x-t)) \frac{2\pi}{P} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \left(t + \frac{2n\pi}{P}\right)\right)$$

En injectant cette égalité dans l'équation précédente, on obtient:

$$\begin{aligned} & M \left[f(x) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp((k+\theta)P) \delta(x - \exp((k+\theta)P)) \right) \right] (r+it) \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} M[f](r+ix) \exp(-i\theta P(x-t)) \frac{2\pi}{P} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \left(t + \frac{2n\pi}{P}\right)\right) dx \\ = & \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi in\theta) M[f] \left(r + i \left(t + \frac{2n\pi}{P} \right) \right) \\ & \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi in\theta) M[f] \left(r + i \left(t - \frac{2n\pi}{P} \right) \right) \end{aligned}$$

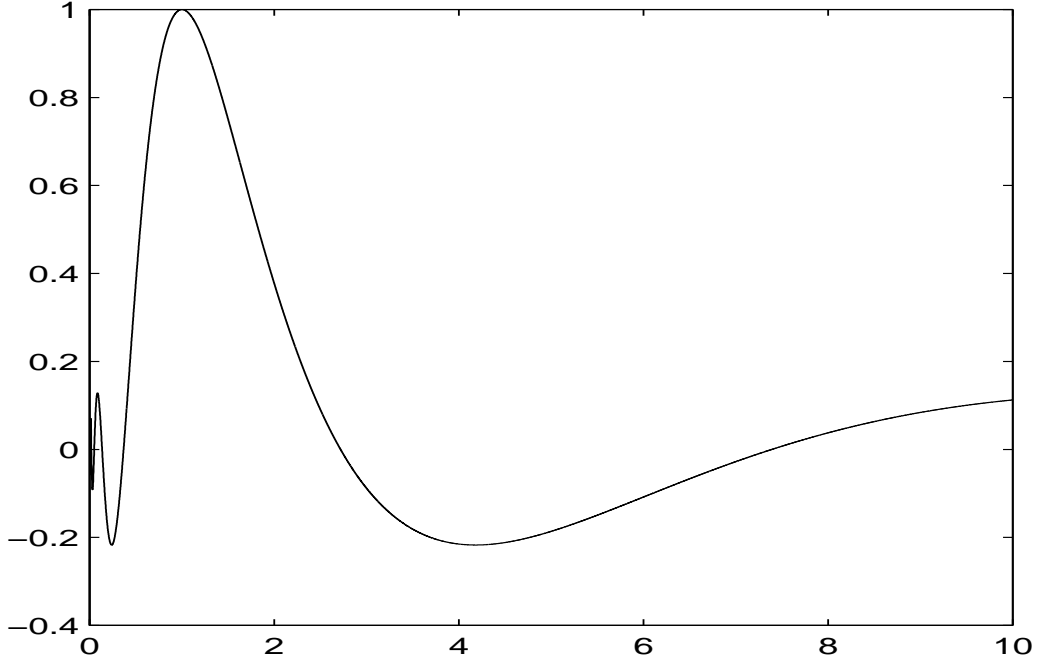
On obtient donc le résultat recherché.

4.1.2 Théorème de reconstruction d'une fonction à partir de ses échantillons

Théorème

Soit f une fonction dont la transformée de Mellin $M[f]$ a un support sur l'axe imaginaire inclus dans $[-\frac{\pi}{P}, \frac{\pi}{P}]$. Alors f peut être reconstruite en interpolant ses échantillons pris sur une échelle logarithmique:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\exp((n+\theta)P)) (x \exp(-(n+\theta)P))^{-r} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{P} (\ln x - (n+\theta)P) \right)$$



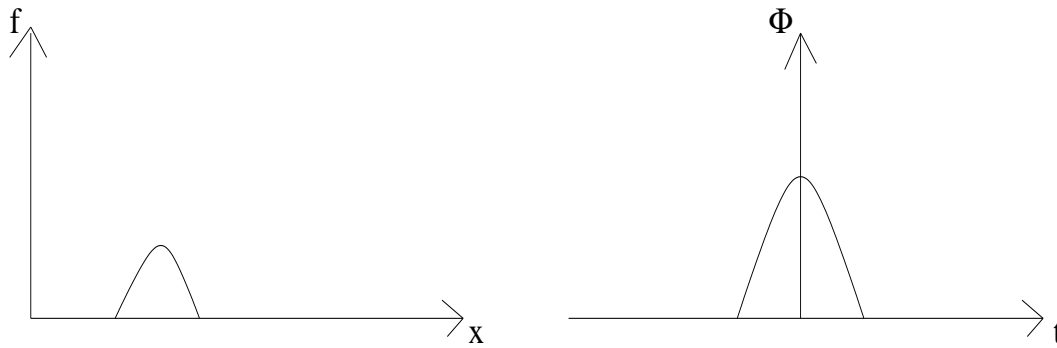
(i) $\text{sinc}(\pi \ln(x))$

Démonstration

On détermine la fonction f comme la transformée de Mellin inverse de $M[f]$, que l'on obtient en isolant une période de la transformée de la fonction échantillonnée:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-(r+it)} M[f](r+it) dt \\
 &= P \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/P}^{+\pi/P} x^{-(r+it)} M \left[f(x) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp((n+\theta)P) \delta(x - \exp((n+\theta)P)) \right) \right] (r+it) dt \\
 &= P \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/P}^{+\pi/P} x^{-(r+it)} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp((n+\theta)P) f(\exp((n+\theta)P)) \right) dt \\
 &= \frac{P}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\exp((n+\theta)P)) \exp((n+\theta)Pr) x^{-r} \int_{-\pi/P}^{+\pi/P} x^{-it} \exp(i(n+\theta)Pt) dt \\
 &= \frac{P}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\exp((n+\theta)P)) \exp((n+\theta)Pr) x^{-r} \frac{2\pi}{P} \text{sinc} \left(\frac{\pi}{P} (\ln x - (n+\theta)P) \right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\exp((n+\theta)P)) (x \exp(-(n+\theta)P))^{-r} \text{sinc} \left(\frac{\pi}{P} (\ln x - (n+\theta)P) \right)
 \end{aligned}$$

4.2 Echantillonnage de la transformée de Mellin

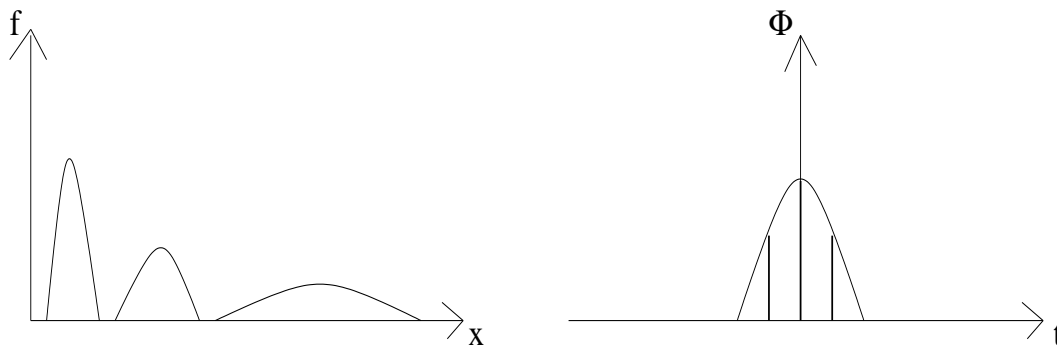


(j) Fonction d'origine et sa transformee

Dans cette section, nous allons montrer que multiplier la transformée de Mellin d'une fonction f par un peigne de Dirac décentré $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - (n + \varphi)T)$ est équivalent à périodiser cette fonction sur une échelle logarithmique et à multiplier chaque période par une exponentielle complexe, en additionnant les dilatées

$$\exp\left(-\frac{2n\pi}{T}(r + i\varphi T)\right) M^{-1}[\Phi]\left(x \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}\right)\right)$$

Cette curieuse transformation s'avérera intéressante car elle permettra d'obtenir un nouveau théorème de reconstruction, qui donnera cette fois ci une condition suffisante sur le support de f pour reconstruire $M[f](r + it)$ à partir de ses échantillons $M[f](r + i(n + \varphi)T)$, pris sur l'axe imaginaire.



(k) Fonction periodisee et dilatee et sa transformee echantillonnee (avec phi=0)

4.2.1 Multiplication de la transformée par un peigne de Dirac sur l'axe imaginaire

Lemme

Soient $\varphi \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. La transformée de Mellin inverse d'une fonction $\Phi(r + it)$ échantillonnée avec un pas T est obtenue en sommant les dilatées $M^{-1}[\Phi]\left(x \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}\right)\right)$:

$$\begin{aligned} & M^{-1}\left[\Phi(r + it) \left(T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - (n + \varphi)T)\right)\right](x) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}(r + i\varphi T)\right) M^{-1}[\Phi]\left(x \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}\right)\right) \end{aligned}$$

Démonstration

On part de la définition de la transformée de Mellin inverse d'une fonction:

$$\begin{aligned} & M^{-1}\left[\Phi(r + it) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - (n + \varphi)T)\right](x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-(r+it)} \Phi(r + it) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - (n + \varphi)T) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{-(r+i(n+\varphi)T)} \Phi(r + i(n + \varphi)T) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{-(r+i(n+\varphi)T)} \int_0^{+\infty} t^{r-1+i(n+\varphi)T} M^{-1}[\Phi](t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} x^{-(r+i\varphi T)} \int_0^{+\infty} t^{r-1+i\varphi T} M^{-1}[\Phi](t) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-inT \ln(\frac{x}{t}))\right) dt \end{aligned}$$

On utilise alors la formule de Poisson:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-inT \ln(\frac{x}{t})) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\ln(\frac{x}{t}) - \frac{2n\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

Or la fonction $f(x) = \ln(\frac{x}{t}) - \frac{2n\pi}{T}$ possède un unique zéro simple en $x_0 = x \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}\right)$, et $\frac{1}{|f'(x_0)|} = x_0$, donc $\delta(f(t)) = x_0 \delta(t - x_0)$, d'où:

$$\delta\left(\ln\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{2n\pi}{T}\right) = x \exp\left(\frac{-2n\pi}{T}\right) \delta\left(t - x \exp\left(\frac{-2n\pi}{T}\right)\right)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-inT \ln(\frac{x}{t})) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x \exp\left(\frac{-2n\pi}{T}\right) \delta\left(t - x \exp\left(\frac{-2n\pi}{T}\right)\right) \end{aligned}$$

Il reste à injecter ce résultat dans la formule précédente:

$$\begin{aligned} & M^{-1}\left[\Phi(r + it) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\right](x) \\ &= \frac{1}{T} x^{-(r+i\varphi T)} \int_0^{+\infty} t^{r-1+i\varphi T} M^{-1}[\Phi](t) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x \exp\left(\frac{-2n\pi}{T}\right) \delta\left(t - x \exp\left(\frac{-2n\pi}{T}\right)\right)\right) dt \\ &= \frac{1}{T} x^{-(r+i\varphi T)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{r-1+i\varphi T} \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}(r - 1 + i\varphi T)\right) M^{-1}[\Phi]\left(x \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}\right)\right) x \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}(r + i\varphi T)\right) M^{-1}[\Phi]\left(x \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}\right)\right) \end{aligned}$$

On en déduit le résultat:

$$\begin{aligned} & M^{-1} \left[\Phi(r+it) \left(T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - (n + \varphi)T) \right) \right] (x) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}(r + i\varphi T)\right) M^{-1}[\Phi] \left(x \exp\left(-\frac{2n\pi}{T}\right) \right) \end{aligned}$$

4.2.2 Théorème de reconstruction de la transformée à partir de ses échantillons

Théorème

Soit Φ une fonction dont la transformée de Mellin inverse $M^{-1}[\Phi]$ a un support inclus dans $[\exp(-\frac{\pi}{T}), \exp(+\frac{\pi}{T})]$. Alors Φ peut être reconstruite en interpolant ses échantillons pris sur l'axe imaginaire:

$$\Phi(r+it) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi(r+i(n+\varphi)T) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{T}(t - (n+\varphi)T) \right)$$

Démonstration

On détermine la fonction Φ comme la transformée de Mellin de $M^{-1}[\Phi]$, que l'on obtient en isolant une période de la transformée inverse de la fonction Φ échantillonnée sur l'axe imaginaire:

$$\begin{aligned} & \Phi(r+it) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{r-1+it} M^{-1}[\Phi](x) dx \\ &= T \int_{\exp(-\pi/T)}^{\exp(+\pi/T)} x^{r-1+it} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{-(r+i(n+\varphi)T)} \Phi(r+i(n+\varphi)T) \right) dx \\ &= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi(r+i(n+\varphi)T) \int_{\exp(-\pi/T)}^{\exp(+\pi/T)} x^{i(t-(n+\varphi)T)-1} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi(r+i(n+\varphi)T) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{T}(t - (n+\varphi)T) \right) \end{aligned}$$

4.3 Transformation de Mellin numérique

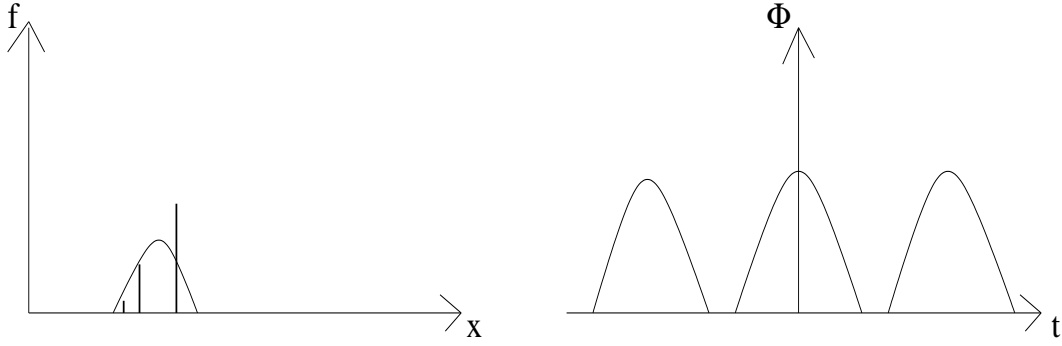
4.3.1 Définition

On veut rapprocher les deux études précédentes pour définir une transformation de Mellin numérique. Dans la section 4.1, nous avons périodisé la transformée de Mellin avec une période égale à $\frac{2\pi}{P}$. Dans la section 4.2, nous l'avons échantillonnée avec un pas égal à T . Pour qu'une période contienne exactement N échantillons, il convient donc de poser:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{P} &= NT \\ \Leftrightarrow P &= \frac{2\pi}{NT} \end{aligned}$$

Les deux lemmes précédents peuvent alors s'énoncer ainsi:

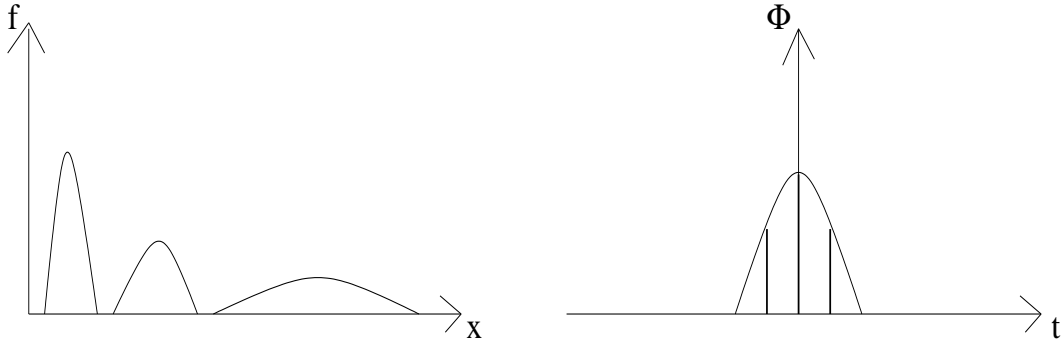
$$\begin{aligned}
& M \left[f(x) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k+\theta)\right) \delta\left(x - \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k+\theta)\right)\right) \right) \right] (r+it) \\
= & \frac{NT}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi in\theta) M[f](r+i(t-nNT))
\end{aligned}$$



(l) Fonction échantillonnée et sa transformée pseudo-périodique

et

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2k\pi}{T}(r+i\varphi T)\right) M^{-1}[\Phi]\left(x \exp\left(-\frac{2k\pi}{T}\right)\right) \\
= & M^{-1}\left[\Phi(r+it) \left(T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - (n+\varphi)T)\right)\right](x)
\end{aligned}$$



(m) Fonction périodisée et dilatée et sa transformée échantillonnée (avec phi=0)

En combinant ces deux résultats, on peut maintenant définir une transformation numérique de la façon suivante:

Soient r , θ et φ trois paramètres fixés, et $N \geq 1$. On appellera “fonction de classe $P(r, \theta, \varphi)$ ” toute suite $\left(f\left[\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k+\theta)\right)\right]\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifiant la relation

$$f\left[\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k+mN+\theta)\right)\right] = \exp\left(-\frac{2\pi}{T}m(r+i\varphi T)\right) f\left[\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k+\theta)\right)\right]$$

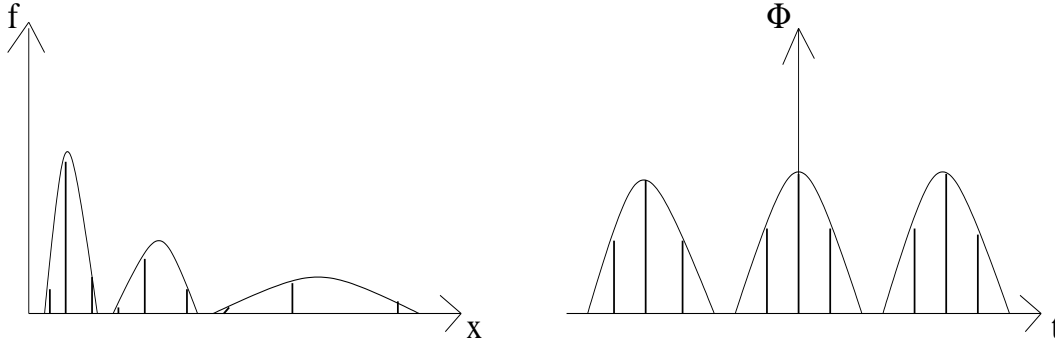
$\forall k \in Z$ et $m \in Z$. Une telle suite est caractérisée par ses valeurs pour $k \in [0, N - 1]$, que nous noterons $(f_k)_{0 \leq k \leq N-1}$.

De même, on appellera “transformée d’une fonction de classe $P(r, \theta, \varphi)$ ” toute suite $(\Phi[r + i(n + \varphi)T])_{n \in Z}$ vérifiant la relation

$$\Phi[r + i(n + mN + \varphi)T] = \exp(2\pi i \theta m) \Phi[r + i(n + \varphi)T]$$

$\forall n \in Z$ et $m \in Z$. Une telle suite est caractérisée par ses valeurs pour $n \in [0, N - 1]$, que nous noterons $(\Phi_n)_{0 \leq n \leq N-1}$.

Ainsi, f est échantillonnée, périodisée et dilatée sur une échelle logarithmique, et Φ est échantillonnée et périodisée sur une échelle uniforme.



Le lecteur aura sans doute remarqué que dans cette définition, les échantillons f_k ne sont pas multipliés par $\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right)$, alors qu’en continu, f est multipliée par

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right) \delta\left(x - \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right)\right)$$

Pour justifier cela, supposons que $f = p_X$ est la densité de probabilité d’une variable aléatoire réelle positive X . Posons alors $Y = \ln(X)$. La formule de changement de variable sur les densités de probabilité donne:

$$\begin{aligned} p_X(x) dx &= p_Y(y) dy \\ \Leftrightarrow p_X(\exp(y)) \exp(y) &= p_Y(y) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & f(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right) \delta\left(x - \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right)\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_X\left(\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right)\right) \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right) \delta\left(x - \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right)\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_Y\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right) \delta\left(x - \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, l’exponentielle disparaît. Notre définition est donc cohérente avec les théorèmes d’échantillonnage si l’on considère les f_k comme des échantillons à pas constant et non à pas logarithmique.

On peut maintenant définir la transformation directe:

$$M[f][r + i(n + \varphi)T] = \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)(r + i(n + \varphi)T)\right) f\left[\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right)\right]$$

et son inverse:

$$M^{-1}[\Phi]\left[\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right)\right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)(r + i(n + \varphi)T)\right) \Phi[r + i(n + \varphi)T]$$

On vérifie que l'on obtient bien $M^{-1}[M[f]] = f$. De plus, les sommes sont indicées entre 0 et $N - 1$, mais la définition est inchangée si l'on somme entre p et $p + N - 1$, où $p \in Z$.

Nous pouvons également définir une convolution de Mellin numérique: si $f \in P(r, \theta_f, \varphi)$ et $g \in P(r, \theta_g, \varphi)$, on peut vérifier que l'égalité

$$f \hat{*} g \left[\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta_f + \theta_g)\right) \right] = \sum_{l=0}^{N-1} f \left[\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(l + \theta_f)\right) \right] g \left[\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k - l + \theta_g)\right) \right]$$

définit une fonction $f \hat{*} g$ de classe $P(r, \theta_f + \theta_g, \varphi)$. Là encore, la définition est inchangée si on ne somme plus entre 0 et $N - 1$, mais entre p et $p + N - 1$, où $p \in Z$.

On peut alors s'assurer que la relation suivante est vérifiée:

$$M[f \hat{*} g] = M[f] M[g]$$

Dans la suite de cet exposé, r , θ et φ ne seront plus des paramètres fixes, mais variables. Or le calcul de la transformée numérique d'une fonction f présuppose que celle-ci vérifie la relation

$$f \left[\exp\left(\frac{2(k + \theta)\pi}{NT}\right) \right] = \exp\left(-\frac{2\pi}{T} [k/N] (r + i\varphi T)\right) f_{k[N]}$$

pour tout $k \in Z$. Il va donc falloir manipuler la transformation numérique avec beaucoup de précautions, car l'appliquer à une fonction qui ne vérifierait pas cette relation n'aurait pas de sens.

4.3.2 Algorithmes de calcul rapide

Le calcul d'une transformée numérique directe ou inverse demande normalement $O(N^2)$ multiplications et additions. Nous allons voir que si N est une puissance de 2, il est possible de réduire le nombre d'opérations à $O(N \log_2 N)$ en réorganisant les calculs, comme c'est le cas pour la transformation de Fourier. Toutefois, il est ici nécessaire de distinguer transformation directe et transformation inverse.

Fast Mellin Transform (FMT)

On calcule d'abord les valeurs paires de la transformée en regroupant les termes en k et $k + \frac{N}{2}$, pour $k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]$:

$$\begin{aligned}
& M[f_k, k \in [0, N-1]] [r + i(2n + \varphi)T] \\
= & \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)(r + i(2n + \varphi)T)\right) f_k \\
= & \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(\frac{2\pi}{\frac{N}{2}T}(k + \theta)\left(\frac{r}{2} + i\left(n + \frac{\varphi}{2}\right)T\right)\right) f_k \\
& + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(\frac{2\pi}{\frac{N}{2}T}\left(k + \frac{N}{2} + \theta\right)\left(\frac{r}{2} + i\left(n + \frac{\varphi}{2}\right)T\right)\right) f_{k+\frac{N}{2}} \\
= & M\left[f_k + \exp\left(\frac{\pi}{T}(r + i\varphi T)\right) f_{k+\frac{N}{2}}, k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]\right] \left[\frac{r}{2} + i\left(n + \frac{\varphi}{2}\right)T\right]
\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs paires sont obtenues en calculant la transformée d'un ensemble de $\frac{N}{2}$ échantillons.

Pour les valeurs impaires de la transformée, le même regroupement donne:

$$\begin{aligned}
& M[f_k, k \in [0, N-1]] [r + i(2n + 1 + \varphi)T] \\
= & \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)(r + i(2n + \varphi)T)\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(k + \theta)\right) f_k \\
= & \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(\frac{2\pi}{\frac{N}{2}T}(k + \theta)\left(\frac{r}{2} + i\left(n + \frac{\varphi}{2}\right)T\right)\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(k + \theta)\right) f_k \\
& + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(\frac{2\pi}{\frac{N}{2}T}\left(k + \frac{N}{2} + \theta\right)\left(\frac{r}{2} + i\left(n + \frac{\varphi}{2}\right)T\right)\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\left(k + \frac{N}{2} + \theta\right)\right) f_{k+\frac{N}{2}} \\
= & M\left[\exp\left(\frac{2\pi i(k+\theta)}{N}\right) \left(f_k - \exp\left(\frac{\pi}{T}(r + i\varphi T)\right) f_{k+\frac{N}{2}}\right), k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]\right] \left[\frac{r}{2} + i\left(n + \frac{\varphi}{2}\right)T\right]
\end{aligned}$$

Les valeurs impaires sont donc elles aussi obtenues en calculant la transformée d'un ensemble de $\frac{N}{2}$ échantillons. On peut ainsi ramener le calcul de la transformée d'un ensemble de N échantillons à celui des transformées de deux ensembles de $\frac{N}{2}$ échantillons. On obtient ainsi un algorithme récursif similaire à l'algorithme FFT, que l'on peut initialiser pour $N = 1$ en posant $M[f_0] = \exp\left(\frac{2\pi\theta}{T}(r + i\varphi T)\right) f_0$. Sa complexité est la même que celle de l'algorithme FFT : $C(N) = O(N \log_2 N)$.

Inverse Fast Mellin Transform (iFMT)

On calcule d'abord les valeurs paires de la transformée inverse en regroupant les termes en k et $k + \frac{N}{2}$, pour $k \in [0, \frac{N}{2} - 1]$. On obtient un résultat similaire au précédent:

$$\begin{aligned}
& M^{-1}[\Phi_n, n \in [0, N-1]] \left[\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(2k + \theta)\right)\right] \\
= & \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{2\pi}{NT}(2k + \theta)(r + i(n + \varphi)T)\right) \Phi_n \\
= & \frac{1}{N/2} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(-\frac{2\pi}{\frac{N}{2}T}\left(k + \frac{\theta}{2}\right)(r + i(n + \varphi)T)\right) \frac{\Phi_n}{2} \\
& + \frac{1}{N/2} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(-\frac{2\pi}{\frac{N}{2}T}\left(k + \frac{\theta}{2}\right)\left(r + i\left(n + \frac{N}{2} + \varphi\right)T\right)\right) \frac{\Phi_{n+\frac{N}{2}}}{2} \\
= & M^{-1}\left[\frac{\Phi_n + \exp(-i\pi\theta)\Phi_{n+\frac{N}{2}}}{2}, n \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]\right] \left[\exp\left(\frac{2\pi}{\frac{N}{2}T}\left(k + \frac{\theta}{2}\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs paires sont obtenues en calculant la transformée inverse d'un ensemble de $\frac{N}{2}$ échantillons.

Pour les valeurs impaires de la transformée inverse, le même regroupement donne:

$$\begin{aligned}
& M^{-1} [\Phi_n, n \in [0, N-1]] \left[\exp \left(\frac{2\pi}{NT} (2k+1+\theta) \right) \right] \\
= & \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left(-\frac{2\pi}{NT} (2k+\theta) (r+i(n+\varphi)T) \right) \exp \left(-\frac{2\pi}{NT} (r+i(n+\varphi)T) \right) \Phi_n \\
= & \frac{1}{N/2} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \exp \left(-\frac{2\pi}{\frac{N}{2}T} \left(k+\frac{\theta}{2} \right) (r+i(n+\varphi)T) \right) \exp \left(-\frac{2\pi}{NT} (r+i(n+\varphi)T) \right) \frac{\Phi_n}{2} \\
& + \frac{1}{N/2} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \exp \left(-\frac{2\pi}{\frac{N}{2}T} \left(k+\frac{\theta}{2} \right) \left(r+i \left(n+\frac{N}{2}+\varphi \right) T \right) \right) \exp \left(-\frac{2\pi}{NT} \left(r+i \left(n+\frac{N}{2}+\varphi \right) T \right) \right) \frac{\Phi_{n+\frac{N}{2}}}{2} \\
= & M^{-1} \left[\exp \left(-\frac{2\pi}{NT} (r+i(n+\varphi)T) \right) \frac{\Phi_n - \exp(-i\pi\theta)\Phi_{n+\frac{N}{2}}}{2}, n \in \left[0, \frac{N}{2}-1 \right] \right] \left[\exp \left(\frac{2\pi}{\frac{N}{2}T} \left(k+\frac{\theta}{2} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Les valeurs impaires sont ici encore obtenues en calculant la transformée inverse d'un ensemble de $\frac{N}{2}$ échantillons.

On obtient donc un algorithme de même complexité que le précédent, que l'on peut initialiser en posant $M^{-1} [\Phi_0] = \exp \left(-\frac{2\pi\theta}{T} (r+i\varphi T) \right) \Phi_o$.

Chapitre 5

Approximation de la transformée de Mellin analogique par la transformée de Mellin numérique

Nous allons montrer dans ce chapitre que la transformation de Mellin numérique est un outil efficace pour approximer la transformation analogique. Dans un premier temps, nous proposerons des méthodes pour mettre en oeuvre cette transformation numérique. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons aux problèmes numériques que peut poser cette transformation.

5.1 Approximation de la transformation directe

5.1.1 Méthode

Soit X une variable aléatoire positive à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$. Comme la transformation de Mellin numérique que nous avons définie repose sur un échantillonnage à pas logarithmique de la densité p_X , nous allons découper cet intervalle en N sous-intervalles de la forme

$$I_k = \left[\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + \theta)\right), \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k + 1 + \theta)\right) \right]$$

pour $k \in \{0, N - 1\}$.

Nous choisirons donc des valeurs de T et θ telles que $a = \exp\left(\frac{2\pi}{NT}\theta\right)$ et $b = \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(N + \theta)\right)$, c'est à dire

$$T = \frac{2\pi}{NP} = \frac{2\pi}{\ln \frac{b}{a}}$$

et

$$\theta = \frac{N \ln a}{\ln \frac{b}{a}}$$

Notons que

$$P = \frac{1}{N} \ln \frac{b}{a}$$

Pour tout $k \in \{0..N-1\}$, on appellera p_k la probabilité pour que X appartienne à l'intervalle I_k :

$$p_k = \int_{I_k} p(x) dx$$

Soit alors f la fonction de classe $P(r, \theta, \varphi)$ définie par

$$f \left[\exp \left(\frac{2\pi}{NT} (k + \theta) \right) \right] = \exp \left(-\frac{2\pi}{T} \lfloor k/N \rfloor (r + i\varphi T) \right) p_{k[N]}$$

Nous allons montrer que la transformée numérique de cette fonction converge vers la transformée analogique de p_X sur l'axe $r + iR$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Remarquons au passage que l'on retrouve une relation similaire à celle que nous avons obtenue pour les variables aléatoires réelles: $M[f][r]$ est égal au moment d'ordre r de la variable aléatoire discrète de loi de probabilité $P \left(X = \exp \left(\frac{2\pi}{NT} (k + \theta) \right) \right) = p_k$. On remarque cependant une petite différence à laquelle il faudra prêter attention: la transformée de Mellin de la densité de probabilité p_X était égale au moment d'ordre $r-1$ de la variable aléatoire X .

5.1.2 Théorème de convergence

Nous considérons ici que T est fixé et nous allons faire tendre N vers $+\infty$.

Théorème

On suppose que p_X est une densité nulle en dehors de l'intervalle

$$\left[\exp \left(\frac{2\pi}{T} \frac{\theta}{N} \right), \exp \left(\frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{\theta}{N} \right) \right) \right]$$

et que

$$\begin{aligned} p_k &= P \left(X \in \left[\exp \left(\frac{2\pi}{NT} (k + \theta) \right), \exp \left(\frac{2\pi}{NT} (k + 1 + \theta) \right) \right] \right) \\ &= \int_{\exp \left(\frac{2\pi}{NT} (k + \theta) \right)}^{\exp \left(\frac{2\pi}{NT} (k + 1 + \theta) \right)} p_X(x) dx \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & |M[p_X](r + i(n + \varphi)T) - M[p_k, k \in [0, N-1]](r - 1 + i(n + \varphi)T)| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} x^{r+i(n+\varphi)T-1} p_X(x) dx - \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left(\frac{2\pi}{NT} (k + \theta) (r + i(n + \varphi)T - 1) \right) p_k \right| \\ &\leq \frac{2\pi}{N} \left(\frac{|r-1|}{T} + |n + \varphi| \right) \max \left(\exp \left(2\pi \frac{\theta}{N} \frac{r-1}{T} \right), \exp \left(2\pi \left(1 + \frac{\theta}{N} \right) \frac{r-1}{T} \right) \right) \end{aligned}$$

On lit sur cette formule que si $|n + \varphi| \ll N$, la transformée numérique de $\{f_k, k \in [0, N-1]\}$ en $s = r - 1 + i(n + \varphi)T$ converge vers la transformée analogique de p_X en $s = r + i(n + \varphi)T$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Démonstration

$$\int_0^{+\infty} x^{r+i(n+\varphi)T-1} p_X(x) dx - \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k+\theta)(r+i(n+\varphi)T-1)\right) p_k$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k+\theta)\right)}^{\exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k+1+\theta)\right)} \left(x^{r+i(n+\varphi)T-1} - \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k+\theta)(r+i(n+\varphi)T-1)\right)\right) p_X(x) dx$$

Posons $x = \exp(t)$:

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{2\pi}{NT}(k+\theta)}^{\frac{2\pi}{NT}(k+1+\theta)} (\exp(t(r+i(n+\varphi)T-1)) - \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k+\theta)(r+i(n+\varphi)T-1)\right)) p_X(\exp(t)) \exp(t) dt$$

Posons $f(t) = \exp(t(r+i(n+\varphi)T-1))$. Alors $\forall t \in \left[\frac{2\pi}{T}\frac{\theta}{N}, \frac{2\pi}{T}\left(1+\frac{\theta}{N}\right)\right]$,

$$|f'(t)| = |(r+i(n+\varphi)T-1)\exp(t(r+i(n+\varphi)T-1))|$$

$$\leq \sqrt{(r-1)^2 + (n+\varphi)^2 T^2} \max\left(\exp\left(\frac{2\pi}{T}\frac{\theta}{N}(r-1)\right), \exp\left(\frac{2\pi}{T}\left(1+\frac{\theta}{N}\right)(r-1)\right)\right)$$

$$\leq (|r-1| + |n+\varphi|T) \max\left(\exp\left(\frac{2\pi}{T}\frac{\theta}{N}(r-1)\right), \exp\left(\frac{2\pi}{T}\left(1+\frac{\theta}{N}\right)(r-1)\right)\right)$$

Posons

$$M(T, r) = (|r-1| + |n+\varphi|T) \max\left(\exp\left(\frac{2\pi}{T}\frac{\theta}{N}(r-1)\right), \exp\left(\frac{2\pi}{T}\left(1+\frac{\theta}{N}\right)(r-1)\right)\right)$$

On déduit de cette inégalité que $\forall t, t' \in \left[\frac{2\pi}{T}\frac{\theta}{N}, \frac{2\pi}{T}\left(1+\frac{\theta}{N}\right)\right]$,

$$|f(t) - f(t')| \leq M(T, r) |t - t'|$$

Donc

$$\left| \int_0^{+\infty} x^{r+i(n+\varphi)T-1} p_X(x) dx - \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi}{NT}(k+\theta)(r+i(n+\varphi)T-1)\right) p_k \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{2\pi}{NT}(k+\theta)}^{\frac{2\pi}{NT}(k+1+\theta)} M(T, r) \left|t - \frac{2k\pi}{NT}\right| p_X(\exp(t)) \exp(t) dt$$

$$\leq \frac{2\pi}{NT} M(T, r) \sum_{k=0}^{N-1} p_k$$

$$\leq \frac{2\pi}{NT} M(T, r)$$

$$\leq \frac{2\pi}{N} \left(\frac{|r-1|}{T} + |n+\varphi|\right) \max\left(\exp\left(2\pi\frac{\theta}{N}\frac{r-1}{T}\right), \exp\left(2\pi\left(1+\frac{\theta}{N}\right)\frac{r-1}{T}\right)\right)$$

5.1.3 Exemple

Nous allons présenter ici les résultats d'une simulation numérique effectuée sous Matlab. Nous avons pris pour exemple une densité uniforme sur l'intervalle $\left[1, \exp\left(\frac{2\pi}{T}\right)\right]$, avec $T = 2\pi$: