HAL open science

An Augmented Lagrangian Numerical approach to solving Mean-Fields Games

Jean-David Benamou, Guillaume Carlier, Nicolas Bonne

To cite this version:

Jean-David Benamou, Guillaume Carlier, Nicolas Bonne. An Augmented Lagrangian Numerical approach to solving Mean-Fields Games. [Research Report] Dauphine. 2013, pp.30. hal-00922349

HAL Id: hal-00922349

https://inria.hal.science/hal-00922349v1

Submitted on 26 Dec 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

An Augmented Lagrangian Numerical approach to solving Mean-Fields Games

Jean-David Benamou, Nicolas Bonne , Guillaume Carlier

RESEARCH REPORT

N° 666

Dec. 2013

Project-Team MOKAPLAN

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--666--FR+ENG

An Augmented Lagrangian Numerical approach to solving Mean-Fields Games

Jean-David Benamou *, Nicolas Bonne*
, Guillaume Carlier†

Project-Team MOKAPLAN

Research Report n° 666 — Dec. 2013 — 27 pages

Abstract: We present the application of the ALG2 algorithm [1] to solve numerically variationals mean field games [5].

Key-words: Mean field games, Augmented Lagrangian, Douglas Rachford

Ce travail de recherche a reçu le soutien financier de l'ANR Isotace (ANR-12-MONU-0013).

We acknowledge the financial support of ANR Isotace (ANR-12-MONU-0013) for this research.

* INRIA BP. 105 78153 Le Chesnay Cedex
† Université Paris 9 Dauphine, 75016 Paris

RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Une méthode numérique utilisant un Lagrangien augmenté pour la résolution de jeux à champs moyens

Résumé : Ce rapport présente l'adaptation de l'algorithme ALG2 [1] en vue de résoudre numériquement des jeux á champ moyens variationnels [5].

Mots-clés : Jeux à champs moyens, Lagrangien Augmenté, Dauglas Rachford

Part I
Introduction

Le modèle de théorie des jeux à champs moyen décrit le comportement asymptotique de l'équilibre de Nash d'un jeu différentiel stochastique, quand le nombre de joueur tend vers $+\infty$. Ce modèle a été introduit récemment par J.M. Lasry et P.L. Lions [5]. La simulation numérique de ce système a déjà été étudier dans [4]

Nous allons nous placer dans le cadre d'un espace périodique à d dimensions, et dans un segment de temps, $[0, T]$. Dans ce modèle, nous avons un système de deux équations différentielles pour deux inconnues scalaires, $u = u(t, x)$ et $\rho = \rho(t, x)$ qui est

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u + H(x, \bigtriangledown u) = V[\rho], \text{ sur } (0, T) \times \mathbb{T}^d, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} - \nu \Delta \rho + div \left(\rho \frac{\partial H}{\partial p}(x, \bigtriangledown u) \right) = 0, \text{ sur } (0, T) \times \mathbb{T}^d \end{aligned} \tag{1}$$

avec des conditions initiales et terminales

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \tag{2}$$

$$\rho(T, x) = \rho_T(x) \tag{3}$$

sur $\mathbb{T}^d$, où ρ_0 et ρ_T sont des densités de probabilité. Il est donc naturel de considérer que $\rho(t, .)$ est aussi une densité de probabilité en tout t. H est un opérateur scalaire convexe en son deuxième argument. C'est l'hamiltonien. V est une fonction de ρ à valeur réelle.

Ce problème peut être vu comme un problème de transport optimal du type

$$inf_{\rho,m} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} J(\rho, m) + I_K(\rho, m). \tag{4}$$

Il est demandé à J d'être convexe. I_K est une indicatrice, qui impose les contraintes, comme l'équation de continuité, et les conditions limites.

Une approche de la simulation numérique de la solution de ce problème a été faite dans [4]. L'idée est de regarder le système des conditions d'optimalité

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + div \rho \bigtriangledown u = 0 \\ \rho(0, .) = \rho_0 \text{ et } \rho(T, \cdot) = \rho_T \\ \partial_t u + \frac{1}{2} | \bigtriangledown u|^2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Pour résoudre ce problème, ils utilisent une méthode de type Newton. Une limitation de cette méthode, est quelle demande en théorie que la fonction coût soit différentiable, ainsi que V soit strictement convexe. En particulier, si $J = \frac{m^2}{\rho}$, cette condition impose que $\rho > 0$. Cette contrainte peut être restrictive puisque, si on donne une interprétation physique à ce lagrangien, il ne peut pas y avoir de vide dans les écoulements étudiés.

Une approche alternative pour le traitement des non différentiabilités de J quand $\rho = 0$ a été proposée dans le cas déterministe dans [2]. Cette technique

proposée dans [1] a été récemment réinterprétée sous la forme d'un algorithme de spliting proximal [7].

Dans le cas où $\nu = 0$, on retrouve le cas dit déterministe. Ce cas, avec en plus $V = 0$, et $H = m^2/2\rho$ a déjà été résolue numériquement dans l'article [2]; c'est l'algorithme ALG2, qui est un cas particulier d'un algorithme de type douglass Rachford.

Le but de ce stage est d'étendre cet algorithme au cas des Mean field Games 1, où $\nu > 0$. Nous nous somme placé dans le cas où $H = m^2/2\rho$. L'utilisation d'une méthode de type Lagrangien augmenté, bien que moins efficace que l'algorithme utilisant une méthode de Newton , permet de prendre en compte le cas où $\rho = 0$.

Nous nous somme aussi intéressé au cas où nous n'imposons plus une condition terminale, mais où l'on cherche à minimiser aussi un coût terminal.

Notre méthode a été de commencer par modifier ALG2, dans le cas où $V = 0$ et où la condition terminale est imposée. Nous nous somme placé dans le cas où $H = m^2/2\rho$. Pour simplifier, nous avons fait les simulations dans le cas où $d = 1$, mais ceci est facilement généralisable.

Ensuite, nous avons modifié l'algorithme pour prendre en compte un coût terminal et non une valeur imposée pour ρ.

Enfin nous avons mis une fonction V, potentiellement non différentiable.

Nous avons d'abord essayé avec un coûts terminal et un potentiel en $\rho^2/2$, puis nous avons tenté en $|\rho - \bar{\rho}|$, avec $\bar{\rho}$ une donnée du problème.

Nous allons d'abord expliquer ALG2. Puis nous verrons comment nous avons modifié pour incorporer la viscosité, puis comment traiter un coût terminal et enfin comment mettre un potentiel.

Part II
ALG2 (Rappel)

Cet algorithme a été introduit dans [2]. Nous n'allons pas le présenter ici dans les détails, les calculs seront fait lors de l'extension.

Nous partons du problème de transfère de masse de Monge-Kantorovich dans L^2. Nous voulons minimiser l'énergie cinétique pour passer de ρ_0 à ρ_T, c'est à dire calculer la 2-distance de Wasserstein entre les deux densités, sous la contrainte de la conservation de la masse. C'est à dire,

$$d(\rho_0, \rho_1)^2 = \inf_{\rho,u} \left\{ \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{2} \rho(t,x) |v(t,x)|^2 dx dt \right\}, \tag{6}$$

sous la contrainte que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bigtriangledown \cdot (\rho u) = 0, \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{T}^d. \tag{7}$$

On utilisera les notations suivante:

- $\bigtriangledown_x$ est le gradient en espace,
- $\bigtriangledown_{t,x}$ est le gradient en temps et en espace,

- Δ_x est le laplacien en espace
- $\Delta_{t,x}$ est le laplacien en espace
- $m(t,x) = \rho(t,x)u(t,x)$

On cherche le point selle du lagrangien

$$L(\phi,\rho,m) = \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{m^2}{2\rho} + \phi(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bigtriangledown_x \cdot m)dxdt \tag{8}$$

Par intégration par partie, on modifie le lagrangien de la façon suivante

$$L(\phi,\rho,m) = \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{m^2}{2\rho} - \partial_t\phi\rho - \bigtriangledown_x\phi \cdot m - \int_{\mathbb{T}^d} \phi(0,\cdot)\rho_0 - \phi(1,\cdot)\rho_1. \tag{9}$$

Les conditions pour avoir un point selle donnent

$$\begin{aligned} \partial_t\rho + \bigtriangledown_x \cdot m &= 0 \\ \rho(0,\cdot) = \rho_0 \text{ et } \rho(T,\cdot) &= \rho_T \\ \partial_t\phi + \frac{m^2}{2\rho^2} &= 0 \\ \frac{m}{\rho} &= \bigtriangledown_x\phi. \end{aligned} \tag{10}$$

On a donc l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\bigtriangledown_x \phi|^2 = 0. \tag{11}$$

Pour régulariser le lagrangien, on peut dualiser. On utilise le fait que

$$\frac{m^2}{2\rho} = \sup_{(a,b)\in K} (a\rho + b \cdot m) \tag{12}$$

où K est défini par

$$K = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d | a + \frac{b^2}{2} \leq 0 \right\}. \tag{13}$$

On introduit les notations suivantes:

$$\begin{aligned} \mu = (\rho, m) \text{ et } q &= (a,b) \\ < \mu, q >= \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^d} \mu \cdot q \\ G(\phi) = \int_{\mathbb{T}^d} \phi(0,\cdot)\rho_0 - \phi(1,\cdot)\rho_1 \\ F(q) = \begin{cases} 0 \text{ si } q \in K \\ +\infty \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

Le lagrangien devient alors

$$L(\phi,q,\mu) = F(q) + G(\phi) + < \mu, \bigtriangledown_{t,x}\phi - q > . \tag{15}$$

On définit le lagrangien augmenté comme

$$L_r(\phi, q, \mu) = F(q) + G(\phi) + < \mu, \nabla_{t,x}\phi - q > + \frac{r}{2} < \nabla_{t,x}\phi - q, \nabla_{t,x}\phi - q > . \quad (16)$$

L'algorithme est le suivant: On initialise avec des fonctions choisies à votre discrétion (nous avons pris 0) pour q^0 et μ^1. La première étape, est de minimiser L_r par rapport à ϕ. Dans le cas présent, on peut montrer que le ϕ optimal est solution de

$$\begin{aligned} -r\Delta_{t,x}\phi^k &= \nabla_{t,x} \cdot (\mu^k - rq^{k-1}), \\ r\partial_t\phi(0,\cdot) &= \rho_0 - \rho^k(0,\cdot) + ra^{k-1}(0,\cdot), \\ r\partial_t\phi(T,\cdot) &= \rho_T - \rho^k(T,\cdot) + ra^{k-1}(T,\cdot). \end{aligned} \quad (17)$$

La deuxième étape est la minimisation du lagrangien par rapport à q. Si on définit

$$(\alpha^k, \beta^k) = \nabla_{t,x}\phi^k + \frac{\mu^k}{r} \quad (18)$$

Alors cette étape revient à faire une projection de (α, β) sur le convexe K. La troisième étape, est l'optimisation par rapport à μ. Il s'agit juste d'un pas de gradient; c'est à dire

$$\mu^{k+1} = \mu^k + r(\nabla_{t,x}\phi^k - q^k). \quad (19)$$

On prend comme critère d'arrêt, l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\partial_t\phi^k + \frac{1}{2}|\nabla_x \phi^k|^2 = 0. \quad (20)$$

Part III
Généralisation du problème

Le problème auquel nous allons nous confronter est le suivant

$$\inf_{\rho,m} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \frac{m^2}{2\rho} + P(\rho) + \int_{\mathbb{T}^d} T(\rho) \quad (21)$$

avec la condition de continuité

$$\partial_t\rho - \nu\Delta_x\rho + \nabla_x \cdot m = 0 \quad (22)$$

et la condition initiale

$$\rho(0,\cdot) = \rho_0 \quad (23)$$

Nous allons introduire, comme dans [3], un variable sur le bord $\tilde{\rho}_T$ telle que $\rho(T,\cdot) = \tilde{\rho}_T$. Le problème deviens

$$\inf_{\rho,m,\tilde{\rho}_T} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \frac{m^2}{2\rho} + P(\rho) + \int_{\mathbb{T}^d} T(\tilde{\rho}_T) \quad (24)$$

Avec la même condition de continuité et la même condition initiale, mais avec la condition terminale en plus $\rho(T,\cdot) = \tilde{\rho}_T$. On introduit le multiplicateur de Lagrange, le problème se réécrit

$$\inf_{\rho,m,\tilde{\rho}_T} \sup_{\phi} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \frac{m^2}{2\rho} + P(\rho) + \phi(\partial_t\rho - \nu\Delta_x\rho + \nabla_x \cdot m) + \int_{\mathbb{T}^d} T(\tilde{\rho}_T) \quad (25)$$

Avec des intégrations par partie, le problème se résume en

$$\inf_{\rho,m,\tilde{\rho}_T} \sup_{\phi} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \frac{m^2}{2\rho} + P(\rho) - \rho(\partial_t\phi + \nu\Delta_x\phi) - m \cdot \bigtriangledown_x\phi \\ + \int_{\mathbb{T}^d} T(\tilde{\rho}_T) + \phi(T,\cdot)\tilde{\rho}_T - \phi(0,\cdot)\rho_0. \tag{26}$$

En effet, formellement, les conditions d'optimalités sont:

- Par rapport à m, on a l'équation

$$\frac{m}{\rho} = \bigtriangledown_x\phi. \tag{27}$$

- Par rapport à ρ, on a l'équation

$$\partial_t\phi + \nu\Delta_x\phi + \frac{1}{2}|\bigtriangledown_x \phi|^2 = \partial_\rho P(\rho) \tag{28}$$

- Par rapport à $\tilde{\rho}_T$, on a l'équation

$$\partial_{\tilde{\rho}_T} T(\tilde{\rho}_T) + \phi(T,\cdot) = 0. \tag{29}$$

- Par rapport à ϕ, on a l'équation

$$\partial_t\rho - \nu\Delta_x\rho + \bigtriangledown_x \cdot m = 0 \tag{30}$$

  et les conditions aux limites $\rho(0,\cdot) = \rho_0$ et

$$\rho(T,\cdot) = \tilde{\rho}_T. \tag{31}$$

Pour ne pas nous restreindre au cas où P et T sont différentiables, nous allons aussi dualiser ces fonctions. S'il semble évident de dualiser séparément P et T, puisqu'elles ne vivent pas sur le même espace, on peut légitimement se demander si on doit dualiser P et $m^2/2\rho$ simultanément, ou chacune de leur coté. Nous avons décidé de les dualiser séparément pour mieux voir la différence entre les différents cas, et passer d'un exemple de fonction P à un autre plus facilement. Le problème devient

$$\inf_{\mu,\tilde{\rho}_T} \sup_{\phi,c,\theta,q\in K} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} -P^*(c) - \mu \cdot (\partial_t\phi + \nu\Delta_x\phi - a - c, \bigtriangledown_x\phi - b) \\ \int_{\mathbb{T}^d} \tilde{\rho}_T(\theta + \phi(T,\cdot)) - T^*(\theta) - \phi(0,\cdot)\rho_0, \tag{32}$$

et donc

$$\sup_{\mu,\tilde{\rho}_T} \inf_{\phi,c,\theta,q\in K} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} P^*(c) + \mu \cdot (\partial_t\phi + \nu\Delta_x\phi - a - c, \bigtriangledown_x\phi - b) \\ + \int_{\mathbb{T}^d} \phi(0,\cdot)\rho_0 - \tilde{\rho}_T(\theta + \phi(T,\cdot)) + T^*(\theta). \tag{33}$$

Il reste plus qu'a augmenter ce lagrangien, et le problème devient alors

$$\begin{aligned}\sup_{\mu,\tilde{\rho}_T}\inf_{\phi,c,\theta,q\in K}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d} P^*(c)+\mu\cdot(\partial_t\phi+\nu\Delta_x\phi-a-c,\bigtriangledown_x\phi-b)\\ +\int_{\mathbb{T}^d}\phi(0,\cdot)\rho_0-\tilde{\rho}_T(\theta+\phi(T,\cdot))+T^*(\theta)\\ +\frac{r}{2}<(\partial_t\phi+\nu\Delta_x\phi-a-c,\bigtriangledown_x\phi-b),(\partial_t\phi+\nu\Delta_x\phi-a-c,\bigtriangledown_x\phi-b)>\\ +\frac{r}{2}\int_{\mathbb{T}^d}(\theta+\phi(T,\cdot))^2.\end{aligned}\tag{34}$$

On note ce problème

$$\sup_{\mu,\tilde{\rho}_T}\inf_{\phi,c,\theta,q\in K} L(\phi,c,\theta,q,\tilde{\rho}_T,\mu)\tag{35}$$

Part IV
Généralisation de l'algorithme

L'algorithme que nous allons mettre en place est le suivant:

0. Initialisation des variables
1. Minimisation de lagrangien augmenté par rapport à ϕ.
2. Minimisation par rapport à q
3. Minimisation par rapport à θ
4. Minimisation par rapport à c
5. Un pas de gradient en $\tilde{\rho}_T$
6. Un pas de gradient en ρ

Puis on retourne à l'étape 1.

Nous allons maintenant détailler 1,2,5 et 6, qui ne dépendent pas du choix des fonctions P et T.

1 Etape 1.

Il s'agit de trouver ϕ^{k+1} telle que

$$L(\phi^{k+1},c^k,\theta^k,q^k,\tilde{\rho}_T^k,\mu^{k+1})\leq L(\phi,c^k,\theta^k,q^k,\tilde{\rho}_T^k,\mu^{k+1}),\tag{36}$$

pour tout ϕ. Si on est au minimum, pour une déviation $\delta\phi$ petite,

$$\Delta L=L(\phi+\delta\phi,c^k,\theta^k,q^k,\tilde{\rho}_T^k,\mu^{k+1})-L(\phi,c^k,\theta^k,q^k,\tilde{\rho}_T^k,\mu^{k+1})=0\tag{37}$$

Ce qui se réécrit, en oubliant les indices pour simplifier,

$$\begin{aligned}\Delta L=&<\mu,(\partial_t\delta\phi+\nu\Delta_x\delta\phi,\bigtriangledown_x\delta\phi)>\\ +r&<(\partial_t\delta\phi+\nu\Delta_x\delta\phi,\bigtriangledown_x\delta\phi),(\partial_t\phi+\nu\Delta_x\phi-a-c,\bigtriangledown_x\phi-b)>\\ &+\int_{\mathbb{T}^d}\delta\phi(0,\cdot)\rho_0-\tilde{\rho}_T\delta\phi(T,\cdot))+r\int_{\mathbb{T}^d}(\theta+\phi(T,\cdot))\delta\phi(T,\cdot).\end{aligned}\tag{38}$$

L'idée, ensuite, est de faire des intégrations par partie, afin d'obtenir un fonction linéaire de $\delta\phi$. On alors

$$\begin{aligned}\Delta L = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (-\partial_t \rho + \nu \Delta_x \rho - \bigtriangledown_x \cdot m)\delta\phi - r \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (\Delta_x \phi - \bigtriangledown_x \cdot b)\delta\phi \\ -r \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (\partial_t^2 \phi - \partial_t a - \partial_t c)\delta\phi + r \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (\nu^2 \Delta_x(\Delta_x \phi) - \nu \Delta_x a - \nu \Delta_x c)\delta\phi \\ +r \int_{\mathbb{T}^d} (\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a - c)(T,\cdot)\delta\phi(T,\cdot) - (\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a - c)(0,\cdot)\delta\phi(0,\cdot) \\ + \int_{\mathbb{T}^d} \rho(T,\cdot)\phi(T,\cdot) - \rho(0,\cdot)\phi(0,\cdot) - \int_{\mathbb{T}^d} \tilde{\rho}_T \phi(T,\cdot) - \rho_0 \phi(0,\cdot) + r \int_{\mathbb{T}^d} (\phi(T,\cdot) + \theta)\delta\phi(T,\cdot).\end{aligned} \tag{39}$$

On arrive alors à l'équation différentielle suivante

$$r\nu^2 \Delta_x(\Delta_x \phi) - r\Delta_{t,x}\phi = \bigtriangledown_{t,x} \cdot (\mu - rq) - r\partial_t c - \nu \Delta_x(\rho - ra - rc), \tag{40}$$

ainsi que les conditions aux bords

$$r\partial_t \phi(0,\cdot) = \rho_0 - \rho(0,\cdot) - r\nu \Delta_x \phi(0,\cdot) + ra + rc \tag{41}$$

et

$$r\partial_t \phi(T,\cdot) = \tilde{\rho}_T - \rho(T,\cdot) - r\nu \Delta_x \phi(0,\cdot) + ra + rc - r(\theta, \phi(T,\cdot)) \tag{42}$$

Pour résoudre ce problème, nous nous somme inspiré de [6]. L'idée est de résoudre cette équation différentielle par éléments finis. Comme cette équation fait intervenir des termes d'ordre 4 et des termes d'ordre 2 (en dérivation), nous avons résolue un système en introduisant en plus l'équation $\triangle_x \pi = \tilde{\phi}$. Etant dans un espace périodique, il n'y a pas de conditions au bords autre que la périodicité et donc pas de questions à ce poser sur le bord avec ce système.

2 Etape 2.

La minimisation par rapport à q revient à résoudre

$$\begin{aligned}\inf_{q \in K} r < \mu/r, (\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a - c, \bigtriangledown_x \phi - b) > \\ + \frac{r}{2} < (\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a - c, \bigtriangledown_x \phi - b), (\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a - c, \bigtriangledown_x \phi - b) >\end{aligned} \tag{43}$$

On peut rajouter un terme indépendant de q, sans changer le problème de minimisation. En rajoutant $\frac{r}{2} < \mu/r, \mu/r >$, pour reconnaitre le problème

$$\inf_{q \in K} < (\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a - c, \bigtriangledown_x \phi - b) + \frac{\mu}{r}, (\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a - c, \bigtriangledown_x \phi - b) + \frac{\mu}{r} > . \tag{44}$$

C'est une projection sur le convexe K. On définit

$$\alpha = \partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - c + \frac{\rho}{r} \tag{45}$$

et

$$\beta = \bigtriangledown_x \phi + \frac{m}{r}. \tag{46}$$

Pour résoudre ce problème de projection sur un convexe, nous utilisons le multiplicateur de Lagrange λ.

$$\inf_q \sup_{\lambda>0} (\alpha - a)^2 + |\beta - b|^2 + \lambda(a + \frac{|b|^2}{2}) \tag{47}$$

La dérivation par rapport à a donne

$$a = \alpha - \frac{\lambda}{2} = \alpha - \eta, \tag{48}$$

où $\eta = \frac{\lambda}{2}$. La dérivation par rapport à la $i$éme composante de b donne

$$b_i = \frac{\beta_i}{1 + \frac{\lambda}{2}} = \frac{\beta_i}{1+\eta} \tag{49}$$

Le polynôme devient en réinjectant ces valeurs de a et b,

$$Q(\eta) = \eta^2 + |\beta|^2 \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^2 + 2\eta \left(\alpha - \eta + \frac{|\beta|^2}{2(1+\eta)^2}\right). \tag{50}$$

Ce polynôme se réécrit

$$Q(\eta) = -\eta^2 + |\beta|^2 \frac{\eta}{1+\eta} + 2\alpha\eta. \tag{51}$$

Il nous reste à optimiser par rapport à η. La dérivation de Q donne

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = -2\eta + \frac{|\beta|^2}{(1+\eta)^2} + 2\alpha = 0. \tag{52}$$

Ce qui est équivalent à trouver la bonne racine du polynôme de troisième ordre

$$-\eta^3 + (\alpha - 2)\eta^2 + (2\alpha - 1)\eta + \alpha + \frac{|\beta|^2}{2} = 0. \tag{53}$$

En pratique, pour trouver la racine, nous utilisons une méthode de Newton, qui converge rapidement.

3 Etape 3. et 4.

Ces deux étapes reviennent respectivement à résoudre le problème

$$\inf_\theta \int_{\mathbb{T}^d} -\tilde{\rho}_T \theta + T^*(\theta) + \frac{r}{2}(\theta + \phi)^2 \tag{54}$$

et

$$\sup_c \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} P^*(c) - \mu.(c, \nabla_x \phi - b)$$
$$+\frac{r}{2} < (\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a - c, \nabla_x \phi - b), (\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a - c, \nabla_x \phi - b) > . \tag{55}$$

Nous étudierons ces deux problèmes au cas par cas dans la partie suivante.

4 Etape 5. et 6.

Il s'agit d'un pas de gradient, donc

$$\tilde{\rho}_T^{k+1} = \tilde{\rho}_T^k - r * (\theta + \phi(T, \cdot)), \tag{56}$$

$$\rho^{k+1} = \rho^k + r(\partial_t \phi^k + \nu \Delta_x \phi^k - a^k - c^k) \tag{57}$$

et

$$m^{k+1} = m^k + r(\bigtriangledown_x \phi^k - b^k). \tag{58}$$

5 critères de convergeance

Lorsque l'on a chercher, de façon formelle, les conditions d'optimalités, nous somme tombé sur 28 , 29 et 31. Nous avons pris comme mesure d'erreur, la somme L2 du résidu de ces équations, pondéré par ρ. Ceci donne pour 28

$$R1 = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \rho \left(\partial_t \phi + \nu \triangle_x \phi + \frac{1}{2} | \bigtriangledown_x \phi|^2 - \partial_\rho R(\rho) \right) \tag{59}$$

pour 29

$$R2 = \int_{\mathbb{T}^d} \partial_{\tilde{\rho}} T(\tilde{\rho}) + \phi(T, .) \tag{60}$$

et pour 31

$$R3 = \int_{\mathbb{T}^d} \rho(\rho - \tilde{\rho}_T). \tag{61}$$

6 initialisation

Une étape importante de l'algorithme, est l'initialisation. Ici, nous avons initialisé à 0 toutes les variables.

Part V
Les exemples

7 Problème fixé aux deux bouts, sans potentiel

Ici $\tilde{\rho}_T$ est fixé à ρ_T et $P = 0$ ainsi que $T = 0$. On n'a donc pas besoin de passer par les étapes 3,4 et 5. Et on pose dans les étapes restantes $c = 0$ et $\theta = 0$. En définitive, c'est le cas étudié dans [2], avec en plus le terme de viscosité. C'est exactement le même cas si $\nu = 0$.

Nous avons pris $\rho_0 = 1_{x<0.25} + 1_{x>0.75}$ et $\rho_T = 1_{0.25<x<0.75}$. Nous avons testé différentes viscosité. On remarque que la matière s'étale plus quand la viscosité est grande, ce qui est logique.

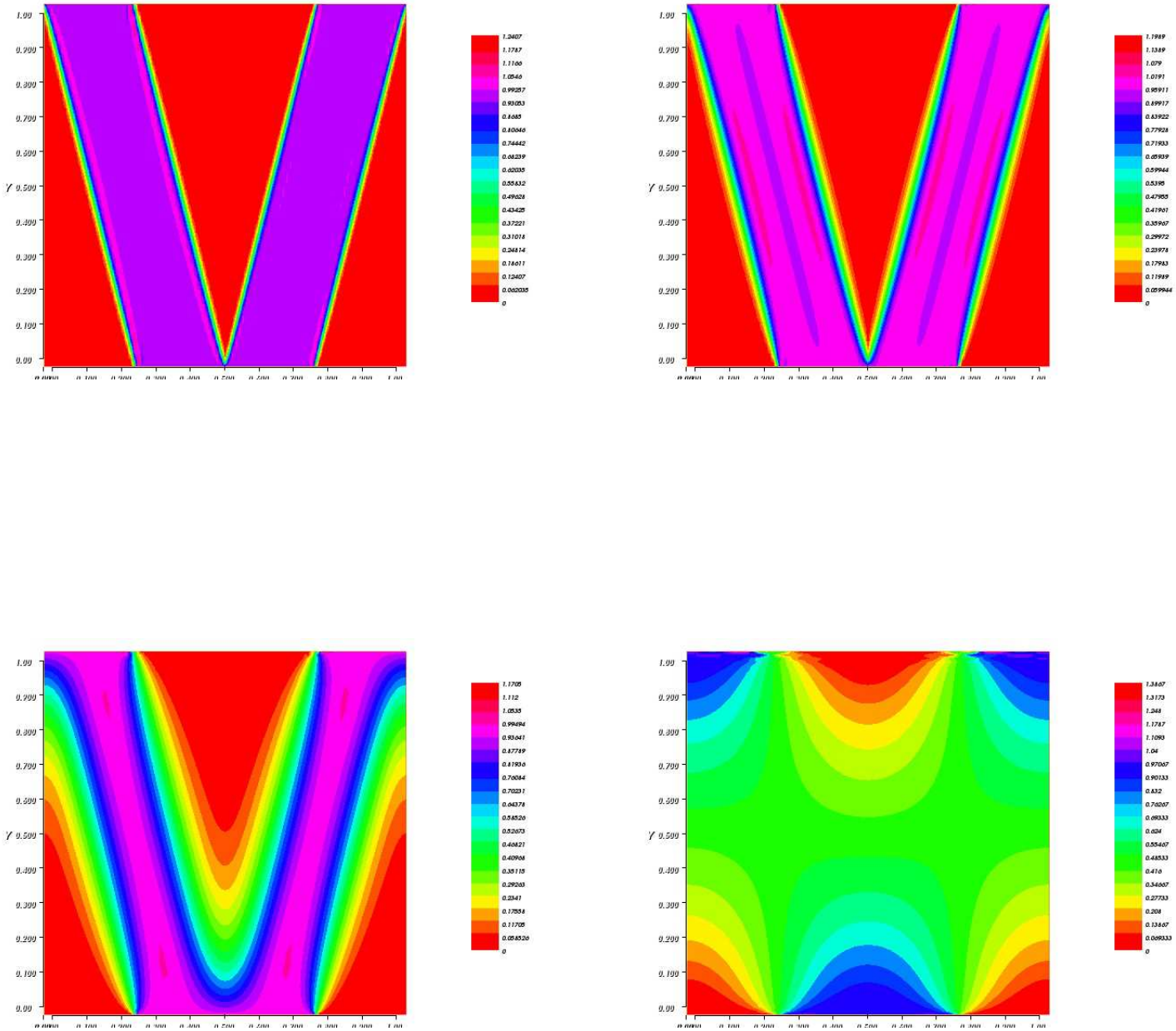

Table 1: Problème fixé au deux bouts, avec une viscosité fixée, de gauche à droite, et de haut en bas, $\nu = 0$, $\nu = 0,001$, $\nu = 0,01$, $\nu = 0,1$. L'abscisse est l'espace,l'ordonnée, le temps. Les résidus 59 sont respectivement: $3,64.10^{-5}$, $1,58.10^{-6}$, $4,92.10^{-7}$, $1,26.10^{-5}$.

8 Problème avec condition initiale, et un coût terminal,sans potentiel

Dans les cas étudiés dans cette partie, il n'est pas nécessaire de passer par l'étape 4. Nous avons testé deux types de coût terminal différents. Le premier est une comparaison $L2$ de $\tilde{\rho}_T$ à un certain ρ_T. Le deuxième est une comparaison $L1$.

8.1 Comparaison $L2$

Dans cette partie, on a $T(\tilde{\rho}_T) = \frac{(\tilde{\rho}_T - \rho_T)^2}{2}$. On peut vérifier facilement que

$$\frac{\theta^2}{2} + \rho_T \theta = \sup_{\tilde{\rho}_T} \tilde{\rho}_T \theta - \frac{1}{2}(\tilde{\rho}_T - \rho_T)^2 \tag{62}$$

Donc $T^*(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 + \rho_T \theta$. Si on réécrit les termes dépendants de θ du Lagrangien,

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{2}\theta^2 + (\rho_T - \tilde{\rho}_T)\theta + \frac{r}{2}(\theta + \phi)^2, \tag{63}$$

on remarque qu'il est possible de dériver par rapport à θ. Le minimum est donc atteint pour

$$\theta = \frac{\tilde{\rho}_T - \rho_T - r\phi}{1 + r}. \tag{64}$$

L'étape 3 consiste a poser

$$\theta^{k+1} = \frac{\tilde{\rho}_T^k - \rho_T - r\phi^{k+1}}{1 + r}. \tag{65}$$

Nous avons obtenu les résultats suivant [Table2]. On a encore l'étalement qui augmente quand la viscosité augmente. On constate aussi que la matière suis une trajectoire proche de celle suivie dans la partie précédente, et que la distribution terminale est quasiment identique.

résidu	59	60	61
haut gauche	$1,08.10^{-7}$	$1,58.10^{-11}$	$9,4.10^{-5}$
haut droite	$8,7.10^{-8}$	$1,8.10^{-11}$	$4,1.10^{-6}$
bas gauche	$1,5.10^{-6}$	3.10^{-11}	$8,8.10^{-4}$
bas droite	$1,02.10^{-7}$	$2,4.10^{-11}$	6.10^{-4}

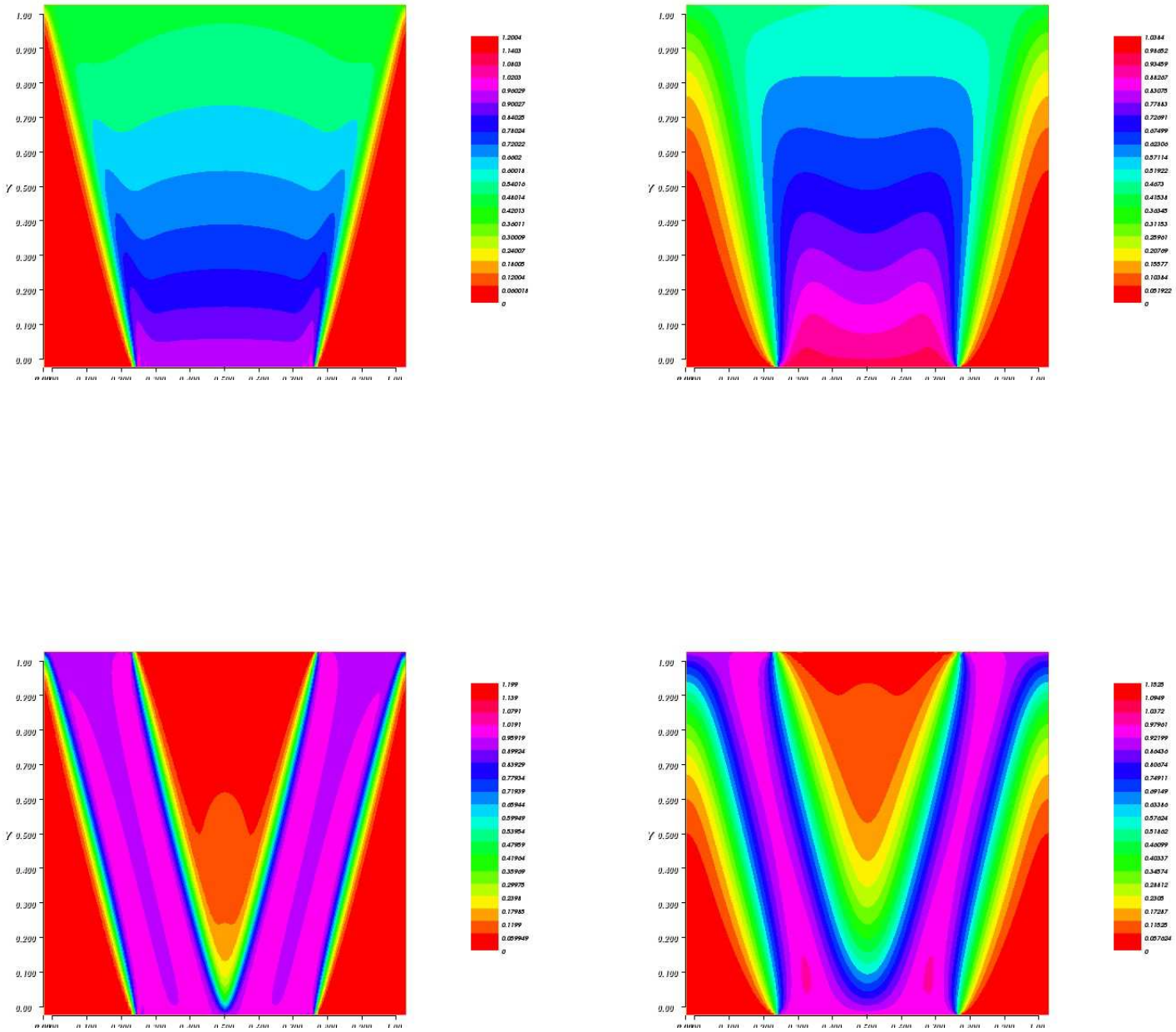

Table 2: Problème avec un coût terminal de type comparaison L2, avec une viscosité fixée, de gauche à droite, $\nu = 0,001$, $\nu = 0,01$. On compare ρ avec une constante égale à 0.5 en haut, avec la densité finale de la partie précédente en bas. L'abscisse est l'espace,l'ordonnée, le temps. Les résidus sont disponibles dans le tableau 8.1

8.2 Comparaison $L1$

Ici $T(\tilde{\rho}_T) = |\tilde{\rho}_T - \rho_T|$. On vérifie que

$$\theta\rho_T + I(\theta) = \sup_{\tilde{\rho}_T} \theta\tilde{\rho}_T - |\tilde{\rho}_T - \rho_T|, \tag{66}$$

où

$$I(\theta) = \begin{cases} 0 \text{ si } q \in [-1,1] \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} \tag{67}$$

Cette fois, on ne peut dériver, à cause de la contrainte. Nous allons tenté d'interpréter la minimisation en θ comme une projection sur le convexe $[-1,1]$. Si on réécrit les termes dépendants de θ du Lagrangien, le problème devient

$$\inf_{\theta\in[-1,1]} \int_{\mathbb{T}^d} (\rho_T - \tilde{\rho}_T)\theta + \frac{r}{2}(\theta+\phi)^2. \tag{68}$$

On a donc le problème équivalent

$$\inf_{\theta\in[-1,1]} \int_{\mathbb{T}^d} 2\frac{r}{2}\frac{(\rho_T - \tilde{\rho}_T)}{r}(\theta+\phi) + \frac{r}{2}(\theta+\phi)^2. \tag{69}$$

Et finalement, on obtient le problème de projection

$$\inf_{\theta\in[-1,1]} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{r}{2}(\theta+\phi-\frac{\tilde{\rho}_T - \rho_T}{r})^2. \tag{70}$$

Si on note

$$\bar{\theta} = \frac{\tilde{\rho}_T - \rho_T}{r} - \phi \tag{71}$$

On réécrit

$$\inf_{\theta\in[-1,1]} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{r}{2}(\theta-\bar{\theta})^2. \tag{72}$$

Nous allons utiliser la méthode du multiplicateur de Lagrange pour résoudre cette projection. Le problème devient

$$\inf_{\theta} \sup_{\lambda>0,\sigma>0} (\theta-\bar{\theta})^2 - \lambda(\theta-1) - \sigma(\theta+1) \tag{73}$$

Ce polynôme en θ est tout ce qu'il y a de plus régulier. Sa dérivé en θ s'annule pour

$$\theta = \bar{\theta} + \frac{\sigma-\lambda}{2}. \tag{74}$$

La valeur du polynôme en ce point est

$$\frac{1}{4}(\sigma-\lambda)^2 + \lambda(\bar{\theta}+1+\frac{\sigma-\lambda}{2}) - \sigma(\bar{\theta}-1+\frac{\sigma-\lambda}{2}) \tag{75}$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$f(\lambda,\sigma) = -\frac{1}{4}(\sigma-\lambda)^2 + \lambda(\bar{\theta}-1) - \sigma(\bar{\theta}+1) \tag{76}$$

Nous avons trois possibilités

- $\bar{\theta} \in [-1, 1]$,
- $\bar{\theta} > 1$,
- Si $\bar{\theta} < -1$.

Dans le premier cas, comme $\sigma > 0$ et $\lambda > 0$, tous les termes sont négatifs et le polynôme peut être nul seulement pour $\lambda = 0$ et $\sigma = 0$. Donc dans le cas $\bar{\theta} \in [-1, 1]$, $\theta = \bar{\theta}$.

Dans le deuxième cas la dérivation de f par rapport à λ donne la condition d'optimalité

$$\lambda = \sigma + 2(\bar{\theta} - 1) \tag{77}$$

En remplaçant λ par cette valeur dans f, on a la valeur optimale atteinte pour

$$f(\sigma) = -2\sigma + Constante \tag{78}$$

Or comme $\sigma > 0$, la valeur optimale est donc 0, ce qui donne $\lambda = 2(\bar{\theta} - 1)$. Comme $\lambda > 0$, cette condition d'optimalité n'est vérifiée que dans le cas $\bar{\theta} > 1$. On obtient finalement $\theta = 1$.

Dans le dernier cas, la dérivation par rapport à σ nous donne la condition d'optimalité

$$\sigma = \lambda - 2(\bar{\theta} + 1) \tag{79}$$

En remplaçant, on obtient la valeur de f, pris en cet optimum

$$f(\lambda) = -2 * \lambda + Constante \tag{80}$$

Comme $\lambda > 0$, l'optimum est donné par $\lambda = 0$, ce qui implique que

$$\sigma = -2(\bar{\theta} + 1) \tag{81}$$

Comme $\sigma > 0$, cette condition d'optimalité n'est vérifiée que pour $\bar{\theta} < -1$. Sous cette condition, nous avons $\theta = -1$.

En définitive, l'étape 3 consiste à faire

$$\bar{\theta}^k = \frac{\tilde{\rho}_T^k - \rho_T}{r} - \phi^{k+1} \tag{82}$$

et

$$\theta^{k+1} = \begin{cases} \bar{\theta}^k \text{ si } \bar{\theta}^k \in [-1, 1] \\ 1 \text{ si } \bar{\theta}^k > 1 \\ -1 \text{ si } \bar{\theta}^k < -1. \end{cases} \tag{83}$$

Nous avons obtenu les résultats suivant [Table 3]. On a encore l'étalement qui augmente quand la viscosité augmente. On constate aussi que la matière suis une trajectoire proche de celle suivie dans la partie précédente, et que la distribution terminale est quasiment identique. En revanche les résidus sur la condition (29) sont beaucoup plus grands. Si on regarde la façon de calculer le calcul du résidu (60), on constate que l'on fait intervenir la dérivé du coup terminal. Or dans le cas présent, cette dérivé n'est pas définie quand le coup devient nul.

résidu	59	60	61
haut gauche	$1,1.10^{-7}$	9.10^{-4}	1.10^{-4}
haut droite	$8,8.10^{-6}$	6.10^{-4}	$4,9.10^{-6}$
bas gauche	$1,7.10^{-6}$	9.10^{-4}	1.10^{-3}
bas droite	$1,02.10^{-7}$	9.10^{-4}	1.10^{-3}

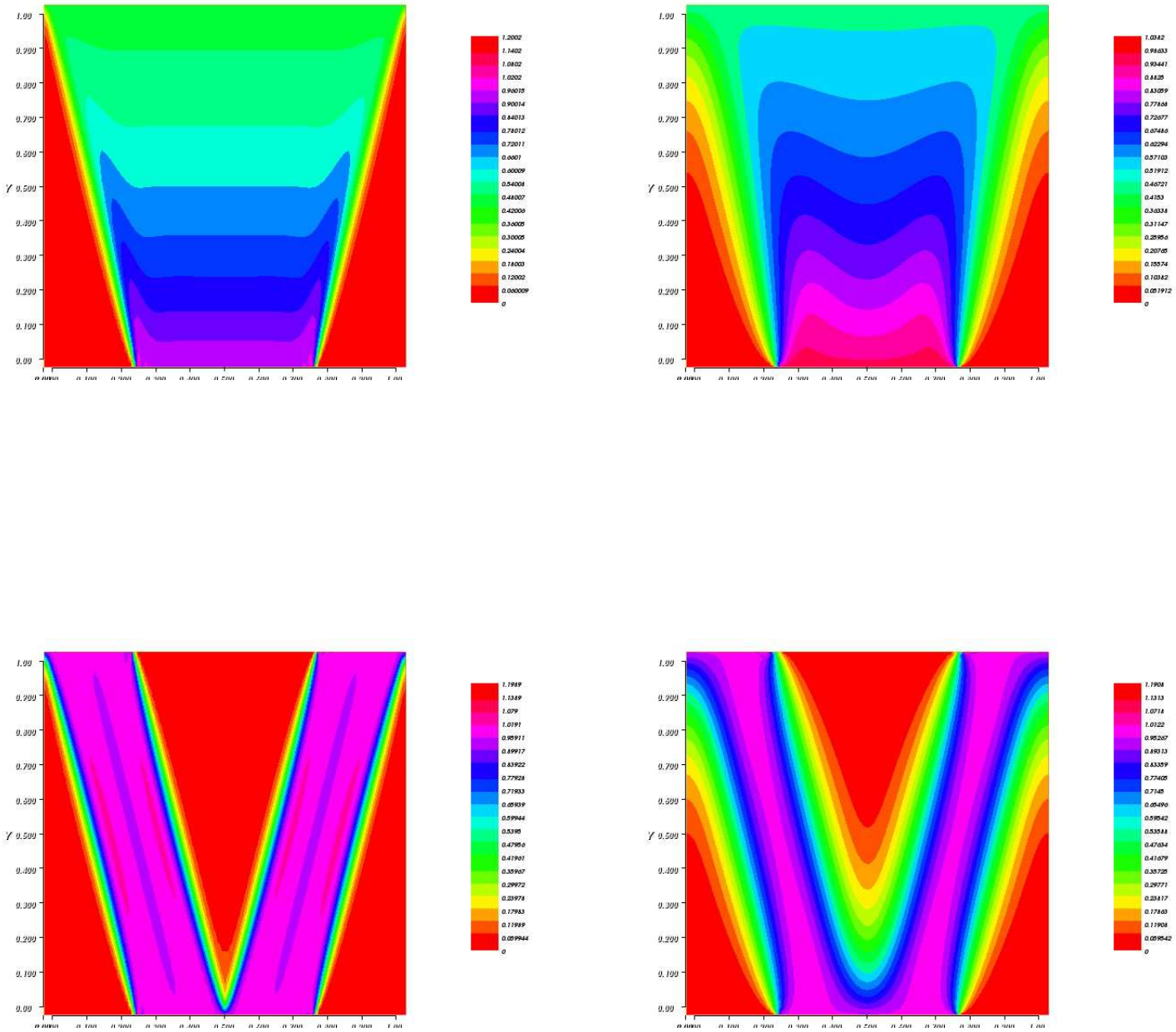

Table 3: Problème avec un coût terminal de type comparaison L1, avec une viscosité fixée, de gauche à droite, $\nu = 0,001$, $\nu = 0,01$. On compare ρ avec une constante égale à 0.5 en haut, avec la densité finale de la partie précédente en bas. L'abscisse est l'espace,l'ordonnée, le temps. Les résidus sont disponibles dans 8.2

9 Problème fixé aux deux bouts mais avec un potentiel

Dans cette partie, nous n'avons pas a passer par les étapes 3 et 5. Par contre, nous devons passer par l' étapes 4.

Pour le Potentiel, nous avons fait trois testes différents. Le premier est $P(\rho) = V(x)\rho$. C'est une fonction linéaire de ρ, avec une constante de proportionnalité dépendant de l'espace. Le deuxième cas est une potentiel $P(\rho) = \frac{1}{2}(\rho - \bar{\rho})^2$. Le troisième cas est $P(\rho) = |\rho - \bar{\rho}|$.

9.1 $P(\rho) = V(x)\rho$

Il nous faut détailler l'étape 4. Pour cela, on doit calculer la fonction duale de P.

$$P^*(c) = \sup_{\rho} c\rho - V(x)\rho \tag{84}$$

Donc

$$P^*(c) = \begin{cases} c \text{ si } c = V(x) \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} \tag{85}$$

On a juste besoin de mettre $c = V(x)$. Nous avons testé $V(x) = e^{-(x-x_0)^2}$, pour différentes valeurs de x_0. Nous voyons que la matière est bien poussé dans la partie de l'espace où le potentiel pénalise le moins la présence de matière [Table 4].

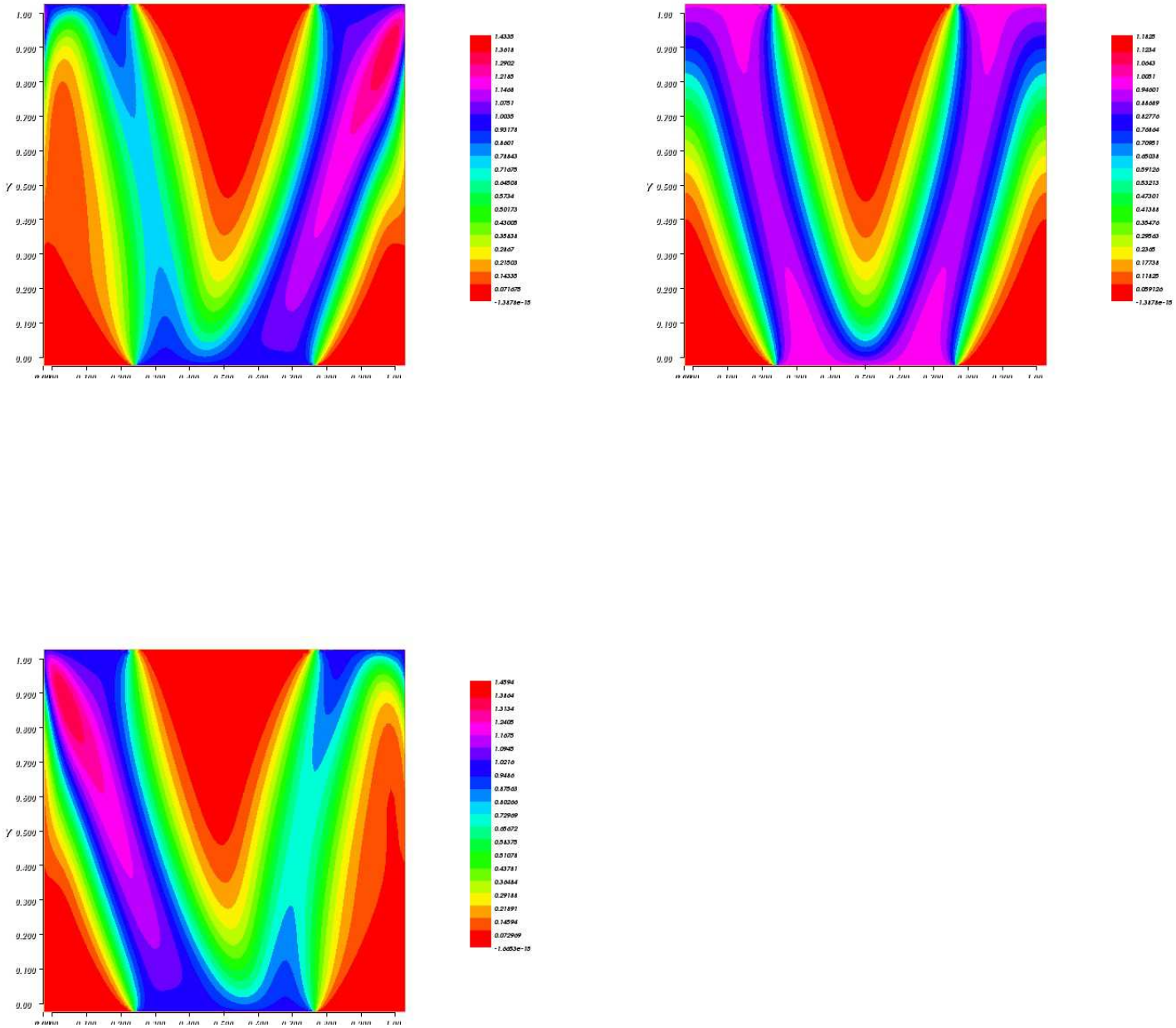

Table 4: Problème fixé au deux bouts, avec une viscosité fixée, $\nu = 0,01$. L'abscisse est l'espace,l'ordonnée, le temps. Les erreurs $L2$ sont de gauche à droite et de haut et bas: $4,65.10^{-7}$, $4,73.10^{-7}$, $5,25.10^{-7}$, pour des x_0 respectivement de 0, $0,5$ et 1

9.2 $P(\rho) = \frac{1}{2}(\rho - \bar{\rho})^2$

Nous avons déjà dit que

$$\frac{c^2}{2} + c\bar{\rho} = \sup_{\rho} \rho c - \frac{1}{2}(\rho - \bar{\rho})^2 \tag{86}$$

Si nous écrivons les termes du Lagrangien qui dépendent de c, on doit résoudre le problème

$$\inf_{c} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \frac{c^2}{2} + c\bar{\rho} - \rho c + \frac{r}{2}(\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a - c)^2 \tag{87}$$

Cette fonction en c est tout a fait régulière; la dérivation en c nous donne la valeur de c suivante:

$$c = \frac{r(\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a) + \rho - \bar{\rho}}{1 + r}. \tag{88}$$

L'étape 4 revient donc à faire

$$c^{k+1} = \frac{r(\partial_t \phi^{k+1} + \nu \Delta_x \phi^{k+1} - a^k) + \rho^{k+1} - \bar{\rho}}{1 + r}. \tag{89}$$

Nous avons testé différents $\bar{\rho}$. Nous voyons [Table **??**] que dans le cas où $\bar{\rho} = 0$, le potentiel tend à étaler la matière. Dans les deux autres cas, on constate que le potentiel accélère la mise en place de la matière dans la position terminale quand on la pénalise déjà sur la trajectoire, ce qui est logique. A l'inverse, quand on pénalise la condition initiale, on constate que la matière tend à rester le plus de temps possible dans la position initiale.

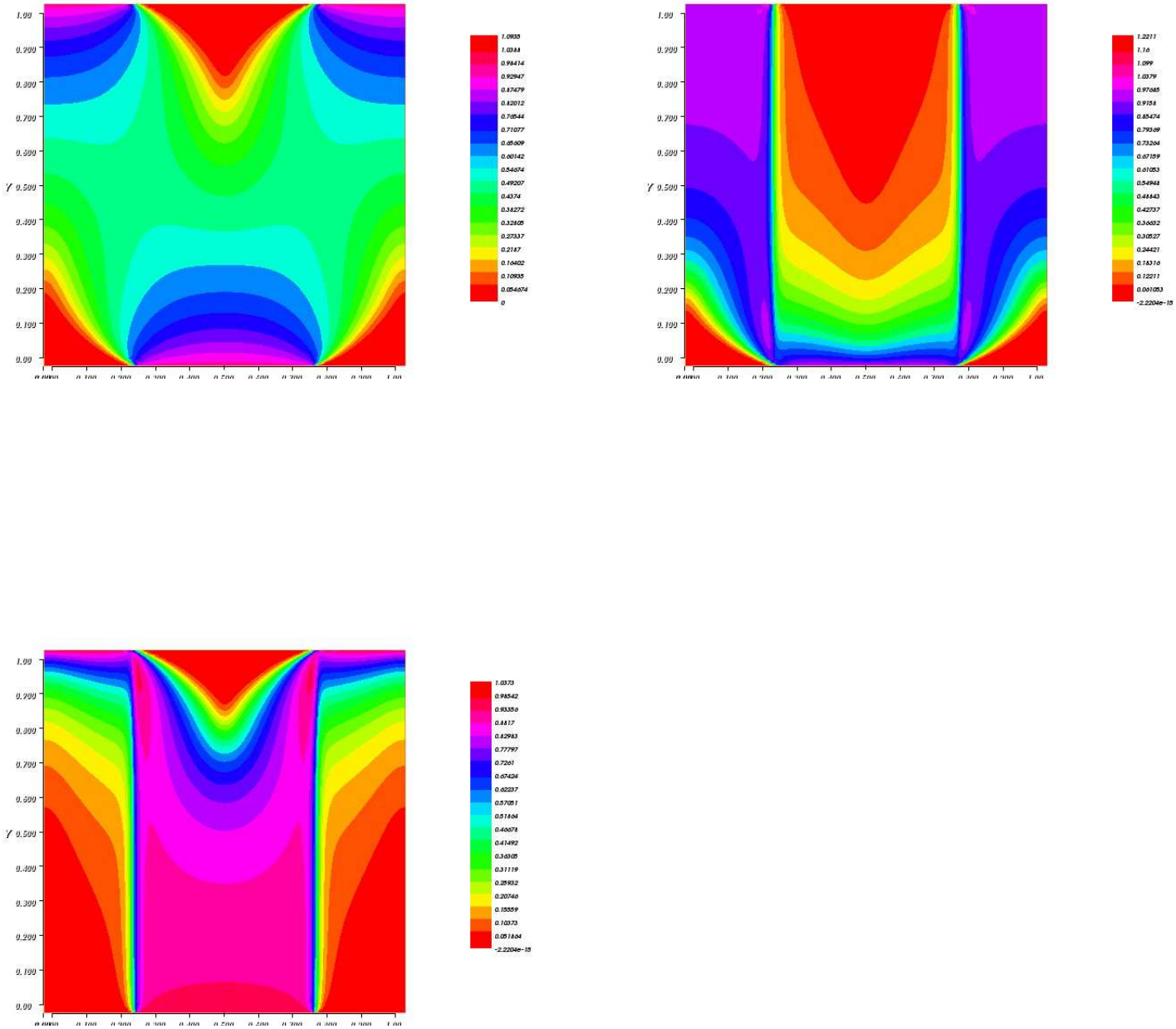

Table 5: Problème fixé au deux bouts, avec une viscosité fixée, $\nu = 0,01$. L'abscisse est l'espace,l'ordonnée, le temps. Les erreurs $L2$ sont de gauche à droite et de haut et bas: $3,1.10^{-6}$, $7,52.10^{-6}$, $7,2.10^{-6}$, pour des $\bar{\rho}$ respectivement de 0, $1_{x<0.25} + 1_{x>0.75}$ et $1_{0.25<x<0.75}$

9.3 $P(\rho) = |\rho - \bar{\rho}|$

Nous avons calculé P^* à la partie précédente

$$c\bar{\rho} + I(c) = \sup_{\rho} c\rho - |\rho - \bar{\rho}|, \tag{90}$$

où

$$I(c) = \begin{cases} 0 \text{ si } c \in [-1, 1] \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} \tag{91}$$

Si nous écrivons les termes du Lagrangien qui dépendent de c, on doit résoudre le problème

$$\inf_c \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} I(c) + c\bar{\rho} - \rho c + \frac{r}{2}(\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a - c)^2 \tag{92}$$

Cette fonction en c n'est pas différentiable, à cause de la contrainte. Nous allons donc tenter de voir ce problème comme une projection sur le convexe $[-1, 1]$. En rajoutant des termes indépendant de c, on montre que le problème de minimisation est le suivant

$$\inf_{c \in [-1,1]} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (\partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a + \frac{\rho - \bar{\rho}}{r} - c)^2. \tag{93}$$

C'est donc une projection sur $[-1, 1]$ de

$$\bar{c} = \partial_t \phi + \nu \Delta_x \phi - a + \frac{\rho - \bar{\rho}}{r} \tag{94}$$

Comme dans la comparaison $L1$ de la section précédente, l'étape 4 consiste à poser

$$\bar{c}^k = \partial_t \phi^{k+1} + \nu \Delta_x \phi^{k+1} - a^k + \frac{\rho^k - \bar{\rho}}{r} \tag{95}$$

et à faire point par point,

$$c^{k+1} = \begin{cases} \bar{c}^k \text{ si } \bar{\theta}^k \in [-1, 1] \\ 1 \text{ si } \bar{c}^k > 1 \\ -1 \text{ si } \bar{c}^k < -1. \end{cases} \tag{96}$$

Nous avons testé différents $\bar{\rho}$. On voit [Table 6], dans la cas où $\bar{\rho} = 0$, que la matière est moins étalée dans le cas $L1$ que dans le cas $L2$. Dans les deux autres cas, on constate que le potentiel accélère la mise en place de la matière dans la position terminale quand on la pénalise déjà sur la trajectoire, ce qui est logique. A l'inverse, quand on pénalise la condition initiale, on constate que la matière tend à rester le plus de temps possible dans la position initiale. On remarque aussi que les erreurs sont très élevés. Quand on regarde le calcule du résidu 59, on remarque que l'on a besoin de la dérivé du potentiel quand il est nul. Cette dérivé n'est pas bien définie. Nous avons éliminé ces points en calculant un nouveau résidu défini comme

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (\rho - \bar{\rho})(\partial_t \phi + \nu \triangle_x \phi + \frac{1}{2} | \bigtriangledown_x \phi|^2 - \partial_\rho P(\rho)). \tag{97}$$

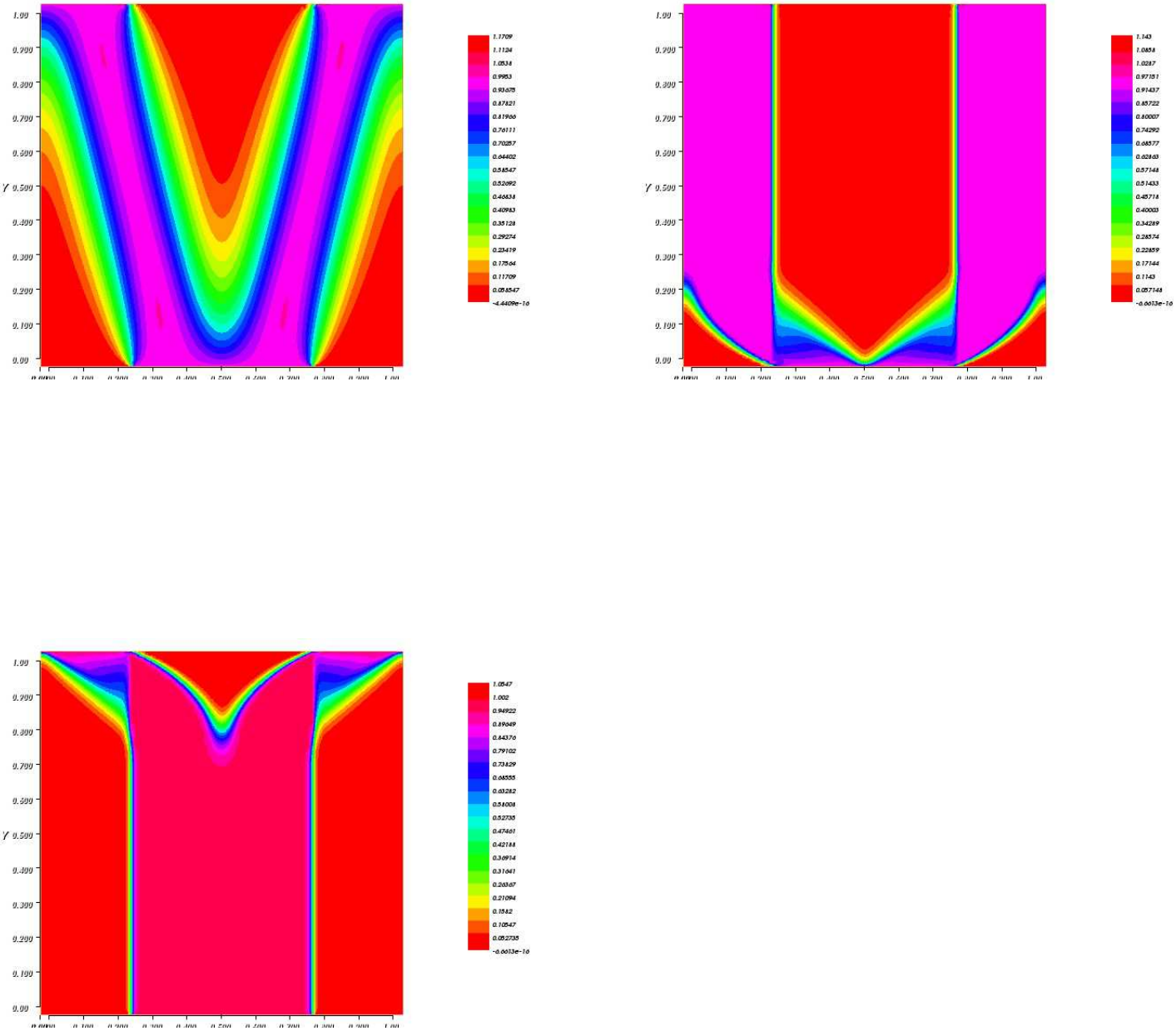

Table 6: Problème fixé au deux bouts, avec une viscosité fixée, $\nu = 0,01$. L'abscisse est l'espace,l'ordonnée, le temps. Les erreurs $L2$ sont de gauche à droite et de haut et bas: $4,67.10^{-7}$, $0,41$, $0,35$, pour des $\bar{\rho}$ respectivement de 0, $1_{x<0.25} + 1_{x>0.75}$ et $1_{0.25<x<0.75}$

Avec cette nouvelle évaluation, on obtient des valeurs de résidu de l'ordre de 10^{-6}.

Part VI
Conclusion

En conclusion, l'adaptation de converge bien même quand les potentiels où les coûts terminaux sont non dérivables. En revanche, il faut faire attention aux résidus aux points singuliers. Il serait intéressant dans de futurs travaux, d'étudier les vitesses de convergence de l'algorithme. Nos exemples s'arrêtent à un espace à une seule dimension. Nous avons commencé à adapter les programmes au cas à deux dimensions, mais n'avons pu finir avant la fin du stage. Il faudrait poursuivre cette étude. Enfin il serait aussi intéressant de faire tourner nos codes sur des exemples plus "pratiques".

References

[1] M. Fortin and R. Glowinski. Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems. Elsevier Science, 1983.

[2] J.D. Benamou, Y. Brenier, A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfert problem, *Numer. Math.*, 2000, 84: 375-393

[3] J.D. Benamou, Numerical resolution of an unbalanced mass transport problem, *ESAIM*, 2003, Vol.37 N° 5, 851-868

[4] Y. Achdou, F. Camilli and I. Capuzzo-Dolcetta , Mean field games: numerical methods for the planning problem, *hal-00465404*, 2010

[5] J.M. Lasry, P.L. Lions , Jeux à champs moyen.I. Le cas stationnaire, *the annals of applied probability*, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris* 2006, 343(9):619-625

[6] R. Glowinski, O. Pironneau , Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two dimensionnal stockes problem,*SIAM Sirev* Vol. 21, No 2, April 1979

[7] N. Papadakis, G. Peyre, E. Oudet , Optimal transport with proximal splitting,*hal-00816211* 2013

1 First section

Here is some text for the first section, and a label. Uses version 5.1f of the package.

2 Second section

Text for the second section. This is closely related to the text in section 1 on page 25.

Contents

1 First section **25**

2 Second section **26**

RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-6399