HAL
open science

Sur la synchronisation de systèmes chaotiques bidirectionnellement couplés

Laurent Laval, Jean-Pierre Barbot, Christophe Letellier

To cite this version:

Laurent Laval, Jean-Pierre Barbot, Christophe Letellier. Sur la synchronisation de systèmes chaotiques bidirectionnellement couplés. Rencontre du Non-Linéaire 2013, Mar 2013, Paris, France. hal-00923671

HAL Id: hal-00923671

https://inria.hal.science/hal-00923671v1

Submitted on 3 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la synchronisation de systèmes chaotiques bidirectionnellement couplés

Laurent Laval[1], Jean-Pierre Barbot[1] & Christophe Letellier[2]

[1] ECS-Lab / ENSEA, 6 avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise, France
[2] CORIA, Université de Rouen, BP 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France
laval@ensea.fr

Résumé. Basé sur la considération de systèmes chaotiques de Rössler, cet article présente une étude de la synchronisation forcée de deux systèmes couplés, de manière bidirectionnelle, au travers de la transmission de signaux unidimensionnels ne dépendant explicitement que d'une seule variable d'état (côté émetteur) et n'influençant directement que la dynamique correspondante à l'état transmis (côté récepteur). En regard de cette configuration et d'une analyse basée sur la Théorie de la Commande, nous mettons alors en exergue que la synchronisation (partielle ou complète) relève essentiellement de conditions sur la *stabilisabilité* des écarts de trajectoires des deux systèmes. De plus, nous mettons en évidence que, même si elle s'avère effective, la synchronisation complète ne peut pas, d'un point de vue théorique, être garantie de manière absolue pour tout temps t ; celle-ci dépendant explicitement de la région de l'espace (borné) dans laquelle les trajectoires des systèmes évoluent majoritairement.

Abstract. Considering two chaotic Rössler systems, this paper presents a study on the forced synchronization of two systems, bidirectionally coupled by transmitting unidirectionnal signals which explicitly depend on a single state variable (from the emitter) and only affect directly the dynamics corresponding to the transmitted state variable (of the receiver). According to an analysis based on the control theory, we exhibit that (partial or complete) synchronization mainly depends on conditions about the *stabilisability* of variations between the trajectories of the two systems. Morevover, we point out that, even if it is effective, complete synchronization can not, from a theoretical point of view, be absolutly guaranteed for all time t, as it explicitly depends on the domain of the (bounded) space in which the trajectories of systems mostly evolve.

1 Introduction

Depuis le résultat de Pecora et Caroll [1], une multitude d'articles a été consacrée à la synchronisation de systèmes chaotiques [1] (voir, par exemple, [2,3] et les références internes). Dans la très grande majorité des cas, ces articles considèrent des configurations de type Maître/Esclave, synonymes de couplages unidirectionnels (seul le système Maître transmettant des informations ou des ordres de commande à l'Esclave chargé de se synchroniser). En regard de cette forme de couplage et de l'appairage, à l'identique ou hétérogène, de divers systèmes chaotiques (tels que ceux de Lorenz, Chua, Rössler, Chen...), de nombreux critères de synchronisabilité ont alors été définis, que ce soit dans le cadre de la synchronisation libre ou forcée. Toutefois, à notre connaissance, hormis l'investigation de certaines approches telle que la théorie des graphes et du consensus [8], très peu d'études relatives au cas d'un couplage bidirectionnel (où chaque système est à la fois Maître et Esclave) avec contrôle de chaque système, ont été menées en considérant la Théorie de la Commande pour support (à l'instar, par exemple, de [4] pour le cas unidirectionnel). Pourtant, dans une telle configuration, chaque système influence la dynamique de l'autre par le biais des couplages. De ce fait, la synchronisation relève de l'évolution de chaque système vers un comportement consensuel ; augmentant alors la complexité de son analyse comparativement au cas d'un simple suivi d'une trajectoire de référence. Cet article vise ainsi à étudier, sur le plan théorique, l'existence de conditions sur l'obtention d'un tel consensus, synonyme de synchronisation des deux systèmes.

Dans ce cadre, la section 2 présente la configuration considérée et la problématique étudiée. La section 3 est consacrée à la dynamique de l'erreur de synchronisation, en cherchant à définir des critères d'obtention d'une synchronisation partielle ou complète. Enfin, au travers d'une conclusion, les résultats obtenus sont résumés en section 4 et accompagnés de suggestions d'extensions potentielles aux travaux présentés.

1. qu'il s'agisse de paires ou d'ensembles (i.e. de réseaux) de systèmes.

2 Définition du problème

Cette étude considère deux systèmes de Rössler identiques (c.a.d. possédant la même structure mathématique et les mêmes paramètres de modèles), évoluant à partir de conditions initiales différentes (de telle sorte que, en l'absence de couplage et de tout contrôle, leurs trajectoires respectives soient décorrélées). Ces deux systèmes, notés respectivement Σ_1 et Σ_2, sont alors définis, dans leur forme non couplée, comme suit [5] :

$$\Sigma_{i=1..2} \quad \begin{cases} \dot{x}_i = -y_i - z_i \\ \dot{y}_i = x_i + a y_i \\ \dot{z}_i = b + z_i\,(x_i - c) \end{cases} \tag{1}$$

où $x_i \in \mathbb{R}$, $y_i \in \mathbb{R}$ et $z_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1..2)$ sont les états respectifs des systèmes Σ_1 et Σ_2. a, b et c sont les paramètres, supposés identiques pour les deux systèmes et tels que $a \in [0.126; 0.43295]$, $b = 2$, et $c = 4$ pour obtenir une évolution en régime chaotique [6].

Ces systèmes sont supposés être couplés, de manière bidirectionnelle et symétrique, au travers de la transmission de signaux unidimensionnels définis explicitement en fonction d'une unique variable d'état (côté émetteur) et n'influençant directement que la dynamique correspondante à l'état transmis (côté récepteur). Enfin, en complément de cette configuration, chaque système est supposé contrôlé par une commande (scalaire) par injection de sortie, conduisant au final à une représentation schématisée telle que celle de la Figure 1.

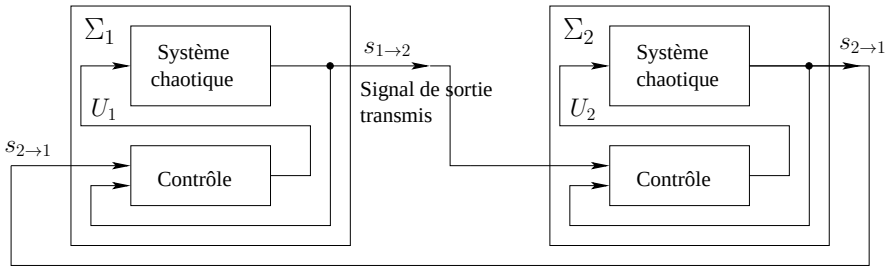


Figure1. Représentation schématique des systèmes bidirectionnellement couplés

En adoptant une notation compacte, chaque système contrôlé peut ainsi être défini par :

$$\Sigma_{i=1..2} : \qquad \dot{X}_i = F_i(X_i) + U_i \tag{2}$$

où $X_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ $(i = 1..2)$ est le vecteur d'état du système Σ_i, F_i est un champ de vecteur et U_i est le vecteur de commande.

Remarque 1. Si les composantes de U_i pouvaient agir sur toutes les dynamiques du système en n'étant fonction que d'une partie de l'état de l'autre système, nous serions alors en présence d'un problème *d'observabilité* ou, de façon moins restrictive, de *détectabilité* [9]. De même, si les composantes de U_i ne pouvaient agir que sur une partie des dynamiques du système mais être fonction de tous les états, nous serions alors face à un problème de *commandabilité* ou, de façon moins restrictive, de *stabilité* [9].

Par hypothèse, le couplage est ici censé s'effectuer uniquement suivant l'un des trois états x, y ou z et n'affecter directement que la dynamique correspondante à l'état transmis. Nous pouvons ainsi envisager trois configurations possibles de commande, à savoir :

$$\begin{aligned} U_i &= [1\ 0\ 0]^T u_x(x_i - x_j) \\ \text{ou } U_i &= [0\ 1\ 0]^T u_y(y_i - y_j) \qquad \text{avec} \quad i = 1..2, j = 1..2 \textit{ et } i \neq j \\ \text{ou encore } U_i &= [0\ 0\ 1]^T u_z(z_i - z_j) \end{aligned} \tag{3}$$

Enfin, toujours par hypothèse, les couplages sont supposés être symétriques, impliquant $U_1 = -U_2$.

En regard de cette configuration, l'objectif de la présente étude est ainsi de définir des conditions nécessaires et, si possible, suffisantes pour garantir l'obtention d'une synchronisation partielle ou complète [7] (c.a.d. la convergence de tout ou partie des trajectoires des variables d'état prises deux à deux).

Remarque 2. La réalisation de cet objectif de synchronisation (forcée) suppose naturellement le respect de certaines hypothèses. En l'occurrence, en se focalisant sur les propriétés structurelles des systèmes, on pourrait par exemple souhaiter (ou exiger) que le système Σ_1 soit *observable* par rapport au signal $s_{1\to 2}$ transmis et que le système Σ_2 soit *commandable* en regard du signal $s_{1\to 2}$ reçu. Malheureusement, il ne suffit pas de remplir les critères d'observabilité et de commandabilité pour garantir le suivi de trajectoire (synonyme de synchronisation, dans le cas d'une trajectoire commune aux deux systèmes). Il convient donc de s'intéresser également aux propriétés des écarts de trajectoires, tout en supposant que chacun des deux systèmes est au moins *détectable*[2] (par rapport au signal transmis) et *stabilisable*[3] (par rapport au signal reçu), garantissant ainsi que chaque système est au moins *gouvernable*.

3 Dynamique de l'erreur de synchronisation

Puisque la configuration choisie, c'est-à-dire les deux systèmes et leurs couplages, est symétrique, considérons arbitrairement (sans perte de généralité) la synchronisation de Σ_2 par rapport à Σ_1. Notons alors e_x, e_y et e_z les erreurs de synchronisation définies respectivement par $e_x = x_1 - x_2$, $e_y = y_1 - y_2$ et $e_z = z_1 - z_2$. En considérant, à titre d'exemple, un couplage via l'état y et la commande par injection de sortie correspondante, nous pouvons alors exprimer la dynamique de l'erreur de synchronisation de Σ_2 par rapport à Σ_1 comme :

$$\Sigma_{err} \quad \begin{cases} \dot{e}_x = -e_y - e_z \\ \dot{e}_y = e_x + a\, e_y + u_y(y_1, y_2) - u_y(y_2, y_1) \\ \dot{e}_z = b + z_1\,(x_1 - c) - b - z_2\,(x_2 - c) \end{cases} \tag{4}$$

En posant $x_2 = x_1 - e_x$ et sachant que le couplage est symétrique (autrement dit que $u_y(y_1, y_2) = -u_y(y_2, y_1)$), l'expression précédente devient alors :

$$\Sigma_{err} \quad \begin{cases} \dot{e}_x = -e_y - e_z \\ \dot{e}_y = e_x + a\, e_y + 2\, u_y(y_1, y_2) \\ \dot{e}_z = e_z\,(x_1 - e_x - c) + z_1 e_x\,. \end{cases} \tag{5}$$

Remarque 3. On peut naturellement, par des calculs analogues, obtenir les deux autres formes de la dynamique de l'erreur de synchronisation en fonction de la variable d'état x ou z considérée comme base pour le couplage.

En accord avec notre problématique de synchronisation, étudions à présent la convergence vers 0 des écarts des trajectoires d'état des systèmes Σ_1 et Σ_2. Du point de vue de la Théorie de la Commande, ceci peut être assimilé à une étude de *stabilité*, matérialisée par la recherche de l'existence d'une fonction de Lyapunov (définie positive) dont la dérivée soit définie négative. Considérons pour cela une fonction de Lyapunov candidate de la forme quadratique suivante :

$$V = \frac{1}{2} e^T P e \quad \text{dont la dérivée est} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\dot{e}^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} \quad \text{avec} \quad \dot{e} = \frac{de}{dt}\,, \tag{6}$$

où $e = [e_x\ e_y\ e_z]^T$ est le vecteur des erreurs de synchronisation et P est une matrice supposée symétrique, définie positive et de dimension appropriée (ici, 3×3).

L'objectif est alors d'établir des conditions sur les composantes de la matrice P garantissant conjointement le respect des propriétés de cette matrice (symétrie et positivité) et l'existence d'une telle fonction V (avec $V > 0$ et $\dot{V} < 0$). Dans ce qui suit, nous allons ainsi exprimer une partie de ces conditions et la démarche d'établissement de leur ensemble, tout en mettant en exergue certains problèmes.

2. c'est-à-dire que les états non observables sont stables.
3. c'est-à-dire que les états non commandable sont stables.

3.1 Définition de conditions sur P

En regard de la relation (6), considérons la matrice symétrique ($P = P^T$) telle que :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} . \tag{7}$$

P étant supposée être définie positive, ses composantes doivent au moins remplir les trois conditions suivantes imposées par le critère de Sylvester, soient :

$$\begin{array}{ll} \textbf{CS1 :} & p_{11} > 0; \\ \textbf{CS2 :} & p_{11}\, p_{22} - p_{12}^2 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad p_{11}\, p_{22} > p_{12}^2 \qquad (> 0); \\ \textbf{CS3 :} & p_{11}\, p_{22}\, p_{33} - p_{11}\, p_{23}^2 + 2\, p_{12}\, p_{23}\, p_{13} - p_{12}^2\, p_{33} - p_{22}\, p_{13}^2 > 0\,. \end{array} \tag{8}$$

Remarque 4. Au regard des inégalités précédentes, il découle de **CS2** que, hormis le fait que p_{12} peut prendre a priori n'importe qu'elle valeur réelle, il existe une condition sous-jacente à respecter, à savoir :

$$\textbf{CS2}_1 : \qquad p_{22} > 0 \tag{9}$$

De même, il découle de **CS3** que :

$$\begin{array}{ll} \textbf{CS3}_1 : & p_{33} > 0 \qquad \text{et} \\ \textbf{CS3}_2 : & p_{11}\, p_{22}\, p_{33} > p_{11}\, p_{23}^2 - 2\, p_{12}\, p_{23}\, p_{13} + p_{12}^2\, p_{33} + p_{22}\, p_{13}^2 > 0\,, \end{array} \tag{10}$$

En effet, il faut nécessairement que le produit $p_{11}\, p_{22}\, p_{33}$ soit strictement positif, sachant que : p_{11} et p_{22} le sont de par les conditions **CS1** et $\textbf{CS2}_1$, que $p_{11}\, p_{23}^2$, $p_{12}^2 p_{33}$ et $p_{22}\, p_{13}^2$ sont (forcément) positifs, et que seul $p_{12}\, p_{23}\, p_{13}$ peut éventuellement être négatif si p_{12} l'est.

A ce stade, nous ne disposons que de conditions générales (issues du critère de Sylvester) sur les composantes de la diagonale de la matrice P. Il convient donc de rechercher d'autres contraintes, impliquant notamment les autres composantes de la matrice, liées cette fois à la propriété attendue de négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov (propriété qui dépend de la structure de la dynamique de l'erreur de synchronisation et, de fait, de la structure même des systèmes de Rössler).

Intéressons nous ainsi à l'expression de la dérivée de la fonction de Lyapunov, sans présumer du signal transmis, et donc de la dynamique directement affectée. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \tfrac{dV}{dt} = \; & [(z_1 - e_z)p_{13} + p_{12}]\, e_x^2 + [p_{12}\; a + (z_1 - e_z)p_{23} + p_{22} - p_{11}]\, e_y e_x \\ & +2(p_{33}u_z + p_{23}u_y + p_{13}u_x)e_z + [(x_1 - c)\, p_{13} - p_{11} + p_{23} + z_1 p_{33}]\, e_z e_x \\ & +2(p_{13}u_z + p_{12}u_y + p_{11}u_x)e_x + (a\; p_{22} - p_{12})\, {e_y}^2 + [-p_{13} - p_{12} + p_{23}(x_1 - c + a)]\, e_z e_y \\ & +2(p_{23}u_z + p_{12}u_x + p_{22}u_y)e_y + [-p_{13} + (x_1 - c - e_x)\, p_{33}]\, {e_z}^2\,, \end{aligned} \tag{11}$$

sachant toutefois que seul un des trois termes de commande (u_x, u_y ou u_z) sera non nul, après sélection.

Considérons également, par souci de simplicité mais sans perte de généralité, des commandes proportionnelles aux écarts de trajectoires de la forme $u_x = K_x e_x$, $u_y = K_y e_y$ et $u_z = K_z e_z$ où $K_x \in \mathbb{R}$, $K_y \in \mathbb{R}$ et $K_z \in \mathbb{R}$ représentent des gains de commande. Il advient alors :

$$\begin{aligned} \tfrac{dV}{dt} = \; & [2K_x p_{11} + p_{12} + (z_1 - e_z)p_{13}]e_x^2 + [(2K_x + 2K_y + a)\, p_{12} + (z_1 - e_z)p_{23} + p_{22} - p_{11}]e_y e_x \\ & -e_z^2 p_{33} e_x + [(x_1 - c + 2K_x + 2K_z)p_{13} - p_{11} + p_{23} + z_1 p_{33}]\, e_z e_x + (2K_y p_{22} - p_{12} + a p_{22})e_y^2 \\ & +([2(K_y + K_z) + a - c + x_1]p_{23} - p_{13} - p_{12})e_z e_y + [(2K_z + x_1 - c - e_x)p_{33} - p_{13}]\, e_z^2\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Remarque 5. Au regard des relations (11) ou (12), il n'apparaît pas possible de conclure directement sur le signe de la dérivée de la fonction de Lyapunov. De plus, l'expression de $\frac{dV}{dt}$ dépend explicitement des variables d'états z_1 et x_1 du système à synchroniser. Autrement dit, comme annoncé en introduction, la stabilisabilité des écarts de trajectoires et la synchronisation des deux systèmes dépendent donc explicitement de la région de l'espace dans laquelle les systèmes évoluent.

En regard de la remarque 5 précédente et afin de s'affranchir partiellement de la dépendance de l'expression de $\dot{V}$ vis à vis de certains états, posons, par exemple, $p_{13} = 0$ et $p_{23} = 0$. Ceci conduit alors à l'expression simplifiée :

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} = & (2K_x p_{11} + p_{12})e_x^2 + [(2(K_x + K_y) + a)\, p_{12} - p_{11} + p_{22}]\, e_y e_x + ((z_1 - e_z)p_{33} - p_{11})e_z e_x \\ & +((a + 2K_y)p_{22} - p_{12})e_y^2 + (-p_{12})e_z e_y + ((2K_z + x_1 - c)p_{33})e_z^2 \,.\end{aligned} \tag{13}$$

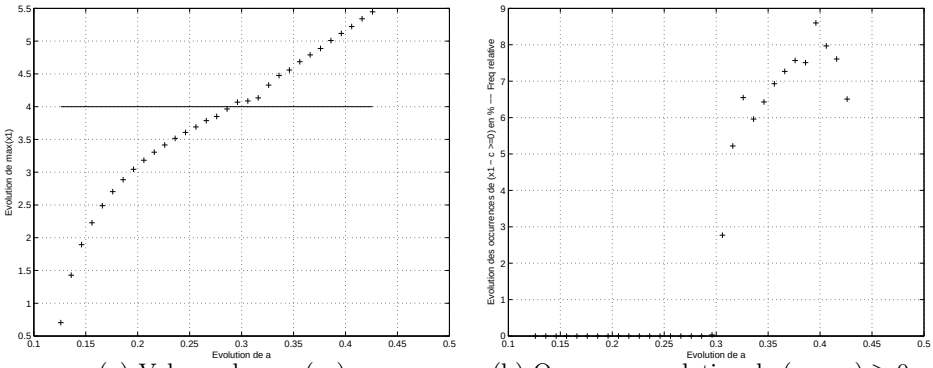
Afin de garantir la négativité de $\frac{dV}{dt}$, il est naturel de chercher, au travers des termes de commande (ici, un unique terme), à influer sur les termes quadratiques de (13) : seuls termes pour lesquels il est possible de garantir le signe. Néanmoins, fondamentalement, trois cas sont envisageables : $\{K_x \neq 0, K_y = K_z = 0\}$, $\{K_y \neq 0, K_x = K_z = 0\}$, $\{K_z \neq 0, K_x = K_y = 0\}$. Intéressons-nous arbitrairement (sans perte toutefois de généralité) au second cas, qui conduit alors à définir la dérivée de la fonction de Lyapunov comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} = & \; p_{12}e_x^2 + [(2K_y + a)\, p_{12} - p_{11} + p_{22}]\, e_y e_x + [(z_1 - e_z)p_{33} - p_{11}]e_z e_x \\ & +[(a + 2K_y)p_{22} - p_{12}]e_y^2 + (-p_{12})e_z e_y + [(x_1 - c)p_{33}]e_z^2\end{aligned} \tag{14}$$

Remarque 6. Le terme quadratique $p_{12}e_x^2$ peut être rendu négatif en optant pour $p_{12} < 0$ (inégalité compatible avec la remarque 4). Sachant que a et p_{22} sont positifs et $p_{12} < 0$, le terme quadratique $[(a+2K_y)p_{22}-p_{12}]e_y^2$ peut également être rendu négatif par une sélection appropriée du gain K_y tel que :

$$K_y < \frac{1}{2}\left(\frac{p_{12}}{p_{22}} - a\right) \qquad (\text{avec } p_{22} > 0 \text{ et } p_{12} < 0)\,. \tag{15}$$

En revanche, il n'existe aucune garantie (ni d'intervention possible) pour la négativité de $[(x_1-c)p_{33}]e_z^2$ sachant que, d'après $\mathbf{CS3}_1$, $p_{33} > 0$. Cela signifie que cette négativité est effective si c majore x_1, ce qui ne peut être garanti pour tout temps t mais uniquement en moyenne (voir Fig. 2).



(a) Valeurs de $\max(x_i)$ (b) Occurrence relative de $(x_i - c) \geq 0$

Figure2. Comportement de x_i et $x_i - c$ en fonction du paramètre a, à partir de la simulation du système de Rössler en évolution libre. Autres paramètres : $b = 2$ et $c = 4$.

Restent enfin les termes croisés relatifs à $e_y e_x$, $e_z e_x$ et $e_z e_y$. Pour cela, effectuons un changement de variables en posant : $\alpha = p_{12}$, $\beta = (2K_y+a)p_{12}-p_{11}+p_{22}$, $\gamma = (2K_y+a)p_{22}-p_{12}$, $\delta = (z_1-e_z)p_{33}-p_{11}$, $\theta = (x_1-c)p_{33}$ et enfin $\kappa = -p_{12}$. Nous obtenons alors une nouvelle expression de la dérivée de la fonction de Lyapunov, de la forme :

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{(\frac{\alpha}{2}e_x^2 + \beta e_x e_y + \frac{\gamma}{2}e_y^2)}_{T_1} + \underbrace{(\frac{\alpha}{2}e_x^2 + \delta e_z e_x + \frac{\theta}{2}e_z^2)}_{T_2} + \underbrace{(\frac{\gamma}{2}e_y^2 + \kappa e_y e_z + \frac{\theta}{2}e_z^2)}_{T_3} \tag{16}$$

pour laquelle on souhaite que $T_1 < 0$, $T_2 < 0$, et $T_3 < 0$. En reconnaissant trois inégalités du second degré de formes analogues, nous pouvons alors établir des conditions supplémentaires, à savoir, d'une part, $\beta^2 < \alpha \cdot \gamma$, $\delta^2 < \alpha \cdot \theta$, $\kappa^2 < \gamma \cdot \theta$, et, d'autre part, $\alpha < 0$, $\gamma < 0$ et $\theta < 0$, qui peuvent, après retour aux variables initiales, aboutir à des conditions explicites de la forme

$$\begin{array}{ll} \textbf{CL1}: & \alpha = p_{12} < 0\,; \\ \textbf{CL2}: & \gamma = (2K_y + a)p_{22} - p_{12} < 0\,; \\ \textbf{CL3}: & \theta = (x_1 - c)p_{33} < 0, \ldots \end{array} \tag{17}$$

Notons, une fois encore, que la négativité de θ ne peut pas être garantie pour tous instants t car, p_{33} étant positif, cette négativité dépend uniquement de $x_1 - c$ et donc du domaine visité par les trajectoires du système Σ_1 (La configuration étant symétrique, une conclusion identique peut être obtenue pour Σ_2).

Au final, nous sommes donc capables d'établir un ensemble de conditions sur les composantes de la matrice P, susceptibles d'être vérifiées par un choix approprié de valeurs (de ces composantes) ou des paramètres de la commande. Toutefois, la validation de certaines conditions dépend uniquement des propriétés structurelles des systèmes concernés et de leur comportement.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons mis en exergue que la synchronisation (forcée) de systèmes bidirectionnellement couplés ne relève pas uniquement de propriétés structurelles d'observabilité et de commandabilité de chacun des systèmes mais également de la *stabilisabilité* des écarts des trajectoires (sous couvert néanmoins que les systèmes soient au moins détectables et stabilisables). Une étude de stabilité, au sens de Lyapunov, nous a alors permis de définir un ensemble de conditions explicites relatives à l'obtention d'une synchronisation partielle ou complète, conditions qui nous amènerons à établir, dans de futurs travaux, des critères de sélection de la variable d'état à transmettre et de la commande (en regard, naturellement, d'une configuration donnée). Enfin, cette étude a montré que, même si elle s'avère effective, la synchronisation complète des deux systèmes ne peut pas, d'un point de vue théorique, être garantie de manière absolue pour tout temps t. Autrement dit, certaines directions de l'erreur de synchronisation ne sont stables qu'en moyenne sur la trajectoire, mais pas sur toute la trajectoire. De futurs travaux tenterons de démontrer, d'un point de vue théorique, que ces singularités de stabilité autorisent néanmoins, sous certaines conditions (notamment de faibles occurrences), l'obtention d'une synchronisation.

Références

1. L. M. Pecora & T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters*, **64**, 821 (1990).
2. S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares & C. Zhou, The synchronization of chaotic systems, *Physics Report*, **366**, 1 (2002)
3. A. Pikovsky, M. Rosenblum & J. Kurths, *Synchronization : A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (2003)
4. H. Nijmeijer & I. M. Y Mareels, An observer looks at synchronization, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **44** (10), 874-890 (1997)
5. O. E. Rössler, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976)
6. C. Letellier, P. Dutertre & B. Maheu, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282 (1995)
7. M. Rosenblum, A. Pikovsky & J. Kurths, Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **44** (10), 874-881 (1997)
8. L. Scardovi, R. Sepulchre, and N.E. Leonard, Stabilization of collective motion in three dimensions : a consensus approach, *Proc. 46th IEEE Conf. Decision and Control*, 2931-2936 (2007)
9. T. Kailath, Linear Systems, *Prentice Hall*, (1979)