



**HAL**  
open science

## Gestion optimale d'une ferme éolienne couplée à un dispositif de stockage

Paul Charton

► **To cite this version:**

Paul Charton. Gestion optimale d'une ferme éolienne couplée à un dispositif de stockage. Congrès SMAI 2013, SMAI, May 2013, Seignosse, France. pp.8, 10.1051/proc/201445043 . hal-00926831v2

**HAL Id: hal-00926831**

**<https://inria.hal.science/hal-00926831v2>**

Submitted on 17 Jan 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## GESTION OPTIMALE D'UNE FERME ÉOLIENNE COUPLÉE À UN DISPOSITIF DE STOCKAGE

PAUL CHARTON<sup>1,2</sup>

**Résumé.** Les producteurs d'électricité doivent planifier leur production et s'y tenir à sous peine de devoir payer des pénalités financières. Du fait du caractère aléatoire de leur production les producteurs utilisant des sources d'énergie renouvelable sont particulièrement sujets à ces pénalités. Nous étudions ici l'utilisation d'un dispositif de stockage permettant de stocker et restituer de l'énergie. Dans un premier temps nous décrivons notre modèle de production et de stockage en temps continu. Nous en dérivons un problème de contrôle stochastique optimal. Puis nous construisons un schéma numérique permettant d'approcher le gain du producteur et la stratégie de stockage/déstockage optimale.

**Abstract.** Electricity producers have to plan their delivery. If their effective delivery does not match the planned one, they have to pay financial penalties. Due to the stochastic nature of their production, renewable energy producers are more exposed to those penalties. We study here the use of a storage device. This device allows to store and release energy. We begin by introducing our production and storage model in continuous time. With this modelization, we obtain an optimal stochastic control problem. Then we describe a numerical method to approximate the maximal expected gain of the producer and the corresponding storage/release strategy.

### INTRODUCTION

Du fait de la quantité limitée d'énergies fossiles et nucléaires disponibles et de leur coût écologique, la tendance actuelle est au développement des énergies renouvelables. En particulier les énergies solaire et éolienne sont en plein essor. L'inconvénient de ces moyens de production réside dans leur caractère aléatoire. En effet, sur certains marchés, les producteurs d'électricité renouvelable sont soumis aux mêmes règles que les autres producteurs. Ils doivent donc décider la veille ( $J - 1$ ) quelles puissances ils s'engagent à fournir sur les différentes plages horaires (0h-1h, 1h-2h, ..., 23h-24h) du jour  $J$ . Tout manquement à l'engagement entraîne des pénalités financières. Dans ce type de problème on rencontre principalement deux difficultés :

- (1) La puissance fournie, sur chaque plage horaire, par un tel moyen de production n'est pas forcément constante.
- (2) La différence entre la prédiction de production au jour  $J - 1$  et la production effective du jour  $J$  peut s'avérer importante.

Pour limiter ces pénalités, une première approche, étudiée dans [7], est de mettre en place une stratégie de couverture financière. Cette approche a deux principaux défauts. Premièrement, le marché de l'électricité

---

<sup>1</sup> Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL)

CNRS : UMR7502 Université de Lorraine e-mail : [paul.charton@univ-lorraine.fr](mailto:paul.charton@univ-lorraine.fr)

<sup>2</sup> TOSCA (INRIA Sophia Antipolis / INRIA Nancy - Grand Est/ IECN)

INRIA CNRS : UMR7502 Université de Lorraine

n'est pas complet, il n'y a donc a priori pas de raison de pouvoir mettre en place une couverture exacte. Deuxièmement, cette méthode permet de se couvrir financièrement contre les pénalités de sous-production et de sur-production mais ne garantit pas l'équilibre du réseau, ce qui peut être dangereux (dommage électrique ou coupure pour certains usagers).

Nous nous intéressons ici à une autre méthode : coupler l'unité de production à un dispositif de stockage. Ce dispositif permet de stocker une partie de l'énergie produite sous une autre forme. On peut par exemple penser à des roues d'inertie ou des turbines à air comprimé. Cette méthode a été étudiée dans le cas discret par exemple dans [3], [8] et [9]. Dans ces travaux les auteurs considèrent l'énergie fournie heure par heure. Lorsque cette quantité est supérieure à ce que le producteur s'était engagé à fournir, alors il paie des pénalités de sur-production proportionnelles à la différence. Et lorsqu'elle est inférieure, il paie des pénalités de sous-production. On peut en fait considérer dans leur modèle que la puissance fournie est constante sur chacune des plages horaires. Cependant, comme l'illustre la figure 1, ce n'est pas le cas en pratique. Dans ce cas le producteur paie à la fois des pénalités de sous-production et des pénalités de sur-production, ce qui n'est pas possible dans les modèles précédents. Un autre élément à prendre en compte est le coût d'utilisation du dispositif de stockage. Ce coût n'est pas forcément une fonction linéaire de l'énergie chargée ou déchargée. Par exemple pour certains types de batterie, le nombre de cycles charge/décharge supportés diminue significativement si les décharges sont trop profondes, c'est-à-dire si le niveau d'énergie stockée est trop bas. Il faut alors changer plus régulièrement les batteries. Puiser une certaine quantité d'énergie dans ces batteries n'aura donc pas le même coût selon leur niveau de charge. Si on ne considère que la variation d'énergie stockée sur la période, il est alors difficile de modéliser ce type de coût. C'est pourquoi nous proposons un modèle en temps continu.

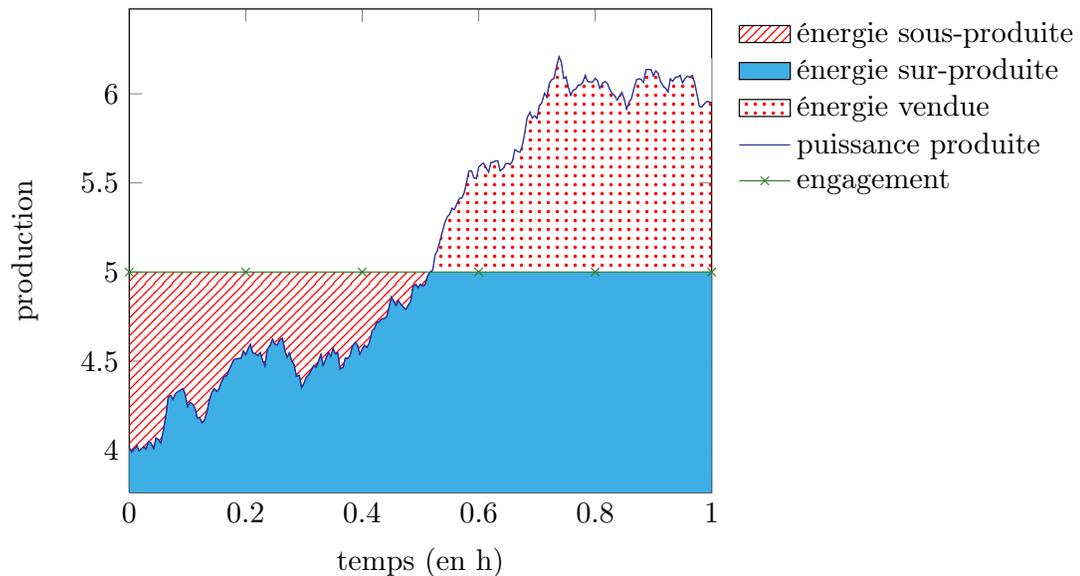


FIGURE 1. Exemple de production sur une plage horaire

Dans cet article nous considérons une ferme éolienne. Nous modélisons la puissance fournie par la ferme comme étant un processus stochastique à temps continu, solution d'une EDS. Pour cette première approche, nous supposons que les pénalités et les prix de vente sont connus, nous discuterons dans la suite de la signification et de la pertinence de ce choix. À chaque instant le producteur doit choisir si il charge ou décharge le dispositif de stockage. Il cherche alors une stratégie pour maximiser le gain moyen sur la période. Il s'agit donc d'un problème de contrôle stochastique optimal.

Nous utilisons une approche orientée équation aux dérivées partielles (EDP). Comme montré dans [10], notre problème de contrôle se ramène à la résolution d'une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Il existe des méthodes génériques de différences finies (voir par exemple [2]), pour approcher numériquement la solution d'une équation de HJB dans le cas général. Ce genre de résolution nécessite de résoudre un système non-linéaire de grande taille. Pour résoudre ce système les méthodes directes sont, si elles existent, trop coûteuses en temps de calcul. Dans [6] les auteurs proposent une méthode itérative pour résoudre ce système. Cette méthode consiste à calculer itérativement et alternativement la solution discrétisée pour un contrôle donné en tout point de la grille, puis le contrôle qui maximise le hamiltonien pour la solution ainsi construite, jusqu'à convergence de l'algorithme. Cette méthode a l'avantage d'être applicable à toute équation de HJB, mais le désavantage d'être lente.

La méthode précédente peut être optimisée pour les problèmes de type bang-bang, c'est-à-dire ceux où l'ensemble des valeurs que peut prendre le contrôle est soit fini, soit peut être réduit à un ensemble fini. C'est notamment le cas lorsque l'équation de HJB considérée est convexe par rapport au choix du contrôle. La recherche du maximum consiste alors à comparer un nombre fini de valeurs ce qui diminue la complexité de l'algorithme. Cependant, pour un certain nombre de problèmes, il existe des méthodes plus efficaces qui s'appuient sur les particularités de l'équation.

Notre contrôle n'a d'influence que sur le niveau du stock qui est un processus à variation finie. En ce sens notre problème est donc similaire à celui étudié dans [5]. Les auteurs de ces travaux utilisent une approche semi-lagrangienne pour obtenir un nouveau schéma de différence finie. Le schéma numérique obtenu demande de résoudre un problème d'optimisation en chaque point du maillage, puis de résoudre un système linéaire. La résolution du problème d'optimisation est équivalente en terme de temps de calcul à la recherche de maximum de l'algorithme précédent. Cependant, il n'y a plus d'itération. La complexité numérique est donc beaucoup moins importante. De plus, dans le cas où le problème de contrôle est de type bang-bang, la complexité de ce schéma numérique est du même ordre que celle d'un schéma classique de différences finies. C'est cette méthode que nous avons adaptée pour résoudre notre problème de contrôle.

Nous commençons par présenter notre modèle pour la production et le stockage. Ce modèle respecte la capacité de production maximale de la ferme, et la capacité de stockage maximale du dispositif. Les processus obtenus sont alors positifs et bornés de manière déterministe. Ceci nous permet de formuler ensuite un problème de contrôle stochastique optimal. Dans ces conditions, notre problème est équivalent à la résolution d'une équation de HJB modifiée. Cette équation est définie sur l'ensemble des points respectant les bornes du stock et de la production. En particulier cette équation est vérifiée sur les bords de ce domaine. Ceci évite d'avoir à introduire des conditions au bord artificielles. Puis, à l'aide d'un raisonnement heuristique nous introduisons notre schéma numérique de résolution adapté de [5]. Enfin, nous présentons quelques résultats numériques obtenus.

## 1. LE MODÈLE ET LE PROBLÈME DE CONTRÔLE STOCHASTIQUE OPTIMAL ASSOCIÉ

### 1.1. Fixation des prix et des pénalités

Une journée  $J$  est divisée en 24 périodes de production d'une heure  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$ , ... Un producteur d'énergie désirant vendre de l'électricité lors de la période  $[i - 1, i]$  doit choisir la puissance constante ( $W_i^E$ ) qu'il s'engage à délivrer durant cette période. Il doit ensuite transmettre ses différents engagements de production à l'organisme régulateur du réseau avant l'instant  $t^s$  le jour  $J - 1$ . L'organisme régulateur du réseau communique ensuite à l'instant  $t^{prix}$  le jour  $J - 1$ , les prix  $P_i \in (\text{kWh})^{-1}$  auxquels l'énergie délivrée dans les limites de l'engagement est achetée sur les différentes périodes.

Lors de la journée  $J$ , le producteur délivre au réseau à chaque instant une puissance de  $W_t^{del}$  kW. Tous les producteurs ne tiennent pas forcément leurs engagements ce qui induit un déséquilibre énergétique. L'organisme régulateur utilise alors diverses méthodes pour assurer l'équilibre énergétique, ce qui a un coût. Ce coût est répercuté sous forme de pénalités financières payées par les producteurs n'ayant pas tenu leurs engagements. Ces pénalités sont proportionnelles à la contribution au déséquilibre. Elles dépendent de la période ainsi que des manques ou excès de livraison par rapport à l'engagement pris. Ces pénalités sont communiquées après la

période de production à l'instant  $t^{pen}$ . On peut alors attribuer à chacune de ces périodes respectivement  $C_i^+$  et  $C_i^-$  représentant le prix de l'énergie sur-produite est sous-produite. Le gain effectué par le producteur sur la journée se calcule de la manière suivante :

$$\sum_{i=1}^{24} \left\{ \int_{i-1}^i \left( \min(W_t^{del}, W_i^E) P_i - C_i^+ (W_t^{del} - W_i^E)_+ - C_i^- (W_i^E - W_t^{del})_+ \right) dt \right\}, \quad (1)$$

où pour tout réel  $x$ ,  $x_+$  est la partie positive de  $x$  définie par  $x_+ = \max(x, 0)$ .

Dans la suite on se placera du point de vue d'un producteur d'électricité éolienne. On supposera que la capacité de production d'électricité éolienne est faible par rapport à l'énergie nécessaire au réseau. On pourra donc supposer que les pénalités sont indépendantes de la production de la ferme éolienne. Cette hypothèse permet une première approche simplifiée de ce problème. Il serait intéressant d'introduire une dépendance dans les travaux ultérieurs. Nous cherchons à maximiser l'espérance de gain, on peut donc supposer que les pénalités sont constantes et égales à leur moyenne. On se placera après l'instant  $t^{prix}$ , les prix et engagements seront alors connus. La figure 2 récapitule la chronologie des différents événements.

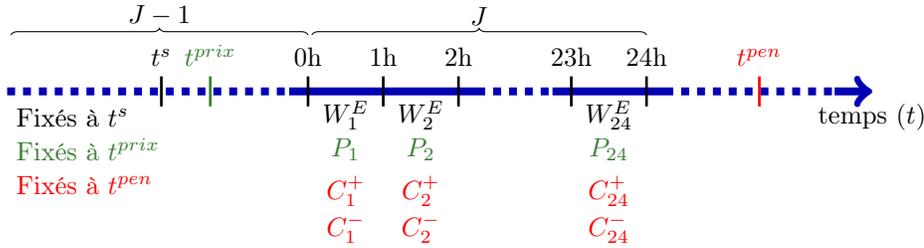


FIGURE 2. Chronologie de la fixation des prix de l'électricité et des pénalités

## 1.2. Production

Nous allons maintenant considérer un cadre probabiliste. Soit  $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré, dans lequel la filtration  $\mathcal{F}$  représente l'information disponible au cours du temps.

On note  $W = (W_t)_{t \in [0, 24]}$  le processus représentant la puissance fournie sur l'intervalle  $[0, 24]$  et on le définit comme étant solution de l'EDS suivante :

$$W_t = W_0 + \int_0^t \sigma(s, W_s) dB_s + \int_0^t b(s, W_s) ds, \quad (2)$$

où  $W_0$  est une variable aléatoire  $L^2$   $\mathcal{F}_0$ -mesurable,  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien pour la filtration  $\mathcal{F}$  et  $\sigma, b : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions lipschitziennes.

La ferme éolienne a une capacité de production maximale de  $M_W$  kW. Le processus  $W$  représentant la production, doit donc être à valeurs dans  $[0, M_W]$ . Pour s'en assurer on fait les hypothèses suivantes :

$$\forall t \in [0, 24], \quad b(t, M_W) \leq 0, \quad \sigma(t, M_W) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(W_0 \leq M_W) = 1, \quad (\mathcal{H}_1)$$

$$\forall t \in [0, 24], \quad b(t, 0) \geq 0, \quad \sigma(t, 0) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(W_0 \geq 0) = 1. \quad (\mathcal{H}_2)$$

Nous avons alors le résultat suivant :

### Proposition 1.1.

- (1) Si l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$  est vérifiée alors  $\mathbb{P}(\forall t \in [0, 24]; W_t \leq M_W) = 1$ .
- (2) Si l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$  est vérifiée alors  $\mathbb{P}(\forall t \in [0, 24]; W_t \geq 0) = 1$ .

### 1.3. Stockage et contrôle

On associe à la ferme éolienne un dispositif permettant de stocker et de restituer de l'énergie. Ce dispositif a une capacité de stockage maximale de  $M_Q$  kWh. À chaque instant le producteur doit donc choisir s'il emmagasine de l'énergie, restitue de l'énergie ou n'utilise pas son dispositif. Nous représentons cela de la manière suivante. Soient  $f^{stock}, f^{del} : [0, M_W] \times [0, M_Q] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions lipschitziennes telles que :

$$f^{del}(w, q, 0) = 0, \quad \forall (w, q) \in [0, M_W] \times [0, M_Q], \quad (\mathcal{H}_3)$$

$$\forall (w, q) \in [0, M_W] \times [0, M_Q], \text{ la fonction } u \rightarrow f^{stock}(w, q, u) \text{ est croissante,} \quad (\mathcal{H}_4)$$

$$\forall (w, q) \in [0, M_W] \times [0, M_Q], \text{ la fonction } u \rightarrow f^{del}(w, q, u) \text{ est décroissante,} \quad (\mathcal{H}_5)$$

$$f^{stock}(w, M_Q, u) = 0, \quad \forall (w, u) \in [0, M_W] \times [0, 1], \quad (\mathcal{H}_6)$$

$$f^{del}(w, 0, u) = 0, \quad \forall (w, u) \in [0, M_W] \times [-1, 0], \quad (\mathcal{H}_7)$$

$$f^{del}(w, q, u) + w \geq 0, \quad \forall (w, q, u) \in [0, M_W] \times [0, M_Q] \times [0, 1], \quad (\mathcal{H}_8)$$

$$f^{stock}(w, q, u) \leq -f^{del}(w, q, u), \quad \forall (w, q, u) \in [0, M_W] \times [0, M_Q] \times [-1, 1]. \quad (\mathcal{H}_9)$$

Supposons qu'à l'instant  $t \in [0, T]$   $Q_t$  kWh sont stockés, on choisit en fonction des informations disponibles  $u_t \in [-1, 1]$ . La variation d'énergie du stock à l'instant  $t$  est alors de  $f^{stock}(W_t, Q_t, u_t)dt$  kWh et on délivre  $W_t^{del} = W_t + f^{del}(W_t, Q_t, u_t)$  kW au réseau.

D'après les hypothèses précédentes, le choix de  $u_t$  s'interprète de la manière suivante. Si  $u_t = 0$  on n'utilise pas le dispositif et toute l'énergie produite est délivrée sur le réseau ( $\mathcal{H}_3$ ). Si  $u_t > 0$  alors on stocke une partie de la production ( $\mathcal{H}_4$ ) et on délivre moins d'énergie au réseau ( $\mathcal{H}_5$ ). Plus  $u_t$  est proche de 1 plus on stocke vite et moins on délivre d'énergie au réseau. Si  $u_t < 0$  alors cette fois on puise dans le stock pour délivrer une puissance supérieure.

Les autres hypothèses servent à vérifier des propriétés physiques. Si le stock est vide alors on ne peut plus y puiser d'énergie ( $\mathcal{H}_7$ ) et s'il est plein on ne peut plus stocker ( $\mathcal{H}_6$ ). On ne peut stocker plus vite que l'on ne produit ( $\mathcal{H}_8$ ) et il ne peut pas y avoir de création d'énergie lors du stockage ou de la restitution ( $\mathcal{H}_9$ ).

Dans la suite nous cherchons à maximiser le gain en utilisant au mieux ce dispositif, en gardant à l'esprit que les choix sont fait uniquement en fonction des informations disponibles et donc doivent être adaptés à la filtration  $\mathcal{F}$ . On définit les stratégies de la manière suivante :

**Définition 1.2.** Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des processus  $\mathcal{F}$ -adaptés à valeurs dans  $[-1, 1]$ , on appelle  $\mathcal{A}$  l'ensemble des stratégies admissibles.

À toute stratégie admissible  $u$  et à tout niveau initial de stock  $Q_0$ , on associe le processus  $Q^u$  solution de :

$$Q_t^u = Q_0 + \int_0^t f^{stock}(W_s, Q_s^u, U_s) ds. \quad (3)$$

Le processus  $Q^u$  représente l'évolution du stock au cours du temps, associé à la stratégie  $u$ . On représente alors la puissance délivrée par le processus  $W^{del,u} = (W_t^{del,u})_{t \geq 0}$  défini par :

$$W_t^{del,u} = W_t + f^{del}(W_t, Q_t^u, u_t). \quad (4)$$

Le processus  $Q^u$  est défini de manière unique et reste compris entre les bornes du stock.

**Proposition 1.3.** Si les hypothèses ( $\mathcal{H}_3$ )-( $\mathcal{H}_9$ ) sont vérifiées alors, pour tout  $Q_0 \in [0, M_Q]$ , et tout  $u \in \mathcal{A}$  :

- (i) Il y a existence et unicité de la solution de l'équation (3).
- (ii) Le processus  $Q^u$ , solution de (3), est à valeurs dans  $[0, M_Q]$ .

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction, l'utilisation de ce dispositif peut avoir un coût. Nous représentons ce coût à l'aide d'une fonction  $c : [0, M_W] \times [0, M_Q] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne. A chaque instant  $t$ , l'utilisation du dispositif a un coût de  $c(W_t, Q_t^u, u_t) \in \mathfrak{h}^{-1}$ .

#### 1.4. Gain

Dans notre modèle et en particulier d'après (1) et (4) le gain de la journée, associé à la stratégie  $u \in \mathcal{A}$ , s'exprime de la manière suivante

$$\begin{aligned} G^u &= \sum_{i=1}^{24} \left\{ \int_{i-1}^i \left( \min(W_t^{del,u}, W_i^E) P_i - C_i^+(W_t^{del,u} - W_i^E)_+ - C_i^-(W_i^E - W_t^{del,u})_+ - c(W_t, Q_t^u, u_t) \right) dt \right\} \\ &:= \int_0^{24} g(t, W_t, Q_t^u, u_t) dt, \end{aligned}$$

où  $g$  est définie de manière évidente sur chacun des intervalles  $[i-1, i]$ .

On cherche à maximiser l'espérance de gain du producteur dans son ensemble et pas uniquement sur cette période de production. Or la stratégie choisie détermine le niveau du stock à la fin de la journée et ce niveau influe directement sur le gain de la journée suivante. Par exemple, un niveau de stock trop bas est désavantageux si la production est inférieure aux engagements. De même, si le niveau de stock est trop important, on pourra difficilement absorber la surproduction. Comme nous sommes dans un modèle markovien nous allons représenter les gains sur les périodes à l'aide d'un gain moyen potentiel dépendant uniquement de la production et du niveau du stock à la fin de la période ( $t = 24$ ). Soit  $h : [0, M_W] \times [0, M_Q] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne,  $h(W_{24}, Q_{24}^u)$  représente le gain moyen potentiel sur les périodes suivantes. C'est-à-dire le gain moyen lorsqu'on utilise au mieux le dispositif de stockage.

Nous obtenons alors un problème de contrôle stochastique optimal. Un des outils classique de ce domaine est l'équation de HJB. Pour l'utiliser on introduit la fonction  $v : [0, 24] \times [0, M_W] \times [0, M_Q] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$v(t, w, q) = \sup_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[ \int_t^{24} g(W_s, Q_s^u, u_s) ds + h(W_{24}, Q_{24}^u) \mid W_t = w, Q_t^u = q \right].$$

Cette fonction associe à un instant  $t$ , une puissance produite  $w$  et un niveau de stock  $q$ , le gain moyen réalisé à partir de l'instant  $t$  lorsque le dispositif de stockage est utilisé au mieux. L'objectif devient alors de trouver une stratégie  $u^\varepsilon \in \mathcal{A}$  telle que :

$$v(0, W_0, Q_0) = \mathbb{E} \left[ \int_0^{24} g(W_s, Q_s^{u^\varepsilon}, u_s^\varepsilon) ds + h(W_{24}, Q_{24}^{u^\varepsilon}) \right] + \varepsilon,$$

où  $\varepsilon$  est un réel positif fixé. Idéalement, il faudrait trouver  $u^0$ , mais ce n'est pas toujours possible car le supremum d'un ensemble n'est pas toujours atteint. On cherche alors à être au plus près de ce supremum en fixant  $\varepsilon$  petit. On parle dans ce cas de stratégie  $\varepsilon$ -optimale.

Nous allons dans la suite expliquer comment à la fois approcher la fonction  $v$  et construire une stratégie approchant la stratégie optimale par une approche EDP.

## 2. ÉQUATION DE HJB ET APPROXIMATION NUMÉRIQUE

### 2.1. Équation de HJB

Comme nous le démontrons dans dans [4], la fonction  $v$  est solution au sens de viscosité de l'équation de HJB suivante :

$$\begin{cases} \partial_t v + \mathcal{L}v + \sup_{u \in [-1,1]} \{f^{stock}(w, q, u) \partial_q v + g(t, w, q, u)\} = 0, \quad \forall (t, w, q) \in [0, 24] \times [0, M_W] \times [0, M_Q], \\ v(24, w, q) = h(w, q), \quad \forall (w, q) \in [0, M_W] \times [0, M_Q], \end{cases} \quad (\text{HJB})$$

où  $\mathcal{L}$  est le générateur infinitésimal de  $(W_t)_{t \in [0, 24]}$ . Cette équation de HJB est particulière au niveau de ses conditions au bord. En effet on fixe uniquement la valeur terminale. Comme le processus  $(W_t, Q_t^u)_{t \in [0, 24]}$  est à valeurs dans  $[0, M_W] \times [0, M_Q]$ , les points de la frontière spatiale se comportent comme des points intérieurs pour le processus  $(W_t, Q_t^u)_{t \in [0, 24]}$ , on peut donc y étendre l'équation de HJB.

Dans ce même article nous avons montré que l'équation (HJB) vérifie un théorème de comparaison :

**Théorème 2.1.** *Si  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  sont respectivement sur-solution et sous-solution de l'équation (HJB) alors :*

$$\bar{u} \geq \underline{u}.$$

Ce résultat implique l'unicité et la continuité de la solution de l'équation (HJB). Il intervient aussi dans la preuve de la convergence de l'algorithme que nous allons présenter dans la prochaine partie.

### 2.2. Schéma quasi-variationnel et résultats numériques

La non linéarité de l'équation (HJB) n'intervient que sur un terme d'ordre 1 ou terme de transport. En cela notre problème est similaire à celui discuté dans [5]. Dans cet article les auteurs obtiennent un schéma numérique par un raisonnement heuristique. Ils utilisent ensuite les arguments développés par Guy Barles dans [1] pour prouver que ce schéma est convergent. C'est cette approche que nous avons décidé d'adapter à notre problème.

Nous allons ici juste donner les grandes lignes permettant d'obtenir un schéma convergent. Le détail du schéma et la preuve de sa convergence sont disponibles dans [4]. Les calculs que nous allons effectuer sont purement formels. Ainsi on supposera par exemple que la fonction  $v$  est suffisamment régulière pour que toutes les dérivées utilisées aient un sens. En général ce n'est pas le cas. Cependant les résultats que nous utilisons pour prouver la convergence nécessitent uniquement de pouvoir effectuer ces opérations avec des fonctions suffisamment régulières.

D'après l'équation (HJB), pour tout  $\tau_1 < \tau_2$  et pour toute fonction  $Q; [\tau_1, \tau_2] \rightarrow [0, M_Q]$  on a :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sup_{u \in [-1,1]} \{ \partial_t v(t, w, Q(t)) + \mathcal{L}(t, w)v(t, w, Q(t)) + f^{stock}(w, Q(t), u) \partial_q v(t, w, Q(t)) + g(w, Q(t), u) \} dt = 0.$$

En étudiant le cas des stratégies constantes par morceaux et en utilisant la densité de ces stratégies dans l'ensemble des stratégies admissibles on peut montrer que l'intégrale et le *sup* commutent :

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \partial_t v(t, w, Q(t)) + \mathcal{L}(t, w)v(t, w, Q(t)) + f^{stock}(w, Q(t), u_t) \partial_q v(t, w, Q(t)) + g(w, Q(t), u_t) dt \right\} = 0,$$

où  $\mathcal{U}$  est un certain ensemble de fonctions à valeur dans  $[-1, 1]$ . Alors en particulier pour la fonction  $Q^u$  solution de :

$$Q^u(t) = q + \int_{\tau_1}^t f^{stock}(w, Q^u(s), u_s) ds, \quad (5)$$

on obtient :

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \partial_t v(t, w, Q^u(t)) + \mathcal{L}(t, w)v(t, w, Q^u(t)) + \partial_t Q^u(t) \partial_q v(t, w, Q^u(t)) + g(w, Q^u(t), u_t) dt \right\} = 0,$$

cela revient à dire qu'à tout instant on choisit la stratégie réalisant le supremum. En utilisant une intégration par parties il suit :

$$v(\tau_1, w, q) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ v(\tau_2, w, Q^u(\tau_2)) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(t, w)v(t, w, Q^u(t)) + g(w, Q^u(t), u_t) dt \right\}.$$

Rappelons que nous connaissons la valeur terminale de  $v$ , on cherche donc à résoudre cette équation de manière rétrograde. On utilise la méthode des rectangles à gauche pour approcher les diverses intégrales (ce qui correspond à un schéma implicite). On obtient alors :

$$Q^u(\tau_2) = q + (\tau_2 - \tau_1) f^{stock}(w, q, u_{\tau_1}) := \bar{Q}(u_{\tau_1}), \text{ et}$$

$$v(\tau_1, w, q) - (\tau_2 - \tau_1) \mathcal{L}(\tau_1, w)v(\tau_1, w, q) = \sup_{u_{\tau_1} \in [-1, 1]} \left\{ v(\tau_2, w, \bar{Q}(u_{\tau_1})) + (\tau_2 - \tau_1) g(w, q, u_{\tau_1}) \right\}.$$

On utilise ensuite les opérateurs de différences finies classiques pour approcher l'opérateur  $\mathcal{L}$  et on approche  $v$  par interpolation linéaire lorsque  $\bar{Q}(u_{\tau_1})$  n'est pas sur la grille de discrétisation. Notre schéma se résout donc en deux temps. Premièrement, en chaque point de la grille on résout un problème d'optimisation sur des quantités connues (on procède de manière rétrograde donc toutes les approximations au temps  $\tau_2$  sont connues). Ensuite, on résout un système linéaire pour obtenir les approximations au temps  $\tau_1$ . On garde en mémoire la solution du problème de maximisation car elle donne une approximation de la stratégie optimale au temps  $\tau_1$  sur les points de la grille. Les figures 3 et 4 représentent les résultats obtenus par cette méthode à un instant  $t$  fixé.

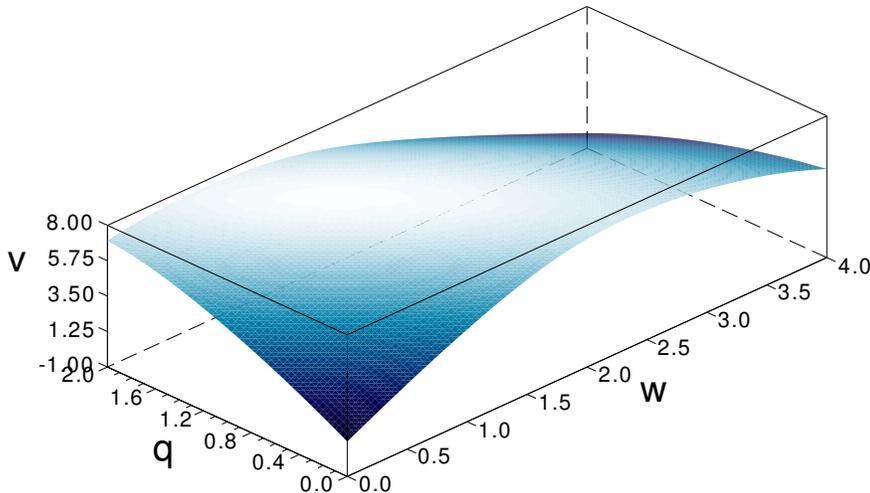
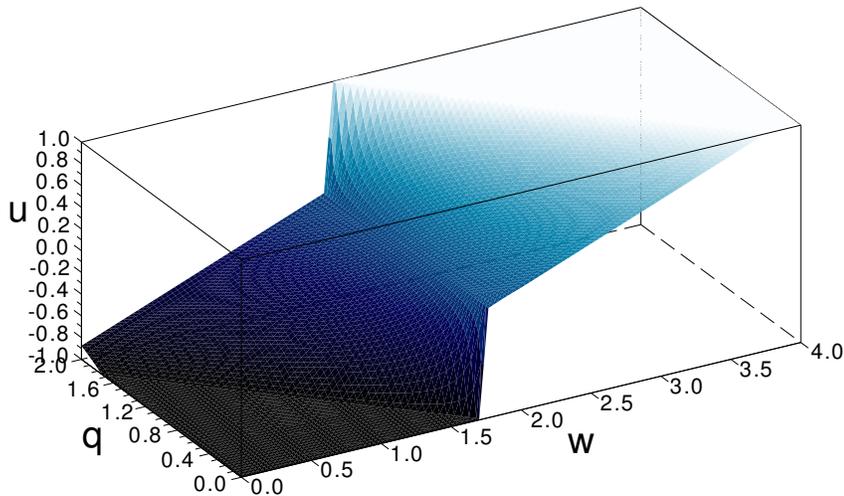


FIGURE 3. Approximation de  $v$  à un temps  $t$

FIGURE 4. Stratégie retenue lors de la résolution au temps  $t$ 

## RÉFÉRENCES

- [1] G. BARLES et P. E. SOUGANIDIS : Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic Anal.*, 4(3):271–283, 1991.
- [2] J. BONNANS et H. ZIDANI : Consistency of generalized finite difference schemes for the stochastic HJB equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(3):1008–1021, 2003.
- [3] E.D. CASTRONUOVO et J.A.P. LOPES : On the optimization of the daily operation of a wind-hydro power plant. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19(3):1599 – 1606, aug. 2004.
- [4] P. CHARTON : Optimal Operation of a Wind Farm equipped with a Storage Unit. <http://hal.inria.fr/hal-00834142>.
- [5] Z. CHEN et P. A. FORSYTH : A semi-Lagrangian approach for natural gas storage valuation and optimal operation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(1):339–368, 2007/08.
- [6] P. A. FORSYTH et G. LABAHN : Numerical methods for controlled Hamilton-Jacobi-Bellman PDEs in finance. *J. Comput. Finance*, 11(2):1, 2007.
- [7] K. W. HEDMAN et G. B. SHEBLE : Comparing hedging methods for wind power : Using pumped storage hydro units vs. options purchasing. In *Probabilistic Methods Applied to Power Systems, 2006. PMAPS 2006. International Conference on*, pages 1–6, june 2006.
- [8] W. LEONHARD et E.M. GROBE : Sustainable electrical energy supply with wind and pumped storage - a realistic long-term strategy or utopia? In *Power Engineering Society General Meeting, 2004. IEEE*, pages 1221–1225 Vol.2, june 2004.
- [9] R.B. SCHAIKNER : Executive overview : energy storage options for a sustainable energy future. In *Power Engineering Society General Meeting, 2004. IEEE*, pages 2309–2314 Vol.2, june 2004.
- [10] J. YONG et X.Y. ZHOU : *Stochastic Controls : Hamiltonian Systems and HJB Equations*. Applications of Mathematics. Springer, 1999.