



Validité des éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2

Paul-Louis George, Houman Borouchaki

► To cite this version:

Paul-Louis George, Houman Borouchaki. Validité des éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2. [Rapport de recherche] RR-8376, INRIA. 2013, pp.94. hal-00869158

HAL Id: hal-00869158

<https://inria.hal.science/hal-00869158>

Submitted on 2 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Validité des éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2

Paul Louis George, Houman Borouchaki

**RESEARCH
REPORT**

N° 8376

Octobre 2013

Project-Team Gamma3



Validité des éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2

Paul Louis George*, Houman Borouchaki†

Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 8376 — Octobre 2013 — 90 pages

Résumé : Un élément fini est valide si son jacobien est strictement positif partout. Le jacobien est le déterminant de la matrice jacobienne construite à partir des dérivées de la transformation de l'espace de paramètres (élément de référence) vers l'élément courant. Hormis les cas où le jacobien est constant, en général il est un polynôme de degré lié au degré de l'élément fini (mais pas le même sauf dans quelques cas) dont la valeur dépend du point de calcul. Valider un élément revient donc à étudier le signe de ce polynôme quand on parcourt l'élément.

Ce papier, qui réalise la synthèse de plusieurs rapports, montre comment calculer le jacobien des différents éléments finis de Lagrange usuels de degré 1 et 2. L'étude du signe du jacobien se fait soit directement en analysant sa forme telle qu'obtenue dans l'écriture classique éléments finis (fonctions de forme et nœuds) soit en formulant les éléments dans le formalisme de Bézier (polynômes de Bernstein et points de contrôle) qui en facilite l'analyse. L'étude donne des conditions de validité qui sont suffisantes (nécessaires et suffisantes dans certains cas).

Mots-clés : Élément Fini - Ordre 1 - Ordre 2 - Jacobien - Lagrange - Bézier

* INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

† UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

**RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Lagrange finite element of degree 1 and 2

Abstract: A finite element is valid if its jacobian is strictly positive everywhere. The jacobian is the determinant of the jacobian matrix related to the partials of the mapping function which maps the parameter space (reference element) to the current element. Apart when it is constant, the jacobian is a polynomial whose degree is related to the degree of the finite element (but not the same in general). The value of the jacobian varies after the point where it is evaluated. Validating an element relies in finding the sign of this polynomial when one traverses the element.

This paper, actually a synthesis of various reports, shows how to calculating the jacobian of the different usual Lagrange finite elements of degree 1 and 2. To this end, we take the form of this polynomial as obtained in the classical finite element framework (shape functions and nodes) or after reformulating the element by means of a Bezier form (Bernstein polynomials and control points) which makes easier the discussion. We exhibit sufficient (necessary and sufficient in some cases) conditions to ensure the validity of a given element.

Key-words: Finite Element - First order - Second order - Jacobian - Lagrange - Bézier

Table des matières

1	Introduction	3
2	Rappels sur les polynômes de Bernstein	4
2.1	Définitions	4
2.2	Dérivation	5
2.3	Multiplication	5
3	Formes de Bézier	5
3.1	Courbes de Bézier	5
3.2	Surfaces ou carreaux de Bézier	11
3.3	Volumes de Bézier	19
3.4	Forme de Bézier d'un polynôme	21
4	Éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2	22
4.1	Définitions sous forme élément fini	22
4.2	Triangles et quadrilatères en deux dimensions	24
4.2.1	Le triangle de degré 1 à 3 nœuds	24
4.2.2	Le quadrilatère de degré 1 à 4 nœuds	24
4.2.3	Le triangle de degré 2 à 6 nœuds	25
4.2.4	Le quadrilatère complet de degré 2 à 9 nœuds	26
4.2.5	Le quadrilatère Serendip de degré 2 à 8 nœuds	27
4.3	Tétraèdres, pentaèdres et hexaèdres	28
4.3.1	Le tétraèdre de degré 1 à 4 nœuds	28
4.3.2	Le pentaèdre de degré 1 à 6 nœuds	29
4.3.3	L'hexaèdre de degré 1 à 8 nœuds	30
4.3.4	Le tétraèdre de degré 2 à 10 nœuds	30
4.3.5	Le pentaèdre complet de degré 2 à 18 nœuds	31
4.3.6	Le pentaèdre Serendip de degré 2 à 15 nœuds	32
4.3.7	L'hexaèdre complet de degré 2 à 27 nœuds	33
4.3.8	L'hexaèdre Serendip de degré 2 à 20 nœuds	34
4.4	Le cas particulier des pyramides	35
4.5	Définitions sous forme Bézier	36
4.5.1	Équivalence des deux définitions	36
4.5.2	Le cas des éléments Serendip	38
4.6	Une équivalence sur les jacobiens.	38
5	Validité d'un élément fini	38
5.1	Calcul du jacobien	39
5.1.1	Le triangle de degré 1 à 3 nœuds	39
5.1.2	Le quadrilatère de degré 1 à 4 nœuds	39
5.1.3	Le triangle de degré 2 à 6 nœuds	39
5.1.4	Le quadrilatère de degré 2 à 9 nœuds	43
5.1.5	Le tétraèdre de degré 1 à 4 nœuds	46
5.1.6	Le pentaèdre de degré 1 à 6 nœuds	46
5.1.7	L'hexaèdre de degré 1 à 8 nœuds	48
5.1.8	Le tétraèdre de degré 2 à 10 nœuds	53
5.1.9	Le pentaèdre de degré 2 à 18 nœuds	58
5.1.10	L'hexaèdre de degré 2 à 27 nœuds	63
5.1.11	Les éléments Serendip	66
5.2	Positivité du jacobien	79
5.2.1	Quelques jacobiens particuliers	79
5.2.2	Expression générique et positivité	80
5.2.3	Raffinement par la subdivision d'une arête	80
5.2.4	Raffinement par la subdivision d'une face	81
5.2.5	Raffinement par la subdivision d'un élément	81

5.2.6	Une méthode alternative totalement mécanique	82
5.2.7	Une méthode alternative pour les éléments Serendip	82
5.3	Synthèse	83
6	En pratique	83
7	Quelques autres applications	85
8	Quelques exemples de maillages de degré 2	86
9	Conclusions et perspectives	86

1 Introduction

La résolution de nombreux problèmes formulés en E.D.P. nécessite le recours à des éléments finis de degré deux ou plus, en particulier, pour les problèmes fortement non-linéaires (problèmes de plasticité en mécanique des solides, ..). En outre, de tels éléments permettent une représentation plus fidèle de géométries complexes (frontières courbes) avec, dans de nombreux cas, un nombre réduit d'éléments.

Autour de ce qu'est un maillage de degré 2, se posent de nombreuses questions, à commencer simplement par définir les critères de validité puis sur la définition de la notion de qualité pour un élément de degré 2. Ici, nous allons nous intéresser aux éléments finis de Lagrange usuels de degré 2, le triangle à 6 nœuds, les quadrilatères à 9 et 8 nœuds pour la deux dimensions et le tétraèdre à 10 nœuds, les pentaèdres à 18 et 15 nœuds ainsi que les hexaèdres à 27 et 20 nœuds. Au passage, on discutera aussi des éléments correspondants de degré 1 ainsi que du cas particulier des pyramides en notant qu'il existe bien d'autres éléments moins classiques.

La vision Bézier des éléments de degré 2 et sa vision habituelle élément fini sont mises en correspondance en montrant, au passage, quelques aspects théoriques plus ou moins cachés du problème. Grâce à cette façon de regarder le problème, on pourra également aborder le cas d'éléments de degré plus élevé.

La première section donne quelques rappels sur les polynômes de Bernstein, ingrédients de base des formes de Bézier. La seconde section décrit les différentes formes de Bézier utilisées par la suite, les courbes, les carreaux surfaciques, les carreaux volumiques et les polynômes pouvant s'écrire avec le même formalisme.

Ensuite, on analyse les éléments finis sous leur forme classique, élément de référence, transformation géométrique, polynômes de base ou fonctions de forme et calcul du jacobien. L'analyse du polynôme jacobien est réalisée dans ce cadre et on voit alors qu'il est difficile de conclure dans la majorité des cas.

Puis on analyse les éléments finis après les avoir écrits dans le formalisme de Bézier. On montre l'équivalence des deux écritures puis l'analyse du polynôme jacobien est réalisée dans ce cadre et on voit alors qu'il est facile de conclure en donnant des conditions suffisantes de positivité dans tous les cas. On montre également que ces conditions peuvent être affinées pour s'approcher, de plus en plus, de conditions nécessaires et suffisantes.

On donne, enfin et avant de conclure, quelques idées sur la façon pratique d'utiliser les résultats théoriques obtenus. Quelques remarques sur le cas de degrés plus élevés terminent l'étude.

Pour faciliter la lecture, on donne ici les principales notations utilisées par la suite dans tout le papier.

Nomenclature.

- u, v, w, t , les paramètres des formes de Bézier,
- $B_i^n(\cdot), B_{ij}^n(\cdot, \cdot), B_{ijk}^n(\cdot, \cdot, \cdot), B_{ijkl}^n(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$, les polynômes de Bernstein dans leurs diverses occurrences,
- $C_i^n, C_{ij}^n, C_{ijk}^n, C_{ijkl}^n$, les coefficients de ces polynômes,
- $\Gamma, \gamma, \gamma(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)$, une courbe de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ,
- $\Sigma, \sigma, \sigma(\cdot, \cdot), \sigma(\cdot, \cdot, \cdot)$, un carreau plan ou surfacique,
- $\Theta, \theta, \theta(\cdot, \cdot, \cdot), \theta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$, un carreau volumique,
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \vec{u} \wedge \vec{v}, |\vec{u} \vec{v}|, |\vec{u} \vec{v} \vec{w}|$, des vecteurs, le produit scalaire, le produit vectoriel, le déterminant,
- $\hat{K}, K, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, x, y, z, x_i, \dots$, l'élément de référence, l'élément courant, les coordonnées dans \hat{K} , les coordonnées courantes, l'abscisse d'un nœud d'indice i , ...
- $F_K, \mathcal{J}, A_i, C_i, p_i$, la transformation géométrique, le jacobien, les nœuds, les points de contrôle et les fonctions de forme (ou polynômes de base) dans la notation éléments finis,
- $P_i, P_{ij}, P_{ijk}, P_{ijkl}$, les points de contrôle dans le cadre Bézier,
- $N_i, N_{ij}, N_{ijk}, N_{ijkl}$, les coefficients de contrôle.

2 Rappels sur les polynômes de Bernstein

Les polynômes de Bernstein sont l'ingrédient de base pour la construction des courbes, des carreaux et, plus généralement, des formes de Bézier. Ces polynômes ont de nombreuses propriétés et sont faciles à manipuler. Cette section précise les définitions relatives à ces polynômes. Elle indique comment en trouver les dérivées et comment les multiplier entre eux, opérations qui nous seront très utiles par la suite.

2.1 Définitions

Les polynômes de Bernstein se présentent sous deux formes selon l'espace de paramètres sur lequel ils sont définis.

Polynômes définis sur un intervalle. Soit u un paramètre et soit l'intervalle $[0, 1]$, alors le polynôme¹ de degré n en u s'écrit

$$B_i^n(u) = C_i^n u^i (1-u)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}, \quad (1)$$

où les C_i^n sont simplement les coefficients du binôme.

Notons que ces polynômes peuvent être définis via la relation de récurrence

$$B_i^n(u) = u B_{i-1}^{n-1}(u) + (1-u) B_i^{n-1}(u), \quad (2)$$

qui permet une évaluation très simple de ces polynômes (c'est l'algorithme de De Casteljau utilisé pour évaluer une courbe, un carreau, ..., en une valeur donnée, voir plus bas).

Polynômes définis sur un système de coordonnées barycentriques. Soient u, v et w un système de coordonnées barycentriques avec donc $u + v + w = 1$, u, v et w dans $[0, 1]$, alors le polynôme de degré n en u, v et w s'écrit

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = C_{ijk}^n u^i v^j w^k = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \text{ avec } i + j + k = n, \quad (3)$$

où les coefficients sont notés C_{ijk}^n , mais avec trois indices. Cette représentation sera utilisée naturellement pour les triangles. On trouvera également le même type d'écriture pour un

¹Selon les auteurs, on trouvera comme notation $B_{n,i}(u), B_n^i(u)$ ou $B_i^n(u)$ avec le degré en exposant et c'est cette dernière écriture que nous retenons ici.

segment ou un tétraèdre, c'est-à-dire, respectivement :

$$B_{ij}^n(u, v) = C_{ij}^n u^i v^j = \frac{n!}{i!j!} u^i v^j \text{ avec } i + j = n \text{ et } u + v = 1, \quad (4)$$

et

$$B_{ijkl}^n(u, v, w, t) = C_{ijkl}^n u^i v^j w^k t^l = \frac{n!}{i!j!k!l!} u^i v^j w^k t^l \text{ avec } i + j + k + l = n \text{ et } u + v + w + t = 1. \quad (5)$$

Notons que ces polynômes peuvent également être définis via la relation de récurrence, par exemple

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = uB_{i-1,j,k}^{n-1}(u, v, w) + vB_{i,j-1,k}^{n-1}(u, v, w) + wB_{i,j,k-1}^{n-1}(u, v, w), \quad (6)$$

qui permet une évaluation très simple de ces polynômes (c'est l'un des algorithmes de De Casteljau).

2.2 Dérivation

Pour $B_i^n(u)$, Relation (1), un simple calcul montre que

$$B_i^{n'}(u) = n(B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)). \quad (7)$$

Pour $B_{ijk}^n(u, v, w)$, Relation (3), et les expressions analogues, les dérivées partielles sont faciles à obtenir, on a

$$\frac{\partial}{\partial u} B_{ijk}^n(u, v, w) = nB_{ijk}^{n-1}(u, v, w). \quad (8)$$

et des expressions identiques pour les deux autres. Ces dérivées vont permettre de construire des dérivées directionnelles (dans le cas du triangle et du tétraèdre) utiles par la suite.

2.3 Multiplication

La multiplication de deux polynômes de la forme (1) est immédiate, on a

$$B_i^n(u)B_j^m(u) = \frac{C_i^n C_j^m}{C_{i+j}^{m+n}} B_{i+j}^{m+n}(u), \quad (9)$$

c'est-à-dire que l'on sort le polynôme, on rajoute son coefficient multiplicateur et on pondère en anticipant le nouveau coefficient.

La multiplication de deux polynômes de la forme (3) ou d'une forme analogue se fait de manière identique, par exemple, on a

$$B_{i_1 j_1 k_1}^n(u, v, w) B_{i_2 j_2 k_2}^m(u, v, w) = \frac{C_{i_1 j_1 k_1}^n C_{i_2 j_2 k_2}^m}{C_{i_1+i_2, j_1+j_2, k_1+k_2}^{m+n}} B_{i_1+i_2, j_1+j_2, k_1+k_2}^{m+n}(u, v, w). \quad (10)$$

La multiplication de trois polynômes entre eux se fait en appliquant deux fois le même procédé, ...

3 Formes de Bézier

On se donne des valeurs (coefficients, points, vecteurs, ...) de contrôle et, en utilisant les polynômes de Bernstein sous leur écriture la mieux adaptée, on construit telle ou telle forme de Bézier. On indique aussi, dans le cas d'une courbe, comment élever son degré.

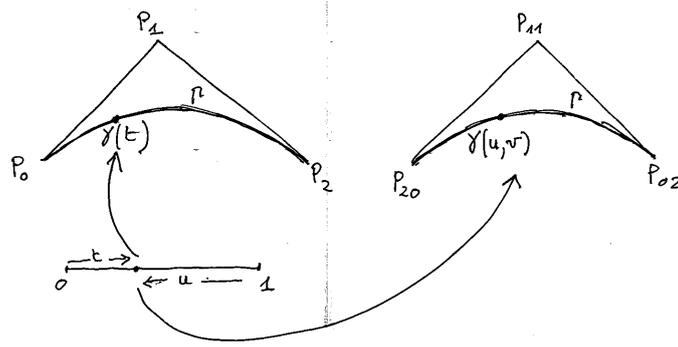


FIG. 1 – La courbe, son espace de paramètre(s) et ses points de contrôle dans le système naturel (à gauche) et dans le système barycentrique (à droite).

3.1 Courbes de Bézier

Ici, les valeurs de contrôle sont des points de l'espace \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 que l'on note P_i ou P_{ij} selon la définition choisie. La courbe $\Gamma = \{\gamma(t), t \in [0, 1]\}$ définie par

$$\gamma(t) = \sum_{i=0,2} B_i^2(t) P_i \quad \text{avec } t \in [0, 1], \quad (11)$$

est la courbe² de Bézier de degré 2 (un arc de parabole) contrôlée par les P_i . Dans certains cas, il est plus simple de définir cette courbe dans un système de coordonnées barycentriques, c'est-à-dire que la même courbe, vue ici comme $\Gamma = \{\gamma(u, v), u + v = 1\}$, est définie par

$$\gamma(u, v) = \sum_{i+j=2} B_{ij}^2(u, v) P_{ij} \quad \text{avec } u + v = 1, \quad (12)$$

avec les mêmes points de contrôle notés différemment en accord avec la définition.

Ces courbes de Bézier de degré 2 correspondront aux arêtes des éléments finis de Lagrange de degré 2 comme on le verra plus tard.

Quelques propriétés de ces courbes. Si on ouvre la Relation (11), on a

$$\gamma(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2$$

et il est immédiat de voir que $\gamma(0) = P_0$ et que $\gamma(1) = P_2$. Par suite la courbe passe par P_0 et P_2 . Par contre, le point P_1 n'est qu'un point de contrôle et la courbe ne passe pas par ce point. Le point milieu est défini par la valeur $t = \frac{1}{2}$ et on a, si M désigne ce milieu :

$$M = \frac{P_0 + P_2 + 2P_1}{4} \quad \text{et, inversement, } P_1 = \frac{4M - P_0 - P_2}{2}.$$

Notons, et nous y reviendrons (algorithme d'évaluation), que M est le milieu des milieux de $P_0 P_1$ et de $P_1 P_2$.

Exprimée en fonction des trois nœuds, P_0 , P_2 et M , la courbe s'écrit :

$$\gamma(t) = (1-t)(1-2t)P_0 + 4t(1-t)M + t(2t-1)P_2.$$

Si on considère l'autre écriture, à savoir la Relation (12), on retrouve les mêmes propriétés. Comme

$$\gamma(u, v) = u^2 P_{20} + 2uv P_{11} + v^2 P_{02}$$

²Par abus de langage, on fera, dans les cas non ambigus, la confusion entre Γ , la courbe, γ , la fonction et $\gamma(t)$ un point.

on a $\gamma(1, 0) = P_{20}$ et $\gamma(0, 1) = P_{02}$, tandis que le milieu, M , correspond à $u = v = \frac{1}{2}$ et ainsi

$$M = \frac{P_{20} + P_{02} + 2P_{11}}{4} \text{ et, inversement, } P_{11} = \frac{4M - P_{20} - P_{02}}{2}.$$

Exprimée en fonction des trois nœuds, P_{20} , P_{02} et M , la courbe s'écrit :

$$\gamma(u, v) = u(u - v)P_{20} + 4uvM + v(v - u)P_{02}.$$

Une propriété remarquable de ces courbes est qu'elle sont inscrites dans le polygone associé à leurs points de contrôle.

La tangente. En partant de la Relation (11) et en utilisant la Relation (7), on trouve

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= 2 \sum_{i=0,2} (B_{i-1}^1(t)P_i - B_i^1(t)P_i) = 2 \sum_{i=0,1} (B_i^1(t)P_{i+1} - B_i^1(t)P_i), \\ \gamma'(t) &= 2 \sum_{i=0,1} B_i^1(t)(P_{i+1} - P_i) = 2 \sum_{i=0,1} B_i^1(t)\overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \end{aligned}$$

la dérivée est donc une forme de Bézier de degré 1 (1 de moins que le degré de la courbe) dont les contrôles sont les vecteurs $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$. Comme $B_0^1(t) = 1 - t$ et que $B_1^1(t) = t$, il vient

$$\gamma'(t) = 2(1 - t)\overrightarrow{P_0 P_1} + 2t\overrightarrow{P_1 P_2},$$

et, ainsi $\gamma'(0) = 2\overrightarrow{P_0 P_1}$ et $\gamma'(1) = 2\overrightarrow{P_1 P_2}$, la tangente en P_0 est portée par le vecteur $\overrightarrow{P_0 P_1}$, celle en P_2 est portée par le vecteur $\overrightarrow{P_1 P_2}$, autrement dit, le point de contrôle P_1 permet, avec les extrémités P_0 et P_2 de construire les tangentes en ces extrémités. Pour $t = \frac{1}{2}$, on trouve $\gamma'(\frac{1}{2}) = \overrightarrow{P_0 P_2}$, donc la tangente en M est parallèle au segment droit $P_0 P_2$.

En partant de la Relation (12) et en utilisant la Relation (8), on trouve, bien sûr, les mêmes résultats. À noter cependant que les tangentes sont inversées, par exemple, celle en P_{20} est portée par le vecteur $\overrightarrow{P_{11} P_{20}}$ (et non $\overrightarrow{P_{20} P_{11}}$), ceci est lié au fait que u et t varient en sens inverse, $u = 1$ quand $t = 0$ et réciproquement (en fait $\frac{\partial u}{\partial t} = -1$).

Algorithme d'évaluation. En se basant sur la Relation (2), on obtient un moyen très simple et géométriquement parlant pour trouver tel ou tel point de la courbe (donc évaluer $\gamma(t)$ pour une valeur de t donnée). En effet, on écrit :

$$\gamma(t) = \sum_{i=0,2} B_i^2(t)P_i$$

comme

$$\gamma(t) = (1 - t) \sum_{i=0,1} B_i^1(t)P_i + t \sum_{i=0,1} B_i^1(t)P_{i+1},$$

en passant du degré 2 au degré 1 puis puisque

$$\sum_{i=0,1} B_i^1(t)P_i = (1 - t)P_0 + tP_1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0,1} B_i^1(t)P_{i+1} = (1 - t)P_1 + tP_2,$$

on a l'idée de la construction utilisée pour l'évaluation en tout t , qui est traduite par l'algorithme étonnement simple écrit ci-dessous, numéroté (1), qui n'est autre que l'un des algorithmes bien connus et fascinants de De Casteljaou. Il est valable pour tout degré et nous l'utiliserons plus tard dans ce contexte (pour des degrés autres que deux), voir les figures correspondantes.

Algorithm 1 Algorithme d'évaluation d'un point d'une courbe

- on construit le point associé à la valeur t sur chaque segment du polygone de contrôle, ceci donne un nouveau polygone,
- on itère tant que le nombre de segment du polygone courant est plus grand que 1, sinon, le point trouvé est le point cherché et on a ainsi terminé l'algorithme.

Pseudo-code (variable naturelle) :

- Données : n le degré de la courbe, les points de contrôle P_i et t la valeur du paramètre.
- Initialisation : $P_i^0 = P_i$ pour $i = 0, n$.
- Faire pour $k = 0, n - 1$
 - Faire pour $i = 0, n - (k + 1)$
 - $P_i^{k+1} = (1 - t)P_i^k + tP_{i+1}^k$
 - Fin Faire pour i
- Fin Faire pour k
- P_0^n est la solution.

Pseudo-code (variables barycentriques) :

- Données : n le degré de la courbe, les points de contrôle P_{ij} et u la valeur du paramètre (donc v).
- Initialisation : $P_{ij}^0 = P_{ij}$ pour $i + j = n$.
- Faire pour $k = 0, n - 1$
 - Faire pour $i + j = n - (k + 1)$
 - $P_{ij}^{k+1} = uP_{ij}^k + vP_{i-1, j+1}^k$
 - Fin Faire pour $i + j$
- Fin Faire pour k
- P_{n0}^n est la solution.

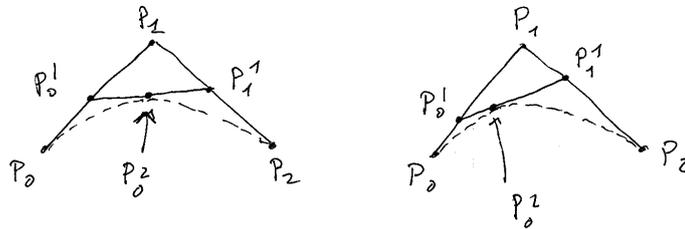


FIG. 2 – Évaluation du milieu (à gauche) et du tiers (à droite) pour une courbe de degré 2, P_0^2 est la solution. On construit les deux P_i^1 correspondant à la valeur de t choisie, puis l'unique P_i^2 , la solution cherchée.

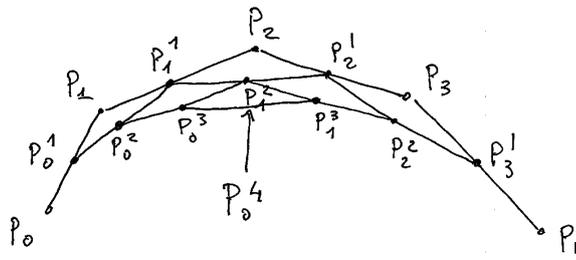


FIG. 3 – Évaluation du milieu pour une courbe de degré 4, P_0^4 est la solution. On construit les quatre P_i^1 correspondant à la valeur de t choisie, puis les trois P_i^2 , puis les deux P_i^3 et enfin l'unique P_i^4 , la solution cherchée.

Algorithm 2 Algorithme de raffinement d'une courbe par subdivision

- on pose $P_i^0 = P_i$, pour $i = 0, 2$,
- on calcule $P_i^1 = (1-t)P_i^0 + tP_{i+1}^0$ pour $i = 0, 1$,
- on calcule $P_i^2 = (1-t)P_i^1 + tP_{i+1}^1$ pour $i = 0$, ce qui n'est autre que l'algorithme d'évaluation présenté ci-dessus,
- on pose $\gamma_1(t) = \sum_{i=0,2} B_i^2(t)Q_i$ avec $Q_0 = P_0^0, Q_1 = P_0^1, Q_2 = P_0^2$ et $t \in [0, 1]$,
- on pose $\gamma_2(t) = \sum_{i=0,2} B_i^2(t)Q_i$ avec $Q_0 = P_0^2, Q_1 = P_1^1, Q_2 = P_2^0$ et $t \in [0, 1]$.

Pseudo-code (variable naturelle) :

- Données : n le degré de la courbe, les points de contrôle P_i et t la valeur du paramètre.
- Initialisation : $P_i^0 = P_i$ pour $i = 0, n$.
- Utiliser l'algorithme d'évaluation pour trouver les P_i^k pour $k = 1, n-1$.
- Définir la courbe de gauche par ses points de contrôle : $Q_i = P_0^i$ pour $i = 1, n$.
- Définir la courbe de droite par ses points de contrôle : $Q_i = P_i^{n-i}$ pour $i = 1, n$.

Pseudo-code (variables barycentriques) :

- Données : n le degré de la courbe, les points de contrôle P_{ij} et u la valeur du paramètre (donc v).
- Initialisation : $P_{ij}^0 = P_{ij}$ pour $i+j = n$.
- Utiliser l'algorithme d'évaluation pour trouver les P_{ij}^k pour $k = 1, n-1$.
- Définir la courbe de gauche par ses points de contrôle : $Q_{ij} = P_{n_0}^j$ pour $i+j = n$.
- Définir la courbe de droite par ses points de contrôle : $Q_{ij} = P_{ij}^{n-j}$ pour $i+j = n$.

Algorithme de raffinement. Pour comprendre cette idée de raffinement, on va montrer que l'on peut couper en deux une courbe et définir ses deux "moitiées" de façon à suivre exactement la même géométrie.

Soient P_i trois points de contrôle et la courbe $\gamma(t) = \sum_{i=0,2} B_i^2(t)P_i$ pour $t \in [0, 1]$. On calcule le milieu M et on va définir les deux courbes $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$, la première telle que $\gamma_1(t) \equiv \gamma(t)$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, la seconde telle que $\gamma_2(t) \equiv \gamma(t)$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Le processus pour couper en la valeur t est l'algorithme (2).

Il est immédiat de vérifier que les deux (sous-)courbes sont identiques, sur leur plage commune, à la courbe initiale (mêmes valeurs, mêmes tangentes, ...). Si $t = \frac{1}{2}$, on a coupé par le point milieu, si t a une autre valeur, on a coupé en le point correspondant à cette valeur.

Le point important qui nous servira par la suite est de constater que les points de contrôle (par exemple le milieu, Q_1 , pour la courbe de degré 2) sont plus près de la sous-courbe que ne l'étaient ceux de la courbe initiale. C'est là que réside l'idée du raffinement, le polygone de contrôle et la courbe se rapprochent.

Cet algorithme se généralise à tout degré et c'est dans ce cas que nous l'utiliserons plus tard.

Élévation du degré d'une courbe. Pour finir sur les courbes, on donne la formule permettant d'en élever le degré, formule qui aura une application intéressante pour traiter les polynômes jacobiens des éléments finis Serendip.

On considère une courbe de degré n avec ses points de contrôle P_i , variable naturelle. La courbe s'écrit :

$$\gamma(t) = \sum_{i=0,n} B_i^n(t)P_i$$

et on va l'exprimer comme une courbe de degré $n+1$, c'est-à-dire comme :

$$\gamma(t) = \sum_{i=0,n+1} B_i^{n+1}(t)Q_i.$$

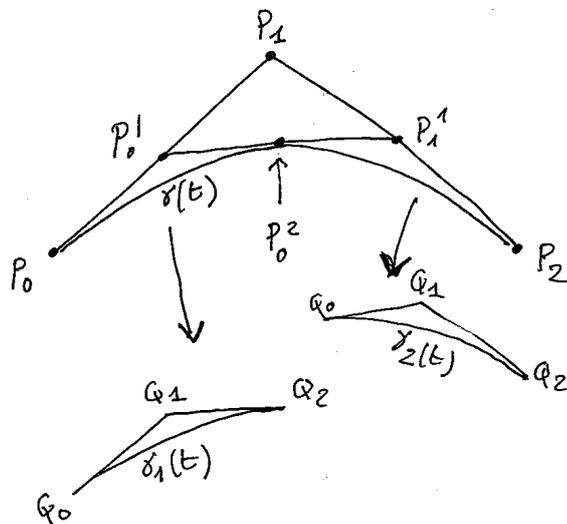


FIG. 4 – Raffinement par le milieu pour une courbe de degré 2, on montre l'état initial, $\gamma(t)$, et, en éclaté, les deux sous-courbes $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$. À partir des trois P_i , on construit les deux P_I^1 puis l'unique P_i^2 , le point évalué pour couper la courbe. De ces points de contrôle, on déduit les Q_i .

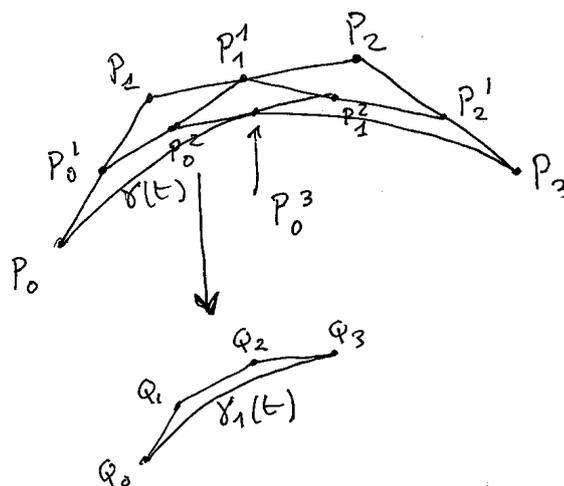


FIG. 5 – Raffinement par le milieu pour une courbe de degré 3, on montre l'état initial, $\gamma(t)$, et, en éclaté, la sous-courbe de gauche, $\gamma_1(t)$. À partir des quatre P_i , on construit les trois P_I^1 puis les deux P_i^2 et enfin l'unique P_i^3 , le point où l'on coupe la courbe. De ces points de contrôle, on déduit les Q_i .

Pour ce faire, il suffit de trouver les nouveaux points de contrôle, les Q_i . La solution est la suivante, on définit :

$$\begin{aligned} Q_0 &= P_0 \\ Q_i &= \frac{iP_{i-1} + (n+1-i)P_i}{n+1}, \text{ pour } i = 1, n \\ Q_{n+1} &= P_n. \end{aligned}$$

Il est immédiat de vérifier qu'ainsi, on a bien défini la même courbe.

Formellement et on le confirmera plus tard, ce mécanisme permet également de traiter un polynôme Bézier pour en élever le degré. Soit $\mathcal{J}(t)$ un polynôme de degré n de cette forme, on a :

$$\mathcal{J}(t) = \sum_{i=0, n} B_i^n(t) N_i,$$

où les N_i sont des coefficients de contrôle, alors définir $n+1$ coefficients M_i par :

$$\begin{aligned} M_0 &= N_0 \\ M_i &= \frac{iN_{i-1} + (n+1-i)N_i}{n+1}, \text{ pour } i = 1, n \\ M_{n+1} &= N_n, \end{aligned}$$

permet d'écrire :

$$\mathcal{J}(t) = \sum_{i=0, n+1} B_i^{n+1}(t) M_i.$$

Cette technique sera également utilisée lors de l'analyse des éléments réduits pour lesquels le polynôme à traiter sera incomplet. Par exemple, si $i = 1, n$ (au lieu de $i = 0, n$) pour le polynôme de départ, on définira :

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{nN_1}{n+1}, \text{ pour } i = 1 \\ M_i &= \frac{iN_{i-1} + (n+1-i)N_i}{n+1}, \text{ pour } i = 2, n \\ M_{n+1} &= N_n. \end{aligned}$$

3.2 Surfaces ou carreaux de Bézier

Il existe deux sortes de carreaux, ceux définis par un produit tensoriel et ceux définis sur un espace lié à un système de coordonnées barycentriques. Le premier cas construit des carreaux "quadrilatéraux", le second des carreaux "triangulaires".

Ici, les valeurs de contrôle sont des points de l'espace \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 que l'on note P_{ij} ou P_{ijk} selon la définition utilisée.

– Carreaux quadrilatéraux.

Soient u et v variant dans $[0, 1]$, le carreau, noté Σ , associé à la fonction σ définie par

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0, 2} \sum_{j=0, 2} B_i^2(u) B_j^2(v) P_{ij} \quad (13)$$

est le carreau quadrilatéral de degré 2×2 s'appuyant sur le réseau formé par les neuf points de contrôle P_{ij} . On a donc $\Sigma = \{\sigma(u, v), u \in [0, 1], v \in [0, 1]\}$.

De façon générale, on peut définir des carreaux de degré quelconque dont le degré n'est pas nécessairement identique dans les deux directions, par exemple :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, m} B_i^n(u) B_j^m(v) P_{ij}.$$

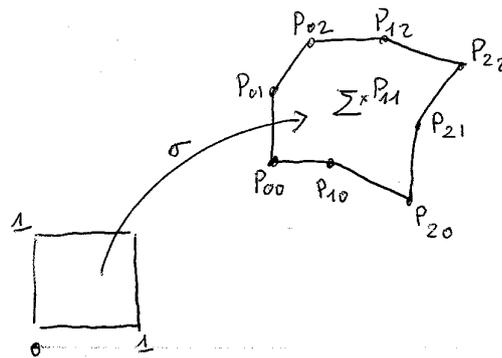


FIG. 6 – Un carreau quadrilatéral, son espace de paramètres et ses points de contrôle.

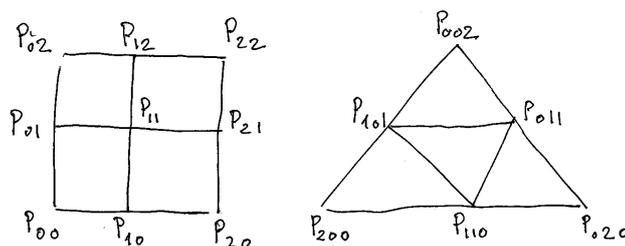


FIG. 7 – Réseau logique pour un carreau quadrilatéral 2×2 (à gauche) et réseau logique pour un carreau triangulaire de degré 2 (à droite).

– Carreaux triangulaires.

Soient u, v et w variant dans $[0, 1]$ et tels que $u + v + w = 1$, le carreau, noté encore Σ , construit à partir de la fonction σ , définie par

$$\sigma(u, v, w) = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) P_{ijk} \tag{14}$$

est le carreau triangulaire de degré 2 s'appuyant sur le réseau formé par les six points de contrôle P_{ijk} . On a donc $\Sigma = \{\sigma(u, v, w), u + v + w = 1.\}$

À toutes fins utiles, avant d'aller plus loin, nous rappelons la correspondance entre les coordonnées naturelles en x et y et les coordonnées barycentriques en u, v et w . Comme on a

$$u = 1 - x - y, \quad v = x \quad \text{et} \quad w = y,$$

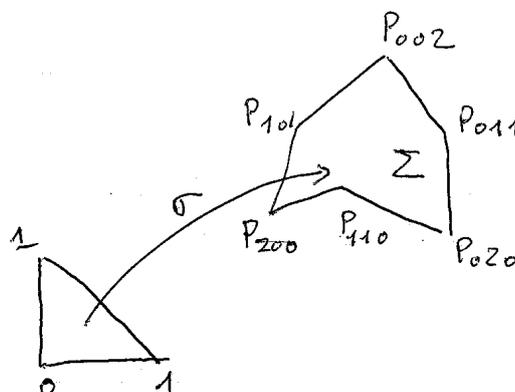


FIG. 8 – Un carreau triangulaire, son espace de paramètres et ses points de contrôle.

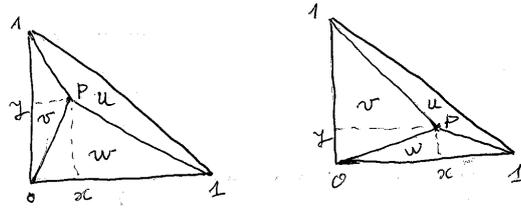


FIG. 9 – Correspondance entre les coordonnées naturelles, x et y , et les coordonnées barycentriques, u, v et w . Il est facile de voir que $v = x$, v étant la surface du triangle (de gauche) appuyé sur P divisée par celle du triangle initial, tandis que $w = y$, w étant également la surface du triangle (du bas) appuyé sur P divisée par celle du triangle initial.

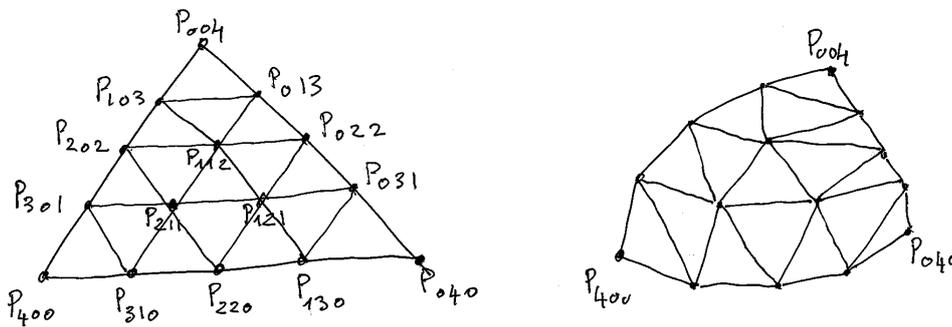


FIG. 10 – Réseau logique (à gauche) et réel (à droite) pour un carreau triangulaire de degré 4.

on trouve ce que montre la Figure 9.

De façon générale, on peut définir des carreaux de degré n quelconque :

$$\sigma(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} B_{ijk}^n(u, v, w) P_{ijk}.$$

Quelques propriétés de ces carreaux. Comme attendu, chaque carreau passe par ses points de contrôle sommets et les arêtes des carreaux sont les courbes de Bézier de degré 2 passant par leurs extrémités et contrôlées (tangentes) par le point de contrôle de l'arête autre que ses sommets.

Dans le cas d'un carreau quadrilatéral, on a $B_0^2(u) = (1-u)^2$, $B_1^2(u) = 2u(1-u)$ et $B_2^2(u) = u^2$. Donc, par exemple, pour $u = v = 0$, on trouve simplement $\sigma(0, 0) = P_{00}$, le carreau passe par le sommet P_{00} (et, de même, pour les autres). Faisant $v = 0$, $u \in [0, 1]$, alors

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) P_{ij} \text{ se réduit à } \sigma(u, 0) = \sum_{i=0,2} B_i^2(u) P_{i0},$$

qui n'est autre que la courbe de Bézier de degré 2 définissant l'arête d'extrémités P_{00} et P_{20} . Il en est de même pour les autres arêtes.

Dans le cas d'un carreau triangulaire, on a $B_{200}^2(u, v, w) = u^2$, $B_{110}^2(u, v, w) = 2uw$, $B_{020}^2(u, v, w) = v^2$, $B_{011}^2(u, v, w) = 2vw$, $B_{002}^2(u, v, w) = w^2$ et $B_{101}^2(u, v, w) = 2uv$. Donc, par exemple, pour $u = 1, v = w = 0$, on trouve simplement $\sigma(1, 0, 0) = P_{200}$, le carreau passe par ce sommet (et les autres évidemment). Pour $v = 0$, on a

$$\sigma(u, v, w) = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) P_{ijk} \text{ qui se réduit à } \sigma(u, 0, w) = \sum_{i+k=2} B_{i0k}^2(u, 0, w) P_{i0k}$$

qui n'est autre que la courbe de Bézier de degré 2 définissant l'arête d'extrémités P_{200} et P_{002} . Il en est de même pour les autres arêtes.

Tangentes et plans tangents. On sait que les tangentes aux arêtes en un sommet sont simplement portées par le vecteur issu du sommet en question joignant le point de contrôle de l'arête observée. On en déduit que le plan tangent (surface dans \mathbb{R}^3), en un sommet est porté par le triangle "coin" associé à ce sommet. Par exemple le triangle $[P_{00}P_{10}P_{01}]$ pour le sommet P_{00} d'un carreau quadrilatéral de degré 2 ou le triangle $[P_{200}P_{110}P_{101}]$ pour le sommet P_{200} d'un carreau triangulaire de degré 2.

Algorithme d'évaluation. L'algorithme vu dans le cas d'une courbe s'applique également ici pour évaluer le point de Σ correspondant à une valeur donnée des paramètres.

Pour commencer, on considère le cas d'un carreau quadrilatéral et, pour simplifier, on déroule le cas d'un carreau de degré 2 dans chaque direction avant de donner le cas général pour un degré quelconque.

Nous allons voir qu'il y a deux possibilités pour évaluer un point. qui conduisent à deux algorithmes d'évaluation différents qui donnent, évidemment le même résultat. Cependant, ils ne produisent pas les mêmes évaluations intermédiaires et, par suite, n'ont pas la même utilité, par exemple, pour concevoir l'algorithme de raffinement que nous discuterons plus tard.

La Figure 7 montre le réseau formé par les points de contrôle qui définissent quatre (sous-)éléments. L'équivalent de la méthode vue dans le cas d'une courbe conduit, pour une valeur du couple (u, v) donnée, à :

- construire le point de chaque sous-élément du réseau associé au couple (u, v) pour le degré 1,
- considérer le nouveau réseau formé par ces points,
- construire le point de chaque sous-élément associé au couple (u, v) pour le degré 1 du réseau courant. Ici, il n'y a qu'un seul sous-élément et le point trouvé est la solution cherchée.

Pour n plus grand que 2, on itère tant que le réseau courant n'est pas réduit à un seul élément, Figure 11, c'est ce que traduit l'algorithme général numéroté (3).

Algorithm 3 Algorithme d'évaluation d'un point d'un carreau quadrilatéral (1)

Pseudo-code :

- Données : $n \times n$ le degré du carreau, les points de contrôle P_{ij} et (u, v) la valeur des paramètres.
 - Initialisation : $P_{ij}^{00} = P_{ij}$ pour $i = 0, n$ et $j = 0, n$.
 - Faire pour $k = 0, n - 1$
 - Faire pour $i = 0, n - (k + 1)$ et $j = 0, n - (k + 1)$
 - $P_{ij}^{k+1, k+1} = (1 - u)(1 - v)P_{ij}^{k, k} + u(1 - v)P_{i+1, j}^{k, k} + (1 - u)vP_{i, j+1}^{k, k} + uvP_{i+1, j+1}^{k, k}$
 - Fin Faire pour i et j
 - Fin Faire pour k
 - P_{00}^{nn} est la solution.
-

En fait, cet algorithme donne un moyen facile, une utilisation répétée de l'interpolation de degré 1, pour évaluer un point mais n'est pas commode pour construire un processus de raffinement. On va donc donner une construction différente plus adaptée à ce cas. L'idée est de procéder en deux temps en conduisant d'abord une évaluation en u, v fixé, puis en v . Ceci est traduit par l'algorithme suivant numéroté (4).

Pour un carreau triangulaire, le principe est le même. On part du réseau initial (voir les Figures 7 et 10) et on construit les réseaux successifs liés au degré 1 jusqu'à obtention

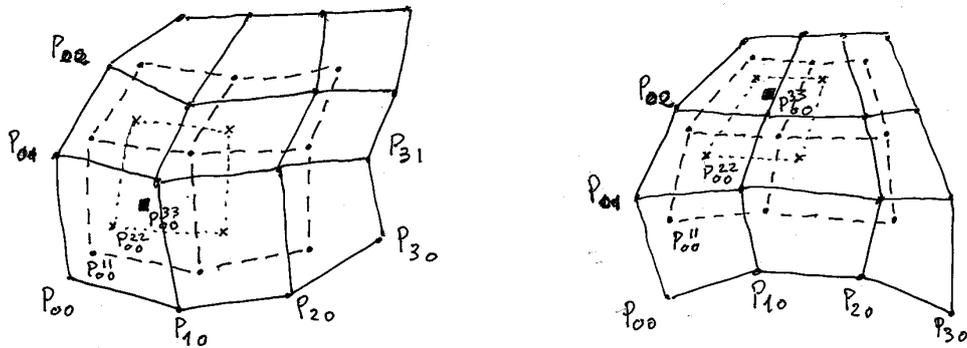


FIG. 11 – Évaluation (méthode (1)) du point correspondant au couple $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, à gauche, et au couple $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, à droite, pour un carreau quadrilatéral de degré 3×3 .

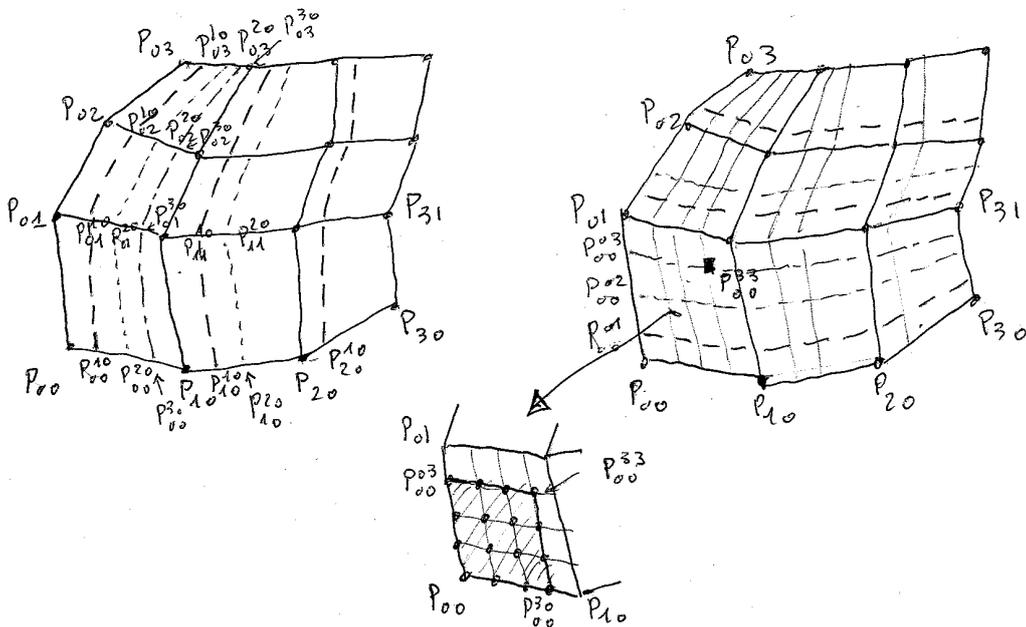


FIG. 12 – Évaluation (méthode (2)) du point correspondant au couple $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ pour un carreau de degré 3×3 . À gauche, la subdivision en u , à droite, on complète avec la subdivision en v et on trouve la solution P_{00}^{33} . En médaillon, le sous-carreau bas gauche obtenu après raffinement (voir plus bas).

Algorithm 4 Algorithme d'évaluation d'un point d'un carreau quadrilatéral (2)

Pseudo-code :

- Données : $n \times m$ le degré du carreau, les points de contrôle P_{ij} et (u, v) la valeur des paramètres.
- Initialisation : $P_{ij}^{00} = P_{ij}$ pour $i = 0, n$ et $j = 0, m$.
- Faire pour $k = 0, n - 1$
 - Faire pour $i = 0, n - (k + 1)$ et $j = 0, m$
 - $P_{ij}^{k+1,0} = (1 - u)P_{ij}^{k,0} + uP_{i+1,j}^{k,0}$
 - Fin Faire pour i et j
- Fin Faire pour k
- Faire pour $l = 0, m - 1$
 - Faire pour $i = 0, n$ et $j = 0, m - (l + 1)$
 - $P_{ij}^{k,l+1} = (1 - v)P_{ij}^{k,l} + vP_{i,j+1}^{k,l}$
 - Fin Faire pour i et j
- Fin Faire pour l
- P_{00}^{nm} est la solution.

de la valeur cherchée. Les points générateurs des différentes réseaux sont définis dans les sous-triangles "homothétiques" au triangle coin de sommet P_{n00} , voir la figure.

Le cas d'un carreau triangulaire de degré quelconque, voir la Figure 13, conduit à l'algorithme de numéro (5).

Algorithm 5 Algorithme d'évaluation d'un point d'un carreau triangulaire

Pseudo-code :

- Données : n le degré du carreau, les points de contrôle P_{ijk} et (u, v, w) la valeur des paramètres.
- Initialisation : $P_{ijk}^0 = P_{ijk}$ pour $i + j + k = n$.
- Faire pour $k = 0, n - 1$
 - Faire pour $i + j + k = n - (k + 1)$
 - $P_{ijk}^{k+1} = uP_{ijk}^k + vP_{i-1,j+1,k}^k + wP_{i-1,j,k+1}^k$
 - Fin Faire pour $i + j + k$
- Fin Faire pour k
- P_{n00}^n est la solution.

Algorithme de raffinement. L'algorithme vu dans le cas d'une courbe s'applique également ici pour couper Σ en plusieurs morceaux (deux ou quatre dans le cas quadrilatéral, deux ou trois dans le cas triangulaire selon que l'on coupe en introduisant un point sur une arête ou à l'intérieur du carreau).

Pour comprendre le mécanisme, on va considérer le cas où l'on coupe un carreau de degré 2×2 par le milieu de son arête $v = 0$. La méthode comprend les phases suivantes :

- Construction du milieu de l'arête $P_{00}P_{20}$ via le raffinement de cette arête. On dispose donc des points de contrôle P_{00}^{10} et P_{10}^{10} puis de P_{00}^{20} .
- Construction du milieu de l'arête $P_{02}P_{22}$ via le raffinement de cette arête. On dispose donc des points de contrôle P_{02}^{10} et P_{12}^{10} puis de P_{02}^{20} .
- Construction des points de contrôle P_{01}^{10} et P_{11}^{10} entre P_{01} et P_{21} .
- Définition du sous-carreau de gauche, ses points de contrôle, notés Q_{ij} , sont les suivants :

$$Q_{0j} = P_{0j}, Q_{1j} = \frac{P_{0j} + P_{1j}}{2}, Q_{2j} = \frac{P_{0j} + 2P_{1j} + P_{2j}}{4} \quad \text{pour } j = 0, 2,$$

d'après l'algorithme de raffinement d'une courbe appliqué ici pour les 3 courbes iso- j .

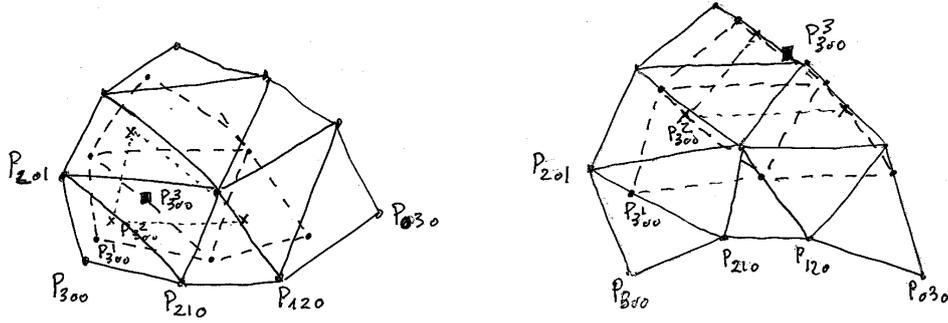


FIG. 13 – Évaluation du point correspondant au couple $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ soit pour $(u, v, w) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, à gauche, et au couple $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ soit pour $(u, v, w) = (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ donc un point de l'arête $P_{030}P_{003}$, à droite, pour un carreau triangulaire de degré 3.

– Définition du sous-carreau de droite, ses points de contrôle sont définis de manière analogue.

On va montrer que le point P du carreau initial pour (u, v) donné n'est autre que le point de couple $(2u, v)$ du sous-carreau de gauche. Ce carreau s'écrit :

$$\sum_i \sum_j B_i^2(u) B_j^2(v) Q_{ij}, \text{ on l'ouvre en } i, \text{ il vient :}$$

$$\sum_j B_j^2(v) \{ B_0^2(u) Q_{0j} + B_1^2(u) Q_{1j} + B_2^2(u) Q_{2j} \},$$

on remplace les Q_{ij} par leurs expressions en fonction des P_{ij} puis on calcule

$$P = \sum_i \sum_j B_i^2(2u) B_j^2(v) Q_{ij},$$

le résultat est immédiat on trouve

$$\sum_i \sum_j B_i^2(2u) B_j^2(v) Q_{ij} = \sum_i \sum_j B_i^2(u) B_j^2(v) P_{ij},$$

ce qui prouve que le sous-carreau est identique au carreau initial dans leur plage commune.

On peut maintenant donner l'algorithme de raffinement dans le cas général avant de revenir à ce cas particulier. On regarde donc le cas d'une subdivision en définissant un point interne, le candidat le plus évident étant le point de couple $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La seule difficulté est de trouver une convention parlante pour définir les indices nécessaires à la construction sachant que celle-ci, en temps que telle, est élémentaire.

Pour découper sur une arête, on utilise l'algorithme (7).

Notons qu'il est assez naturel de couper par le milieu mais que tout autre position est également possible.

Dans le cas d'un carreau triangulaire, on va en premier regarder le raffinement via un point interne puis le cas où on coupe une arête. Pour fixer les idées on reprend le cas du degré 2 et on introduit le barycentre $(u, v, w) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Le méthode comprend les phases suivantes :

- Initialisation, on pose $P_{ijk}^0 = P_{ijk}$ pour $i + j + k = 2$.
- Construction du barycentre de l'élément via l'algorithme d'évaluation. On dispose donc, pour $l = 1, 2$, de points de contrôle, qui s'expriment par

$$P_{ijk}^l \quad \text{pour } i + j + k = 2, \text{ avec } i = 2, l \text{ et } l = 1, 2,$$

Algorithm 6 Algorithme de raffinement d'un carreau quadrilatéral

Pseudo-code :

- Données : n et m le degré du carreau, les points de contrôle P_{ij} et (u, v) la valeur des paramètres du point de coupe.
- Initialisation : $P_{ij}^{00} = P_{ij}$ pour $i = 0, n$ et $j = 0, m$.
- Appliquer l'algorithme d'évaluation (version (2)) pour trouver le point de coupe et la séquence des P_{ij}^{kl} .
- Définir les quatre sous-carreaux via leurs points de contrôle :
 - en bas à gauche, $Q_{ij} = P_{00}^{ij}$,
 - en bas à droite, $Q_{ij} = P_{i0}^{n-i,j}$,
 - en haut à gauche, $Q_{ij} = P_{0j}^{i,m-j}$,
 - en haut à droite, $Q_{ij} = P_{ij}^{n-i,m-j}$.

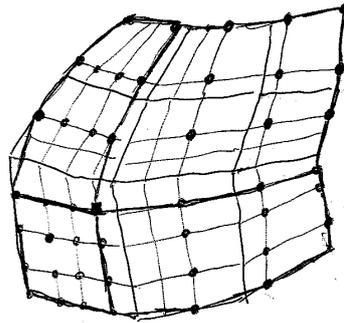


FIG. 14 – La séquence de subdivision pour une coupe à $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (petit carré noir) et les points de contrôle (petits ronds noirs) des quatre sous-carreaux pour un carreau initial quadrilatéral de degré 3×3 . Notons que les points de contrôle ne sont que certains des points des subdivisions récursives.

Algorithm 7 Algorithme de raffinement d'un carreau quadrilatéral sur une arête

Pseudo-code :

- Données : n et m le degré du carreau, les points de contrôle P_{ij} et (u, v) la valeur des paramètres du point de coupe.
- Initialisation : $P_{ij}^{00} = P_{ij}$ pour $i = 0, n$ et $j = 0, m$.
- Appliquer l'algorithme général ci-dessus.
- Ne retenir que les deux sous-carreaux non dégénérés. En effet, comme P_{00}^{nm} est sur l'une des quatre arêtes initiales, les deux quadrilatères correspondant n'existent pas dans la subdivision.

en remarquant que le point de coupe n'est autre que P_{200}^2 . Cette évaluation revient donc à faire successivement

$$P_{200}^1 = \frac{P_{200}^0 + P_{110}^0 + P_{101}^0}{3},$$

$$P_{110}^1 = \frac{P_{110}^0 + P_{020}^0 + P_{011}^0}{3},$$

$$P_{101}^1 = \frac{P_{101}^0 + P_{011}^0 + P_{002}^0}{3},$$

$$P_{200}^2 = \frac{P_{200}^1 + P_{110}^1 + P_{101}^1}{3},$$

et G , le barycentre est $G = P_{200}^2$.

– Définition du sous-carreau du bas, ses points de contrôle, notés Q_{ijk} , sont les suivants :

$$Q_{ij0} = P_{ij0}, i + j = 2, Q_{101} = P_{200}^1, Q_{011} = P_{110}^1 \quad \text{et enfin} \quad Q_{002} = P_{200}^2 = G,$$

soit la forme générique très simple suivante :

$$Q_{ijk} = P_{i+k,j,0}^k \text{ pour } i + j + k = 2.$$

– Définition des deux autres sous-carreaux de droite, les points de contrôle étant définis de manière analogue (le plus simple est de faire un dessin, voir par exemple la Figure 15 qui illustre un cas de degré 3, et de trouver la correspondance entre les P_{ijk}^l et les points de contrôle du sous-carreau considéré) ou d'utiliser les formes génériques suivantes :

$$Q_{ijk} = P_{i+j,0,k}^j \text{ pour } i + j + k = 2$$

à "gauche" et

$$Q_{ijk} = P_{ijk}^i \text{ pour } i + j + k = 2$$

à "droite".

On va montrer, pour le sous-carreau du bas, que le point P du carreau initial pour (u, v, w) et le point Q du sous-carreau pour son triplet, noté (U, V, W) , dans ce sous-carreau sont identiques. En remarquant que $Q = UP_{200} + VP_{020} + WG$ et que $G = \frac{P_{200} + P_{020} + P_{002}}{3}$, on a $Q = (U + \frac{W}{3})P_{200} + (V + \frac{W}{3})P_{020} + \frac{W}{3}P_{002}$ et ainsi :

$$u = U + \frac{W}{3}, v = V + \frac{W}{3}, w = \frac{W}{3},$$

et, inversement :

$$U = u - w, V = v - w, W = 3w.$$

On calcule alors

$$Q = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u - w, v - w, 3w)Q_{ijk},$$

on a, *in extenso* :

$$Q = U^2Q_{200} + 2UVQ_{110} + V^2Q_{020} + 2VWQ_{011} + W^2Q_{002} + 2UWQ_{101},$$

et, en reportant les valeurs des points de contrôle, il vient :

$$\begin{aligned} Q &= U^2P_{200} + 2UV P_{110} + V^2P_{020} + \frac{2VW}{3}(P_{110} + P_{020} + P_{011}) \\ &+ \frac{W^2}{9}(P_{200} + 2P_{110} + 2P_{101} + P_{020} + 2P_{011} + P_{002}) + \frac{2UW}{3}(P_{200} + P_{110} + P_{101}), \end{aligned}$$

soit,

$$Q = (U^2 + \frac{W^2}{9} + \frac{2UW}{3})P_{200} + (2UV + \frac{2VW}{3} + \frac{2W^2}{9})P_{110} + (V^2 + \frac{2VW}{3} + \frac{W^2}{9})P_{020}$$

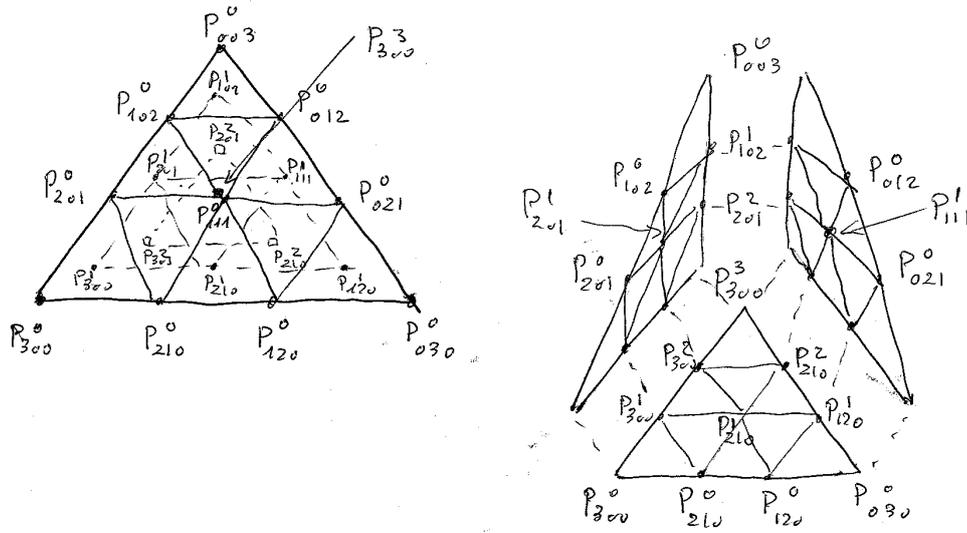


FIG. 15 – La séquence de subdivision, à gauche, et les points de contrôle des trois sous-carreaux, éclaté à droite, pour un carreau triangulaire de degré 3.

$$+ \left(\frac{2VW}{3} + \frac{2W^2}{9} \right) P_{011} + \left(\frac{2W^2}{9} \right) P_{002} + \left(\frac{2W^2}{9} + \frac{2UW}{3} \right) P_{101},$$

et, en reportant les valeurs en (u, v, w) dans (U, V, W) , on a :

$$Q = u^2 P_{200} + 2uv P_{110} + v^2 P_{020} + 2vw P_{011} + w^2 P_{002} + 2uw P_{101},$$

c'est-à-dire que $Q \equiv P$, ce qui termine la démonstration, dans leur plage commune, le carreau initial et le sous-carreau du bas sont identiques. Il en va de même pour les deux autres sous-carreaux.

On peut maintenant généraliser ce processus au cas d'un carreau de degré n quelconque (et la Figure 15 montre un cas de degré 3), c'est l'algorithme (8).

Algorithm 8 Algorithme de raffinement d'un carreau triangulaire

Pseudo-code :

- Données : n le degré du carreau, les points de contrôle P_{ijk} et (u, v, w) la valeur des paramètres du point de coupe.
 - Initialisation : $P_{ijk}^0 = P_{ijk}$ pour $i + j + k = n$.
 - Appliquer l'algorithme d'évaluation pour trouver le point de coupe et, au passage, construire les P_{ijk}^l pour $l = 1, n$ et $i = l, n$.
 - Couper en trois le carreau initial et définir les trois réseaux de contrôle :
 - en bas (carreau $[P_{n00}, P_{0n0}, P_{n00}^n]$), $Q_{ijk} = P_{i+k,j,0}^k$,
 - à gauche (carreau $[P_{n00}, P_{n00}^n, P_{00n}]$), $Q_{ijk} = P_{i+j,0,k}^j$,
 - à droite (carreau $[P_{n00}^n, P_{0n0}, P_{00n}]$), $Q_{ijk} = P_{ijk}^i$.
-

Notons qu'il est assez naturel de couper par le barycentre mais que tout autre position est également possible.

3.3 Volumes de Bézier

Comme dans le cas des surfaces, il existe deux sortes de carreaux volumiques, ceux définis par un produit tensoriel et ceux définis sur un espace lié à un système de coordonnées

Algorithm 9 Algorithme de raffinement d'un carreau triangulaire sur une arête

Pseudo-code :

- Donner le triplet (u, v, w) du milieu de l'arête à découper, par exemple $(u, v, w) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
 - Appliquer l'algorithme général ci-dessus.
 - Ne retenir que les deux sous-carreaux non dégénérés. En effet, comme P_{n00}^n est sur l'une des trois arêtes initiales, le triangle correspondant n'existe pas dans la subdivision.
-

barycentriques. Le premier cas construit des carreaux "hexaédriques", le second des carreaux "tétraédriques". Mais on trouve aussi une combinaison originale, un carreau de surface barycentrique "tensorisé" dans une troisième direction qui conduit à un carreau volumique "pentaédrique" ou prismatique.

Ici, les valeurs de contrôle sont des points de \mathbb{R}^3 que l'on note P_{ijk} ou P_{ijkl} selon la définition utilisée.

- Carreaux tétraédriques.

Soient u, v, w et t variant dans $[0, 1]$ et tels que $u + v + w + t = 1$, le carreau, noté Θ , associé à la fonction $\theta(u, v, w, t)$ définie par

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=2} B_{ijkl}^2(u, v, w, t) P_{ijkl} \quad (15)$$

est le carreau tétraédrique de degré 2 s'appuyant sur le réseau formé par les 10 points de contrôle P_{ijkl} . On a donc $\Theta = \{\theta(u, v, w, t), u, v, w \in [0, 1] \text{ avec } u + v + w + t = 1\}$.

De façon générale, on peut définir des carreaux de degré quelconque, par exemple

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=n} B_{ijkl}^n(u, v, w, t) P_{ijkl}.$$

- Carreaux hexaédriques.

Soient u, v et w variant dans $[0, 1]$, le carreau, noté Θ , associé à la fonction $\theta(u, v, w)$ définie par

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) P_{ijk} \quad (16)$$

est le carreau hexaédrique de degré $2 \times 2 \times 2$ s'appuyant sur le réseau formé par les 27 points de contrôle P_{ijk} . On a donc $\Theta = \{\theta(u, v, w), u \in [0, 1], v \in [0, 1], w \in [0, 1]\}$.

De façon générale, on peut définir des carreaux de degré quelconque dont le degré n'est pas nécessairement identique dans les trois directions, par exemple :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,m} \sum_{k=0,p} B_i^n(u) B_j^m(v) B_k^p(w) P_{ijk}.$$

- Carreaux pentaédriques.

Dans ce cas, on a le produit entre un carreau triangulaire et un carreau linéique dans la troisième direction. Soient donc u, v, w et t variant dans $[0, 1]$ et tels que $u + v + w = 1$, le carreau, noté Θ , associé à la fonction $\theta(u, v, w, t)$ définie par

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k=2} \sum_{l=0,2} B_{ijk}^2(u, v, w) B_l^2(t) P_{ijkl} \quad (17)$$

est le carreau pentaédrique de degré 2×2 s'appuyant sur le réseau formé par les 18 points de contrôle P_{ijkl} . On a donc $\Theta = \{\theta(u, v, w, t), u \in [0, 1], v \in [0, 1], w \in [0, 1], t \in [0, 1], u + v + w = 1\}$.

De façon générale, on peut définir des carreaux de degré quelconque dont le degré n'est pas nécessairement identique dans les directions, par exemple :

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k=n} \sum_{l=0,m} B_{ijk}^n(u, v, w) B_l^m(t) P_{ijkl}.$$

Quelques propriétés. Le carreau passe par ses faces qui sont des carreaux de surfaces tels que décrits ci-dessus. Les arêtes du carreau volumique sont les courbes de Bézier déjà discutées. La démonstration est immédiate.

Tangentes et plans tangents. On retrouve, pour les faces du carreau, les plans tangents et pour ses arêtes, leurs tangentes.

Algorithme d'évaluation. Les algorithmes déjà vus se généralisent au cas des carreaux volumiques.

Algorithme de raffinement. Les algorithmes déjà vus se généralisent au cas des carreaux volumiques.

3.4 Forme de Bézier d'un polynôme

L'étude de la validité des éléments finis qui seront décrits plus bas se résume à évaluer le signe de leur jacobien en tout point de l'élément. On va montrer que ce jacobien n'est autre qu'un polynôme d'un certain degré en plusieurs variables qui peut se formuler via une forme identique à l'une de celles vues dans le cas des courbes et des carreaux, les points de contrôle (les P_{ijk} par exemple) étant remplacés par des valeurs de contrôle que l'on notera N_{ijk} . Ainsi si \mathcal{J} désigne un tel jacobien, on devra examiner le signe d'un polynôme écrit, en accord avec la définition de l'élément étudié, par exemple pour un quadrilatère Q2 à 9 nœuds, comme :

$$\mathcal{J}(u, v) = \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} B_i^n(u) B_j^n(v) N_{ij}, \quad (18)$$

où n est le degré correspondant à l'élément fini analysé (et pas nécessairement le degré de ses propres polynômes de base ou fonctions de forme, ici, dans notre exemple, $n = 3$ alors que le degré de l'élément est 2). L'intérêt de cette écriture est que l'on va pouvoir trouver des conditions, à tout le moins suffisantes, permettant de savoir si l'élément est valide ou non et que l'on va pouvoir utiliser les algorithmes d'évaluation et de raffinement sous une forme adaptée afin d'affiner l'analyse du signe du jacobien.

L'analogie évidente avec une courbe ou un carreau de Bézier va être utilisée dans cette étude. Le jacobien sera strictement positif si une courbe adéquate ou un carreau adéquat associé à ce jacobien est située "au dessus" d'une droite ou d'un plan représentant la valeur nulle.

Quelques propriétés. On retrouve les propriétés classiques de formes de Bézier, le polynôme prend la valeur de certains de ses coefficients pour une valeur précise de ses variables et, par contre, ne passe pas par tous ses coefficients.

Algorithme d'évaluation. Les algorithmes d'évaluation s'appliquent sans difficulté. Par exemple, sur le cas précis ci-dessus, il suffit d'utiliser l'Algorithme (4) en remplaçant les P_{ij}^{kl} par les N_{ij}^{kl} construits à partir des N_{ij} de (18) et la solution est, pour (u, v) donné, $\mathcal{J}(u, v) = N_{00}^{22}$.

Élévation du degré. Les algorithmes d'élévation du degré pour une courbe s'appliquent de manière immédiate aux polynômes.

Algorithme de raffinement. Les algorithmes de raffinement s'appliquent également sans difficulté et permettront une analyse plus fine du signe du polynôme en cas de doute. L'idée est de couper le polynôme initial en plusieurs parties telles que chacune, dans sa plage, soit identique au polynôme initial. L'intérêt est que les nouveaux coefficients de contrôle sont de plus en plus "proches" du polynôme.

Positivité du polynôme. Pour trouver le signe d'un tel polynôme et, en particulier, pour savoir s'il est positif partout, on a une condition suffisante évidente qui est liée aux propriétés des Bézier. Comme les variables varient entre 0 et 1, il *suffit* que les coefficients soient :

- Propriété 1 - strictement positifs en une valeur des variables interpolante (le polynôme passe par le coefficient),
- Propriété 2 - positifs ou nuls ailleurs.

Cette propriété simple sera à la base de notre analyse du jacobien des éléments finis étudiés dans ce papier, sans perdre de vue que cette condition n'est que suffisante (sauf dans certains cas où elle est également nécessaire) et peut être affinée sous certaines conditions (la - Propriété 1 - est vraie) en utilisant l'algorithme d'évaluation puis celui de raffinement.

4 Éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2

On décrit d'abord les éléments finis usuels de Lagrange de degré 1 et 2 dans la vue classique éléments finis, c'est-à-dire en donnant leurs *polynômes de base* ou *fonctions de forme*, leurs *nœuds* et en indiquant ce que sont leurs jacobiens puis en montrant comment trouver des méthodes pour analyser le signe de ces jacobiens. Ensuite, on montre que ces éléments peuvent également être écrits sous une forme de Bézier qui en facilite l'analyse, cette forme étant exprimée en fonction des *polynômes de Bernstein* et de *points de contrôle* et non des nœuds (sauf au degré 1 où nœuds et points de contrôle sont, de fait, identiques).

4.1 Définitions sous forme élément fini

On adopte ici les notations classiques des éléments finis, du moins telles qu'utilisées dans [4] et [5], on donne les polynômes de base (ou fonctions de forme) et on exprime le jacobien. Un élément fini est défini par le triplet

$$[\hat{K}, \{\hat{A}_i, i = 1, n\}, \{p_i, i = 1, n\}]$$

où \hat{K} est un élément de référence (le triangle, le carré, ...) le plus souvent unitaire, $\{\hat{A}_i, i = 1, n\}$ est un ensemble de n nœuds définis sur \hat{K} et $\{p_i, i = 1, n\}$ est un ensemble de n polynômes (de Lagrange ici).

Les fonctions de forme, les p_i , permettent de construire une fonction, notée F_K , qui, à son tour, définit l'élément courant, noté K , dont les sommets sont notés A_i :

$$K = \{M = F_K(\hat{M}) = \sum_i p_i(\hat{M})A_i, \hat{M} \in \hat{K}\},$$

autrement dit, M , le point courant de K est l'image de \hat{M} le point courant de \hat{K} . On notera indifféremment $p_i(\hat{M})$ ou $p_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ avec \hat{x}, \hat{y} et \hat{z} les coordonnées de \hat{M} dans \hat{K} . Par ailleurs, on notera x_i, y_i et z_i les coordonnées du nœud A_i et x, y et z celles d'un point quelconque.

On se place dans \mathbb{R}^3 , le jacobien de F_K n'est autre que le déterminant de la matrice³ des dérivées, soit :

$$\mathcal{J} = \left| \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} \quad \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} \quad \frac{\partial F_K}{\partial \hat{z}} \right|, \quad (19)$$

et, plus précisément, en indiquant la dépendance en les variables :

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \left| \frac{\partial F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})}{\partial \hat{x}} \quad \frac{\partial F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})}{\partial \hat{y}} \quad \frac{\partial F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})}{\partial \hat{z}} \right|. \quad (20)$$

Ainsi, le jacobien, $\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, évalué en \hat{A} est le déterminant de la matrice :

³ou matrice jacobienne.

$$\begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})x_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})x_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})x_i \\ \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})y_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})y_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})y_i \\ \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})z_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})z_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})z_i \end{bmatrix},$$

où les x_i, \dots sont, rappelons le, les coordonnées des nœuds, A_i , de l'élément considéré. Ainsi, \mathcal{J} dépend du choix des \hat{A}_i (les nœuds d'évaluation) puis des A_i (l'élément courant). Par abus de langage, on parlera de $\mathcal{J}(A)$ pour indiquer que le nœud d'évaluation est \hat{A} , l'antécédent de A . Si on note $\vec{u} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})\vec{A}_i$, $\vec{v} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})\vec{A}_i$ et $\vec{w} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})\vec{A}_i$, le jacobien ci-dessus s'écrit également comme le produit mixte

$$\langle \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \rangle, \quad (21)$$

ou encore comme le déterminant

$$|\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}|, \quad (22)$$

qui mesure donc le volume du tétraèdre (virtuel) formé par ces vecteurs au facteur 6 près.

Notons, en deux dimensions, un résultat analogue, le jacobien est le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})x_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})x_i \\ \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})y_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})y_i \end{bmatrix},$$

mais il peut être écrit comme le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})x_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})x_i & 0 \\ \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})y_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})y_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

qui mesure donc le volume du tétraèdre (virtuel) formé par ces vecteurs au facteur 6 près ou, simplement, la surface du triangle (virtuel) formé par les deux premiers vecteurs, au facteur 2 près.

Le jacobien est un polynôme dont le degré dépend du degré des fonctions de forme⁴ de l'élément fini. Hormis le cas simple des simplexes de degré 1 (triangle à 3 nœuds et tétraèdre à 4 nœuds) où la valeur du jacobien est constante, celle-ci dépend du point d'évaluation. Par suite, savoir son signe revient à étudier le polynôme quand on explore tous les points d'évaluation possibles et, *a priori*, pas seulement un échantillon quelconque, par exemple simplement les nœuds de \hat{K} .

La suite de ce papier se propose d'indiquer comme faire pour trancher la question du signe de ces jacobiens.

4.2 Triangles et quadrilatères en deux dimensions

En deux dimensions, on trouve le triangle à 3 nœuds, le quadrilatère à 4 nœuds pour le degré 1 et le triangle à 6 nœuds, le quadrilatère à 9 nœuds, dit complet, et, enfin, le quadrilatère à 8 nœuds, dit Serendip, pour le degré 2. Pour chaque élément, on donne le triplet $[\hat{K}, \{\hat{A}_i, i = 1, n\}, \{p_i, i = 1, n\}]$ et la transformation F_K .

⁴Avec la remarque que pour les éléments droits, les fonctions de forme - géométriques - sont de degré 1 tandis que l'élément - interpolation - peut être de degré plus élevé.

Pour les éléments de degré 2, on ne va regarder que le cas où ils sont courbes (isoparamétriques), en effet quand leurs arêtes sont droites, la condition de validité est la même que celle de l'élément de degré 1 construit sur les seuls sommets de l'élément de degré 2 examiné.

4.2.1 Le triangle de degré 1 à 3 nœuds

Cet élément a pour nœuds ses sommets. La numérotation des sommets de \hat{K} , le triangle droit de côté 1, est celle du schéma :

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ & 1 & 2 \end{array}$$

Les polynômes de base sont les suivants :

- $p_1 = (1 - \hat{x} - \hat{y})$,
- $p_2 = \hat{x}$,
- $p_3 = \hat{y}$,

Enfin, on a $F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,3} p_i(\hat{M})A_i$, tandis que la matrice des dérivées des polynômes de base est :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

autrement dit, cette matrice est constante et, par suite, le jacobien sera constant sur l'élément. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de la Formule (22) valent :

$$\vec{u} = A_2 - A_1 = \overrightarrow{A_1A_2} \quad \text{et} \quad \vec{v} = A_3 - A_1 = \overrightarrow{A_1A_3}$$

et, ainsi, le jacobien, déterminant de ces deux vecteurs, n'est autre que la surface (au facteur 2) du triangle examiné. Par suite, l'analyse est simple dans ce cas, **un triangle de degré 1 sera valide si sa surface est strictement positive**. Notons que ceci n'a de sens que parce que les éléments sont orientés, ici de façon naturelle, dans le sens trigonométrique, une normale au plan étant choisie.

Ceci conclut l'analyse du triangle à 3 nœuds.

4.2.2 Le quadrilatère de degré 1 à 4 nœuds

Cet élément a pour nœuds ses sommets. La numérotation des sommets de \hat{K} , le carré de côté 1, est celle du schéma :

$$\begin{array}{ccc} 4 & & 3 \\ & 1 & 2 \end{array}$$

Les polynômes de base sont les suivants :

- $p_1 = (1 - \hat{x})(1 - \hat{y})$,
- $p_2 = \hat{x}(1 - \hat{y})$,
- $p_3 = \hat{x}\hat{y}$,
- $p_4 = (1 - \hat{x})\hat{y}$.

Enfin, on a $F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,4} p_i(\hat{M})A_i$, tandis que la matrice des dérivées des polynômes de base est :

$$\begin{bmatrix} -(1 - \hat{y}) & (1 - \hat{y}) & \hat{y} & -\hat{y} \\ -(1 - \hat{x}) & -\hat{x} & \hat{x} & (1 - \hat{x}) \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de la Formule (22) valent :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (1 - \hat{y}) \overrightarrow{A_1 A_2} - \hat{y} \overrightarrow{A_3 A_4} \\ \vec{v} &= (1 - \hat{x}) \overrightarrow{A_1 A_4} + \hat{x} \overrightarrow{A_2 A_3},\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) = |(1 - \hat{y}) \overrightarrow{A_1 A_2} - \hat{y} \overrightarrow{A_3 A_4} \quad (1 - \hat{x}) \overrightarrow{A_1 A_4} + \hat{x} \overrightarrow{A_2 A_3}|,$$

soit encore, en explicitant tous les termes :

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) = (1 - \hat{y})(1 - \hat{x}) |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4}| + \hat{x}(1 - \hat{y}) |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3}| - \hat{x} \hat{y} |\overrightarrow{A_3 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_3}| - (1 - \hat{x}) \hat{y} |\overrightarrow{A_3 A_4} \quad \overrightarrow{A_1 A_4}|,$$

qui s'écrit simplement comme :

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_i p_i(\hat{x}, \hat{y}) \mathcal{J}(\hat{A}_i),$$

c'est-à-dire que le jacobien s'écrit exactement comme F_K . Comme les $p_i(\cdot, \cdot)$, quand (\hat{x}, \hat{y}) parcourt \hat{K} , sont positifs ou nuls⁵, on déduit immédiatement une condition nécessaire et suffisante de validité de l'élément, les jacobiens aux sommets doivent être strictement positifs (c'est la convexité de l'élément).

Il est trivial de voir que le minimum de $\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y})$ est atteint sur l'image du bord de \hat{K} . Comme les arêtes sont droites, ce minimum correspond à l'image d'un sommet. Donc $\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) \geq \min_i \mathcal{J}(\hat{A}_i)$. Ceci permet de conclure, la condition nécessaire et suffisante de validité est que les 4 jacobiens "sommets" soient strictement positifs. Autrement dit, **tout quadrilatère convexe est valide**⁶ et cette convexité se traduit par la stricte positivité de la surface des quatre triangles résultant des deux découpes en triangles du quadrilatère examiné.

Ceci conclut l'analyse du quadrilatère à 4 nœuds.

4.2.3 Le triangle de degré 2 à 6 nœuds

Cet élément a pour nœuds ses sommets et ses "milieux" d'arête. La numérotation des nœuds de \hat{K} , le triangle droit de côté 1, est celle du schéma :

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}$$

Les polynômes de base sont les suivants :

$$\begin{aligned}- p_1 &= (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y}), \\ - p_2 &= \hat{x}(2\hat{x} - 1), \\ - p_3 &= \hat{y}(2\hat{y} - 1), \\ - p_4 &= 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}, \\ - p_5 &= 4\hat{x}\hat{y}, \\ - p_6 &= 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}.\end{aligned}$$

Enfin, on a $F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,6} p_i(\hat{M}) A_i$ et les arêtes sont des courbes de Bézier de degré 2.

En effet, par exemple, pour $\hat{y} = 0$, $F_K(\hat{x}, 0)$ se réduit à

$$F_K(\hat{x}, 0) = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_4 A_4 = (1 - \hat{x})(1 - 2\hat{x}) A_1 + 4\hat{x}(1 - \hat{x}) A_4 + \hat{x}(2\hat{x} - 1) A_2$$

⁵Ce qui n'est pas le cas pour la plupart des autres éléments, ne serait-ce que le suivant.

⁶Ce qui n'est pas vraiment surprenant.

qui est le résultat attendu.

La matrice jacobienne, dont le déterminant nous intéresse, se définit à partir des dérivées des polynômes de base. La matrice des dérivées des polynômes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -3 + 4(\hat{x} + \hat{y}) & 4\hat{x} - 1 & 0 & 4(1 - 2\hat{x} - \hat{y}) & 4\hat{y} & -4\hat{y} \\ -3 + 4(\hat{x} + \hat{y}) & 0 & 4\hat{y} - 1 & -4\hat{x} & 4\hat{x} & 4(1 - \hat{x} - 2\hat{y}) \end{bmatrix}.$$

En exprimant ce que valent les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de la Formule (22), on calcule le jacobien et, en explicitant les termes, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) &= (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y})\mathcal{J}(\hat{A}_1) + \hat{x}(2\hat{x} - 1)\mathcal{J}(\hat{A}_2) + \hat{y}(2\hat{y} - 1)\mathcal{J}(\hat{A}_3), \\ &+ 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}\mathcal{J}(\hat{A}_4) + 4\hat{x}\hat{y}\mathcal{J}(\hat{A}_5) + 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}\mathcal{J}(\hat{A}_6). \end{aligned}$$

c'est-à-dire que :

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_i p_i(\hat{x}, \hat{y})\mathcal{J}(\hat{A}_i),$$

et, ainsi, le jacobien s'écrit exactement comme F_K , c'est d'ailleurs le seul élément de degré 2 qui a cette propriété. Comme les $p_i(\cdot, \cdot)$ ne varient pas entre 0 et 1, on en déduit que la positivité des 6 jacobiens aux nœuds est une condition nécessaire mais n'est pas, *a priori*, une condition suffisante. On va donc revenir plus tard sur ce cas en formulant l'élément sous sa forme de Bézier pour voir si on peut en dire plus et trouver une condition nécessaire et suffisante.

4.2.4 Le quadrilatère complet de degré 2 à 9 nœuds

Cet élément a pour nœuds ses sommets, ses "milieux" d'arête et un nœud central. La numérotation des nœuds de \hat{K} , le carré⁷ droit de côté 2 centré à l'origine, $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$, est celle du schéma :

$$\begin{array}{ccc} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}$$

Les polynômes de base sont les suivants :

$$\begin{aligned} - p_1 &= \frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y}), \\ - p_2 &= -\frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1 + \hat{x})(1 - \hat{y}), \\ - p_3 &= \frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1 + \hat{x})(1 + \hat{y}), \\ - p_4 &= -\frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1 - \hat{x})(1 + \hat{y}), \\ - p_5 &= -\frac{1}{2}(1 + \hat{x})(1 - \hat{x})\hat{y}(1 - \hat{y}), \\ - p_6 &= \frac{1}{2}\hat{x}(1 + \hat{x})(1 - \hat{y})(1 + \hat{y}), \\ - p_7 &= \frac{1}{2}(1 - \hat{x})(1 + \hat{x})\hat{y}(1 + \hat{y}), \\ - p_8 &= -\frac{1}{2}\hat{x}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y})(1 + \hat{y}), \\ - p_9 &= (1 - \hat{x})(1 + \hat{x})(1 - \hat{y})(1 + \hat{y}). \end{aligned}$$

Enfin, on a $F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,9} p_i(\hat{M})A_i$ et les arêtes sont des courbes de Bézier de degré 2.

En effet, par exemple, pour $\hat{y} = -1$, $F_K(\hat{x}, -1)$ se réduit à

$$F_K(\hat{x}, -1) = p_1A_1 + p_2A_2 + p_5A_5 = -\frac{1}{2}\hat{x}(1 - \hat{x})A_1 + \frac{1}{2}\hat{x}(1 + \hat{x})A_2 + (1 - \hat{x})(1 + \hat{x})A_5$$

et, par changement de variable pour se situer dans l'intervalle $[0, 1]$, il vient

$$F_K(\hat{x}, 0) = (1 - \hat{x})(1 - 2\hat{x})A_1 + 4\hat{x}(1 - \hat{x})A_5 + \hat{x}(2\hat{x} - 1)A_2$$

⁷usuellement, on choisit le carré de côté 2, il est évidemment possible de choisir le carré unitaire et les polynômes lui correspondant.

qui est le résultat attendu.

La matrice jacobienne, dont le déterminant nous intéresse, se définit à partir des dérivées des polynômes de base. La matrice des dérivées des polynômes s'écrit :

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-2\hat{x})\hat{y}(1-\hat{y}) & -\hat{y}(1-\hat{y})(1+2\hat{x}) & \hat{y}(1+\hat{y})(1+2\hat{x}) & (2\hat{x}-1)\hat{y}(1+\hat{y}) & 4\hat{x}\hat{y}(1-\hat{y}) \\ \hat{x}(1-\hat{x})(1-2\hat{y}) & \hat{x}(1+\hat{x})(2\hat{y}-1) & \hat{x}(1+\hat{x})(1+2\hat{y}) & -\hat{x}(1-\hat{x})(1+2\hat{y}) & 2(1-\hat{x})(1+\hat{x})(2\hat{y}-1) \\ 2(1+2\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y}) & -4\hat{x}\hat{y}(1+\hat{y}) & 2(1-\hat{y})(1+\hat{y})(2\hat{x}-1) & -8\hat{x}(1-\hat{y})(1+\hat{y}) \\ -4\hat{x}\hat{y}(1+\hat{x}) & 2(1-\hat{x})(1+\hat{x})(1+2\hat{y}) & 4\hat{x}\hat{y}(1-\hat{x}) & -8\hat{y}(1-\hat{x})(1+\hat{x}) \end{bmatrix}.$$

Même sans exprimer ce que valent les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de la Formule (22), on voit que cette matrice ne nous conduit pas facilement à une expression permettant d'obtenir un résultat (une condition, même suffisante) sur la validité de l'élément. Par suite, nous reviendrons plus tard sur ce cas en formulant l'élément sous sa forme de Bézier.

4.2.5 Le quadrilatère Serendip de degré 2 à 8 nœuds

Cet élément a pour nœuds ses sommets et ses "milieux" d'arête. La numérotation des nœuds de \hat{K} , le carré⁸ droit de côté 2 centré à l'origine, $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$, est celle du schéma :

$$\begin{array}{ccc} 4 & 7 & 3 \\ & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}$$

Les polynômes de base sont les suivants :

$$\begin{aligned} -p_1 &= \frac{1}{4}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(-1-\hat{x}-\hat{y}), \\ -p_2 &= \frac{1}{4}(1+\hat{x})(1-\hat{y})(-1+\hat{x}-\hat{y}), \\ -p_3 &= \frac{1}{4}(1+\hat{x})(1+\hat{y})(-1+\hat{x}+\hat{y}), \\ -p_4 &= \frac{1}{4}(1-\hat{x})(1+\hat{y})(-1-\hat{x}+\hat{y}), \\ -p_5 &= \frac{1}{2}(1-\hat{x})(1+\hat{x})(1-\hat{y}), \\ -p_6 &= \frac{1}{2}(1-\hat{y})(1+\hat{y})(1+\hat{x}), \\ -p_7 &= \frac{1}{2}(1-\hat{x})(1+\hat{x})(1+\hat{y}), \\ -p_8 &= \frac{1}{2}(1-\hat{y})(1+\hat{y})(1-\hat{x}). \end{aligned}$$

Enfin, on a $F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,8} p_i(\hat{M})A_i$ et les arêtes sont des courbes de Bézier de degré 2.

En effet, par exemple, pour $\hat{y} = -1$, $F_K(\hat{x}, -1)$ se réduit à

$$F_K(\hat{x}, -1) = p_1A_1 + p_2A_2 + p_5A_5 = -\frac{1}{2}(1-\hat{x})\hat{x}A_1 + \frac{1}{2}(1+\hat{x})\hat{x}A_2 + (1-\hat{x})(1+\hat{x})A_5$$

et, par changement de variable pour se situer dans l'intervalle $[0, 1]$, il vient

$$F_K(\hat{x}, 0) = (1-\hat{x})(1-2\hat{x})A_1 + 4\hat{x}(1-\hat{x})A_5 + \hat{x}(2\hat{x}-1)A_2$$

qui est le résultat attendu.

La matrice jacobienne, dont le déterminant nous intéresse, se définit à partir des dérivées des polynômes de base. La matrice des dérivées des polynômes s'écrit :

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-y)(2x+y) & (1-y)(2x-y) & (1+y)(2x+y) & (1+y)(2x-y) \\ (1-x)(2y+x) & (1+x)(2y-x) & (1+x)(2y+x) & (1-x)(2y-x) \end{bmatrix}$$

⁸cf. infra.

4.3.5 Le pentaèdre complet de degré 2 à 18 nœuds

Cet élément a pour nœuds ses sommets, ses nœuds "milieux" d'arête et un nœud par face quadrilatérale, soit $6+9+3$, 18 nœuds. La convention¹⁰ de numérotation des nœuds est la suivante, les 6 sommets en premier (1 à 6), les 3 nœuds "milieux" des arêtes de la face du bas (7 à 9), les 3 nœuds "milieux" des arêtes de la face du haut (10 à 12), les 3 nœuds "milieux" des arêtes latérales (13 à 15), les 3 nœuds "centraux" des faces latérales (16 à 18), soit le schéma suivant, coupes du bas (à gauche) vers le haut (à droite) :

3	15	6
9 8	18 17	12 11
1 7 2	13 16 14	4 10 5

L'élément de référence est défini comme le triangle $[0, 1]$ en (\hat{x}, \hat{y}) via le segment $[0, 1]$ en \hat{z} . Les polynômes de base correspondant à la convention de numérotation sont les suivants :

$$\begin{aligned}
-p_1 &= (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y})(1 - \hat{z}(1 - 2\hat{z})), \\
-p_2 &= \hat{x}(2\hat{x} - 1)(1 - \hat{z}(1 - 2\hat{z})), \\
-p_3 &= \hat{y}(2\hat{y} - 1)(1 - \hat{z}(1 - 2\hat{z})), \\
-p_4 &= (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y})\hat{z}(2\hat{z} - 1), \\
-p_5 &= \hat{x}(2\hat{x} - 1)\hat{z}(2\hat{z} - 1), \\
-p_6 &= \hat{y}(2\hat{y} - 1)\hat{z}(2\hat{z} - 1), \\
-p_7 &= 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}(1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z}), \\
-p_8 &= 4\hat{x}\hat{y}(1 - \hat{z}(1 - 2\hat{z})), \\
-p_9 &= 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}(1 - \hat{z}(1 - 2\hat{z})), \\
-p_{10} &= 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}\hat{z}(2\hat{z} - 1), \\
-p_{11} &= 4\hat{x}\hat{y}\hat{z}(2\hat{z} - 1), \\
-p_{12} &= 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}\hat{z}(2\hat{z} - 1), \\
-p_{13} &= 4(1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y})\hat{z}(1 - \hat{z}), \\
-p_{14} &= 4\hat{x}(2\hat{x} - 1)\hat{z}(1 - \hat{z}), \\
-p_{15} &= 4\hat{y}(2\hat{y} - 1)\hat{z}(1 - \hat{z}), \\
-p_{16} &= 16(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}\hat{z}(1 - \hat{z}), \\
-p_{17} &= 16\hat{x}\hat{y}\hat{z}(1 - \hat{z}), \\
-p_{18} &= 16(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}\hat{z}(1 - \hat{z}).
\end{aligned}$$

La transformation F_K permettant de passer de \hat{K} à K , l'élément courant de nœuds A_i , est $F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,18} p_i(\hat{M})A_i$, il est facile de voir que les arêtes sont des arcs de parabole donc des courbes de Bézier de degré 2. Ainsi, pour $\hat{y} = 0$ et $\hat{z} = 0$, seuls contribuent dans F_K , p_1, p_2 et p_7 et on a $p_1 = (1 - \hat{x})(1 - 2\hat{x})$, $p_2 = \hat{x}(2\hat{x} - 1)$ et $p_7 = 4\hat{x}(1 - \hat{x})$, par suite

$$F_K(\hat{x}, 0, 0) = (1 - \hat{x})(1 - 2\hat{x})A_1 + 4\hat{x}(1 - \hat{x})A_7 + \hat{x}(2\hat{x} - 1)A_2,$$

qui est le résultat attendu. Pour le cas $\hat{x} = \hat{y} = 0$, on trouve les contributions de $p_1 = (1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z})$, $p_4 = \hat{z}(2\hat{z} - 1)$ et $p_{13} = 4\hat{z}(1 - \hat{z})$ et F_k se réduit à

$$F_k(0, 0, \hat{z}) = (1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z})A_1 + 4\hat{z}(1 - \hat{z})A_{13} + \hat{z}(2\hat{z} - 1)A_4,$$

qui est le résultat attendu.

Sans aller plus loin, on ne va regarder que la forme de Bézier pour analyser cet élément.

¹⁰Il ne s'agit que d'une convention.

est la suivante, les 8 sommets en premier (1 à 8), les 4 nœuds "milieu" des arêtes de la face du bas (9 à 12), les 4 nœuds "milieu" des arêtes des faces latérales (13 à 16), les 4 nœuds "milieu" des arêtes de la face du haut (17 à 20), les 6 nœuds "centraux" des faces (21 à 26) et, enfin, le nœud "central" (27), soit le schéma suivant, coupes du bas (à gauche) vers le haut (à droite) :

4	11	3	16	26	15	8	19	7
12	21	10	22	27	25	20	24	18
1	9	2	13	23	14	5	17	6

L'élément de référence est choisi comme $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Les polynômes de base correspondant à la convention de numérotation sont les suivants :

$$\begin{aligned}
-p_1 &= -\frac{1}{8}\hat{x}\hat{y}\hat{z}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(1-\hat{z}), \\
-p_2 &= \frac{1}{8}\hat{x}\hat{y}\hat{z}(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1-\hat{z}), \\
-p_3 &= -\frac{1}{8}\hat{x}\hat{y}\hat{z}(1+\hat{x})(1+\hat{y})(1-\hat{z}), \\
-p_4 &= \frac{1}{8}\hat{x}\hat{y}\hat{z}(1-\hat{x})(1+\hat{y})(1-\hat{z}), \\
-p_5 &= \frac{1}{8}\hat{x}\hat{y}\hat{z}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{z}), \\
-p_6 &= -\frac{1}{8}\hat{x}\hat{y}\hat{z}(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{z}), \\
-p_7 &= \frac{1}{8}\hat{x}\hat{y}\hat{z}(1+\hat{x})(1+\hat{y})(1+\hat{z}), \\
-p_8 &= -\frac{1}{8}\hat{x}\hat{y}\hat{z}(1-\hat{x})(1+\hat{y})(1+\hat{z}), \\
-p_9 &= -\frac{1}{4}(1+\hat{x})(1-\hat{x})\hat{y}(1-\hat{y})\hat{z}(1-\hat{z}), \\
-p_{10} &= \frac{1}{4}\hat{x}(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})\hat{z}(1-\hat{z}), \\
-p_{11} &= \frac{1}{4}(1-\hat{x})(1+\hat{x})\hat{y}(1+\hat{y})\hat{z}(1-\hat{z}), \\
-p_{12} &= -\frac{1}{4}\hat{x}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})\hat{z}(1-\hat{z}), \\
-p_{13} &= \frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(1-\hat{z}^2), \\
-p_{14} &= -\frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1-\hat{z}^2), \\
-p_{15} &= \frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1+\hat{x})(1+\hat{y})(1-\hat{z}^2), \\
-p_{16} &= -\frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1-\hat{x})(1+\hat{y})(1-\hat{z}^2), \\
-p_{17} &= -\frac{1}{4}(1+\hat{x})(1-\hat{x})\hat{y}(1-\hat{y})\hat{z}(1+\hat{z}), \\
-p_{18} &= \frac{1}{4}\hat{x}(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})\hat{z}(1+\hat{z}), \\
-p_{19} &= \frac{1}{4}(1-\hat{x})(1+\hat{x})\hat{y}(1+\hat{y})\hat{z}(1+\hat{z}), \\
-p_{20} &= -\frac{1}{4}\hat{x}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})\hat{z}(1+\hat{z}), \\
-p_{23} &= -\frac{1}{2}(1+\hat{x})(1-\hat{x})\hat{y}(1-\hat{y})(1-\hat{z}^2), \\
-p_{25} &= \frac{1}{2}\hat{x}(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})(1-\hat{z}^2), \\
-p_{26} &= \frac{1}{2}(1-\hat{x})(1+\hat{x})\hat{y}(1+\hat{y})(1-\hat{z}^2), \\
-p_{22} &= -\frac{1}{2}\hat{x}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})(1-\hat{z}^2), \\
-p_{21} &= -\frac{1}{2}(1-\hat{x})(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})\hat{z}(1-\hat{z}), \\
-p_{24} &= \frac{1}{2}(1-\hat{x})(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})\hat{z}(1+\hat{z}), \\
-p_{27} &= (1-\hat{x})(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})(1-\hat{z}^2).
\end{aligned}$$

La transformation F_K permettant de passer de \hat{K} à K , l'élément courant de nœuds A_i , est $F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,27} p_i(\hat{M})A_i$, il est facile de vérifier que les arêtes sont des arcs de parabole

donc des courbes de Bézier de degré 2. Ainsi, pour $\hat{y} = -1$ et $\hat{z} = -1$, seuls contribuent dans F_K , p_1, p_2 et p_9 et on a $p_1 = -\frac{1}{2}\hat{x}(1-\hat{x})$, $p_2 = -\frac{1}{2}\hat{x}(1+\hat{x})$ et $p_9 = (1+\hat{x})(1-\hat{x})$, par suite

$$F_K(\hat{x}, -1, -1) = -\frac{1}{2}\hat{x}(1-\hat{x})A_1 - (1+\hat{x})(1-\hat{x})A_9 - \frac{1}{2}\hat{x}(1+\hat{x})A_2,$$

sur $[-1, +1]$, soit

$$F_K(\hat{x}, 0, 0) = (1-\hat{x})(1-2\hat{x})A_1 + 4\hat{x}(1-\hat{x})A_9 + \hat{x}(2\hat{x}-1)A_2$$

sur $[0, 1]$ qui est le résultat attendu. Pour le cas $\hat{x} = \hat{y} = -1$, on trouve les contributions de $p_1 = -\frac{1}{2}\hat{z}(1-\hat{z})$, $p_5 = \frac{1}{2}\hat{z}(1+\hat{z})$ et $p_{13} = (1-\hat{z}^2)$ et F_k par suite

$$F_K(-1, -1, \hat{z}) = -\frac{1}{2}\hat{z}(1-\hat{z})A_1 + (1-\hat{z}^2)A_{13} + \frac{1}{2}\hat{z}(1+\hat{z})A_5,$$

situation que pour l'élément à 27 nœuds donc

$$F_k(0, 0, \hat{z}) = (1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z})A_1 + 4\hat{z}(1 - \hat{z})A_{13} + \hat{z}(2\hat{z} - 1)A_5$$

sur $[0, 1]$, ce qui est le résultat attendu.

Notons que cet élément n'est autre que le carreau défini par interpolation transfinie à partir de ses 12 arêtes courbes frontières qui définissent les 6 faces qui, à leur tour, définissent le volume, voir [16].

Sans aller plus loin, on ne va regarder que la forme de Bézier pour analyser cet élément ou utiliser un biais.

4.4 Le cas particulier des pyramides

Les éléments pyramidaux ne sont pas des éléments de Lagrange. Ces éléments sont utiles pour permettre la construction de maillages *conformes* mélangeant tétraèdres, pentaèdres et hexaèdres utilisés avec plus ou moins de bonheur dans certains types de calculs.

En fait, plusieurs définitions sont proposées. Il n'est pas possible de trouver des polynômes de base non rationnels satisfaisants aux propriétés désirées. Ainsi, dans le code **Aster** développé à l'EDF, on trouve une pyramide de degré 1 à 5 nœuds et une pyramide de degré 2 à 13 nœuds. L'élément de référence, \hat{K} , est le carré de côté $\sqrt{2}$ centré à l'origine et pivoté de 45 degrés avec comme cinquième sommet le nœud $\hat{A}_5 = (0, 0, 1)$.

La numérotation des nœuds est naturelle, les 5 sommets en tête, puis pour l'élément de degré 2, les nœuds milieux de la base puis les nœuds milieux des arêtes issues de la base vers le sommet \hat{A}_5 .

Les polynômes de base de la pyramide à 5 nœuds sont les suivants :

$$\begin{aligned} - p_1 &= \frac{(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)}{4(1 - \hat{z})} \\ - p_2 &= \frac{(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)}{4(1 - \hat{z})} \\ - p_3 &= \frac{(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)}{4(1 - \hat{z})} \\ - p_4 &= \frac{(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)}{4(1 - \hat{z})} \\ - p_5 &= \hat{z}. \end{aligned}$$

Les polynômes de base de la pyramide à 13 nœuds sont les suivants :

$$\begin{aligned} - p_1 &= \frac{(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{x} - 0.5)}{2(1 - \hat{z})} \\ - p_2 &= \frac{(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{y} - 0.5)}{2(1 - \hat{z})} \\ - p_3 &= \frac{(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{x} - 0.5)}{2(1 - \hat{z})} \\ - p_4 &= \frac{(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{y} - 0.5)}{2(1 - \hat{z})} \\ - p_5 &= 2\hat{z}(\hat{z} - 0.5) \\ - p_6 &= \frac{(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)}{2(1 - \hat{z})} \\ - p_7 &= \frac{(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)}{2(1 - \hat{z})} \\ - p_8 &= \frac{(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)}{2(1 - \hat{z})} \\ - p_9 &= \frac{(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)}{2(1 - \hat{z})} \\ - p_{10} &= \frac{\hat{z}(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)}{1 - \hat{z}} \\ - p_{11} &= \frac{\hat{z}(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)}{1 - \hat{z}} \\ - p_{12} &= \frac{\hat{z}(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z} - 1)}{1 - \hat{z}} \\ - p_{13} &= \frac{\hat{z}(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} - 1)}{1 - \hat{z}}. \end{aligned}$$

La matrice des dérivées partielles est horrible à calculer et, par suite, trouver le polynôme jacobien n'est pas vraiment réaliste, on utilisera donc une méthode alternative pour évaluer ces éléments.

4.5 Définitions sous forme Bézier

L'analyse via l'approche élément fini pure ne nous a permis de conclure que pour le triangle, le quadrilatère et le tétraèdre de degré 1. Pour étudier tous les autres éléments, nous allons les reformuler sous la forme de Bézier adaptée à leur géométrie et à leur degré parmi celles des Relations (13), (14), (15), (16) ou (17), au moins pour les éléments complets (non Serendip). Les écritures sous forme de Bézier sont les suivantes :

- la Relation (14), degré 2, pour le triangle à 6 nœuds,
- la Relation (13), degré 2, pour le quadrilatère complet à 9 nœuds,
- la Relation (15), degré 2, pour le tétraèdre à 10 nœuds,
- la Relation (16), degré 1, pour l'hexaèdre à 8 nœuds et degré 2 pour l'hexaèdre complet à 27 nœuds,
- la Relation (17), degré 1, pour le pentaèdre à 6 nœuds et degré 2 pour le pentaèdre complet à 18 nœuds,
- pour les éléments Serendip, nous verrons que, selon le cas, on pourra trouver soit une formulation incomplète soit un biais.

4.5.1 Équivalence des deux définitions

On a le résultat¹⁴ (formulé comme un lemme) suivant :

Lemme 1. La formulation éléments finis via les nœuds et les fonction de forme est équivalente à la formulation Bézier via les points de contrôle et les polynômes de Bernstein. \square

On va démontrer (vérifier) ce résultat sur quelques exemples (d'éléments "complets") et en déduire un second lemme portant sur les jacobiens.

- L'exemple du triangle de degré 2 à 6 nœuds.

Vu sous la formulation élément fini classique, cet élément s'écrit :

$$F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,6} p_i(\hat{M})A_i,$$

tandis que la Relation (14) est :

$$\sigma(u, v, w) = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w)P_{ijk}.$$

On part de F_K que l'on modifie de manière évidente en $M(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_i p_i(\hat{x}, \hat{y})A_i$. En développant, on a

$$\begin{aligned} M(\hat{x}, \hat{y}) &= (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y})A_1 + \hat{x}(2\hat{x} - 1)A_2 + \hat{y}(2\hat{y} - 1)A_3 \\ &\quad + 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}A_4 + 4\hat{x}\hat{y}A_5 + 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}A_6. \end{aligned}$$

On va vérifier que le terme en A_1 est en u^2 , soit B_{200}^2 , et que le terme en C_4 , le point de contrôle associé à l'arête A_1A_2 et le nœud A_4 est $2uv$, soit B_{110}^2 , pour un système de coordonnées adéquat. Notons que A_1 intervient via p_1 , p_4 et p_6 donc via lui-même et A_4 et A_6 . Comme on a $A_4 = \frac{2C_4 + A_1 + A_2}{4}$ et $A_6 = \frac{2C_6 + A_1 + A_3}{4}$, il vient donc, comme coefficient :

$$\begin{aligned} &(1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y}) + (1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x} + (1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y} \\ &\quad \text{soit } (1 - \hat{x} - \hat{y})^2, \end{aligned}$$

en posant $u = 1 - \hat{x} - \hat{y}$, on trouve un terme en u^2 . Pour C_4 , le coefficient cherché vient du terme en A_4 , à savoir

$$2(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x},$$

¹⁴qui est évident puisque les deux systèmes de polynômes forment une base de l'espace des polynômes.

avec $u = 1 - \hat{x} - \hat{y}$ et en posant $v = \hat{x}$ on trouve le coefficient cherché $2uv$. De fait, ce changement de variable revient à utiliser les coordonnées barycentriques, u, v et w où $u + v + w = 1$, donc $w = \hat{y}$. Ainsi,

$$M(\hat{x}, \hat{y}) = u^2 A_1 + 2uv C_4 + \dots$$

que l'on note

$$M(u, v, w) = u^2 A_1 + 2uv C_4 + \dots$$

et en prenant les notations classiques des Bézier, ici $P_{200} = A_1$ et $P_{110} = C_4$, on obtient

$$M(u, v, w) = u^2 P_{200} + 2uv P_{110} + \dots$$

Il est clair que l'on retrouve également les autres coefficients des 4 autres points de contrôle et que la Relation (14) est bien une écriture équivalente à celle des éléments finis.

La forme en F_K implique les 6 nœuds du triangle, la forme de Bézier implique les 6 points de contrôle du triangle. Elle va nous permettre d'établir le résultat intéressant cherché sur son jacobien que nous n'arrivions pas à trouver en ne regardant que la formulation éléments finis.

- L'exemple du quadrilatère de degré 2 à 9 nœuds.

$$F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,9} p_i(\hat{M}) A_i,$$

tandis que la Relation (13) est :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) P_{ij}.$$

Les A_i , les C_i et les P_{ij} se correspondent comme l'indique le schéma suivant :

$$\begin{array}{cccccc} P_{02} & P_{12} & P_{22} & & A_4 & C_7 & A_3 \\ P_{01} & P_{11} & P_{21} & \text{et} & C_8 & C_9 & C_6 \\ P_{00} & P_{10} & P_{20} & & A_1 & C_5 & A_2. \end{array}$$

Pour établir le résultat on va identifier les polynômes p_i et les $B_i^2(\cdot)$ se correspondant. Pour p_9 , coefficient de A_9 , c'est immédiat, il suffit de le comparer avec le produit $B_1^2(u) B_1^2(v)$, coefficient de P_{11} . On a $P_{11} = C_9$ et $4C_9$ donne la contribution pour A_9 .

Pour p_5 il suffit de regarder les contributions de $B_1^2(u) B_1^2(v) P_{11}$ et de $B_1^2(u) B_0^2(v) P_{10}$ vis à vis de A_5 , C_9 contribue comme $-A_5$ et C_5 contribue comme $2A_5$.

Pour p_1 on regarde les termes $B_1^2(u) B_1^2(v) P_{11}$, $B_1^2(u) B_0^2(v) P_{10}$ et $B_0^2(u) B_1^2(v) P_{01}$, C_5 et C_8 contribuent comme $-A_1$, $4C_9$ contribue comme A_1 .

Pour retrouver exactement l'équivalence, il faut, dans chaque cas, faire le changement de variable pour ramener la plage de variation dans $[0, 1]$ en u et v alors que $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

La forme en F_K implique les 9 nœuds du quadrilatère, la forme de Bézier implique les 9 points de contrôle du quadrilatère. Elle va nous permettre d'établir le résultat intéressant cherché sur son jacobien que nous n'arrivions pas à trouver en ne regardant que la formulation éléments finis.

Pour les autres éléments (complets), l'équivalence entre les deux approches se vérifie de la même façon.

4.5.2 Le cas des éléments Serendip

L'équivalence entre la formulation éléments finis et la formulation Bézier incomplète est établie pour le quadrilatère à 8 nœuds et l'hexaèdre à 20 nœuds, cf. [14] et [16]. Comme ces éléments sont construits par interpolation transfinie, il suffit d'écrire celle-ci sous forme de Bézier incomplet.

Pour le pentaèdre à 15 nœuds, nous n'avons pas réussi à établir le résultat analogue. Par contre, cet élément se construit par élimination (tout comme les autres, d'ailleurs).

4.6 Une équivalence sur les jacobiens.

Le Lemme 1 a une contrepartie portant sur les polynômes jacobiens. C'est le résultat suivant :

Lemme 2. Le polynôme jacobien des éléments finis complets peut s'écrire en utilisant les fonctions de forme de l'élément fini de même géométrie mais de degré celui de ce polynôme. \square

La démonstration est immédiate (et on l'a déjà vu dans le cas du triangle de degré 2 ou le degré du jacobien est également 2). Par anticipation, nous prenons le cas du tétraèdre de degré 2 dont le jacobien est de degré 3 où on pourra écrire :

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \sum_{i=1,20} p_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) B_i,$$

où les B_i sont les images par F_K (de degré 2) des nœuds de référence du tétraèdre de degré 3, de même que les p_i sont les fonctions de forme de cet élément.

5 Validité d'un élément fini

On va analyser les éléments en regardant l'expression de leur jacobien calculé à partir de leur écriture sous la forme Bézier en utilisant les facilités de calcul offertes par ce formalisme.

5.1 Calcul du jacobien

L'écriture en Bézier va nous simplifier les calculs par utilisation des formules de dérivations et de multiplications rappelées au début de ce papier. On va en déduire une condition suffisante de validité qui, dans certains cas, pourra être affinée.

5.1.1 Le triangle de degré 1 à 3 nœuds

On a déjà établi la condition : **surface positive**.

5.1.2 Le quadrilatère de degré 1 à 4 nœuds

On a déjà établi la condition : **convexité**.

5.1.3 Le triangle de degré 2 à 6 nœuds

On a déjà établi une condition nécessaire de validité pour cet élément, on va l'examiner ici sous sa forme de Bézier. On regarde donc à nouveau le jacobien de F_K , à savoir :

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} \end{vmatrix},$$

et on connaît σ défini par :

$$\sigma(u, v, w) = \sum_{i+j+k=2} B_{i,j,k}^2(u, v, w) P_{ijk}$$

que l'on va utiliser pour trouver ce jacobien car les calculs sont nettement plus faciles. Comme $u = 1 - \hat{x} - \hat{y}$, $v = \hat{x}$ et $w = \hat{y}$ et que ainsi $u = 1 - v - w$, on exprime σ uniquement en v et w , soit

$$\tilde{\sigma}(v, w) = \sigma(u, v, w),$$

c'est-à-dire simplement que l'on exprime u en fonction de v et w . Dans la suite on fera la confusion entre les deux notations. Vu sous cet angle, on a

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial v} & \frac{\partial \sigma}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Il suffit maintenant de remplacer les dérivées partielles en v, w pour obtenir la fonction cherchée. Pour calculer¹⁵ les dérivées, on ouvre $\sigma(u, v, w)$ en (u, v, w) , il vient :

$$\sigma(u, v, w) = B_{200}^2 P_{200} + B_{110}^2 P_{110} + B_{020}^2 P_{020} + B_{011}^2 P_{011} + B_{002}^2 P_{002} + B_{101}^2 P_{101},$$

autrement dit :

$$\sigma(u, v, w) = u^2 P_{200} + 2uv P_{110} + v^2 P_{020} + 2vw P_{011} + w^2 P_{002} + 2uw P_{101},$$

donc :

$$\frac{\partial \sigma(u, v, w)}{\partial v} = 2 \{u P_{110} + v P_{020} + w P_{011}\} - 2 \{u P_{200} + v P_{110} + w P_{101}\},$$

$$\frac{\partial \sigma(u, v, w)}{\partial w} = 2 \{u P_{101} + v P_{011} + w P_{002}\} - 2 \{u P_{200} + v P_{110} + w P_{101}\}.$$

Alors :

$$\frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 2 \{u(P_{110} - P_{200}) + v(P_{020} - P_{110}) + w(P_{011} - P_{101})\},$$

et

$$\frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial w} = 2 \{u(P_{101} - P_{200}) + v(P_{011} - P_{110}) + w(P_{002} - P_{101})\}.$$

En posant

$$\Delta_{ijk}^{100} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i-1, j+1, k}} \quad \text{et} \quad \Delta_{ijk}^{010} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i-1, j, k+1}}$$

il vient :

$$\frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} = 2 \{u \Delta_{200}^{100} + v \Delta_{110}^{100} + w \Delta_{101}^{100}\} = 2 \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{100},$$

et

$$\frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} = 2 \{u \Delta_{200}^{010} + v \Delta_{110}^{010} + w \Delta_{101}^{010}\} = 2 \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{010}.$$

Au final le jacobien \mathcal{J} est le déterminant :

$$\mathcal{J} = 4 \left| \begin{array}{cc} \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{100} & \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{010} \end{array} \right|,$$

ou encore :

$$\sum_{i_1+j_1+k_1=1} \sum_{i_2+j_2+k_2=1} B_{i_1 j_1 k_1}^1(u, v, w) B_{i_2 j_2 k_2}^1(u, v, w) \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2}^{010} \right|,$$

et, par la règle de multiplication, il vient :

$$B_{i_1 j_1 k_1}^1(u, v, w) B_{i_2 j_2 k_2}^1(u, v, w) = \frac{C_{i_1 j_1 k_1}^1 C_{i_2 j_2 k_2}^1}{C_{i_1+i_2, j_1+j_2, k_1+k_2}^2} B_{i_1+i_2, j_1+j_2, k_1+k_2}^2(u, v, w).$$

Par suite, on trouve :

$$\mathcal{J} = 4 \sum_{i_1+j_1+k_1=1} \sum_{i_2+j_2+k_2=1} \frac{C_{i_1 j_1 k_1}^1 C_{i_2 j_2 k_2}^1}{C_{i_1+i_2, j_1+j_2, k_1+k_2}^2} B_{i_1+i_2, j_1+j_2, k_1+k_2}^2(u, v, w) \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2}^{010} \right|.$$

¹⁵Dans cet exemple, nous faisons le calcul à la main, pour les autres on utilisera les formules génériques données au début du papier.

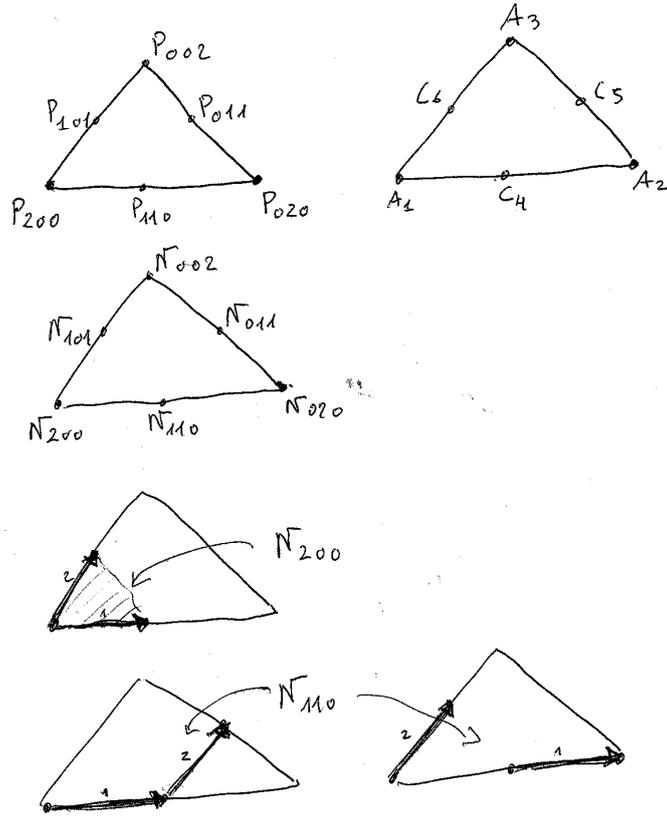


FIG. 16 – Correspondance entre les numérotations Bézier et élément fini pour les nœuds et les points de contrôle, numérotation logique des coefficients de contrôle et exemple d'un coefficient de chaque type, un terme pour un coefficient attaché à un sommet (ici N_{200}), deux termes pour un (le seul) coefficient attaché à une arête (ici N_{110}).

On regroupe alors les termes pour trouver une écriture de la forme :

$$\mathcal{J} = \sum_{I+J+K=2} B_{IJK}^2(u, v, w) N_{IJK},$$

ce qui revient à trouver les coefficients N_{IJK} . Au passage, on connaît le degré¹⁶ du polynôme jacobien, 2 et le nombre de coefficients de contrôle, 6.

L'écriture formelle des N_{IJK} de l'expression issue du regroupement est la suivante

$$N_{IJK} = 4 \sum_{i_1+j_1+k_1=1, i_2+j_2+k_2=1} \frac{C_{i_1 j_1 k_1}^1 C_{i_2 j_2 k_2}^1}{C_{i_1+i_2, j_1+j_2, k_1+k_2}^2} \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2}^{010} \right|, \quad (23)$$

avec $i_1 + i_2 = I, j_1 + j_2 = J, k_1 + k_2 = K$ et en notant que les C_{\dots}^1 valent 1. Ce qui donne, *in extenso* :

$$\begin{aligned} N_{200} &= 4 \left| \overrightarrow{A_1 C_4} \quad \overrightarrow{A_1 C_6} \right| \\ N_{110} &= 2 \left| \overrightarrow{A_1 C_4} \quad \overrightarrow{C_4 C_5} \right| + 2 \left| \overrightarrow{C_4 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_6} \right| \\ N_{020} &= 4 \left| \overrightarrow{C_4 A_2} \quad \overrightarrow{C_4 C_5} \right| \\ N_{011} &= 2 \left| \overrightarrow{C_4 A_2} \quad \overrightarrow{C_6 A_3} \right| + 2 \left| \overrightarrow{C_6 C_5} \quad \overrightarrow{C_4 C_5} \right| \\ N_{002} &= 4 \left| \overrightarrow{C_6 C_5} \quad \overrightarrow{C_6 A_3} \right| \\ N_{101} &= 2 \left| \overrightarrow{A_1 C_4} \quad \overrightarrow{C_6 A_3} \right| + 2 \left| \overrightarrow{C_6 C_5} \quad \overrightarrow{A_1 C_6} \right| \end{aligned}$$

¹⁶et nous sommes dans le seul cas où le degré des fonctions de forme et celui du jacobien sont identiques.

soit, de manière plus parlante (par simple permutation pour mettre les sommets en tête), pour les trois coins :

$$\begin{aligned} N_{200} &= 4 \left| \overrightarrow{A_1 C_4} \quad \overrightarrow{A_1 C_6} \right| \\ N_{020} &= 4 \left| \overrightarrow{A_2 C_5} \quad \overrightarrow{A_2 C_4} \right| \\ N_{002} &= 4 \left| \overrightarrow{A_3 C_6} \quad \overrightarrow{A_3 C_5} \right| \end{aligned}$$

et, par ouverture pour parcourir les arêtes de leur première extrémité vers la seconde, pour les trois autres coefficients :

$$\begin{aligned} N_{110} &= 2 \left| \overrightarrow{A_1 C_4} \quad \overrightarrow{C_4 C_5} \right| + 2 \left| \overrightarrow{C_4 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_6} \right| \\ N_{011} &= 2 \left| \overrightarrow{A_2 C_5} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \right| + 2 \left| \overrightarrow{C_5 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 C_4} \right| \\ N_{101} &= 2 \left| \overrightarrow{A_3 C_6} \quad \overrightarrow{C_6 C_4} \right| + 2 \left| \overrightarrow{C_6 A_1} \quad \overrightarrow{A_3 C_5} \right| \end{aligned}$$

qui, ainsi, ont tous la même forme (ce qui n'était pas très évident sur la première écriture issue de l'application mécanique de la Formule (23)). Notons que, en partant de l'expression de N_{200} et de N_{110} seulement, on obtient les autres coefficients par simple permutation.

Recherche de l'extremum. On ouvre le jacobien, soit :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = u^2 N_{200} + 2uv N_{110} + v^2 N_{020} + 2vw N_{011} + w^2 N_{002} + 2uw N_{101},$$

et on cherche s'il existe un extremum. Dans un tel cas, il correspond au zéro des dérivées premières qui se calculent comme¹⁷ celles de F_K , soit :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial v} = 2 \{u(N_{110} - N_{200}) + v(N_{020} - N_{110}) + w(N_{011} - N_{101})\},$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial w} = 2 \{u(N_{101} - N_{200}) + v(N_{011} - N_{110}) + w(N_{002} - N_{101})\}.$$

En premier, on montre que l'extremum n'est pas atteint sur une arête (sauf pour un élément droit avec les nœuds aux milieux des arêtes). En effet, supposons que l'arête $A_1 A_2$ porte l'extremum, alors on a :

$$0 = u(N_{110} - N_{200}) + v(N_{020} - N_{110}),$$

$$0 = u(N_{101} - N_{200}) + v(N_{011} - N_{110}),$$

comme $v = 1 - u$, c'est impossible si l'élément est courbe. Par suite, l'extremum est atteint dans l'élément. On repart de :

$$0 = u(N_{110} - N_{200}) + v(N_{020} - N_{110}) + w(N_{011} - N_{101}),$$

et

$$0 = u(N_{101} - N_{200}) + v(N_{011} - N_{110}) + w(N_{002} - N_{101}),$$

et on remplace w par $1 - u - v$, par suite on trouve un système linéaire de deux équations à deux inconnues. La solution donne le triplet (u, v, w) où l'extremum est atteint et permet de conclure.

Intuitivement, l'extremum est atteint en un point où la proximité des arêtes courbes interagit le plus fortement.

¹⁷on remplace simplement les P_{ijk} par les N_{ijk} .

Une autre expression des coefficients de contrôle. On repart de l'expression développée du jacobien :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = u^2 N_{200} + 2uv N_{110} + v^2 N_{020} + 2vw N_{011} + w^2 N_{002} + 2uw N_{101},$$

et on instancie. Par exemple, pour $u = 1, v = w = 0$, on trouve

$$\mathcal{J}(1, 0, 0) = N_{200}$$

et pour $u = \frac{1}{2}, v = \frac{1}{2}, w = 0$, on trouve :

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{N_{200}}{4} + \frac{N_{110}}{2} + \frac{N_{020}}{4},$$

qui est une relation identique à celle liant nœuds "milieux" et points de contrôle, en effet, la relation s'écrit également :

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{N_{200} + 2N_{110} + N_{020}}{4},$$

et, en sens inverse :

$$N_{110} = \frac{4\mathcal{J}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - \mathcal{J}(1, 0, 0) - \mathcal{J}(0, 1, 0)}{2}.$$

Les autres coefficients ont la même forme. En remplaçant les coefficients par ces valeurs et en regroupant les termes, on retrouve que le jacobien s'exprime comme l'élément fini, le regroupement des monômes conduisant aux polynômes p_i de cet élément fini.

Gardons, pour plus tard, le fait que l'on peut calculer les N_{ijk} par combinaison linéaire des seuls $\mathcal{J}(\hat{A}_i)$.

Cette formulation du jacobien et de ses coefficients de contrôle permet d'écrire une condition suffisante de positivité, voir plus bas.

Mais le calcul explicite, possible ici, de l'extremum permet d'écrire une condition nécessaire et suffisante, voir plus bas.

5.1.4 Le quadrilatère de degré 2 à 9 nœuds

Comme

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) P_{i,j},$$

on a, par la règle de dérivation :

$$\frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u} = 2 \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} B_i^1(u) B_j^2(v) \Delta_{i,j}^{1,0} \text{ avec } \Delta_{i,j}^{1,0} = \overrightarrow{P_{ij} P_{i+1,j}}.$$

et

$$\frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v} = 2 \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,1} B_i^2(u) B_j^1(v) \Delta_{i,j}^{0,1} \text{ avec } \Delta_{i,j}^{0,1} = \overrightarrow{P_{ij} P_{i,j+1}}.$$

Par suite le déterminant représentant le jacobien s'écrit :

$$\mathcal{J} = 4 \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_1=0,2} \sum_{i_2=0,2} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^1(u) B_{j_1}^2(v) B_{i_2}^2(u) B_{j_2}^1(v) |\Delta_{i_1, j_1}^{1,0} \quad \Delta_{i_2, j_2}^{0,1}|,$$

et, par la règle de multiplication, on sait que :

$$B_i^1(u) B_k^2(u) = \frac{C_i^1 C_k^2}{C_{i+k}^3} B_{i+k}^3(u),$$

et de même en v . Par suite :

$$\mathcal{J} = 4 \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_1=0,2} \sum_{i_2=0,2} \sum_{j_2=0,1} K_{i_1 i_2}^{1,0} K_{j_1 j_2}^{0,1} B_{i_1+i_2}^3(u) B_{j_1+j_2}^3(v) |\Delta_{i_1, j_1}^{1,0} \Delta_{i_2, j_2}^{0,1}|,$$

avec

$$K_{i_1 i_2}^{1,0} = \frac{C_{i_1}^1 C_{i_2}^2}{C_{i_1+i_2}^3} = \frac{C_{i_2}^2}{C_{i_1+i_2}^3} \quad \text{et} \quad K_{j_1 j_2}^{0,1} = \frac{C_{j_1}^2 C_{j_2}^1}{C_{j_1+j_2}^3} = \frac{C_{j_1}^2}{C_{j_1+j_2}^3}.$$

On regroupe alors les termes pour trouver une écriture de la forme

$$\mathcal{J} = 4 \sum_{I=0,3} \sum_{J=0,3} B_I^3(u) B_J^3(v) Q_{IJ},$$

ce qui revient à trouver les coefficients Q_{IJ} . Au passage, on connaît le degré du polynôme jacobien, 3 dans chaque direction, et le nombre de coefficients de contrôle, 16.

L'écriture formelle des Q_{IJ} de l'expression issue du regroupement est la suivante

$$Q_{IJ} = \sum_{(i_1, i_2), i_1+i_2=I} \sum_{(j_1, j_2), j_1+j_2=J} \frac{C_{i_2}^2}{C_{i_1+i_2}^3} \frac{C_{j_1}^2}{C_{j_1+j_2}^3} |\Delta_{i_1, j_1}^{1,0} \Delta_{i_2, j_2}^{0,1}|. \quad (24)$$

Ce qui donne, *in extenso* :

$$\begin{aligned} Q_{00} &= \\ Q_{01} &= \frac{1}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| + \frac{2}{3} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| \\ Q_{02} &= \frac{1}{3} \left| \overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| + \frac{2}{3} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| \\ Q_{03} &= \left| \overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| \\ Q_{10} &= \frac{2}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{1}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| \\ Q_{11} &= \frac{2}{9} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_9 C_7} \right| + \frac{4}{9} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{1}{9} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| + \frac{2}{9} \left| \overrightarrow{C_9 C_6} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| \\ Q_{12} &= \frac{2}{9} \left| \overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{4}{9} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_9 C_7} \right| + \frac{1}{9} \left| \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| + \frac{2}{9} \left| \overrightarrow{C_9 C_6} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| \\ Q_{13} &= \left| \overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{C_9 C_7} \right| + \frac{2}{3} \left| \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_8 C_4} \right| \\ Q_{20} &= \frac{1}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{A_2 C_6} \right| + \frac{2}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| \\ Q_{21} &= \frac{1}{9} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_6 A_3} \right| + \frac{2}{9} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{A_2 C_6} \right| + \frac{2}{9} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_9 C_7} \right| + \frac{4}{9} \left| \overrightarrow{C_9 C_6} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| \\ Q_{22} &= \frac{1}{9} \left| \overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{A_2 C_6} \right| + \frac{2}{9} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_6 A_3} \right| + \frac{2}{9} \left| \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{4}{9} \left| \overrightarrow{C_9 C_6} \quad \overrightarrow{C_9 C_7} \right| \\ Q_{23} &= \left| \overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{C_6 A_3} \right| + \frac{2}{3} \left| \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_9 C_7} \right| \\ Q_{30} &= \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 C_6} \right| \\ Q_{31} &= \frac{1}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_6 A_3} \right| + \frac{2}{3} \left| \overrightarrow{C_9 C_6} \quad \overrightarrow{A_2 C_6} \right| \\ Q_{32} &= \frac{1}{3} \left| \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 C_6} \right| + \frac{2}{3} \left| \overrightarrow{C_9 C_6} \quad \overrightarrow{C_6 A_3} \right| \\ Q_{33} &= \left| \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_6 A_3} \right| \end{aligned}$$

On introduit alors les coefficients N_{IJ} définis par :

$$N_{IJ} = 4Q_{IJ}, \quad (25)$$

et le jacobien s'écrit comme la forme classique attendue :

$$\mathcal{J}(u, v) = \sum_{I=0,3} \sum_{J=0,3} B_I^3(u) B_J^3(v) N_{IJ},$$

ce qui permet d'écrire une condition suffisante de positivité.

Comme déjà vu pour le triangle de degré 2, en partant de l'un des coefficients de type coin ou des deux coefficients de type arête, on obtient les autres coefficients de ces mêmes types par simple permutation (le suivant de A_4 est A_1 , le suivant de C_8 est C_5 et le suivant de C_9 est lui-même). Pour les quatre coefficients centraux, c'est, en apparence, un peu plus compliqué de le vérifier mais cela reste vrai comme attendu.

Cette formulation du jacobien et de ses coefficients de contrôle permet d'écrire une condition suffisante de positivité, voir plus bas.

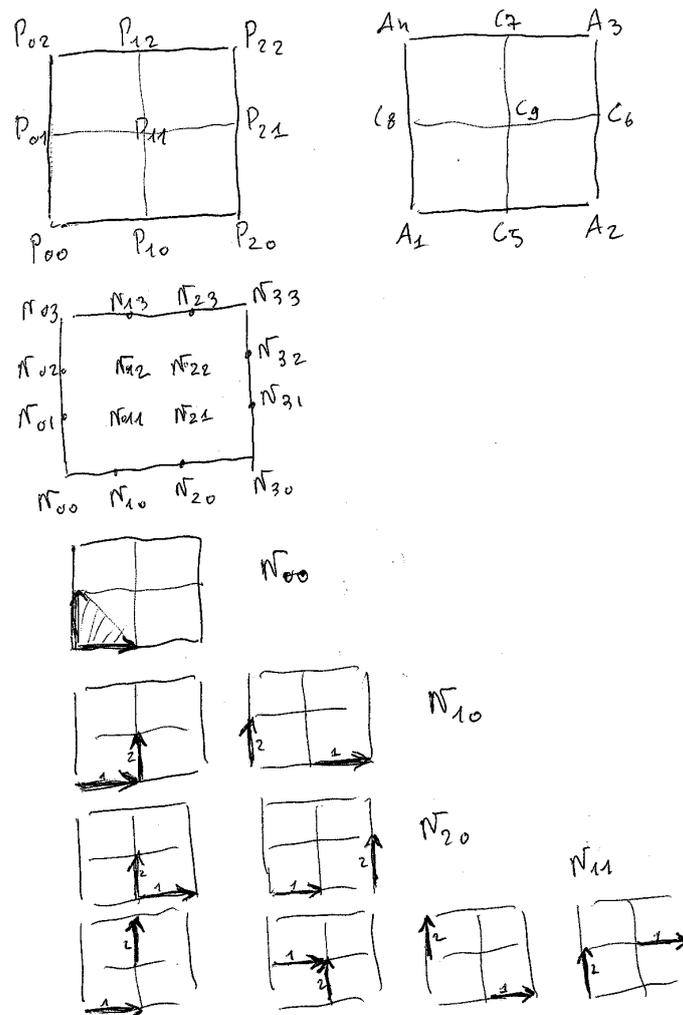


FIG. 17 – Correspondance entre les numérotations Bézier et élément fini pour les nœuds et les points de contrôle, numérotation logique des coefficients de contrôle et exemple d'un coefficient de chaque type, un terme pour un coefficient attaché à un sommet (ici N_{00}), deux termes pour les deux coefficients attachés à une arête (ici N_{10} et N_{20}), quatre termes pour un coefficient central (ici N_{11}).

5.1.5 Le tétraèdre de degré 1 à 4 nœuds

On a déjà établi la condition : **volume positif**.

5.1.6 Le pentaèdre de degré 1 à 6 nœuds

On cherche le jacobien de F_K , à savoir :

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{z}} \end{vmatrix}$$

et on connaît θ défini par :

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k=1} \sum_{l=0,1} B_{i,j,k}^1(u, v, w) B_l^1(t) P_{ijkl}.$$

Comme les P_{ijkl} ne sont autres que les sommets A_i de l'écriture élément fini, on a simplement $\theta(u, v, w, t) \equiv F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. De fait, on a $u = 1 - \hat{x} - \hat{y}$, $v = \hat{x}$, $w = \hat{y}$ et $t = \hat{z}$ et, par suite :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial v} & \frac{\partial \theta}{\partial w} & \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Par la règle de dérivation, on a :

$$\frac{\partial \theta(u, v, w, t)}{\partial v} = \sum_{i+j+k=0} \sum_{l=0,1} B_{ijk}^0(u, v, w) B_l^1(t) \Delta_{100l}^{0100} \text{ avec } \Delta_{ijkl}^{0100} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{i-1, j+1, kl}},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w, t)}{\partial w} = \sum_{i+j+k=0} \sum_{l=0,1} B_{ijk}^0(u, v, w) B_l^1(t) \Delta_{100l}^{0010} \text{ avec } \Delta_{ijkl}^{0010} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{i-1, j, k+1, l}},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w, t)}{\partial t} = \sum_{i+j+k=1} \sum_{l=0} B_{ijk}^1(u, v, w) B_l^0(t) \Delta_{ijkl}^{0001} \text{ avec } \Delta_{ijkl}^{0001} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{ijk, l+1}}.$$

Ces expressions génériques se simplifient en :

$$\frac{\partial \theta(u, v, w, t)}{\partial v} = \sum_{l=0,1} B_l^1(t) \Delta_{100l}^{0100},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w, t)}{\partial w} = \sum_{l=0,1} B_l^1(t) \Delta_{100l}^{0010},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w, t)}{\partial t} = \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{ijk0}^{0001}.$$

et, par suite, le jacobien vaut :

$$\begin{vmatrix} \sum_{l_1=0,1} B_{l_1}^1(t) \Delta_{100l_1}^{0100} & \sum_{l_2=0,1} B_{l_2}^1(t) \Delta_{100l_2}^{0010} & \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{ijk0}^{0001} \end{vmatrix},$$

soit encore

$$\sum_{l_1=0,1} B_{l_1}^1(t) \sum_{l_2=0,1} B_{l_2}^1(t) \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \begin{vmatrix} \Delta_{100l_1}^{0100} & \Delta_{100l_2}^{0010} & \Delta_{ijk0}^{0001} \end{vmatrix},$$

$$\sum_{l_1=0,1} \sum_{l_2=0,1} \sum_{i+j+k=1} B_{l_1}^1(t) B_{l_2}^1(t) B_{ijk}^1(u, v, w) \begin{vmatrix} \Delta_{100l_1}^{0100} & \Delta_{100l_2}^{0010} & \Delta_{ijk0}^{0001} \end{vmatrix},$$

et il suffit d'appliquer la règle de multiplication pour obtenir le résultat.

$$\mathcal{J} = \sum_{i+j+k=1} \sum_{l_1+l_2=0,2} B_{l_1+l_2}^2(t) B_{ijk}^1(u, v, w) \frac{C_{l_1}^1 C_{l_2}^1}{C_{l_1+l_2}^2} \left| \Delta_{100l_1}^{0100} \quad \Delta_{100l_2}^{0010} \quad \Delta_{ijk0}^{0001} \right|$$

et, au final

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k=1} \sum_{l_1+l_2=0,2} B_{l_1+l_2}^2(t) B_{ijk}^1(u, v, w) N_{ijkL},$$

avec $L = l_1 + l_2$ et, ainsi, les coefficients de contrôle sont :

$$N_{IJKL} = \sum_{l_1+l_2=L} \frac{C_{l_1}^1 C_{l_2}^1}{C_{l_1+l_2}^2} \left| \Delta_{100l_1}^{0100} \quad \Delta_{100l_2}^{0010} \quad \Delta_{IJK0}^{0001} \right|, \quad (26)$$

en notant que $C_{l_1}^1 C_{l_2}^1 = 1$. Le degré du polynôme est donc de 2 dans la direction t et 1 dans le plan, le nombre de coefficients est 9. Ce qui donne, *in extenso* :

$$\begin{aligned} N_{1000} &= \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right| \\ N_{0100} &= \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| \\ N_{0010} &= \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_6} \right| \\ N_{1001} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_5} \quad \overrightarrow{A_1 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_4 A_6} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right| \\ N_{0101} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_5} \quad \overrightarrow{A_1 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_4 A_6} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| \\ N_{0011} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_5} \quad \overrightarrow{A_1 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_6} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_4 A_6} \quad \overrightarrow{A_3 A_6} \right| \\ N_{1002} &= \left| \overrightarrow{A_4 A_5} \quad \overrightarrow{A_4 A_6} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right| \\ N_{0102} &= \left| \overrightarrow{A_4 A_5} \quad \overrightarrow{A_4 A_6} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| \\ N_{0012} &= \left| \overrightarrow{A_4 A_5} \quad \overrightarrow{A_4 A_6} \quad \overrightarrow{A_3 A_6} \right| \end{aligned}$$

et, par permutation pour les "coins" afin de trouver une écriture identique pour ces 6 coefficients avec le sommet en tête, on a :

$$\begin{aligned} N_{1000} &= \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right| \\ N_{0100} &= \left| \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_1} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| \\ N_{0010} &= \left| \overrightarrow{A_3 A_1} \quad \overrightarrow{A_3 A_2} \quad \overrightarrow{A_3 A_6} \right| \\ N_{1002} &= \left| \overrightarrow{A_4 A_5} \quad \overrightarrow{A_4 A_6} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right| \\ N_{0102} &= \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_5 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| \\ N_{0012} &= \left| \overrightarrow{A_6 A_4} \quad \overrightarrow{A_6 A_5} \quad \overrightarrow{A_3 A_6} \right| \end{aligned}$$

c'est-à-dire une simple permutation sur le triangle de la face du "bas" pour construire deux vecteurs, le troisième étant l'arête issue du sommet et "normale" au plan pour les trois premiers et la même construction sur le triangle de la face du "haut". Pour les trois derniers coefficients liés aux arêtes joignant les deux triangles, la construction fait intervenir l'arête porteuse et les deux arêtes incidentes croisées (donc deux termes). Par simple réécriture on trouve en effet que ces trois coefficients se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} N_{1001} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_5} \quad \overrightarrow{A_1 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_4 A_6} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right| \\ N_{0101} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_2 A_1} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_5 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| \\ N_{0011} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_6 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_2} \quad \overrightarrow{A_3 A_6} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_3 A_1} \quad \overrightarrow{A_6 A_5} \quad \overrightarrow{A_3 A_6} \right| \end{aligned}$$

où l'on a mis en évidence la construction par simple permutation des indices.

Faces quadrilatérales planes. Dans le cas où les faces quadrilatérales sont planes, on peut affiner la décision. On regarde les coefficients N_{1001} , N_{0101} et N_{0011} .

On a $N_{1001} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_5} \quad \overrightarrow{A_1 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_4 A_6} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right|$. On suppose que la face $[A_1 A_2 A_5 A_4]$ est plane, par conséquent on peut écrire

$$\overrightarrow{A_4 A_5} = a \overrightarrow{A_1 A_2} + b \overrightarrow{A_1 A_4}$$

avec a et b deux coefficients, alors

$$\left| \overrightarrow{A_4 A_5} \quad \overrightarrow{A_1 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right| = \left| a \overrightarrow{A_1 A_2} + b \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_1 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \right|$$

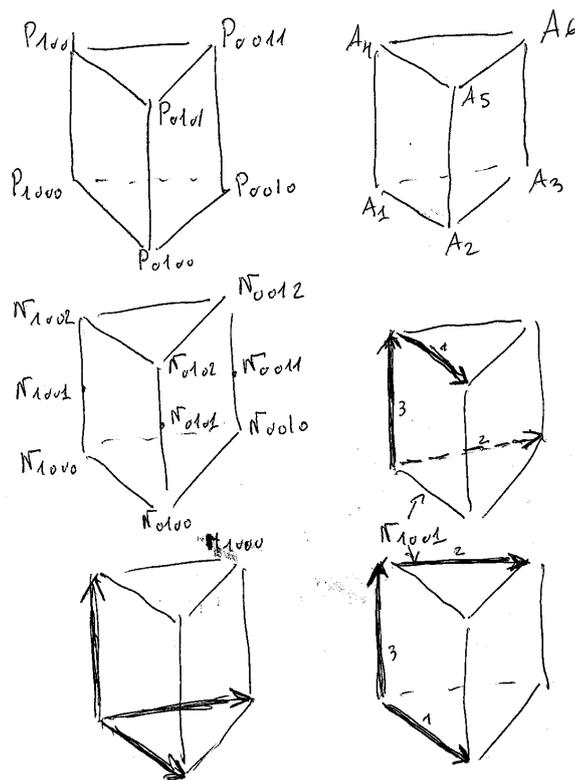


FIG. 18 – Correspondance entre les numérotations Bézier et élément fini pour les nœuds et les points de contrôle, numérotation logique des coefficients de contrôle et exemple d'un coefficient de chaque type, un terme pour un coefficient attaché à un sommet (ici N_{1000}) et deux termes pour un coefficient attaché à une arête verticale (ici N_{1001}).

soit encore

$$|a\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| = a|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| = aN_{1000},$$

de la même façon, on montre que le second terme a la même propriétés et que les deux autres coefficients ont aussi cette propriété. Par suite, les trois coefficients qui nous intéressent sont des combinaisons linéaires des jacobiens "coins". Comme ceux-ci sont supposés strictement positifs, le facteur a (et les autres) sont eux aussi positifs. Le résultat est alors le suivant, plus simple que le résultat général : **un pentaèdre de degré 1 dont les faces quadrilatérales sont planes est valide si et seulement si ses 6 jacobiens "coins" sont strictement positifs.**

Remarquons également que cela signifie que les faces quadrilatérales sont convexes.

Au lieu d'avoir une condition suffisante utilisant les 9 coefficients, on a une condition nécessaire et suffisante portant sur les seuls 6 coefficients associés aux sommets.

Faces quadrilatérales quelconques. Pour le cas général (faces non planes), on suivra le résultat général discuté plus bas.

5.1.7 L'hexaèdre de degré 1 à 8 nœuds

On cherche le jacobien de F_K , à savoir :

$$\mathcal{J} = \left| \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} \quad \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} \quad \frac{\partial F_K}{\partial \hat{z}} \right|$$

et on connaît θ défini par :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) B_k^1(w) P_{ijk}.$$

Comme les P_{ijk} ne sont autres que les sommets A_i de l'écriture élément fini, on a simplement $\theta(u, v, w) \equiv F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. De fait¹⁸, on a $u = \hat{x}$, $v = \hat{y}$ et $w = \hat{z}$ et, par suite :

$$\left| \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} \quad \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} \quad \frac{\partial F_K}{\partial \hat{z}} \right| = \left| \frac{\partial \theta}{\partial u} \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} \quad \frac{\partial \theta}{\partial w} \right|.$$

Par la règle de dérivation, on a :

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial u} = \sum_{i=0} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B_i^0(u) B_j^1(v) B_k^1(w) \Delta_{ijk}^{100} \text{ avec } \Delta_{ijk}^{100} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i+1,jk}},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial v} = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0} \sum_{k=0,1} B_i^1(u) B_j^0(v) B_k^1(w) \Delta_{ijk}^{010} \text{ avec } \Delta_{ijk}^{010} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{ij,k+1}},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial w} = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0} B_i^1(u) B_j^1(v) B_k^0(w) \Delta_{ijk}^{001} \text{ avec } \Delta_{ijk}^{001} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{ij,k+1}},$$

Ces expressions génériques se simplifient et on trouve :

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial u} = \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B_j^1(v) B_k^1(w) \Delta_{0jk}^{100},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial v} = \sum_{i=0,1} \sum_{k=0,1} B_i^1(u) B_k^1(w) \Delta_{i0k}^{010},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial w} = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \Delta_{ij0}^{001}.$$

Par suite, le jacobien vaut :

$$\left| \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B_j^1(v) B_k^1(w) \Delta_{0jk}^{100} \quad \sum_{i=0,1} \sum_{k=0,1} B_i^1(u) B_k^1(w) \Delta_{i0k}^{010} \quad \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \Delta_{ij0}^{001} \right|,$$

soit encore

$$\sum_{j_1=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{i_3=0}^1 \sum_{j_3=0}^1 B_{j_2}^1(v) B_{k_1}^1(w) B_{i_2}^1(u) B_{k_2}^1(w) B_{i_3}^1(u) B_{j_3}^1(v) \left| \Delta_{0j_2k_1}^{100} \quad \Delta_{i_20k_2}^{010} \quad \Delta_{i_3j_30}^{001} \right|,$$

et il suffit d'appliquer la règle de multiplication pour obtenir le résultat.

$$\mathcal{J} = \sum_{i_2+i_3=0}^2 \sum_{j_1+j_3=0}^2 \sum_{k_1+k_2=0}^2 B_{i_2+i_3}^2(u) B_{j_1+j_3}^2(v) B_{k_1+k_2}^2(w) \frac{C_{i_2}^1 C_{i_3}^1}{C_{i_2+i_3}^2} \frac{C_{j_1}^1 C_{j_3}^1}{C_{j_1+j_3}^2} \frac{C_{k_1}^1 C_{k_2}^1}{C_{k_1+k_2}^2} \left| \Delta_{0j_1k_1}^{100} \quad \Delta_{i_20k_2}^{010} \quad \Delta_{i_3j_30}^{001} \right|$$

$$\text{et au final } \mathcal{J}(u, v, w) = \sum_{I=0}^2 \sum_{J=0}^2 \sum_{K=0}^2 B_I^2(u) B_J^2(v) B_K^2(w) N_{IJK},$$

où, en notant que les produits des C^1 se simplifient, les coefficients de contrôle sont :

$$N_{IJK} = \sum_{i_2+i_3=I} \sum_{j_1+j_3=J} \sum_{k_1+k_2=K} \frac{1}{C_I^2 C_J^2 C_K^2} \left| \Delta_{0j_1k_1}^{100} \quad \Delta_{i_20k_2}^{010} \quad \Delta_{i_3j_30}^{001} \right|, \quad (27)$$

¹⁸sous réserve de choisir la même plage de variation.

Le degré du polynôme est de 2 dans chaque direction, il y a 27 coefficients :

$$\begin{aligned}
N_{000} &= \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| \\
N_{100} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
N_{200} &= \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
N_{210} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
N_{220} &= \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
N_{120} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
N_{020} &= \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| \\
N_{010} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| \\
N_{110} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
&+ \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
N_{001} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| \\
N_{101} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
&+ \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
N_{201} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
N_{211} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
&+ \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
N_{221} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
N_{121} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
&+ \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
N_{021} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| \\
N_{011} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| \\
&+ \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| \\
N_{111} &= \frac{1}{8} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{8} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| \\
&+ \frac{1}{8} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| + \frac{1}{8} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
&+ \frac{1}{8} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| + \frac{1}{8} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
&+ \frac{1}{8} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{8} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| \\
N_{002} &= \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| \\
N_{102} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
N_{202} &= \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
N_{212} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
N_{222} &= \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
N_{122} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
N_{022} &= \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| \\
N_{012} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| \\
N_{112} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| \\
&+ \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right|
\end{aligned}$$

et, par permutation pour les "coins" afin de trouver une écriture identique pour ces 8 coefficients avec le sommet en tête, on a :

$$\begin{aligned}
N_{000} &= \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| \\
N_{200} &= \left| \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_1} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
N_{220} &= \left| \overrightarrow{A_3 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_2} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
N_{020} &= \left| \overrightarrow{A_4 A_1} \quad \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| \\
N_{002} &= \left| \overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| \\
N_{202} &= \left| \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_6 A_5} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
N_{222} &= \left| \overrightarrow{A_7 A_8} \quad \overrightarrow{A_7 A_6} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
N_{022} &= \left| \overrightarrow{A_8 A_5} \quad \overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right|
\end{aligned}$$

et on reconnaît le tétraèdre coin du sommet considéré. Les 4 premiers s'écrivent mécaniquement [sommet – suivant, sommet – précédent, sommet – "dessus"], les 4 derniers s'écrivent [sommet – suivant, sommet – précédent, "dessous" – sommet].

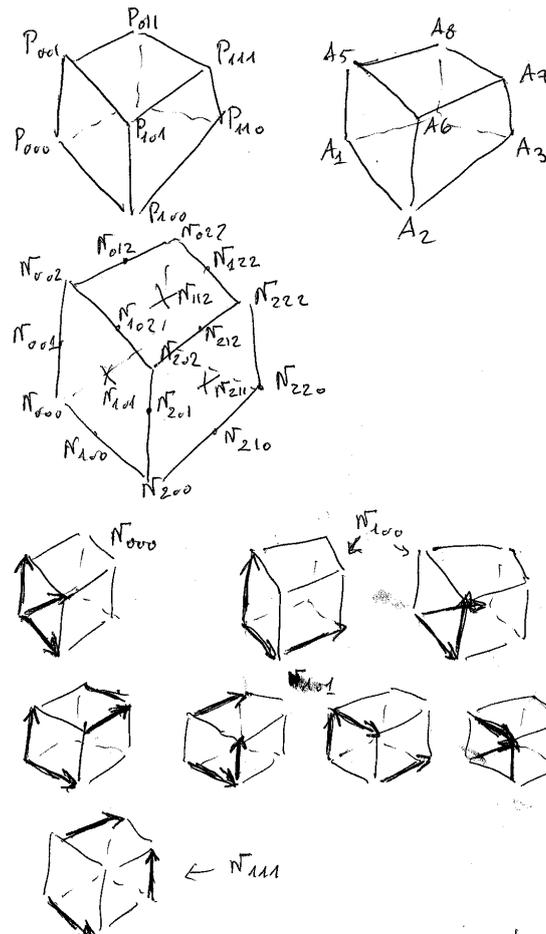


FIG. 19 – Correspondance entre les numérotations Bézier et élément fini pour les nœuds et les points de contrôle, numérotation logique des coefficients de contrôle et exemple d'un coefficient de chaque type, un terme pour un coefficient attaché à un sommet (ici N_{000}), deux termes pour un coefficient attaché à une arête verticale (ici N_{100}), quatre termes pour un coefficient attaché à une face (ici N_{101}) et huit termes pour le contrôle central (N_{111}) dont un seul est montré.

Les autres coefficients sont de trois types, ceux associés aux arêtes avec 2 termes, ceux liés aux faces avec 4 termes et le coefficient central avec 8 termes. De la même façon on peut voir une très grande similitude entre les coefficients d'un type donné. Ainsi, pour prendre un exemple d'arête, on a :

$$\begin{aligned} N_{100} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| + \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}| \\ N_{210} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}| + \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_7}| \end{aligned}$$

qui s'écrit comme :

$$\begin{aligned} N_{100} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| + \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}| \\ N_{210} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}| + \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_7}| \end{aligned}$$

c'est-à-dire, encore ici, une écriture totalement mécanique comme [*arete – arete suivante – extremite non commune + "dessus"*] et [*arete precedente – arete – extremite non commune + "dessus"*].

L'exemple d'un coefficient de face, soit :

$$\begin{aligned} N_{110} &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_8}| + \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}| \\ &+ \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| + \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_7}| \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} N_{110} &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_8}| + \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_3 A_4} \quad \overrightarrow{A_4 A_1} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}| \\ &+ \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_4} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| + \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_4 A_1} \quad \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_3 A_7}| \end{aligned}$$

montre que les termes ont tous la même forme, à savoir [*arete – arete suivante – sommet oppose + "dessus"*].

Enfin, le coefficient "central" a une forme bien régulière. Ses termes sont tous de la forme [*arete – arete disjointe – arete disjointe*] avec chaque arête dans un plan (logique) différent.

Faces planes. Dans le cas où les faces sont planes, on peut affiner la décision. Pour ce faire, on va regarder un coefficient d'arête, un coefficient de face et le coefficient central.

On examine le coefficient N_{100} , à savoir

$$N_{100} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| + \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}|,$$

comme, ici, la face $[A_1 A_2 A_3 A_4]$ est plane, on peut écrire

$$\overrightarrow{A_2 A_3} = a \overrightarrow{A_1 A_2} + b \overrightarrow{A_1 A_4}$$

avec a et b des coefficients adéquats. De même, en considérant l'autre face plane incidente, on a

$$\overrightarrow{A_1 A_4} = c \overrightarrow{A_1 A_2} + d \overrightarrow{A_2 A_3},$$

et, en remplaçant, on a :

$$N_{100} = \frac{b}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| + \frac{d}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}| = \frac{b}{2} N_{000} + \frac{d}{2} N_{200},$$

comme b et d sont nécessairement positifs (pour être valide, a minima, les jacobiens coins sont strictement positifs), alors N_{100} est positif, autrement dit, il n'apporte rien de plus dans le contrôle.

On examine maintenant le coefficient N_{101} , à savoir

$$N_{101} = \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| + \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}|$$

$$+ \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| + \frac{1}{4} |\overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}|,$$

le raisonnement est le même, on exprime judicieusement la coplanéité des faces pour obtenir un résultat analogue. En effet, par exemple pour le premier terme, on écrit

$$\overrightarrow{A_6 A_7} = a \overrightarrow{A_5 A_6} + b \overrightarrow{A_5 A_8},$$

alors

$$|\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| = b |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}|,$$

puis on exprime

$$\overrightarrow{A_5 A_8} = c \overrightarrow{A_1 A_5} + d \overrightarrow{A_1 A_4},$$

d'où

$$|\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| = bd |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| = bd N_{000},$$

la conclusion est inchangée, ce terme n'apporte pas plus que N_{000} , comme b et d sont positifs pour la même raison que ci-dessus. Il en va de même pour les trois autres termes de ce coefficient. Par suite, N_{101} est positif, autrement dit, il n'apporte rien de plus dans le contrôle.

On examine maintenant le coefficient N_{111} , à savoir

$$\begin{aligned} N_{111} = & \frac{1}{8} |\overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| + \frac{1}{8} |\overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_5}| + \frac{1}{8} |\overrightarrow{A_8 A_7} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}| \\ & + \frac{1}{8} |\overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_2 A_6}| + \frac{1}{8} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_5 A_8} \quad \overrightarrow{A_3 A_7}| + \frac{1}{8} |\overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_7}| \\ & + \frac{1}{8} |\overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_6 A_7} \quad \overrightarrow{A_4 A_8}| + \frac{1}{8} |\overrightarrow{A_5 A_6} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_8}| \end{aligned}$$

et on regarde si on a la même propriété (dès lors que les coins sont positifs, le terme ne contribue pas). Nous n'avons pas trouver de résultat sur ce point donc on ne sait pas conclure comme pour le pentaèdre à faces (quadrilatérales) planes.

Faces quelconques. Pour le cas général (faces non planes), on suivra, *a fortiori*, le résultat général discuté plus bas.

5.1.8 Le tétraèdre de degré 2 à 10 nœuds

La discussion est identique à celle faite pour le triangle de degré 2 à 6 nœuds où l'on avait :

$$\sigma(u, v, w) = \sum_{i+j+k=2} B_{i,j,k}^2(u, v, w) P_{ijk}$$

$$\mathcal{J} = \sum_{I+J+K=2} B_{IJK}^2(u, v, w) N_{IJK},$$

avec

$$N_{IJK} = 4 \sum_{i_1+j_1+k_1=1, i_2+j_2+k_2=1} \frac{C_{i_1 j_1 k_1}^1 C_{i_2 j_2 k_2}^1}{C_{i_1+i_2, j_1+j_2, k_1+k_2}^2} |\Delta_{i_1+1, j_1 k_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2}^{010}|,$$

et

$$\Delta_{ijk}^{100} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i-1, j+1, k}} \quad \text{et} \quad \Delta_{ijk}^{010} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i-1, j, k+1}}.$$

Il est donc immédiat de passer au tétraèdre en généralisant ces résultats. Ainsi, on a successivement :

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=2} B_{i,j,k,l}^2(u, v, w, t) P_{ijkl}$$

$$\mathcal{J} = \sum_{I+J+K+L=3} B_{IJKL}^3(u, v, w, t) N_{IJKL},$$

$$N_{IJKL} = 8 \sum_{i_1+j_1+k_1+l_1=1, i_2+j_2+k_2+l_2=1, i_3+j_3+k_3+l_3=1} \frac{C_{i_1 j_1 k_1 l_1}^1 C_{i_2 j_2 k_2 l_2}^1 C_{i_3 j_3 k_3 l_3}^1}{C_{i_1+i_2+i_3, j_1+j_2+j_3, k_1+k_2+k_3, l_1+l_2+l_3}^3} \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1 l_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2 l_2}^{010} \quad \Delta_{i_3+1, j_3 k_3 l_3}^{001} \right|, \quad (28)$$

avec les C_{\dots}^1 à 1 et les Δ définis par

$$\Delta_{ijkl}^{100} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{i-1, j+1, kl}} \quad \text{et} \quad \Delta_{ijkl}^{010} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{i-1, j, k+1, l}} \quad \text{et} \quad \Delta_{ijkl}^{001} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{i-1, j, k, l+1}}.$$

Le degré du polynôme jacobien est donc 3, le nombre de coefficients de contrôle est 20. Ce qui donne, *in extenso* :

$$\begin{aligned} N_{3000} &= 8 \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| \\ N_{2100} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| \\ N_{1200} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| \\ N_{0300} &= 8 \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| \\ N_{0210} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| \\ N_{0120} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| \\ N_{0030} &= 8 \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| \\ N_{1020} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| \\ N_{2010} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| \\ N_{2001} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| \\ N_{1002} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| \\ N_{0201} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_8 C_4} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| \\ N_{0102} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| \\ N_{0021} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_8 C_4} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| \\ N_{0012} &= \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| + \frac{8}{3} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_7 C_3} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| \\ N_{0003} &= 8 \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| \\ N_{0111} &= \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_8 C_4} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| \\ &+ \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_7 C_3} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| \\ N_{1011} &= \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_8 C_4} \right| \\ &+ \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_7 C_3} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| \\ N_{1101} &= \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_8 A_4} \right| \\ &+ \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_8 C_{10}} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| \\ N_{1110} &= \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_7 C_{10}} \right| \\ &+ \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_5 C_9} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_7 C_6} \quad \overrightarrow{C_5 C_6} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} \right| \end{aligned}$$

Les coefficients sont de trois types, ceux associés aux sommets, ceux associés aux arêtes et ceux liés aux faces.

- Un coefficient (un terme) associé à chaque sommet.

C'est un jeu d'écriture de voir que les coefficients associés aux sommets mesurent le volume (à un facteur près) du tétraèdre dont les sommets sont le sommet considéré et les trois points de contrôle adjacents.

- Deux coefficients (3 termes) associé à chaque arête.

Ainsi, pour prendre un exemple d'arête, on retrouve le cas d'un triangle de degré 2 avec la contribution de chaque face incidente pour la première partie de l'arête plus un terme appuyé sur la seconde partie et un triangle non adjacent, l'autre coefficient ayant une forme symétrique (voir N_{2100} et N_{1200} , N_{2100} se construit facilement à partir de N_{3000} , on triplique et on remplace, tour à tour, l'un des vecteurs par son homologue tandis que N_{1200} est symétrique de N_{2100} , on permute les rôles des deux sous-arêtes et on prend, pour les autres vecteurs, les vecteurs alternatifs possibles).

- Un coefficient (6 termes) associé à chaque face.

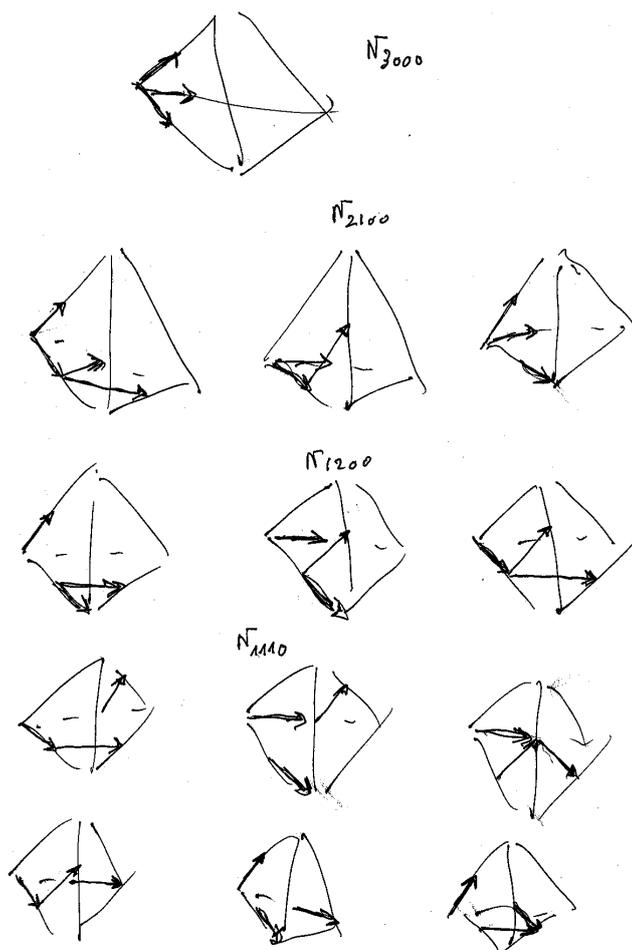


FIG. 21 – Un exemple d'un coefficient de chaque type, un terme pour un coefficient attaché à un sommet (ici N_{3000}), trois termes pour chacun des deux coefficients attachés à une arête (ici N_{2100} et N_{1200}) et six termes pour un coefficient attaché à une face (N_{1110}).

tétraèdre de degré 3 permet, par instanciation, de retrouver les 20 coefficients N_{ijkl} . La méthode est la suivante :

- on définit les nœuds d'évaluation du tétraèdre de référence de degré 3, notés \hat{B}_I , avec $\hat{B}_i = \hat{A}_i$ pour $i = 1, 4$ et \hat{B}_5 et \hat{B}_6 les nœuds de l'arête $\hat{A}_1\hat{A}_2$, calculés via la transformation de degré 2, etc.,
- on fixe $w = t = 0$ et on instancie u à $\frac{2}{3}$ puis à $\frac{1}{3}$ avec $v = 1 - u$ pour trouver les 2 N_{ij00} pour $i + j = 3$. On obtient en effet un système de deux équations en ces deux inconnues :

$$\begin{cases} \mathcal{J}(\hat{B}_5) = \frac{8N_{3000} + 12N_{2100} + 6N_{1200} + N_{0300}}{27} \\ \mathcal{J}(\hat{B}_6) = \frac{N_{3000} + 6N_{2100} + 12N_{1200} + 8N_{0300}}{27} \end{cases} .$$

On trouve donc comme solution :

$$N_{2100} = \frac{-5\mathcal{J}(\hat{B}_1) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_5) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_6) + 2\mathcal{J}(\hat{B}_2)}{6},$$

$$N_{1200} = \frac{2\mathcal{J}(\hat{B}_1) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_5) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_6) - 5\mathcal{J}(\hat{B}_2)}{6},$$

avec \hat{A}_5 et \hat{A}_6 les nœuds de coordonnées $(1 - u, 0, 0)$ dans le système $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ où l'on devine les nœuds de la première arête du tétraèdre de degré 3 de mêmes sommets que notre élément de degré 2.

- on répète la même démarche pour les 5 autres arêtes qui sont définies de façon identique, c'est-à-dire avec deux coordonnées nulles parmi le quadruplet (u, v, w, t) .

De la sorte on connaît 16 (les 4 "coins" et les 12 obtenus ci-dessus) des 20 coefficients cherchés. Pour calculer les 4 manquants, on instancie, en $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, les nœuds de calcul de coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ puis $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$ et $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et enfin $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, où l'on devine les nœuds des faces du tétraèdre P3. Ceci donne un système de 4 équations à une seule inconnue (les N_{ijkl} autres que ces quatre étant maintenant connus), permettant ainsi de trouver ces inconnues. Par exemple, la première équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) &= \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{E}} B_{i,j,k,l}^3(u, v, w, t) N_{i,j,k,l} \\ &+ B_{1,1,1,0}^3(u, v, w, 0) N_{1,1,1,0} + B_{1,1,0,1}^3(u, v, 0, t) N_{1,1,0,1} \\ &+ B_{1,0,1,1}^3(u, 0, w, t) N_{1,0,1,1} + B_{0,1,1,1}^3(0, v, w, t) N_{0,1,1,1}, \end{aligned}$$

avec pour \mathcal{E} , l'ensemble des indices tels que $i + j + k + l = 3$ avec 2 ou 3 indices nuls. Mais, comme $t = 0$, cette expression se résume à :

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{E}} B_{i,j,k,l}^3(u, v, w, 0) N_{i,j,k,l} + 6uvwN_{1110},$$

soit, puisque $u = v = w = \frac{1}{3}$,

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{E}} B_{i,j,k,l}^3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) N_{i,j,k,l} + \frac{2N_{1110}}{9},$$

donc, on obtient finalement :

$$N_{1110} = \frac{9}{2} \left(\mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) - \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{E}} B_{i,j,k,l}^3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) N_{i,j,k,l} \right),$$

en fait, \mathcal{E} se réduit aux seuls indices correspondants aux coefficients de contrôle associés à la face $t = 0$, à savoir ceux associés aux 3 sommets et aux 6 nœuds d'arête de cette face¹⁹, N_{1110} est donc calculé via une combinaison linéaire comprenant dix termes. Cela donne, *in extenso*, la formule suivante :

$$N_{1110} = \frac{9}{2} \left\{ \mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) - \frac{N_{3000} + N_{0300} + N_{0030}}{27} - \frac{3(N_{2100} + N_{1200} + N_{0210} + N_{0120} + N_{1020} + N_{2010})}{27} \right\},$$

formule que l'on peut exprimer uniquement en fonction des $\mathcal{J}(\hat{B}_i)$ pour $i = 1, 10$, sauf, évidemment $i = 4$ (le nœud opposé à cette face), ces nœuds étant ceux du tétraèdre de référence de degré 3. On remplace maintenant les N_{ijkl} par leurs valeurs en fonction des $\mathcal{J}(\hat{B}_i)$ et, tout calcul fait, on trouve :

$$N_{1110} = \frac{9}{2} \left\{ \mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \frac{2(\mathcal{J}(\hat{B}_1) + \mathcal{J}(\hat{B}_2) + \mathcal{J}(\hat{B}_3))}{27} - \frac{\mathcal{J}(\hat{B}_5) + \mathcal{J}(\hat{B}_6) + \mathcal{J}(\hat{B}_7) + \mathcal{J}(\hat{B}_8) + \mathcal{J}(\hat{B}_9) + \mathcal{J}(\hat{B}_{10})}{6} \right\}.$$

On a évidemment des relations analogues pour les 3 derniers N_{ijkl} .

Cette formulation du jacobien et de ses coefficients de contrôle permet d'écrire une condition suffisante de positivité, voir plus bas.

5.1.9 Le pentaèdre de degré 2 à 18 nœuds

On cherche le jacobien de F_K , à savoir :

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{z}} \end{vmatrix}$$

et on connaît θ défini par :

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k=2} \sum_{l=0,2} B_{i,j,k}^2(u, v, w) B_l^2(t) P_{ijkl}.$$

Comme on a $u = 1 - \hat{x} - \hat{y}$, $v = \hat{x}$, $w = \hat{y}$ et $t = \hat{z}$ alors :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial v} & \frac{\partial \theta}{\partial w} & \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Par la règle de dérivation, on a :

$$\frac{\partial \theta(u, v, w, t)}{\partial v} = 2 \sum_{i+j+k=1} \sum_{l=0,2} B_{ijk}^1(u, v, w) B_l^2(t) \Delta_{i+1,jkl}^{100} \text{ avec } \Delta_{ijkl}^{100} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{i-1,j+1,kl}},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w, t)}{\partial w} = 2 \sum_{i+j+k=1} \sum_{l=0,2} B_{ijk}^1(u, v, w) B_l^2(t) \Delta_{i+1,jkl}^{010} \text{ avec } \Delta_{ijkl}^{010} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{i-1,j,k+1,l}},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w, t)}{\partial t} = 2 \sum_{i+j+k=2} \sum_{l=0,1} B_{ijk}^2(u, v, w) B_l^1(t) \Delta_{ijkl}^{001} \text{ avec } \Delta_{ijkl}^{001} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{ijk,l+1}}.$$

¹⁹Il est facile de vérifier que $1 - \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{E}} B_{i,j,k,l}^3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \frac{2}{9}$, ce qui est rassurant.

Par suite, le jacobien vaut, au facteur 8 près :

$$\left| \sum_{i+j+k=1} \sum_{l=0,2} B_{ijk}^1(u, v, w) B_l^2(t) \Delta_{i+1,jkl}^{100} \quad \sum_{i+j+k=1} \sum_{l=0,2} B_{ijk}^1(u, v, w) B_l^2(t) \Delta_{i+1,jkl}^{010} \quad \sum_{i+j+k=2} \sum_{l=0,1} B_{ijk}^2(u, v, w) B_l^1(t) \Delta_{ijk}^{001} \right|$$

soit encore

$$\sum_{i_1+j_1+k_1=1} \sum_{l_1=0,2} \sum_{i_2+j_2+k_2=1} \sum_{l_2=0,2} \sum_{i_3+j_3+k_3=2} \sum_{l_3=0,1} B_{i_1j_1k_1}^1(u, v, w) B_{l_1}^2(t) B_{i_2j_2k_2}^1(u, v, w) B_{l_2}^2(t) B_{i_3j_3k_3}^2(u, v, w) B_{l_3}^1(t) \left| \Delta_{i_1+1,j_1k_1l_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1,j_2k_2l_2}^{010} \quad \Delta_{i_3j_3k_3l_3}^{001} \right|,$$

et il suffit d'appliquer la règle de multiplication pour obtenir le résultat. On trouve alors

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \sum_{I+J+K=4} \sum_{L=0,5} B_{IJK}^4(u, v, w) B_L^5(t) N_{IJKL},$$

avec

$$N_{IJKL} = 8 \sum_{i_1+i_2+i_3=I, j_1+j_2+j_3=J, k_1+k_2+k_3=K} \sum_{l_1+l_2+l_3=L} \frac{C_{l_1}^2 C_{l_2}^2 C_{l_3}^1}{C_L^5} \frac{C_{i_1j_1k_1}^1 C_{i_2j_2k_2}^1 C_{i_3j_3k_3}^2}{C_{I,J,K}^4} \left| \Delta_{i_1+1,j_1k_1l_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1,j_2k_2l_2}^{010} \quad \Delta_{i_3j_3k_3l_3}^{001} \right|.$$

qui se simplifie en

$$N_{IJKL} = 8 \sum_{i_1+i_2+i_3=I, j_1+j_2+j_3=J, k_1+k_2+k_3=K} \sum_{l_1+l_2+l_3=L} \frac{C_{l_1}^2 C_{l_2}^2 C_{i_3j_3k_3}^2}{C_L^5 C_{I,J,K}^4} \left| \Delta_{i_1+1,j_1k_1l_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1,j_2k_2l_2}^{010} \quad \Delta_{i_3j_3k_3l_3}^{001} \right|. \quad (29)$$

Le degré du polynôme jacobien est 4×5 , le nombre de coefficients de contrôle est 90.

On va essayer de donner un exemple de chaque type de coefficient, les autres s'en déduisant en principe facilement.

- Un coefficient (un terme) associé à chaque sommet.

Prenons le cas de N_{4000} . On a ici $i_1 = i_2 = 1, i_3 = 2$ et tous les autres indices sont nuls. Par suite, le coefficient n'a qu'un seul terme, les C valent tous 1, et il reste

$$N_{4000} = 8 \left| \Delta_{2000}^{100} \quad \Delta_{2000}^{010} \quad \Delta_{2000}^{001} \right|,$$

soit, en fonction des A_i et des C_i :

$$N_{4000} = 8 \left| \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}} \right|$$

qui est le résultat habituel, le coefficient est, à un facteur près, le volume du tétraèdre de sommets le sommet et les trois points de contrôle adjacents. Les autres coefficients coins ont la même forme.

Dans ce qui suit, les coefficients sont calculés au facteur 8 près.

- Trois ou quatre coefficients (avec 3, 4 ou 5 termes) associés à chaque arête.

On va regarder N_{3100}, N_{2200} et N_{1300} pour une arête incidente à une face triangulaire et $N_{4001}, N_{4002}, N_{4003}$ et N_{4004} pour une arête incidente à deux faces quadrilatérales, ceci au facteur 8 près.

- Pour N_{3100} on a trois combinaisons d'indices, $[(1000), (1000), (1100)], [(1000), (0100), (2000)]$ et $[0100), (1000), (2000)]$, d'où la solution :

$$N_{3100} = \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_7 C_8} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_7 C_{16}} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{C_7 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}} \right|.$$

– Pour N_{4003} on a les combinaisons symétriques de celles de N_{4002} , d'où la solution :

$$N_{4003} = \frac{2}{10} |\overrightarrow{A_4 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_{13} C_{18}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{2}{10} |\overrightarrow{C_{13} C_{16}} \quad \overrightarrow{A_4 C_{12}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| \\ + \frac{4}{10} |\overrightarrow{C_{13} C_{16}} \quad \overrightarrow{C_{13} C_{18}} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}| + \frac{1}{10} |\overrightarrow{A_4 C_{10}} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}| + \frac{1}{10} |\overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_4 C_{12}} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}|.$$

– Pour N_{4004} on a les combinaisons symétriques de celles de N_{4001} , d'où la solution :

$$N_{4004} = \frac{2}{5} |\overrightarrow{A_4 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_{13} C_{18}} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}| + \frac{1}{5} |\overrightarrow{A_4 C_{10}} \quad \overrightarrow{A_4 C_{12}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{2}{5} |\overrightarrow{C_{13} C_{16}} \quad \overrightarrow{A_4 C_{12}} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}|.$$

• Trois ou seize coefficients associés à chaque face.

On va regarder N_{2115} , l'un des coefficients d'une face triangulaire et N_{3101} , l'un des coefficients d'une face quadrilatérale.

– Pour N_{2115} on a les combinaisons suivantes : $[(1002), (0102), (1011)], [(0102), (1002), (1011)], [(1002), (0012), (1101)], [(0012), (1002), (1101)], [(1002), (1002), (0111)]$, soit 5 termes, à savoir :

$$N_{2115} = \frac{2}{12} |\overrightarrow{A_4 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_{10} C_{11}} \quad \overrightarrow{C_{18} C_{12}}| + \frac{2}{12} |\overrightarrow{C_{10} A_5} \quad \overrightarrow{A_4 C_{12}} \quad \overrightarrow{C_{18} C_{12}}| \\ + \frac{2}{12} |\overrightarrow{A_4 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_{12} A_6} \quad \overrightarrow{C_{16} C_{10}}| + \frac{2}{12} |\overrightarrow{C_{12} C_{11}} \quad \overrightarrow{A_4 C_{12}} \quad \overrightarrow{C_{16} C_{10}}| + \frac{4}{12} |\overrightarrow{A_4 C_{10}} \quad \overrightarrow{A_4 C_{12}} \quad \overrightarrow{C_{17} C_{11}}|.$$

Les autres coefficients de faces triangulaires ont le même nombre de termes et s'obtiennent par permutation.

– Pour N_{3101} on a les combinaisons suivantes, $[(0100), (1001), (2000)], [(0101), (1000), (2000)], [(1000), (0101), (2000)], [(1001), (0100), (2000)], [(1000), (1000), (1101)], [(1000), (1001), (1100)], [(1001), (1000), (1100)], [(0100), (1000), (2001)], [(1000), (0100), (2001)]$ soit 9 termes, à savoir :

$$N_{3101} = \frac{2}{20} |\overrightarrow{C_7 A_2} \quad \overrightarrow{C_{13} C_{18}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{2}{20} |\overrightarrow{C_{16} C_{14}} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{2}{20} |\overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_{16} C_{17}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| \\ + \frac{2}{20} |\overrightarrow{C_{13} C_{16}} \quad \overrightarrow{C_7 C_8} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{2}{20} |\overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_{16} C_{10}}| + \frac{1}{20} |\overrightarrow{C_7 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}| \\ + \frac{1}{20} |\overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}| + \frac{4}{20} |\overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_{13} C_{18}} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}| + \frac{4}{20} |\overrightarrow{C_{13} C_{16}} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}|.$$

Les autres coefficients de faces quadrilatérales sont différents selon leur position dans la face ou sont identiques et s'obtiennent par permutation, la question se pose (!).

• Douze coefficients internes.

On aimerait regarder N_{2111} , l'un des douze coefficients internes. L'énumération des combinaisons valides est impossible à obtenir à la main, seul un programme peut donner la solution, c'est-à-dire les quadruplets et leur nombre.

Construction des N_{IJKL} . Pour obtenir les coefficients, il suffit de trouver, pour chaque quadruplet $(IJKL)$, toutes les combinaisons possibles des quadruplets $(i_1 j_1 k_1 l_1)$, $(i_2 j_2 k_2 l_2)$ et $(i_3 j_3 k_3 l_3)$. L'algorithme suivant donne le résultat :

Nature des termes des N_{IJKL} . Un examen attentif des termes des coefficients montrent qu'ils ne sont autres que toutes les combinaisons possibles de trois vecteurs, chacun dans une direction. On en déduit le nombre total de termes, $9 \times 9 \times 12$, soit 972 termes.

Cette formulation du jacobien et de ses coefficients de contrôle permet d'écrire une condition suffisante de positivité, voir plus bas. Néanmoins, de manière pratique, il est impossible (ou fastidieux) d'exprimer à la main tous ces coefficients et il va falloir trouver un moyen réaliste d'y parvenir via un programme ou une méthode alternative.

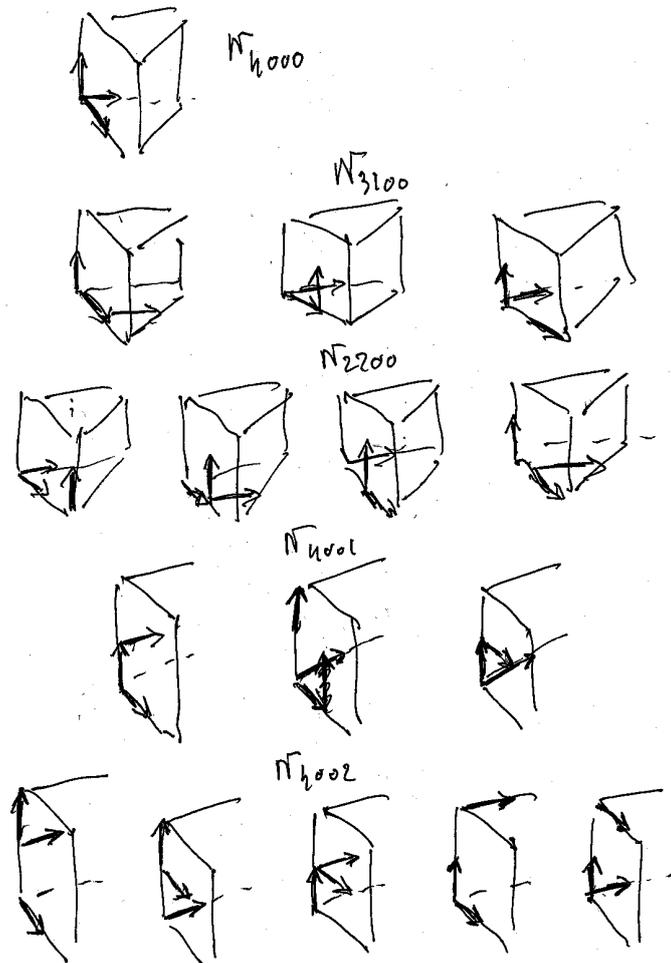


FIG. 23 – Un exemple d'un coefficient de type sommet ou arête. Pour un sommet, un seul coefficient avec un seul terme, voir N_{4000} . Pour une arête d'une face triangulaire, trois coefficients, l'un à 3 termes, le central à 4 termes et le dernier comme le premier, on montre N_{3100} et N_{2200} . Pour une arête incidente à deux faces quadrilatérales, quatre coefficients, le premier et le dernier à 3 termes, les 2 centraux à 5 termes, on montre N_{4001} et N_{4002} .

Algorithm 11 Construction des quadruplets des coefficients du pentaèdre à 18 nœuds

- Trouver toutes les combinaisons pour $I + J + K = 4$ et pour $L = 0, 5$
 - pour une combinaison donnée, trouver les indices tels que :
 - $i_1 + i_2 + i_3 = I$
 - $j_1 + j_2 + j_3 = J$
 - $k_1 + k_2 + k_3 = K$
 - $l_1 + l_2 + l_3 = L$
 - $i_1 + j_1 + k_1 = 1$, $i_2 + j_2 + k_2 = 1$ et $i_3 + j_3 + k_3 = 2$,
 - $l_1 = 0, 2$, $l_2 = 0, 2$ et $l_3 = 0, 1$
 - En sortie, le ou les triplets de quadruplets d'indices convenants.
-

5.1.10 L'hexaèdre de degré 2 à 27 nœuds

Tout comme, on avait déduit le cas du tétraèdre à 10 nœuds par généralisation du cas du triangle à 6 nœuds, on va déduire les résultats relatifs à l'hexaèdre à 27 nœuds de l'extension de ceux du quadrilatère à 9 nœuds. On avait :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) P_{i,j},$$

$$\mathcal{J}(u, v) = \sum_{I=0,3} \sum_{J=0,3} B_I^3(u) B_J^3(v) N_{IJ},$$

avec

$$N_{IJ} = 4 \sum_{(i_1, i_2), i_1+i_2=I} \sum_{(j_1, j_2), j_1+j_2=J} \frac{C_{i_2}^2}{C_{i_1+i_2}^3} \frac{C_{j_1}^2}{C_{j_1+j_2}^3} |\Delta_{i_1, j_1}^{1,0} \quad \Delta_{i_2, j_2}^{0,1}|,$$

où

$$\Delta_{i,j}^{1,0} = \overrightarrow{P_{ij} P_{i+1, j}} \quad \text{et} \quad \Delta_{i,j}^{0,1} = \overrightarrow{P_{ij} P_{i, j+1}}.$$

Il est donc immédiat de passer à l'hexaèdre en généralisant ces résultats. Ainsi, on a successivement :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) P_{ijk},$$

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \sum_{I=0,5} \sum_{J=0,5} \sum_{K=0,5} B_I^5(u) B_J^5(v) B_K^5(w) N_{IJK},$$

avec

$$N_{IJK} = 8 \sum_{(i_1, i_2, i_3), i_1+i_2+i_3=I} \sum_{(j_1, j_2, j_3), j_1+j_2+j_3=J} \sum_{(k_1, k_2, k_3), k_1+k_2+k_3=K} \frac{C_{i_2}^2 C_{i_3}^2}{C_{i_1+i_2+i_3}^5} \frac{C_{j_1}^2 C_{j_3}^2}{C_{j_1+j_2+j_3}^5} \frac{C_{k_1}^2 C_{k_2}^2}{C_{k_1+k_2+k_3}^5} |\Delta_{i_1, j_1, k_1}^{1,0,0} \quad \Delta_{i_2, j_2, k_2}^{0,1,0} \quad \Delta_{i_3, j_3, k_3}^{0,0,1}|, \quad (30)$$

où

$$\Delta_{i,j,k}^{1,0,0} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i+1, jk}}, \quad \Delta_{i,j,k}^{0,1,0} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i, j+1, k}}, \quad \text{et} \quad \Delta_{i,j,k}^{0,0,1} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i, j, k+1}}.$$

Le degré du polynôme jacobien est donc 5 dans chaque direction, le nombre de coefficients de contrôle est 216.

On va essayer de donner un exemple de chaque type de coefficient, les autres s'en déduisant en principe facilement.

- Un coefficient (un terme) associé à chaque sommet.

Prenons le cas de N_{000} . On a ici tous les indices nuls. Par suite, le coefficient n'a qu'un seul terme, les C valent tous 1, et il reste

$$N_{000} = |\Delta_{000}^{1,0,0} \quad \Delta_{000}^{0,1,0} \quad \Delta_{000}^{0,0,1}| \text{ ou, en fonction des } A_i \text{ et des } C_i, 8 \left| \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_{12}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}} \right|$$

qui est le résultat habituel, le coefficient est, à un facteur près, le volume du tétraèdre de sommets le sommet et les trois points de contrôle adjacents. Les autres coefficients coins ont la même forme.

Dans ce qui suit, les coefficients sont calculés au facteur 8 près.

- Quatre coefficients (3 ou 5 termes) associé à chaque arête.

On va regarder N_{100} , N_{200} , N_{300} et N_{400} . N_{100} et N_{400} sont symétriques l'un de l'autre, N_{200} et N_{300} aussi. On a, pour N_{100} , les combinaisons entre (000), (000) et (100) soient 3 termes :

$$N_{100} = \frac{2}{5} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_9 C_{21}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{2}{5} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_{12}} \quad \overrightarrow{C_9 C_{23}}| + \frac{1}{5} |\overrightarrow{C_9 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_{12}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}|$$

et donc :

$$N_{400} = \frac{2}{5} |\overrightarrow{C_9 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_9 C_{23}}| + \frac{2}{5} |\overrightarrow{C_9 A_2} \quad \overrightarrow{C_9 C_{21}} \quad \overrightarrow{A_2 C_{14}}| + \frac{1}{5} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_2 C_{10}} \quad \overrightarrow{A_2 C_{14}}|.$$

Et pour les deux autres, on a 5 termes :

$$N_{200} = \frac{2}{10} |\overrightarrow{C_9 A_2} \quad \overrightarrow{C_9 C_{21}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{2}{10} |\overrightarrow{C_9 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_{12}} \quad \overrightarrow{C_9 C_{23}}| + \frac{4}{10} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_9 C_{21}} \quad \overrightarrow{C_9 C_{23}}| \\ + \frac{1}{10} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_2 C_{10}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{1}{10} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_{12}} \quad \overrightarrow{A_2 C_{14}}|$$

et donc :

$$N_{300} = \frac{2}{10} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_9 C_{21}} \quad \overrightarrow{A_2 C_{14}}| + \frac{2}{10} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_2 C_{10}} \quad \overrightarrow{C_9 C_{23}}| + \frac{4}{10} |\overrightarrow{C_9 A_2} \quad \overrightarrow{C_9 C_{21}} \quad \overrightarrow{C_9 C_{23}}| \\ + \frac{1}{10} |\overrightarrow{C_9 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 C_{10}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{1}{10} |\overrightarrow{C_9 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_{12}} \quad \overrightarrow{A_2 C_{14}}|.$$

- Seize coefficients associé à chaque face.

On va regarder l'exemple de N_{101} . En i seul, on peut avoir 0 ou 1, en j on a 0, en k on peut avoir 0 ou 1. De toutes les combinaisons possibles, seules 5 sont valides. Ceci donne :

$$N_{101} = \frac{4}{25} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_{23} C_{27}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{4}{25} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_{13} C_{22}} \quad \overrightarrow{C_9 C_{23}}| + \frac{2}{25} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_9 C_{21}} \quad \overrightarrow{C_{13} A_5}| \\ + \frac{2}{25} |\overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_{12}} \quad \overrightarrow{C_{23} C_{17}}| \\ + \frac{2}{25} |\overrightarrow{C_9 A_2} \quad \overrightarrow{C_{13} C_{22}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{1}{25} |\overrightarrow{C_9 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_{12}} \quad \overrightarrow{C_{13} A_5}| \\ + \frac{4}{25} |\overrightarrow{C_{13} C_{23}} \quad \overrightarrow{C_9 C_{21}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{4}{25} |\overrightarrow{C_{13} C_{23}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{12}} \quad \overrightarrow{C_9 C_{23}}| + \frac{2}{25} |\overrightarrow{C_{23} C_{24}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{12}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}|,$$

Les coefficients de face de ce type ont 5 termes. Comme pour les arêtes, on a plusieurs types de coefficients de face dont le nombre de termes est variable d'un type à l'autre.

- Soixante quatre coefficients internes.

On va regarder N_{111} . En i on peut avoir 0 ou 1, idem en j et en k , ceci donne 27 termes, i.e, 3 cas dans chaque direction (par exemple, en i c'est soit i_1 , soit i_2 , soit i_3 qui vaut 1), donc $3 \times 3 \times 3$.

Comme pour les arêtes et les faces, on a plusieurs types de coefficients internes dont le nombre de termes est variable d'un type à l'autre, cf. [16], ainsi, pour les coefficients les plus interne, on trouve 125 termes.

Construction des N_{IJK} . Pour obtenir les coefficients, il suffit de trouver, pour chaque triplet (IJK), toutes les combinaisons possibles des triplets $(i_1 j_1 k_1)$, $(i_2 j_2 k_2)$ et $(i_3 j_3 k_3)$. L'algorithme suivant donne le résultat :

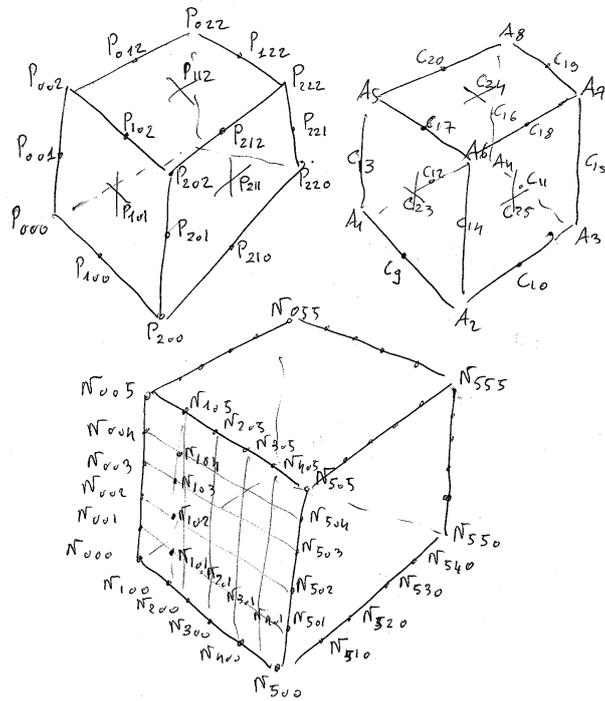


FIG. 24 – Correspondance entre les numérotations Bézier et élément fini pour les nœuds et les points de contrôle, numérotation logique des coefficients de contrôle (certains n'étant pas montrés).

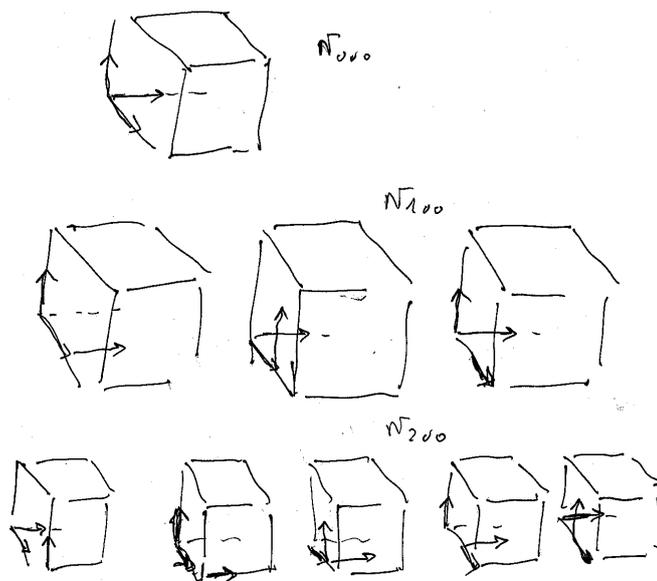


FIG. 25 – Un exemple d'un coefficient de type sommet ou arête avec un seul terme pour un coefficient attaché à un sommet (ici N_{000}), 3 ou 5 termes pour chacun des quatre coefficients attachés à une arête (ici N_{100} et N_{200}).

Algorithm 12 Construction des triplets des coefficients de l'hexaèdre à 27 nœuds

- Trouver toutes les combinaisons pour $I = 0, 5$, $J = 0, 5$ et $K = 0, 5$
- pour une combinaison donnée, trouver les indices tels que :
 - $i_1 + i_2 + i_3 = I$
 - $j_1 + j_2 + j_3 = J$
 - $k_1 + k_2 + k_3 = K$
 - $i_1 = 0, 1$, $j_1 = 0, 2$ et $k_1 = 0, 2$
 - $i_2 = 0, 2$, $j_2 = 0, 1$ et $k_2 = 0, 2$
 - $i_3 = 0, 2$, $j_3 = 0, 2$ et $k_3 = 0, 1$
- En sortie, le ou les triplets de triplets d'indices convenants.

Nature des termes des N_{IJK} . Un examen attentif des termes des coefficients montrent qu'ils ne sont autres que toutes les combinaisons possibles de trois vecteurs, chacun dans une direction. On en déduit le nombre total de termes, $18 \times 18 \times 18$, soit 5832 termes.

Cette formulation du jacobien et de ses coefficients de contrôle permet d'écrire une condition suffisante de positivité, voir plus bas. Néanmoins, de manière pratique, il est impossible (ou fastidieux) d'exprimer à la main tous ces coefficients et il va falloir trouver un moyen réaliste d'y parvenir, via un programme ou via une méthode alternative.

5.1.11 Les éléments Serendip

- Le quadrilatère de degré 2 à 8 nœuds.

On se donne 8 points de contrôle, notés P_{ij} , et 4 arêtes, $\gamma(u, v)$ pour u variant, v fixé à 0 ou 1 et v variant, u fixé à 0 ou 1. On définit par interpolation transfinie le carreau Σ par :

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) = & (1 - v) \{ \gamma(u, 0) - (1 - u)P_{00} \} + u \{ \gamma(1, v) - (1 - v)P_{20} \} \\ & + v \{ \gamma(u, 1) - uP_{22} \} + (1 - u) \{ \gamma(0, v) - vP_{02} \}, \end{aligned} \quad (31)$$

avec, par exemple, $\gamma(u, 0) = \sum_{i=0,2} B_i^2(u)P_{i0}$, Relation (11), et des expressions analogues pour les autres arêtes.

En notations Bézier, le carreau devient :

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) = & B_0^1(v) \left\{ \sum_{i=0,2} B_i^2(u)P_{i0} - B_0^1(u)P_{00} \right\} + B_1^1(u) \left\{ \sum_{j=0,2} B_j^2(v)P_{2j} - B_0^1(v)P_{20} \right\} \\ & + B_1^1(v) \left\{ \sum_{i=0,2} B_i^2(u)P_{i2} - B_1^1(u)P_{22} \right\} + B_0^1(u) \left\{ \sum_{j=0,2} B_j^2(v)P_{0j} - B_1^1(v)P_{02} \right\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = & B_0^1(v) \left\{ 2 \sum_{i=0,1} B_i^1(u)\Delta_{i0}^{10} + P_{00} \right\} + \left\{ \sum_{j=0,2} B_j^2(v)P_{2j} - B_0^1(v)P_{20} \right\} \\ & + B_1^1(v) \left\{ 2 \sum_{i=0,1} B_i^1(u)\Delta_{i2}^{10} - P_{22} \right\} - \left\{ \sum_{j=0,2} B_j^2(v)P_{0j} - B_1^1(v)P_{02} \right\}, \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = & 2 \sum_{i=0,1} B_i^1(u)B_0^1(v)\Delta_{i0}^{10} + 2 \sum_{i=0,1} B_i^1(u)B_1^1(v)\Delta_{i2}^{10} + \sum_{j=0,2} B_j^2(v)\Delta_{0j}^{20} \\ & - B_0^1(v)\Delta_{00}^{20} - B_1^1(v)\Delta_{02}^{20}, \end{aligned}$$

avec les notations $\Delta_{ij}^{10} = \overrightarrow{P_{ij}P_{i+1,j}}$ et $\Delta_{ij}^{20} = \overrightarrow{P_{ij}P_{i+2,j}}$ et au final, comme $\sum_i B_i^1(u) = 1, \dots$, on trouve :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = 2 \sum_{i=0,1} B_i^1(u) B_0^1(v) (\Delta_{i0}^{10} - \frac{\Delta_{00}^{20}}{2}) + 2 \sum_{i=0,1} B_i^1(u) B_1^1(v) (\Delta_{i2}^{10} - \frac{\Delta_{02}^{20}}{2}) + \sum_{j=0,2} B_j^2(v) \Delta_{0j}^{20}.$$

De façon mécanique, on déduit la valeur de $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$, à savoir :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = 2 \sum_{j=0,1} B_j^1(v) B_0^1(u) (\Delta_{0j}^{01} - \frac{\Delta_{00}^{02}}{2}) + 2 \sum_{j=0,1} B_j^1(v) B_1^1(u) (\Delta_{2j}^{01} - \frac{\Delta_{20}^{02}}{2}) + \sum_{i=0,2} B_i^2(u) \Delta_{i0}^{02}.$$

Le jacobien comprend les 9 termes suivants :

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^1(u) B_0^1(v) B_{j_2}^1(v) B_0^1(u) |2\Delta_{i_1 0}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{0 j_2}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ (2) & + \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^1(u) B_0^1(v) B_{j_2}^1(v) B_1^1(u) |2\Delta_{i_1 0}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{2 j_2}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ (5) & + \sum_{i_1=0,1} \sum_{i_2=0,2} B_{i_1}^1(u) B_0^1(v) B_{i_2}^2(u) |2\Delta_{i_1 0}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{i_2 0}^{02}| \\ (4) & + \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^1(u) B_1^1(v) B_{j_2}^1(v) B_0^1(u) |2\Delta_{i_1 2}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{0 j_2}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ (3) & + \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^1(u) B_1^1(v) B_{j_2}^1(v) B_1^1(u) |2\Delta_{i_1 2}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{2 j_2}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ (7) & + \sum_{i_1=0,1} \sum_{i_2=0,2} B_{i_1}^1(u) B_1^1(v) B_{i_2}^2(u) |2\Delta_{i_1 2}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad \Delta_{i_2 0}^{02}| \\ (8) & + \sum_{j_1=0,2} \sum_{j_2=0,1} B_{j_1}^2(v) B_{j_2}^1(v) B_0^1(u) |\Delta_{0 j_1}^{20} \quad 2\Delta_{0 j_2}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ (6) & + \sum_{j_1=0,2} \sum_{j_2=0,1} B_{j_1}^2(v) B_{j_2}^1(v) B_1^1(u) |\Delta_{0 j_1}^{20} \quad 2\Delta_{2 j_2}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ (9) & + \sum_{j_1=0,2} \sum_{i_2=0,2} B_{j_1}^2(v) B_{i_2}^2(u) |\Delta_{0 j_1}^{20} \quad \Delta_{i_2 0}^{02}|. \end{aligned}$$

Les termes (1), (2), (4) et (3) présentent la même forme, ils ne font intervenir que les arêtes incidentes en un coin, de même les 4 suivants sont relatifs aux nœuds d'arête tandis que le dernier concerne le "centre".

L'idée est de regrouper ces termes entre-eux afin de calculer les coefficients de contrôle de l'élément. Pour ce faire il faut trouver des expressions comparables et le moyen de les obtenir est de calculer ce que sont les polynômes puis d'en élever le degré à 3. On va donc, dans ce but, traiter une à une les expressions ci-dessus.

$$\text{On prend } (1) \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^1(u) B_0^1(v) B_{j_2}^1(v) B_0^1(u) |2\Delta_{i_1 0}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{0 j_2}^{01} - \Delta_{00}^{02}|,$$

$$\text{soit } (1) \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^2(u) B_{j_2}^2(v) \frac{1}{C_{i_1}^2 C_{j_2}^2} |2\Delta_{i_1 0}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{0 j_2}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \quad \text{qui donne les coefficients } Q_{i_1, j_2}^{(1)}.$$

$$\text{Ceci est noté : } (1) \sum_{I=0,1} \sum_{J=0,1} B_I^2(u) B_J^2(v) Q_{IJ}^{(1)},$$

ensuite, on élève le degré de 1 dans chaque direction. En v , on construit la séquence :

$$R_{I0}^{(1)} = Q_{I0}^{(1)} \quad , \quad R_{I1}^{(1)} = \frac{Q_{I0}^{(1)} + 2Q_{I1}^{(1)}}{3} \quad , \quad R_{I2}^{(1)} = \frac{2Q_{I1}^{(1)}}{3},$$

puis la séquence, en u :

$$S_{0J}^{(1)} = R_{0J}^{(1)} \quad , \quad S_{1J}^{(1)} = \frac{R_{0J}^{(1)} + 2R_{1J}^{(1)}}{3} \quad , \quad S_{2J}^{(1)} = \frac{2R_{1J}^{(1)}}{3} \quad ,$$

et on obtient au final pour cette expression : (1) $\sum_{I=0,2} \sum_{J=0,2} B_I^3(u)B_J^3(v)S_{IJ}^{(1)}$.

On regarde maintenant (2) $\sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^1(u)B_0^1(v)B_{j_2}^1(v)B_1^1(u) |2\Delta_{i_1 0}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{2j_2}^{01} - \Delta_{20}^{02}|$

$$\text{soit (2) } \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1+1}^2(u)B_{j_2}^2(v) \frac{1}{C_{i_1+1}^2 C_{j_2}^2} |2\Delta_{i_1 0}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{2j_2}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \quad ,$$

qui s'écrit (2) $\sum_{i_1=1,2} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^2(u)B_{j_2}^2(v) \frac{1}{C_{i_1}^2 C_{j_2}^2} |2\Delta_{i_1-1,0}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{2j_2}^{01} - \Delta_{20}^{02}|$ et donne les coefficients $Q_{i_1, j_2}^{(2)}$.

$$\text{Ceci est noté : (2) } \sum_{I=1,2} \sum_{J=0,1} B_I^2(u)B_J^2(v)Q_{IJ}^{(2)} \quad ,$$

ensuite, on élève le degré de 1 dans chaque direction. En v , on construit la séquence :

$$R_{I0}^{(2)} = Q_{I0}^{(2)} \quad , \quad R_{I1}^{(2)} = \frac{Q_{I0}^{(2)} + 2Q_{I1}^{(2)}}{3} \quad , \quad R_{I2}^{(2)} = \frac{2Q_{I1}^{(2)}}{3} \quad ,$$

puis la séquence, pour u :

$$S_{1J}^{(2)} = \frac{2R_{1J}^{(2)}}{3} \quad , \quad S_{2J}^{(2)} = \frac{2R_{1J}^{(2)} + R_{2J}^{(2)}}{3} \quad , \quad S_{3J}^{(2)} = R_{2J}^{(2)} \quad ,$$

et on obtient au final pour cette expression : (2) $\sum_{I=1,3} \sum_{J=0,2} B_I^3(u)B_J^3(v)S_{IJ}^{(2)}$.

On regarde maintenant (3) $\sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^1(u)B_1^1(v)B_{j_2}^1(v)B_1^1(u) |2\Delta_{i_1 2}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{2j_2}^{01} - \Delta_{20}^{02}|$

$$\text{soit (3) } \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1+1}^2(u)B_{j_2+1}^2(v) \frac{1}{C_{i_1+1}^2 C_{j_2+1}^2} |2\Delta_{i_1 2}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{2j_2}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \quad ,$$

qui s'écrit (3) $\sum_{i_1=1,2} \sum_{j_2=1,2} B_{i_1}^2(u)B_{j_2}^2(v) \frac{1}{C_{i_1}^2 C_{j_2}^2} |2\Delta_{i_1-1,2}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{2,j_2-1}^{01} - \Delta_{20}^{02}|$ et donne les coefficients $Q_{i_1, j_2}^{(3)}$.

$$\text{Ceci est noté : (3) } \sum_{I=1,2} \sum_{J=1,2} B_I^2(u)B_J^2(v)Q_{IJ}^{(3)} \quad .$$

ensuite, on élève le degré de 1 dans chaque direction. En v , on construit la séquence :

$$R_{I1}^{(3)} = \frac{2Q_{I1}^{(3)}}{3} \quad , \quad R_{I2}^{(3)} = \frac{2Q_{I1}^{(3)} + Q_{I2}^{(3)}}{3} \quad , \quad R_{I3}^{(3)} = Q_{I2}^{(3)} \quad ,$$

puis la séquence, pour u :

$$S_{1J}^{(3)} = \frac{2R_{1J}^{(3)}}{3} \quad , \quad S_{2J}^{(3)} = \frac{2R_{1J}^{(3)} + R_{2J}^{(3)}}{3} \quad , \quad S_{3J}^{(3)} = R_{2J}^{(3)} \quad ,$$

et on obtient au final pour cette expression : (3) $\sum_{I=1,3} \sum_{J=1,3} B_I^3(u)B_J^3(v)S_{IJ}^{(3)}$.

On regarde maintenant (4) $\sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^1(u)B_1^1(v)B_{j_2}^1(v)B_0^1(u) |2\Delta_{i_1 2}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{0j_2}^{01} - \Delta_{00}^{02}|$

$$\text{soit } (4) \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B_{i_1}^2(u) B_{j_2+1}^2(v) \frac{1}{C_{i_1}^2 C_{j_2+1}^2} |2\Delta_{i_1 2}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{0j_2}^{01} - \Delta_{00}^{02}|,$$

$$\text{qui s'écrit } (4) \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=1,2} B_{i_1}^2(u) B_{j_2}^2(v) \frac{1}{C_{i_1}^2 C_{j_2}^2} |2\Delta_{i_1 2}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{0,j_2-1}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \quad \text{et donne les coefficients } Q_{i_1, j_2}^{(4)}$$

$$\text{Ceci est noté : } (4) \sum_{I=0,1} \sum_{J=1,2} B_I^2(u) B_J^2(v) Q_{IJ}^{(4)},$$

ensuite, on élève le degré de 1 dans chaque direction. En v , on construit la séquence :

$$R_{I1}^{(4)} = \frac{2Q_{I1}^{(4)}}{3}, \quad R_{I2}^{(4)} = \frac{2Q_{I1}^{(4)} + Q_{I2}^{(4)}}{3}, \quad R_{I3}^{(4)} = Q_{I2}^{(4)},$$

puis la séquence, pour u :

$$S_{0J}^{(4)} = R_{0J}^{(4)}, \quad S_{1J}^{(4)} = \frac{R_{0J}^{(4)} + 2R_{1J}^{(4)}}{3}, \quad S_{2J}^{(4)} = \frac{2R_{2J}^{(4)}}{3},$$

$$\text{et on obtient au final pour cette expression : } (4) \sum_{I=0,2} \sum_{J=1,3} B_I^3(u) B_J^3(v) S_{IJ}^{(4)}.$$

Les termes (5) et (7) présentent la même forme, en effet, on a :

$$(5) \sum_{i_1=0,1} \sum_{i_2=0,2} B_{i_1+i_2}^3(u) B_0^1(v) \frac{C_{i_1}^1 C_{i_2}^2}{C_{i_1+i_2}^3} |2\Delta_{i_1 0}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{i_2 0}^{02}| \quad \text{qui donne les coefficients } Q_{i_1+i_2, 0}^{(5)}$$

$$(7) \sum_{i_1=0,1} \sum_{i_2=0,2} B_{i_1+i_2}^3(u) B_1^1(v) \frac{C_{i_1}^1 C_{i_2}^2}{C_{i_1+i_2}^3} |2\Delta_{i_1 2}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad \Delta_{i_2 0}^{02}| \quad \text{qui donne les coefficients } Q_{i_1+i_2, 1}^{(7)},$$

donc :

$$(5) \sum_{I=0,3} \sum_{J=0} B_I^3(u) B_J^1(v) Q_{IJ} \quad \text{et} \quad (7) \sum_{I=0,3} \sum_{J=1} B_I^3(u) B_J^1(v) Q_{IJ}.$$

Les termes (8) et (6) conduisent également à un regroupement analogue :

$$(8) \sum_{j_1=0,2} \sum_{j_2=0,1} B_{j_1+j_2}^3(v) B_0^1(u) \frac{C_{j_2}^1 C_{j_1}^2}{C_{j_1+j_2}^3} |\Delta_{0j_1}^{20} \quad 2\Delta_{0j_2}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \quad \text{qui donne les coefficients } Q_{0, j_1+j_2}^{(8)}$$

$$(6) \sum_{j_1=0,2} \sum_{j_2=0,1} B_{j_1+j_2}^3(v) B_1^1(u) \frac{C_{j_2}^1 C_{j_1}^2}{C_{j_1+j_2}^3} |\Delta_{0j_1}^{20} \quad 2\Delta_{2j_2}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \quad \text{qui donne les coefficients } Q_{1, j_1+j_2}^{(6)},$$

donc :

$$(8) \sum_{I=0} \sum_{J=0,3} B_I^1(u) B_J^3(v) Q_{IJ} \quad \text{et} \quad (6) \sum_{I=1} \sum_{J=0,3} B_I^1(u) B_J^3(v) Q_{IJ},$$

et le dernier terme, (9), a la forme directe :

$$(9) \sum_{I=0,2} \sum_{J=0,2} B_I^2(u) B_J^2(v) Q_{IJ} \quad \text{qui donne les coefficients } Q_{i_2, j_1}^{(9)}.$$

On élève maintenant le degré de ces cinq dernières expressions. Le dernier terme, le plus simple, car complet, va être élevé d'un degré pour chaque direction. On écrit ainsi :

$$\sum_{I=0,2} \sum_{J=0,2} B_I^2(u) B_J^2(v) Q_{IJ}^{(9)} = \sum_{I=0,2} B_I^2(u) \left(\sum_{J=0,2} B_J^2(v) Q_{IJ}^{(9)} \right),$$

et on définit la séquence d'élévation du degré en v :

$$R_{I0}^{(9)} = Q_{I0}^{(9)}, \quad R_{I1}^{(9)} = \frac{Q_{I0}^{(9)} + 2Q_{I1}^{(9)}}{3}, \quad R_{I2}^{(9)} = \frac{2Q_{I1}^{(9)} + Q_{I2}^{(9)}}{3} \quad \text{et} \quad R_{I3}^{(9)} = Q_{I2}^{(9)},$$

et on obtient la nouvelle expression de cette somme, à savoir :

$$\sum_{I=0,2} \sum_{J=0,3} B_I^2(u) B_J^3(v) R_{IJ}^{(9)},$$

que l'on traite de la même manière. On construit donc la séquence d'élévation du degré en u :

$$S_{0J}^{(9)} = R_{0J}^{(9)} \quad , \quad S_{1J}^{(9)} = \frac{R_{0J}^{(9)} + 2R_{1J}^{(9)}}{3} \quad , \quad S_{2J}^{(9)} = \frac{2R_{1J}^{(9)} + R_{2J}^{(9)}}{3} \quad \text{et} \quad S_{3J}^{(9)} = R_{2J}^{(9)} \quad ,$$

$$\text{et l'expression finale est : (9) } \sum_{I=0,3} \sum_{J=0,3} B_I^3(u) B_J^3(v) S_{IJ}^{(9)}.$$

Les termes restants ont en commun une direction au degré 3 et l'autre, incomplète, au degré 1, que l'on va élever en deux temps.

$$\text{Ainsi pour (5) } \sum_{I=0,3} \sum_{J=0} B_I^3(u) B_J^1(v) Q_{IJ}^{(5)}$$

$$\text{on construit la séquence en } v : R_{I0}^{(5)} = Q_{I0}^{(5)} \quad , \quad R_{I1}^{(5)} = \frac{Q_{I0}^{(5)}}{2}$$

$$\text{puis, toujours en } v : S_{I0}^{(5)} = R_{I0}^{(5)} \quad , \quad S_{I1}^{(5)} = \frac{R_{I0}^{(5)} + 2R_{I1}^{(5)}}{3} \quad , \quad S_{I2}^{(5)} = \frac{2R_{I1}^{(5)} + R_{I2}^{(5)}}{3} \quad ,$$

$$\text{et on obtient : (5) } \sum_{I=0,3} \sum_{J=0,2} B_I^3(u) B_J^3(v) S_{IJ}^{(5)}.$$

$$\text{Pour (7) } \sum_{I=0,3} \sum_{J=1} B_I^3(u) B_J^1(v) Q_{IJ}^{(7)}$$

$$\text{on construit la séquence en } v : R_{I1}^{(7)} = \frac{Q_{I1}^{(7)}}{2} \quad , \quad R_{I2}^{(7)} = Q_{I1}^{(7)}$$

$$\text{puis, toujours en } v : S_{I1}^{(7)} = \frac{2R_{I1}^{(7)}}{3} \quad , \quad S_{I2}^{(7)} = \frac{2R_{I1}^{(7)} + R_{I2}^{(7)}}{3} \quad , \quad S_{I3}^{(7)} = R_{I2}^{(7)} \quad ,$$

$$\text{et on obtient : (7) } \sum_{I=0,3} \sum_{J=1,3} B_I^3(u) B_J^3(v) S_{IJ}^{(7)}.$$

$$\text{Pour (6) } \sum_{I=1} \sum_{J=0,3} B_I^1(u) B_J^3(v) Q_{IJ}^{(6)}$$

$$\text{on construit la séquence en } u : R_{1J}^{(6)} = \frac{Q_{1J}^{(6)}}{2} \quad , \quad R_{2J}^{(6)} = Q_{1J}^{(6)}$$

$$\text{puis, toujours en } u : S_{1J}^{(6)} = \frac{2R_{1J}^{(6)}}{3} \quad , \quad S_{2J}^{(6)} = \frac{2R_{1J}^{(6)} + R_{2J}^{(6)}}{3} \quad , \quad S_{3J}^{(6)} = R_{2J}^{(6)} \quad ,$$

$$\text{et on obtient : (6) } \sum_{I=1,3} \sum_{J=0,3} B_I^3(u) B_J^3(v) S_{IJ}^{(6)}.$$

$$\text{Et enfin pour (8) } \sum_{I=0} \sum_{J=0,3} B_I^1(u) B_J^3(v) Q_{IJ}^{(8)}$$

$$\text{on construit la séquence en } u : R_{0J}^{(8)} = Q_{0J}^{(8)} \quad , \quad R_{1J}^{(8)} = \frac{Q_{0J}^{(8)}}{2}$$

$$\text{puis, toujours en } u : S_{0J}^{(8)} = R_{0J}^{(8)} \quad , \quad S_{1J}^{(8)} = \frac{R_{0J}^{(8)} + 2R_{1J}^{(8)}}{3} \quad , \quad S_{2J}^{(8)} = \frac{2R_{1J}^{(8)}}{3} \quad ,$$

$$\text{et on obtient : (8) } \sum_{I=0,2} \sum_{J=0,3} B_I^3(u) B_J^3(v) S_{IJ}^{(8)}.$$

Chaque coefficient va être obtenu via la somme des coefficients ci-dessus, par exemple N_{00} contient des contributions de tous les Q_{00} qui existent dans certaines des neuf sommes. Comme les sommes sont incomplètes, pour les autres coefficients, c'est moins évident. Établir la correspondance entre les N_{IJ} et les $Q_{IJ}^{(k)}$ se fait en regroupant convenablement les termes des 9 sommes. En fait, il suffit maintenant de regrouper les coefficients de ces 9 sommes ayant les mêmes indices pour construire les coefficients effectifs.

Coefficients coins. On va, en premier, calculer les coefficients associés aux 4 sommets. Par exemple, pour trouver N_{00} , on regarde dans quelles sommes se trouve un terme indicé 00. Il vient :

$$N_{00} = S_{00}^{(1)} + S_{00}^{(5)} + S_{00}^{(8)} + S_{00}^{(9)}$$

$$\text{soit : } N_{00} = R_{00}^{(1)} + R_{00}^{(5)} + R_{00}^{(8)} + R_{00}^{(9)} = Q_{00}^{(1)} + Q_{00}^{(5)} + Q_{00}^{(8)} + Q_{00}^{(9)},$$

on remplace alors les Q par leurs expressions.

$$N_{00} = |2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| + |2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}|, + |\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| + |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}|$$

soit :

$$|2\overrightarrow{A_1C_5} - \overrightarrow{A_1A_2} \quad 2\overrightarrow{A_1C_8}| + |\overrightarrow{A_1A_2} \quad 2\overrightarrow{A_1C_8}|, \text{ il vient donc : } N_{00} = 4|\overrightarrow{A_1C_5} \quad \overrightarrow{A_1C_8}|,$$

qui est le résultat attendu. Le jacobien évalué pour A_1 est représenté par la surface du triangle coin. On a, de même :

$$N_{30} = Q_{20}^{(2)} + Q_{30}^{(5)} + Q_{10}^{(6)} + Q_{20}^{(9)}$$

et, par suite :

$$N_{30} = |2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| + |2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{20}^{02}| + |\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}|, + |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{20}^{02}|,$$

$$\text{soit : } |2\overrightarrow{C_5A_2} - \overrightarrow{A_1A_2} \quad 2\overrightarrow{A_2C_6}| + |\overrightarrow{A_1A_2} \quad 2\overrightarrow{A_2C_6}|,$$

qui est similaire à l'expression trouvée ci-dessus, par conséquent :

$$N_{30} = 4|\overrightarrow{C_5A_2} \quad \overrightarrow{A_2C_6}|.$$

On trouve de même :

$$N_{03} = Q_{02}^{(4)} + Q_{01}^{(7)} + Q_{03}^{(8)} + Q_{02}^{(9)} \quad \text{et le calcul donne } 4|\overrightarrow{A_4C_7} \quad \overrightarrow{C_8A_4}|$$

.

Et, pour finir avec les 4 jacobiens coins :

$$N_{33} = Q_{22}^{(3)} + Q_{31}^{(7)} + Q_{13}^{(6)} + Q_{22}^{(9)} \quad \text{et le calcul donne } 4|\overrightarrow{C_7A_3} \quad \overrightarrow{C_6A_3}|$$

.

Coefficients associés à une arête. On passe à une arête et ses deux coefficients, par exemple N_{10} et N_{20} . On a :

$$N_{10} = S_{10}^{(1)} + S_{10}^{(2)} + S_{10}^{(5)} + S_{10}^{(6)} + S_{10}^{(8)} + S_{10}^{(9)},$$

$$N_{10} = \frac{R_{00}^{(1)} + 2R_{10}^{(1)}}{3} + \frac{2R_{10}^{(2)}}{3} + R_{10}^{(5)} + \frac{2R_{10}^{(6)}}{3} + \frac{R_{00}^{(8)} + 2R_{10}^{(8)}}{3} + \frac{R_{00}^{(9)} + 2R_{10}^{(9)}}{3},$$

$$3N_{10} = Q_{00}^{(1)} + 2Q_{10}^{(1)} + 2Q_{10}^{(2)} + 3Q_{10}^{(5)} + Q_{10}^{(6)} + 2Q_{00}^{(8)} + Q_{00}^{(9)} + 2Q_{10}^{(9)},$$

on exprime alors les Q (avec les poids) présents dans cette somme.

$$Q_{00}^{(1)} = |2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}|$$

$$2Q_{10}^{(1)} = |2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}|$$

$$\begin{aligned}
2Q_{10}^{(2)} &= |2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\
3Q_{10}^{(5)} &= |2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| + 2|2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}| \\
Q_{10}^{(6)} &= |\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\
2Q_{00}^{(8)} &= 2|\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\
Q_{00}^{(9)} &= |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| \\
2Q_{10}^{(9)} &= 2|\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}|,
\end{aligned}$$

en additionnant, les 2 premier termes s'annulent tandis que d'autres termes s'annulent partiellement par regroupement. Ne restent alors que :

$$\begin{aligned}
&2|\Delta_{00}^{10} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\
&|2\Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}| + 2|2\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{10}^{02}| \\
&|2\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \text{ ouvert en } |2\Delta_{00}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \text{ et } |2\Delta_{10}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}|,
\end{aligned}$$

soit :

$$3N_{10} = 2|\Delta_{00}^{10} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| + 2|2\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{10}^{02}| + |2\Delta_{00}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| + |2\Delta_{10}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01}|,$$

et au final :

$$3N_{10} = 2|\Delta_{00}^{10} \quad \vec{V}_{00}| + 4|\Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{00}^{01}|,$$

avec

$$\vec{V}_{00} = 2\Delta_{10}^{02} + (2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}) + (2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}),$$

ou encore

$$\vec{V}_{00} = 2\Delta_{10}^{02} + (\Delta_{00}^{01} - \Delta_{01}^{01}) + (\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}).$$

En fonction des A_i et des C_i , on a :

$$3N_{10} = 2|\overline{A_1 C_5} \quad \vec{V}_{00}| + 4|\overline{C_5 A_2} \quad \overline{A_1 C_8}|,$$

avec

$$\vec{V}_{00} = 2\overline{C_5 C_7} + (\overline{A_1 C_8} - \overline{C_8 A_4}) + (\overline{A_2 C_6} - \overline{C_6 A_3}),$$

et ce vecteur n'est autre que le vecteur $4\overline{C_5 C_9}$, voir la Relation (25), de l'élément complet quand on définit C_9 à partir du nœud A_9 obtenu en prenant l'image du couple $(0, 0)^{20}$ de l'élément réduit, cf. [14]. Ainsi les coefficients N_{10} de l'élément complet et de l'élément réduit sont, via cette construction, strictement identiques.

Pour vérifier plus avant, on va calculer N_{20} . On a :

$$\begin{aligned}
N_{20} &= S_{20}^{(1)} + S_{20}^{(2)} + S_{20}^{(5)} + S_{20}^{(6)} + S_{20}^{(8)} + S_{20}^{(9)}, \\
N_{20} &= \frac{2R_{10}^{(1)}}{3} + \frac{2R_{10}^{(2)} + R_{20}^{(2)}}{3} + R_{20}^{(5)} + \frac{2R_{10}^{(6)} + R_{20}^{(6)}}{3} + \frac{2R_{10}^{(8)}}{3} + \frac{2R_{10}^{(9)} + R_{20}^{(9)}}{3},
\end{aligned}$$

²⁰ En effet, comme, élément réduit :

$$A_9 = -\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} + \frac{A_5 + A_6 + A_7 + A_8}{2},$$

$$\text{il vient } 4A_9 = -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + 2(A_5 + A_6 + A_7 + A_8),$$

et puisque, élément complet :

$$16A_9 = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + 2(C_5 + C_6 + C_7 + C_8) + 4C_9,$$

$$\text{on a, en remplaçant } A_9 \text{ par sa valeur : } 4C_9 = -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + 2(C_5 + C_6 + C_7 + C_8),$$

et, par suite, on trouve successivement :

$$4\overline{C_5 C_9} = -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + 2(C_5 + C_6 + C_7 + C_8) - 4C_5$$

$$4\overline{C_5 C_9} = 2\overline{C_5 C_7} + \overline{A_1 C_8} + \overline{A_2 C_6} + \overline{A_3 C_6} + \overline{A_4 C_8},$$

qui est bien \vec{V}_{00} .

$$3N_{20} = 2Q_{10}^{(1)} + 2Q_{10}^{(2)} + Q_{20}^{(2)} + 3Q_{20}^{(5)} + 2Q_{10}^{(6)} + Q_{00}^{(8)} + 2Q_{10}^{(9)} + Q_{20}^{(9)},$$

on exprime alors les Q (avec les poids) présents dans cette somme dont certains ont déjà été explicités lors du calcul de N_{20} .

$$\begin{aligned} 2Q_{10}^{(1)} &= |2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ 2Q_{10}^{(2)} &= |2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ Q_{20}^{(2)} &= |2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ 3Q_{20}^{(5)} &= |2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{20}^{02}| + 2|2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}| \\ 2Q_{10}^{(6)} &= 2|\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ Q_{00}^{(8)} &= |\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ 2Q_{10}^{(9)} &= 2|\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}|, \\ Q_{20}^{(9)} &= |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{20}^{02}|, \end{aligned}$$

en additionnant, le second et le troisième terme s'annulent tandis que d'autres s'annulent partiellement par regroupement. Ne restent alors que :

$$\begin{aligned} &|2\Delta_{10}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ &|2\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{20}^{02}| + 2|2\Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{10}^{02}| \\ &2|\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \text{ ouvert en } 2|\Delta_{00}^{10} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \text{ et } 2|\Delta_{10}^{10} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \end{aligned}$$

soit :

$$3N_{20} = |2\Delta_{10}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| + 2|2\Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{10}^{02}| + 2|\Delta_{10}^{10} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| + 2|\Delta_{00}^{10} \quad 2\Delta_{20}^{01}|,$$

et au final :

$$3N_{20} = 2|\Delta_{10}^{10} \quad \vec{V}_{00}| + 4|\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{20}^{01}| \text{ avec le vecteur } \vec{V}_{00} \text{ introduit pour } N_{10}.$$

En fonction des A_i et des C_i , on a :

$$3N_{20} = 2|\overline{C_5 A_2} \quad \vec{V}_{00}| + 4|\overline{A_1 C_5} \quad \overline{A_2 C_6}|,$$

qui est le symétrique de N_{10} comme espéré.

Coefficients centraux. On va ici donner l'expression du coefficient N_{11} , les trois autres s'en déduisant. On a :

$$\begin{aligned} N_{11} &= S_{11}^{(1)} + S_{11}^{(2)} + S_{11}^{(3)} + S_{11}^{(4)} + S_{11}^{(5)} + S_{11}^{(6)} + S_{11}^{(7)} + S_{11}^{(8)} + S_{11}^{(9)}, \\ N_{11} &= \frac{R_{01}^{(1)} + 2R_{11}^{(1)}}{3} + \frac{2R_{11}^{(2)}}{3} + \frac{2R_{11}^{(3)}}{3} + \frac{R_{01}^{(4)} + 2R_{11}^{(4)}}{3} + \frac{R_{10}^{(5)} + 2R_{11}^{(5)}}{3} + \frac{2R_{11}^{(6)}}{3} + \frac{2R_{11}^{(7)}}{3} + \frac{R_{01}^{(8)} + 2R_{11}^{(8)}}{3} + \frac{R_{01}^{(9)} + 2R_{11}^{(9)}}{3}, \end{aligned}$$

soit

$$3N_{11} = R_{01}^{(1)} + 2R_{11}^{(1)} + 2R_{11}^{(2)} + 2R_{11}^{(3)} + R_{01}^{(4)} + 2R_{11}^{(4)} + R_{10}^{(5)} + 2R_{11}^{(5)} + 2R_{11}^{(6)} + 2R_{11}^{(7)} + R_{01}^{(8)} + 2R_{11}^{(8)} + R_{01}^{(9)} + 2R_{11}^{(9)},$$

qui, exprimé en fonction des Q , donne :

$$\begin{aligned} 3N_{11} &= \frac{Q_{00}^{(1)} + 2Q_{01}^{(1)}}{3} + 2\frac{Q_{10}^{(1)} + 2Q_{11}^{(1)}}{3} + 2\frac{Q_{10}^{(2)} + 2Q_{11}^{(2)}}{3} + 2\frac{2Q_{11}^{(3)}}{3} + \frac{2Q_{01}^{(4)}}{3} + 2\frac{2Q_{11}^{(4)}}{3} \\ &+ Q_{10}^{(5)} + Q_{10}^{(5)} + Q_{11}^{(6)} + Q_{11}^{(7)} + Q_{01}^{(8)} + Q_{01}^{(8)} + \frac{Q_{00}^{(9)} + 2Q_{01}^{(9)}}{3} + 2\frac{Q_{10}^{(9)} + 2Q_{11}^{(9)}}{3}, \end{aligned}$$

soit :

$$9N_{11} = Q_{00}^{(1)} + 2Q_{01}^{(1)} + 2(Q_{10}^{(1)} + 2Q_{11}^{(1)}) + 2(Q_{10}^{(2)} + 2Q_{11}^{(2)}) + 4Q_{11}^{(3)} + 2Q_{01}^{(4)} + 4Q_{11}^{(4)} \\ + 6Q_{10}^{(5)} + 3Q_{11}^{(6)} + 3Q_{11}^{(7)} + 6Q_{01}^{(8)} + Q_{00}^{(9)} + 2Q_{01}^{(9)} + 2(Q_{10}^{(9)} + 2Q_{11}^{(9)}),$$

soit encore :

$$9N_{11} = Q_{00}^{(1)} + 2Q_{01}^{(1)} + 2Q_{10}^{(1)} + 4Q_{11}^{(1)} + 2Q_{10}^{(2)} + 4Q_{11}^{(2)} + 4Q_{11}^{(3)} + 2Q_{01}^{(4)} + 4Q_{11}^{(4)} \\ + 6Q_{10}^{(5)} + 3Q_{11}^{(6)} + 3Q_{11}^{(7)} + 6Q_{01}^{(8)} + Q_{00}^{(9)} + 2Q_{01}^{(9)} + 2Q_{10}^{(9)} + 4Q_{11}^{(9)},$$

on exprime alors les Q (avec les poids) présents dans cette somme dont certains ont déjà été explicités pour N_{10} et N_{20} .

$$Q_{00}^{(1)} = |2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ 2Q_{01}^{(1)} = |2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ 2Q_{10}^{(1)} = |2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ 4Q_{11}^{(1)} = |2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ 2Q_{10}^{(2)} = |2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ 4Q_{11}^{(2)} = |2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ 4Q_{11}^{(3)} = |2\Delta_{02}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ 2Q_{01}^{(4)} = |2\Delta_{02}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ 4Q_{11}^{(4)} = |2\Delta_{12}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ 6Q_{10}^{(5)} = 2|2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| + 4|2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}| \\ 3Q_{11}^{(6)} = |\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{02}| + 2|\Delta_{01}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ 3Q_{11}^{(7)} = 2|2\Delta_{02}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}| + |2\Delta_{12}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| \\ 6Q_{01}^{(8)} = 4|\Delta_{01}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| + 2|\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ Q_{00}^{(9)} = |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| \\ 2Q_{01}^{(9)} = 2|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| \\ 2Q_{10}^{(9)} = 2|\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}| \\ 4Q_{11}^{(9)} = 4|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}|,$$

les termes 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6 et 8 et 9 s'annulent, ne restent que :

$$4Q_{11}^{(3)} = |2\Delta_{02}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ 6Q_{10}^{(5)} = 2|2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| + 4|2\Delta_{00}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}| \\ 3Q_{11}^{(6)} = |\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{02}| + 2|\Delta_{01}^{20} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \\ 3Q_{11}^{(7)} = 2|2\Delta_{02}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}| + |2\Delta_{12}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| \\ 6Q_{01}^{(8)} = 4|\Delta_{01}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| + 2|\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ Q_{00}^{(9)} = |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| \\ 2Q_{01}^{(9)} = 2|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| \\ 2Q_{10}^{(9)} = 2|\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}|$$

$$4Q_{11}^{(9)} = 4|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}|.$$

On ouvre tous les $\Delta_{..}^{20}$ et les $\Delta_{..}^{02}$ et on répartit le dernier terme :

$$\begin{aligned} 4Q_{11}^{(3)} &= |\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10} \quad \Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}| \\ 6Q_{10}^{(5)} &= 2|\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}| + 4|\Delta_{00}^{10} - \Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{10}^{02}| \\ 3Q_{11}^{(6)} &= |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01}| + 2|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}| \\ 3Q_{11}^{(7)} &= 2|\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10} \quad \Delta_{10}^{02}| + |\Delta_{12}^{10} - \Delta_{02}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}| \\ 6Q_{01}^{(8)} &= 4|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{00}^{01} - \Delta_{01}^{01}| + 2|\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{01}| \\ Q_{00}^{(9)} &= |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| \\ 2Q_{01}^{(9)} &= 2|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}| \\ 2Q_{10}^{(9)} &= 2|\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}| \\ 4Q_{11}^{(9)} &= 2|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}| + 2|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}|. \end{aligned}$$

On cherche les termes en $|\Delta_{01}^{20} \quad \dots|$ et en $|\dots \quad \Delta_{10}^{02}|$, on trouve les deux expressions suivantes :

$$|\Delta_{01}^{20} \quad 2\Delta_{10}^{02} + 2(\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}) + 4(\Delta_{00}^{01} - \Delta_{01}^{01}) + 2(\Delta_{00}^{02})|,$$

soit

$$2|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{10}^{02} + (\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}) + 3\Delta_{00}^{01} - \Delta_{01}^{01}|,$$

et

$$|2\Delta_{01}^{20} + 4(\Delta_{00}^{10} - \Delta_{10}^{10}) + 2(\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10}) + 2(\Delta_{00}^{20}) \quad \Delta_{10}^{02}|,$$

soit

$$2|\Delta_{01}^{20} + 3\Delta_{00}^{10} - \Delta_{10}^{10} + (\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10}) \quad \Delta_{10}^{02}|,$$

expressions totalement symétriques. Restent alors à assembler :

$$\begin{aligned} 4Q_{11}^{(3)} &= |\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10} \quad \Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}| \\ 6Q_{10}^{(5)} &= 2|\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}| \\ 3Q_{11}^{(6)} &= |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01}| \\ 3Q_{11}^{(7)} &= |\Delta_{12}^{10} - \Delta_{02}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}| \\ 6Q_{01}^{(8)} &= 2|\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{01}| \\ Q_{00}^{(9)} &= |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}|. \end{aligned}$$

On cherche les termes en $|\Delta_{00}^{10} \quad \dots|$ et en $|\Delta_{10}^{10} \quad \dots|$ puis en $|\Delta_{02}^{10} \quad \dots|$ et en $|\Delta_{12}^{10} \quad \dots|$, on trouve les quatres expressions qui suivent :

$$\begin{aligned} &|\Delta_{00}^{10} \quad - 2\Delta_{00}^{01} - 2\Delta_{01}^{01} + \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01} + 2(\Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{01}) + \Delta_{00}^{01} + \Delta_{01}^{01}| \\ &|\Delta_{00}^{10} \quad - 3\Delta_{00}^{01} + \Delta_{01}^{01} + \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01}| \\ &|\Delta_{10}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01} + 2\Delta_{01}^{01} + \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01} + 2(\Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{01}) + \Delta_{00}^{01} + \Delta_{01}^{01}| \\ &|\Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{00}^{01} + 5\Delta_{01}^{01} + \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01}|, \end{aligned}$$

restent alors :

$$\begin{aligned} 4Q_{11}^{(3)} &= |\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10} \quad \Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}| \\ 3Q_{11}^{(7)} &= |\Delta_{12}^{10} - \Delta_{02}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}| \end{aligned}$$

donc :

$$|\Delta_{02}^{10} \quad (\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}) - \Delta_{00}^{02}|$$

$$|\Delta_{12}^{10} \quad \Delta_{00}^{02} - (\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01})|,$$

en résumé, on a les termes :

$$\begin{aligned} & |\Delta_{00}^{10} \quad - 3\Delta_{00}^{01} + \Delta_{01}^{01} + (\Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01})| \\ & |\Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{00}^{01} + 5\Delta_{01}^{01} + (\Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01})|, \\ & |(\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10}) \quad \Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \\ & 2|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{10}^{02} + (\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}) + 3\Delta_{00}^{01} - \Delta_{01}^{01}|, \\ & 2|\Delta_{01}^{20} + 3\Delta_{00}^{10} - \Delta_{10}^{10} + (\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10}) \quad \Delta_{10}^{02}|. \end{aligned}$$

Au total, le coefficient N_{11} est la somme des termes calculés ci-dessus, où l'on voit la nature des contributions, l'arête "centrale" de chaque direction, l'arête proche avec ses deux "moitiés" et, pour finir, l'arête éloignée. Écrit en fonction des A_i et des C_i , ceci donne :

$$\begin{aligned} 9N_{11} = & |\overrightarrow{A_1 C_5} \quad - 3\overrightarrow{A_1 C_8} + \overrightarrow{C_8 A_4} + (\overrightarrow{C_6 A_3} - \overrightarrow{A_2 C_6})| \\ & + |\overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_8} + 5\overrightarrow{C_8 A_4} + (\overrightarrow{C_6 A_3} - \overrightarrow{A_2 C_6})|, \\ & + |(\overrightarrow{A_4 C_7} - \overrightarrow{C_7 A_3}) \quad \overrightarrow{A_2 C_6} - \overrightarrow{C_6 A_3} - \overrightarrow{A_1 A_4}| \\ & + 2|\overrightarrow{C_8 C_6} \quad \overrightarrow{C_5 C_7} + (\overrightarrow{A_2 C_6} - \overrightarrow{C_6 A_3}) + 3\overrightarrow{A_1 C_8} - \overrightarrow{C_8 A_4}|, \\ & + 2|\overrightarrow{C_8 C_6} + 3\overrightarrow{A_1 C_5} - \overrightarrow{C_5 A_2} + (\overrightarrow{A_4 C_7} - \overrightarrow{C_7 A_3}) \quad \overrightarrow{C_5 C_7}|. \end{aligned}$$

Cette expression peut sembler assez bizarre et délicate à décrypter, en fait elle cache des vecteurs "naturels" que l'on va exhiber ci-dessous en vérifiant que ce coefficient est identique à celui de la Relation (25) quand on construit C_9 , élément complet, à partir de A_9 de l'élément incomplet. On part de

$$9N_{11} = 9 \times 4Q_{11} = 8 |\overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_9 C_7}| + 16 |\overrightarrow{C_8 C_9} \quad \overrightarrow{C_5 C_9}| + 4 |\overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_8 A_4}| + 8 |\overrightarrow{C_9 C_6} \quad \overrightarrow{A_1 C_8}|,$$

on remplace C_9 par son expression et on exprime tous les vecteurs ayant C_9 comme extrémité. Il vient :

$$9N_{11} = 2 |\overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{V_{02}}| + |\overrightarrow{U_{00}} \quad \overrightarrow{V_{00}}| + 4 |\overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_8 A_4}| + 2 |\overrightarrow{U_{20}} \quad \overrightarrow{A_1 C_8}|,$$

avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{U_{00}} &= 2\overrightarrow{C_8 C_6} + (\overrightarrow{A_1 C_5} - \overrightarrow{C_5 A_2}) + (\overrightarrow{A_4 C_7} - \overrightarrow{C_7 A_3}), \\ \overrightarrow{U_{20}} &= 2\overrightarrow{C_8 C_6} + (\overrightarrow{C_5 A_2} - \overrightarrow{A_1 C_5}) + (\overrightarrow{C_7 A_3} - \overrightarrow{A_4 C_7}), \\ \overrightarrow{V_{00}} &= 2\overrightarrow{C_5 C_7} + (\overrightarrow{A_1 C_8} - \overrightarrow{C_8 A_4}) + (\overrightarrow{A_2 C_6} - \overrightarrow{C_6 A_3}), \\ \overrightarrow{V_{02}} &= 2\overrightarrow{C_5 C_7} + (\overrightarrow{C_8 A_4} - \overrightarrow{A_1 C_8}) + (\overrightarrow{C_6 A_3} - \overrightarrow{A_2 C_6}). \end{aligned}$$

Il faut donc montrer que les deux façons de calculer le coefficient conduisent au même résultat ce qui n'est pas immédiatement évident. Nous choisissons de montrer que, terme à terme, les deux formules sont identiques. La démonstration consiste donc à énumérer les produits à réaliser, c'est ce qui suit (avec des notations simplifiées) :

le developpement du quad 8:

$$| \quad 15 \quad \text{produit} \quad - \quad 3 \quad 18 \quad + \quad \quad 84 \quad + \quad (\quad 63 \quad - \quad 26 \quad) \quad + \quad 6 \quad 57 \quad |$$

$$| \quad 52 \quad \text{produit} \quad \quad 18 \quad + \quad 5 \quad 84 \quad + \quad (\quad 63 \quad - \quad 26 \quad) \quad - \quad 2 \quad 57 \quad |$$

$$| \quad 47 \quad - \quad 73 \quad \text{produit} \quad \quad (\quad 26 \quad - \quad 63 \quad) \quad - \quad 14 \quad + \quad 2 \quad 57 \quad |$$

$$| \quad 86 \quad \text{produit} \quad 4 \quad 57 \quad + \quad 2 \quad (\quad 26 \quad - \quad 63 \quad) \quad + \quad 6 \quad 18 \quad - \quad 2 \quad 84 \quad |$$

le developpement du quad 9:

$$| \quad 15 \quad \text{produit} \quad 4 \quad 57 \quad + \quad 2 \quad (\quad 84 \quad - \quad 18 \quad) \quad + \quad 2 \quad (\quad 63 \quad - \quad 26 \quad) \quad + \quad 2 \quad 57 \quad |$$

$$\begin{aligned}
& + (18 - 84) + (26 - 63) - 2 \cdot 18 | \\
| 52 \quad \text{produit} & - 2 \cdot 57 - (18 - 84) - (26 - 63) + 4 \cdot 84 + 2 \cdot 18 | \\
| 47 - 73 \text{ produit} & 2 \cdot 57 + (18 - 84) + (26 - 63) - 2 \cdot 18 | \\
| 86 \quad \text{produit} & 4 \cdot 57 + 2(18 - 84) + 2(26 - 63) + 4 \cdot 18 |
\end{aligned}$$

puis, cette énumération faite, montrer que la différence est nulle.

La structure de ce coefficient permettra de trouver les 3 autres coefficients centraux en permutant, par symétrie, les vecteurs et les poids en repartant de l'élément complet qui offre un meilleur aspect.

Au final, on a, pour les coefficients, la liste suivante :

$$\begin{aligned}
N_{00} &= 4 |\overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{A_1 C_8}| \\
N_{10} &= \frac{2}{3} |\overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{V_{00}}| + \frac{4}{3} |\overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_8}| \\
N_{20} &= \frac{2}{3} |\overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{V_{00}}| + \frac{4}{3} |\overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{A_2 C_6}| \\
N_{30} &= 4 |\overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 C_6}| \\
N_{31} &= \frac{2}{3} |\overrightarrow{U_{20}} \quad \overrightarrow{A_2 C_6}| + \frac{4}{3} |\overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_6 A_3}| \\
N_{32} &= \frac{2}{3} |\overrightarrow{U_{20}} \quad \overrightarrow{C_6 A_3}| + \frac{4}{3} |\overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 C_6}| \\
N_{33} &= 4 |\overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_6 A_3}| \\
N_{13} &= \frac{2}{3} |\overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{V_{02}}| + \frac{4}{3} |\overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{C_8 A_4}| \\
N_{23} &= \frac{2}{3} |\overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{V_{02}}| + \frac{4}{3} |\overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{C_6 A_3}| \\
N_{03} &= 4 |\overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{C_8 A_4}| \\
N_{01} &= \frac{2}{3} |\overrightarrow{U_{00}} \quad \overrightarrow{A_1 C_8}| + \frac{4}{3} |\overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_8 A_4}| \\
N_{02} &= \frac{2}{3} |\overrightarrow{U_{00}} \quad \overrightarrow{C_8 A_4}| + \frac{4}{3} |\overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_8}| \\
N_{11} &= \frac{1}{9} (2 |\overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{V_{02}}| + |\overrightarrow{U_{00}} \quad \overrightarrow{V_{00}}| + 4 |\overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{C_8 A_4}| + 2 |\overrightarrow{U_{20}} \quad \overrightarrow{A_1 C_8}|) \\
N_{21} &= \frac{1}{9} (2 |\overrightarrow{C_5 A_2} \quad \overrightarrow{V_{02}}| + |\overrightarrow{U_{20}} \quad \overrightarrow{V_{00}}| + 4 |\overrightarrow{A_1 C_5} \quad \overrightarrow{C_6 A_3}| + 2 |\overrightarrow{U_{00}} \quad \overrightarrow{A_2 C_6}|) \\
N_{12} &= \frac{1}{9} (2 |\overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{V_{00}}| + |\overrightarrow{U_{00}} \quad \overrightarrow{V_{02}}| + 4 |\overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 C_8}| + 2 |\overrightarrow{U_{20}} \quad \overrightarrow{C_8 A_4}|) \\
N_{22} &= \frac{1}{9} (2 |\overrightarrow{C_7 A_3} \quad \overrightarrow{V_{00}}| + |\overrightarrow{U_{20}} \quad \overrightarrow{V_{02}}| + 4 |\overrightarrow{A_4 C_7} \quad \overrightarrow{A_2 C_6}| + 2 |\overrightarrow{U_{00}} \quad \overrightarrow{C_6 A_3}|),
\end{aligned}$$

avec les vecteurs déjà vus :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{U_{00}} &= 2\overrightarrow{C_8 C_6} + (\overrightarrow{A_1 C_5} - \overrightarrow{C_5 A_2}) + (\overrightarrow{A_4 C_7} - \overrightarrow{C_7 A_3}), \\
\overrightarrow{U_{20}} &= 2\overrightarrow{C_8 C_6} + (\overrightarrow{C_5 A_2} - \overrightarrow{A_1 C_5}) + (\overrightarrow{C_7 A_3} - \overrightarrow{A_4 C_7}), \\
\overrightarrow{V_{00}} &= 2\overrightarrow{C_5 C_7} + (\overrightarrow{A_1 C_8} - \overrightarrow{C_8 A_4}) + (\overrightarrow{A_2 C_6} - \overrightarrow{C_6 A_3}), \\
\overrightarrow{V_{02}} &= 2\overrightarrow{C_5 C_7} + (\overrightarrow{C_8 A_4} - \overrightarrow{A_1 C_8}) + (\overrightarrow{C_6 A_3} - \overrightarrow{A_2 C_6}).
\end{aligned}$$

En remarque finale sur cet élément, on note que, plus simple dans son aspect élément fini, il est peu évident d'analyser son jacobien et que, par suite, construire un élément complet semble être la meilleure solution pour valider l'élément réduit.

Remarquons que pour un élément droit de côté unité, tous les coefficients valent 1, ce qui est rassurant.

- Le pentaèdre de degré 2 à 15 nœuds.

Pour cet élément, l'écriture à la Bézier incomplète est difficile, techniquement, à exhiber car cet élément ne se définit pas par une interpolation transfinie, cf. [15]. Le moyen de trouver cette formulation est de considérer la forme élément fini en exprimant les nœuds des arêtes en fonction des points de contrôle puis en regroupant les termes en fonction de cette écriture. On obtient donc une forme de Bézier incomplète qui, toutefois, conduit à des calculs fastidieux, nous allons donc proposer comme méthode d'analyse ce que nous avons fait pour le quadrilatère réduit, à savoir se ramener au cas d'un élément complet en créant les trois nœuds manquants et les trois points de contrôle associés.

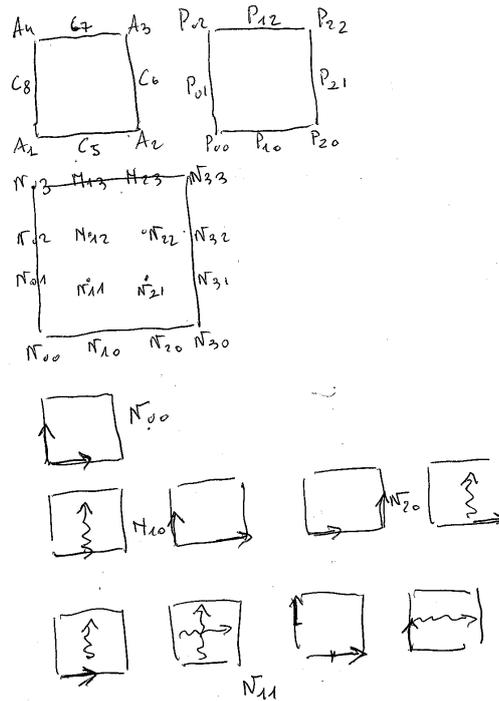


FIG. 26 – Correspondance entre les numérotations Bézier et élément fini pour les nœuds et points de contrôle, numérotation logique des coefficients de contrôle et exemple d’un coefficient associé à un sommet, des deux coefficients associés à une arête et de l’un des 4 coefficients centraux.

Indiquons que les nœuds manquants sont définis comme :

$$A_{16} = -\frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_4 + A_5) + \frac{1}{2}(A_7 + A_{10} + A_{13} + A_{14})$$

$$A_{17} = -\frac{1}{4}(A_2 + A_3 + A_5 + A_6) + \frac{1}{2}(A_8 + A_{15} + A_{11} + A_{14})$$

et :

$$A_{18} = -\frac{1}{4}(A_1 + A_3 + A_4 + A_6) + \frac{1}{2}(A_9 + A_{15} + A_{12} + A_{13}),$$

puis que les points de contrôle s’en déduisent simplement, par exemple on a :

$$C_{16} = -\frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_4 + A_5) + \frac{1}{2}(C_7 + C_{10} + C_{13} + C_{14}).$$

- L’hexaèdre de degré 2 à 20 nœuds.

La difficulté technique vue ci-dessus dans le cas du quadrilatère Serendip se retrouve ici avec encore plus d’acuité bien que cet élément soit bien défini par une interpolation transfinie. Pour éviter le côté pénible d’une telle analyse à la Bézier nous allons également proposer comme méthode d’analyse ce que nous avons fait pour le quadrilatère réduit, c’est-à-dire de construire un élément complet pour retrouver ce cas.

Les nœuds manquants des faces se définissent comme dans le cas d’un quadrilatère ou d’une face quadrilatérale d’un pentaèdre. Le nœud central, quant à lui, présente une forme différente. On a en effet, \$A_{27}\$ image du triplet \$(0, 0, 0)\$, donc :

$$A_{27} = -\frac{1}{4}(A_1 + \dots + A_8) + \frac{1}{4}(A_9 + \dots + A_{20}).$$

Une fois les nœuds manquants construits, on calcule les points de contrôle. Pour les nœuds de face, le contrôle se trouve comme dans le cas précédent, en effet, on a, par exemple :

$$A_{21} = -\frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \frac{1}{2}(A_9 + A_{10} + A_{11} + A_{12}).$$

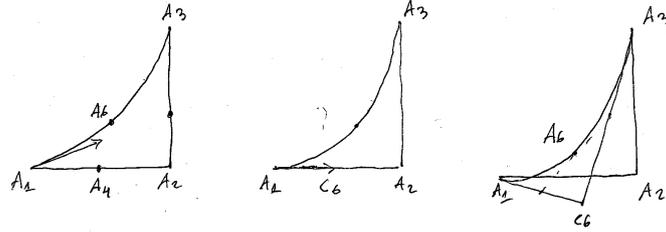


FIG. 27 – À gauche, un triangle de degré 2 valide, au milieu et à droite, deux cas invalides, le jacobien associé au sommet A_1 est nul ou négatif respectivement.

et par suite :

$$C_{21} = -\frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \frac{1}{2}(C_9 + C_{10} + C_{11} + C_{12}).$$

Ceci étant calculé, pour le nœud central, le contrôle est calculé à partir de la relation le liant aux autres, à savoir, comme on a :

$$A_{27} = \frac{1}{64}(A_1 + \dots + A_8) + \frac{1}{32}(C_9 + \dots + C_{20}) + \frac{1}{16}(C_{21} + \dots + C_{26}) + \frac{1}{8}C_{27},$$

on déduit que :

$$8C_{27} = 64A_{27} - (A_1 + \dots + A_8) - 2(C_9 + \dots + C_{20}) - 4(C_{21} + \dots + C_{26}),$$

et, au final :

$$C_{27} = 8A_{27} - \frac{1}{8}(A_1 + \dots + A_8) - \frac{1}{4}(C_9 + \dots + C_{20}) - \frac{1}{2}(C_{21} + \dots + C_{26}),$$

qui s'exprime également après avoir remplacé A_{27} comme :

$$C_{27} = -\frac{5}{8}(A_1 + \dots + A_8) + \frac{3}{4}(C_9 + \dots + C_{20}) - \frac{1}{2}(C_{21} + \dots + C_{26}).$$

L'élément complet équivalent est ainsi parfaitement défini.

5.2 Positivité du jacobien

5.2.1 Quelques jacobiens particuliers

Certains jacobiens particuliers (voire tous mais ce n'est pas évident à l'œil) ont une interprétation géométrique très intéressante. De même, certains coefficients sont faciles à interpréter.

- Les jacobiens "coins" s'interprètent simplement, à un facteur près, comme la surface (le volume) du triangle (du tétraèdre) de sommets le sommet en question et ses deux (trois) points de contrôle adjacents. Ils contrôlent l'angle entre les tangentes issues du sommet et, en trois dimensions, l'angle entre les plans tangents aux sommets.
- Les coefficients de jacobien qui s'appuient sur un point de contrôle central contrôlent le non retournement de l'élément (par exemple, pour un quadrilatère de degré 2, le nœud A_5 n'est pas au "dessus" du nœud A_7).
- Les coefficients de jacobien purement "centraux" contrôlent l'écrasement de l'élément vers son "centre" (c'est le cas d'un hexaèdre avec les huit jacobiens "coins" positif avec un coefficient N_{111} négatif).

La Figure 27 montre, sur l'exemple d'un triangle, un cas où le jacobien associé à un coin est strictement positif, nul et négatif, de gauche à droite.

5.2.2 Expression générique et positivité

Le jacobien, on l'a vu pour la plupart des éléments, a une expression sous la forme d'un polynôme de Bézier dont les coefficients ont une forme générique. On a vu ces expressions lors de la discussion. Rappelons que si les coefficients sont,

- Propriété 1 - strictement positifs en une valeur des variables interpolante (le polynôme passe par le coefficient),
- Propriété 2 - positifs ou nuls ailleurs,

alors le jacobien est positif partout et que si la Propriété 1 est vraie mais que la Propriété 2 n'est pas, on peut affiner l'analyse.

Pour s'assurer de la positivité d'un jacobien, on vérifie en premier la stricte positivité des jacobiens²¹ associés aux sommets, les "coins". Ensuite, on calcule les coefficients associés aux arêtes, s'il y en a. Si l'un est négatif, on raffine l'arête. Ensuite on passe à ceux des faces (s'il y en a) puis, enfin aux coefficients internes (s'il y en a).

5.2.3 Raffinement par la subdivision d'une arête

On calcule le jacobien au nœud²² "milieu", s'il est négatif l'élément est faux. Sinon, on coupe l'arête en ce nœud et on définit les deux moitiés d'arêtes avec leurs nouveaux points de contrôle. À partir de ces nouveaux points, on calcule les nouveaux coefficients de l'arête qui sont alors analysés.

En pratique, les nouveaux coefficients peuvent être obtenus de manière directe en suivant exactement l'algorithme de De Casteljaou. Pour fixer les idées, on considère le cas d'un tétraèdre de degré 2 et on suppose que ses 4 jacobiens coins sont valides tandis qu'un coefficient d'arête est négatif. Prenons le cas de l'arête $[A_1A_2]$ ou, en notation Bézier, $[P_{2000}P_{0200}]$. Le jacobien se réduit à quatre termes :

$$\mathcal{J}(u, v, 0, 0) = u^3 N_{3000} + 3u^2 v N_{2100} + 3uv^2 N_{1200} + v^3 N_{0300},$$

avec $N_{3000} > 0$, $N_{0300} > 0$ et, par exemple, N_{2100} négatif. On calcule $\mathcal{J}(u, v, 0, 0)$ pour $u = v = \frac{1}{2}$, ce qui est le choix le plus naturel. Si cette valeur n'est pas strictement positive, l'élément est faux. Sinon, on va couper l'arête en deux morceaux, l'un défini sur $[A_1A_5]$, l'autre sur $[A_5A_2]$. Pour le premier, on cherche les coefficients M_{ijkl} tels que le jacobien s'écrive :

$$\mathcal{J}(u, v, 0, 0) = u^3 M_{3000} + 3u^2 v M_{2100} + 3uv^2 M_{1200} + v^3 M_{0300}$$

et l'algorithme d'évaluation de De Casteljaou donne les nouveaux coefficients :

$$M_{3000} = N_{3000}$$

$$M_{0300} = \mathcal{J}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

puis, pour trouver les autres coefficients, on définit la séquence

$$M_{3000}^1 = \frac{M_{3000} + M_{2100}}{2}$$

$$M_{2100}^1 = \frac{M_{2100} + M_{1200}}{2}$$

$$M_{3000}^2 = \frac{M_{3000}^1 + M_{2100}^1}{2}$$

et \mathcal{J} devient sur ce morceau :

$$\mathcal{J}(u, v, 0, 0) = u^3 M_{3000} + 3u^2 v M_{3000}^1 + 3uv^2 M_{3000}^2 + v^3 M_{0300}.$$

Le même raisonnement s'applique pour le second morceau de l'arête. L'intérêt est que la condition qui portait sur N_{2100} porte maintenant sur M_{3000}^1 et M_{3000}^2 qui sont beaucoup plus proches du polynôme, ainsi l'analyse est plus fine.

²¹dont le signe ne change pas après un raffinement.

²²ou en un point, le milieu, dans le cas où il n'y a pas de nœud, exemple de l'hexaèdre de degré 1.

5.2.4 Raffinement par la subdivision d'une face

Ici on a déjà passé le cap de la vérification des arêtes, on passe alors aux coefficients associés aux faces. On calcule le jacobien en un nœud (ou un point quelconque) de la face, s'il est négatif l'élément est faux. Sinon, on coupe la face en ce nœud et on définit les deux, trois ou quatre sous-faces avec leurs nouveaux points de contrôle. À partir de ces nouveaux points, on calcule les nouveaux coefficients de la face qui sont alors analysés.

En pratique, les nouveaux coefficients peuvent être obtenus de manière directe en suivant exactement l'algorithme de De Casteljaou. On reprend l'exemple ci-dessus et on suppose maintenant que le coefficient N_{1110} est strictement négatif. Dans cet exemple, le jacobien se réduit à 10 termes :

$$\mathcal{J}(u, v, w, 0) = u^3 N_{3000} + 3u^2 v N_{2100} + 3uv^2 N_{1200} + v^3 N_{0300} + 3v^2 w N_{0210} + 3vw^2 N_{0120} + w^3 N_{0030} \\ + 3uw^2 N_{1020} + 3u^2 w N_{2010} + 6uvw N_{1110}.$$

On calcule alors $\mathcal{J}(u, v, w, 0)$ pour $u = v = w = \frac{1}{3}$ qui correspond à un point de la face noté G, ce choix étant le plus naturel. Si cette valeur n'est pas strictement positive, l'élément est faux. Sinon, on va couper la face en trois morceaux l'un défini sur $[A_1 A_2 G]$, l'autre sur $[A_2 A_3 G]$ et le dernier sur $[A_3 A_1 G]$. On utilise à nouveau l'algorithme d'évaluation qui consiste à construire la séquence :

$$M_{3000}^1 = \frac{N_{3000} + N_{2100} + N_{2010}}{3} \\ M_{2100}^1 = \frac{N_{2100} + N_{1200} + N_{1110}}{3} \\ M_{1200}^1 = \frac{N_{1200} + N_{0300} + N_{0210}}{3} \\ M_{2010}^1 = \frac{N_{2010} + N_{1110} + N_{1020}}{3} \\ M_{1110}^1 = \frac{N_{1110} + N_{0210} + N_{0120}}{3} \\ M_{1020}^1 = \frac{N_{1020} + N_{0120} + N_{0030}}{3},$$

puis :

$$M_{3000}^2 = \frac{M_{3000}^1 + M_{2100}^1 + M_{2010}^1}{3} \\ M_{2100}^2 = \frac{M_{2100}^1 + M_{1200}^1 + M_{1110}^1}{3} \\ M_{2010}^2 = \frac{M_{2010}^1 + M_{1110}^1 + M_{1020}^1}{3}$$

en notant que

$$M_{3000}^3 = \frac{M_{3000}^2 + M_{2100}^2 + M_{2010}^2}{3}$$

n'est autre que $\mathcal{J}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

Ainsi, la condition N_{1110} positif ou nul est remplacée par la condition de positivité ou de nullité de ces neuf coefficients, l'analyse est ainsi plus fine.

5.2.5 Raffinement par la subdivision d'un élément

Ici on a déjà passé le cap de la vérification des arêtes et des faces. On calcule le jacobien en un nœud (ou un point) interne à l'élément, s'il est négatif ou nul l'élément est faux. Sinon, on coupe l'élément en ce nœud (ou point) et on définit les différents sous-éléments avec leurs nouveaux points de contrôle. À partir de ces nouveaux points, on calcule les nouveaux coefficients de l'élément qui sont alors analysés.

Dans le principe, les nouveaux coefficients peuvent être obtenus de manière directe en suivant exactement le même algorithme de De Casteljaou.

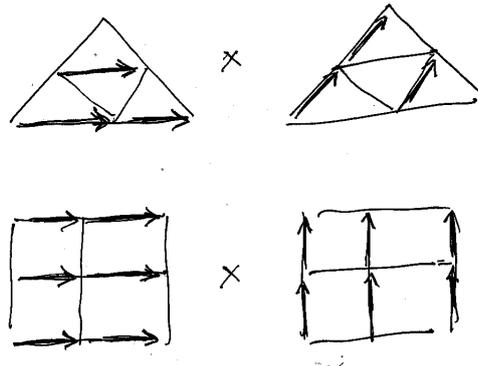


FIG. 28 – Les vecteurs en jeu pour un triangle de degré 2 (haut), pour un quadrilatère à 9 nœuds (bas).

5.2.6 Une méthode alternative totalement mécanique

Comme nous avons exprimé les jacobiens sous la forme (ou une forme équivalente)

$$\mathcal{J}(u, v) = \sum_i \sum_j B_i^n(u) B_j^m(v) N_{ij},$$

et que l'on a :

$$N_{ij} = \sum_k \omega_k T_{ijk},$$

avec ω_k un poids (positifs avec $\sum_k \omega_k = 1, 4$ ou 8 , respectivement pour le degré 1, le degré 2 en deux dimensions et le degré 2 en trois dimensions) et T_{ijk} un déterminant, une condition suffisante de validité est que tous ces termes T_{ijk} soient positifs ou nuls (les jacobiens étant strictement positifs aux "coins"). Ceci nécessite d'énumérer tous ces termes, il est néanmoins facile de voir que l'on peut les trouver sans réfléchir, l'algorithme est le suivant :

- prendre tous les vecteurs construits sur les sommets et points de contrôle dans chaque direction,
- former **tous** les déterminants possibles entre ces vecteurs (un dans chaque direction),
- calculer ces déterminants, s'ils sont tous positifs ou nuls (les jacobiens étant strictement positifs aux "coins"), l'élément est valide.

La Figure 28 montre, sur deux exemples, les vecteurs de chaque direction qui se combinent pour former les termes de contrôle. Notons que pour les éléments réduits, les vecteurs à mettre en jeu ne sont pas nécessairement ceux construits sur les points de contrôle (voir ci-dessous).

La condition est suffisante mais plus exigeante car elle exclut des combinaisons qui pourraient se compenser.

5.2.7 Une méthode alternative pour les éléments Serendip

Une méthode simple dans son esprit peut être utilisée pour valider les éléments incomplets, il suffit de les compléter. Par exemple pour le quadrilatère à 8 nœuds, on calcule le point image du couple $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ que l'on désigne par A_9 puis on construit un élément complet avec ce nœud comme neuvième nœud et on calcule le point de contrôle C_9 achevant ainsi la définition d'un quadrilatère complet dont l'analyse est plus simple. Sur le papier les autres éléments incomplets peuvent être traités de cette façon.

On peut également utiliser la méthode alternative liée au cas complet et donnée ci-dessus en définissant comme vecteurs, ceux associés aux arêtes enrichi des paires de vecteurs liées au fait qu'il manque un nœud par face ou un nœud interne.

5.3 Synthèse

Le Tableau (1) synthétise les résultats obtenus.

forme	degré des p_i	# de nœuds	degré de \mathcal{J}	# de coeff.	# de termes	commentaires
triangle $P1$	1	3	0	1	1	surface du triangle
quadrilatère $Q1$	1	4	1×1	4	4	convexité du quadrilatère
triangle $P2$	2	6	2	6	9	jacobiens aux nœuds + extremum
quadrilatère $Q2$	2	9	3×3	16	36	
quadrilatère $Q2'$	2	8	$2 \times 2 + 1 \times 3 + 3 \times 1$	16		élément Serendip + vecteurs "naturels"
tétraèdre $P1$	1	4	0	1	1	volume du tétraèdre
pentaèdre $R1$	1	6	1×2	9	12	
hexaèdre $Q1$	1	8	$2 \times 2 \times 2$	27	64	
tétraèdre $P2$	2	10	3	20	64	
pentaèdre $R2$	2	18	4×5	90	972	
pentaèdre $R2'$	2	15				élément Serendip + vecteurs "naturels"
hexaèdre $Q2$	2	27	$5 \times 5 \times 5$	216	5832	
hexaèdre $Q2'$	2	20				élément Serendip + vecteurs "naturels"

Tableau 1 : *Caractéristiques des éléments finis de Lagrange.*

Quelques commentaires sur ce tableau, élément par élément (CS pour condition suffisante, CN pour nécessaire, CNS pour nécessaire et suffisante).

Pour tous les éléments, on a une CN portant sur les coefficients (jacobiens) coins.

- Triangle $P1$: le calcul de la surface donne la CNS.
- Quadrilatère $Q1$: la convexité (le calcul de 4 surfaces) est la CNS.
- Triangle $P2$: une CS portant sur 6 coefficients²³, une CNS si on calcule l'extremum.
- Quadrilatère $Q2$: une CS portant sur 16 coefficients.
- Quadrilatère $Q2$ réduit : une CS portant sur 16 coefficients ou un passage par l'élément complet.
- Tétraèdre $P1$: le calcul du volume donne la CNS.
- Pentaèdre $R1$: une CS portant sur 9 coefficients ou une CNS portant sur 6 coefficients seulement quand les faces quadrilatérales sont planes.
- Hexaèdre $Q1$: une CS portant sur 27 coefficients.
- Tétraèdre $P2$: une CS portant sur 20 coefficients.
- Pentaèdre $R2$: une CS portant sur 90 coefficients sous réserve de savoir les énumérer sinon une CS par une méthode alternative.
- Pentaèdre $R2$ réduit : une CS par une méthode alternative ou la construction virtuelle d'un élément complet.
- Hexaèdre $Q2$: une CS portant sur 216 coefficients sous réserve de savoir les énumérer sinon une CS par une méthode alternative.
- Hexaèdre $Q2$ réduit : une CS par une méthode alternative ou la construction virtuelle d'un élément complet.
- Pyramides : une CS par une méthode alternative.

6 En pratique

On indique ici comment, en pratique, procéder pour vérifier la validité d'un élément de degré 2. Les étapes sont les suivantes :

²³En fait, comme pour les autres éléments, les (3, ici) conditions sur les "coins" sont nécessaires.

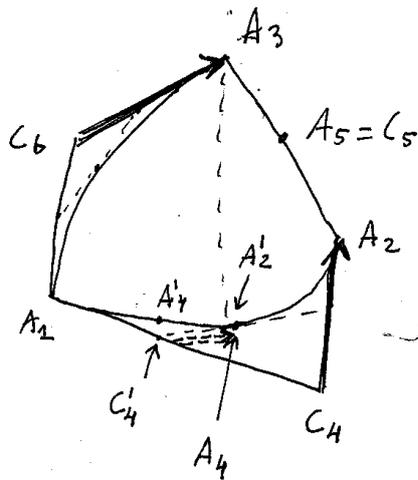


FIG. 29 – Les vecteurs en jeu pour un triangle de degré 2 avant et après un raffinement en coupant en A_4 . Avant raffinement, il y a le terme avec le déterminant $|C_4A_2 \ C_6A_3|$ qui est négatif. Après raffinement, cette interaction est remplacée par une interaction entre les vecteurs $C_4'A_2'$ et $C_6'A_3'$ avec un déterminant positif, C_4' étant le nouveau point de contrôle associé à l'arête issue de A_1 et joignant A_4 , le nouveau sommet A_2' de l'élément de gauche du découpage.

- Pour les éléments complets.

- Si l'élément est droit, utiliser son homologue de degré 1
- Sinon :
 - 1 Calcul des points de contrôle,
 - 2 Calcul des jacobiens "coins", si l'un est négatif ou nul, l'élément n'est pas valide, FIN.
 - 3 Calcul des coefficients associés aux arêtes, si l'un est négatif, évaluer le jacobien en un nœud de l'arête, s'il est négatif ou nul, l'élément n'est pas valide, FIN. Sinon, raffiner l'arête et continuer tant que.
 - 4 Calcul des coefficients associés aux faces, si l'un est négatif, évaluer le jacobien en un nœud de la face, s'il est négatif ou nul, l'élément n'est pas valide, FIN. Sinon, raffiner la face et continuer tant que.
 - 4 Calcul des coefficients "internes", si l'un est négatif, évaluer le jacobien en un nœud interne à l'élément, s'il est négatif ou nul, l'élément n'est pas valide, FIN. Sinon, raffiner l'élément et continuer tant que.

- Pour les éléments incomplets.

- Si l'élément est droit, utiliser son homologue de degré 1
- Sinon :
 - 1 Calcul des points de contrôle,
 - 2 Calcul des jacobiens "coins", si l'un est négatif ou nul, l'élément n'est pas valide, FIN.
 - 3 Utilisation de la méthode alternative (en rajoutant les "bons" vecteurs), un raffinement explicite de l'élément pouvant être fait (qui change la nature des liens entre les vecteurs qui interagissent) ou ajout des nœuds manquant pour retrouver le cas standard.

Les ingrédients nécessaires à la mise en œuvre de ce processus de vérification sont :

- un programme de calcul du jacobien en un point quelconque,
- un programme de calcul des coefficients de contrôle,
- un programme de raffinement pour une arête, une face ou l'élément lui-même.

Remarque. Il est clair que les arêtes courbes réalisant une approximation précise de la géométrie au sens où l'écart entre la courbe et la corde est petit conduisent à avoir les jacobiens positifs automatiquement.

Remarque. Si le nombre de calculs devient prohibitif, on peut penser à ne calculer que certains coefficients, impérativement ceux associés aux sommets et aux nœuds des arêtes, s'il en est, puis, en aléatoire un échantillon parmi les autres nœuds ou, mieux, toujours en aléatoire, un échantillon de jacobiens (et non de coefficients) sur des points sur les arêtes, les faces et à l'intérieur.

Une autre idée est de valider l'élément en calculant ses coefficients coins (impérativement) puis de ne calculer les coefficients qu'aux points de la quadrature (par exemple de Gauss) qui sera utilisée plus tard lors des calculs proprement dits.

7 Quelques autres applications

En bref, on indique quelques autres applications de cette étude.

Analyse de maillages surfaciques. On utilise les résultats pour analyser un triangle (un quadrilatère) de degré 2 de l'espace \mathbb{R}^3 . La notion de jacobien n'ayant pas de sens dans ce cas, on construit deux éléments virtuels de part et d'autre du triangle (prenons ce cas), des tétraèdres à 10 nœuds qui sont alors analysés en tant que tels en s'assurant que les nœuds créés et le quatrième sommet ne brisent pas l'analyse via leurs arêtes (virtuelles), voir [12] et [13]. Pour un élément quadrilatéral, on définira, de même, deux hexaèdres virtuels en évitant toute interférence parasite.

Correction de maillages surfaciques faux. Si on sait détecter (voir ci-dessus) un triangle de surface faux, gardons ce cas, l'examen du ou des jacobiens ou coefficients impropres des tétraèdres virtuels construits permet de savoir comment corriger le triangle (revoir la Figure 27 et voir [13]).

Notons qu'un cas fréquent de maillage faux est celui où une arête courbe part tangente à l'une de ses arêtes (droites) consécutives. La correction revient alors à courber également cette arête droite.

Construction automatique de maillages de degré 2. Partant d'une surface composée de triangles à 6 nœuds, il est possible de développer un mailleur automatique en tétraèdres à 10 nœuds, voir [12]. L'idée est de partir d'un maillage au degré 1 puis de l'enrichir, ceci nécessite cependant de modifier la façon de construire le maillage de degré 1 car il faut anticiper la création ultérieure des éléments de degré 2.

Maillages mobiles. La résolution des problèmes où le maillage bouge au cours du temps nécessite de garantir qu'à chaque déplacement le maillage reste valide. En particulier, il n'est pas suffisant de vérifier que le maillage est valide à l'instant initial et à l'instant final mais qu'il l'est à tout instant. Ce problème revient à vérifier que le jacobien d'un élément de \mathbb{R}^3 extrudé dans une quatrième dimension est valide. La généralité de notre analyse permet de dégager des conditions suffisantes dans ce cadre en étudiant le jacobien d'un tétraèdre tensorisé par la direction de déplacement.

Extension aux degrés élevés et p -adaptation. Sur le principe, notre analyse s'applique, en pratique, voir la remarque formulée ci-dessous dans la conclusion.

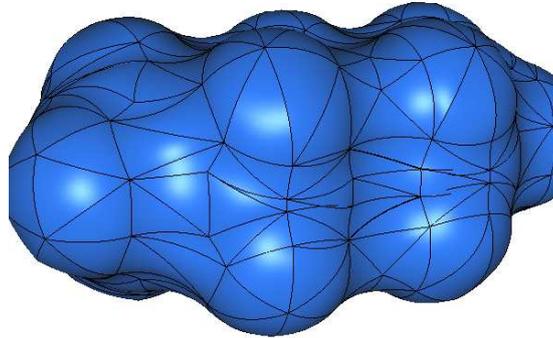


FIG. 30 – Détection des éléments faux d'un maillage de surface composé de triangles de degré 2. La construction de tétraèdres virtuels est utilisée pour analyser les triangles et repérer ceux qui sont faux.

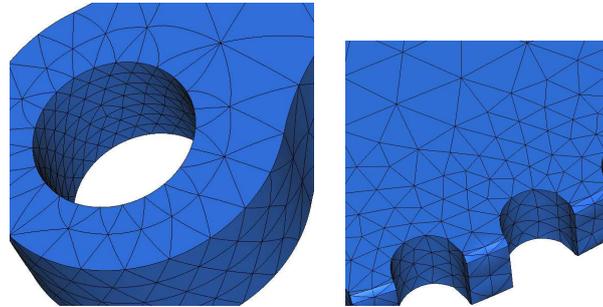


FIG. 31 – Deux vues de zones courbes où les éléments courbes permettent de représenter fidèlement la géométrie. Noter que certaines arêtes sont courbées dans la zone plane par "contagion" et au regard de critères de qualité.

8 Quelques exemples de maillages de degré 2

Les Figures 30 et 31 montrent quelques exemples de maillages de degré 2. La première figure est un maillage de surface où quelques éléments ne sont pas valides. La détection de ces éléments a été faite en utilisant des tétraèdres virtuels et en analysant leur jacobien au travers des coefficients concernés. La deuxième figure montre l'intérêt évident des éléments courbes pour bien capter une géométrie courbe avec un minimum d'éléments.

9 Conclusions et perspectives

On a discuté de la validité des éléments de Lagrange usuels aux degrés 1 et 2. Hormis quelques cas simples où on a montré une condition nécessaire et suffisante, on a seulement su exprimer une condition suffisante en regardant la forme Bézier des éléments.

L'hexaèdre de degré 1 est apparu comme délicat à analyser malgré son apparente simplicité. On a vu que les simplexes sont sensiblement plus faciles à analyser que les autres éléments et, dans cet esprit, on a vu que les éléments incomplets sont délicats. Pour les simplexes, il est relativement facile de mener l'analyse pour des degrés quelconques, même dans des espaces de dimension quelconque, cf. [11], pour les autres éléments la généralité du formalisme à la Bézier conduit à la même conclusion avec, cependant, l'apparition de polynôme de degré très élevé. Dans cet ordre d'idées, on a vu que le nombre de calcul à effectuer pour

valider un élément devient, en trois dimensions, rapidement prohibitif en particulier pour les éléments non simpliciaux et, notons le, que le degré du polynôme jacobien est, pour les simplexes, sensiblement moins élevé que pour les autres éléments (ce qui semblerait impliquer une plus grande stabilité). Il est facile de voir qu'en augmentant le degré, ce nombre explose.

L'utilisation d'éléments finis de degré élevé semble ainsi peu réaliste dans le cas de géométrie complexe, sauf à restreindre l'approximation géométrique au degré 2 puis à utiliser pleinement le degré des éléments dans les calculs proprement dits.

Peut-on affiner les conditions et obtenir des conditions nécessaires et suffisantes, peut-on trouver comment traiter facilement (et à moindre coût) les éléments dont les coefficients sont en très grand nombre voire pratiquement impossibles à énumérer, ..., sont quelques pistes à regarder. Pour finir, que peut-on dire des méthodes s'appuyant sur des constructions géométriques plus complexes comme, par exemple, les B-splines ou les Nurbs ? Un début de réponse, de notre point de vue, se trouve dans [17], [18] et dans [10] pour les Bézier rationnels dans le cas des triangles et tétraèdres puis dans le cas des quadrilatères et hexaèdres.

Références

- [1] CODE_ ASTER, *Fonctions de forme et points d'intégration des éléments finis*, Fascicule r3.01, Révision 4261, 2010.
- [2] P. BÉZIER, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, 4, Hermès, Paris, 1986.
- [3] H. BOROUCHAKI AND P.L. GEORGE, Construction of tetrahedral meshes of degree two, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **90**, 9, pp. 1156-1182, 2012.
- [4] P.G. CIARLET, *The Finite Element Method*, North Holland, 1978.
- [5] P.G. CIARLET, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, in Handbook of Numerical Analysis, vol II, Finite Element methods (Part 1), P.G. Ciarlet and J.L. Lions Eds, North Holland, 17-352, 1991.
- [6] P. DE CASTELJAU, *Formes à pôles*, Mathématiques et CAO, tome 2, Hermès, Paris, 1985.
- [7] A. ERN ET J.L. GUERMOND *Éléments finis : théorie, applications, mise en œuvre*. Mathématiques & Applications, 36, Smaï, Springer, 2002.
- [8] G. FARIN, *Curves and surfaces for CAGD. A practical guide*. 5th edition, Academic Press, 2002.
- [9] P.J. FREY AND P.L. GEORGE, *Mesh Generation*, 2nd edition, ISTE and Wiley, 2008.
- [10] P.L. GEORGE, Fonctions de forme des éléments finis généralisés de Bézier rationnels, *RR INRIA* **8289**, 2013.
- [11] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Simplexe de Lagrange de degré et de dimension arbitraire, *C.R. Acad. Sci. Paris, Serie 1* 349, pp. 905-910, 2011.
- [12] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 3 : Tétraèdre P2, *RR INRIA* **7626**, 2011.
- [13] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Analyse et correction des maillages de surface de degré 2, *RR INRIA* **7668**, 2011.
- [14] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2, version 2, *RR INRIA* **7964**, 2012.
- [15] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Sur les éléments finis pentaédriques de degré 1 et 2, *RR INRIA* **7992**, 2012.
- [16] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Sur les éléments finis hexaédriques de degré 1 et 2, *RR INRIA* **8039**, 2012.
- [17] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 1. *RR INRIA* **8201**, 2013.
- [18] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 2. *RR INRIA* **8202**, 2013.
- [19] P.L. GEORGE, H. BOROUCHAKI ET P. LAUG, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 1 : Triangle P2, *RR INRIA* **7519**, 2011.
- [20] J.C. LÉON, *Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO*, Hermès, Paris, 1991.

- [21] A. PERRONNET Interpolation transfinie et maillage, in *Maillage et adaptation*, MIM, Hermès Science, Paris, 2001.
- [22] L. PIEGL AND W. TILLER, *The NURBS Book*, Springer, 1997.
- [23] X.J. XUO, M.S. SHEPHARD, R.M. O'BARA, R. NATASIA AND M.W. BEAL, Automatic p-version mesh generation for curved domains, *Eng. with Comp.*, 20, 273-285, 2004.
- [24] O. SAHNI, X.J. XUO, K.E. JANSE AND M.S. SHEPHARD, Curved boundary layer meshing for adaptive viscous flow simulations, *FEAD*, 46, 132-139, 2010.

Annexe

On montre ici le programme (en Fortran!) de calcul du jacobien d'un tétraèdre de degré 2 en un point quelconque d'un élément donné.

```

SUBROUTINE P2DUVW( IEL, NOEUDS, SIMP, COOR, XCH, DET2)
C *****
C BUT : JACOBIEN EN XCH
C ---
C IN : IEL, NOEUDS, SIMP, COOR, XCH
C --
C OUT : DET2 : LE JACOBIEN
C ---
C USAGE : GHS3D P2
C *****
C PROGRAMMEUR : PL G INRIA 2011.
C .....
C     INTEGER NOEUDS(6), SIMP(4), IEL
C     REAL COOR(3,*)
C     REAL*8 XCH(3)
C     REAL*8 DET2
C
C     REAL*8 PX(10), PY(10), PZ(10), XYZ(3,10)
C     REAL*8 X, Y, Z, MAT1, MAT2, MAT3, MAT4, MAT5, MAT6, MAT7, MAT8, MAT9
C     INTEGER I, J, K
C     --- CHARGEMENT DES COORDONNEES DES NOEUDS DE L'ELEMENT SIMP(1:4)
C     DO K=1,4
C         --- LES NOEUDS SOMMETS
C         I = SIMP(K)
C         XYZ(1,K) = COOR(1,I)
C         XYZ(2,K) = COOR(2,I)
C         XYZ(3,K) = COOR(3,I)
C     ENDDO
C     DO K=1,6
C         --- LES NOEUDS DES ARETES
C         I = NOEUDS(K)
C         XYZ(1,K+4) = COOR(1,I)
C         XYZ(2,K+4) = COOR(2,I)
C         XYZ(3,K+4) = COOR(3,I)
C     ENDDO
C     --- CALCUL DU JACOBIEN P2 EN X, Y, Z DEFINIS PAR XCH
C     X = XCH(1)
C     Y = XCH(2)
C     Z = XCH(3)
C
C     --- DERIVEES EN X AUX NOEUDS REFERENCES
C     PX(1) = - 3.D00 + 4.D00 * ( X + Y + Z )
C     PX(2) = 4.D00 * X - 1.D00
C     PX(3) = 0.           PX(4) = 0.
C     PX(5) = 4.D00 * ( 1.D00 - 2.D00 * X - Y - Z )
C     PX(6) = 4.D00 * Y
C     PX(7) = - 4 * Y
C     PX(8) = - 4.D00 * Z

```

```

PX(9) = 4.D00 * Z
cc    PX(10) = 0.
C      --- DERIVEEES EN Y AUX NOEUDS REFERENCES
PY(1) = PX(1)
cc    PY(2) = 0.
PY(3) = 4.D00 * Y - 1.D00
cc    PY(4) = 0.
PY(5) = - 4.D00 * X
PY(6) = 4.D00 * X
PY(7) = 4.D00 * ( 1.D00 - X - 2.D00 * Y - Z )
PY(8) = - 4.D00 * Z
cc    PY(9) = 0.
PY(10) = 4.D00 * Z
C      --- DERIVEEES EN Z AUX NOEUDS REFERENCES
cc    PZ(2) = 0.          PZ(3) = 0.
PZ(4) = 4.D00 * Z - 1.D00
PZ(5) = - 4.D00 * X
cc    PZ(6) = 0.
PZ(7) = - 4.D00 * Y
PZ(8) = 4.D00 * ( 1.D00 - X - Y - 2.D00 * Z )
PZ(9) = 4.D00 * X
PZ(10) = 4.D00 * Y
C      --- LA MATRICE JACOBIENNE
MAT1 = PX(1) * XYZ(1,1) + PX(2) * XYZ(1,2)
MAT4 = PX(1) * XYZ(2,1) + PX(2) * XYZ(2,2)
MAT7 = PX(1) * XYZ(3,1) + PX(2) * XYZ(3,2)
DO J=5,9
    MAT1 = MAT1 + PX(J) * XYZ(1,J)
    MAT4 = MAT4 + PX(J) * XYZ(2,J)
    MAT7 = MAT7 + PX(J) * XYZ(3,J)
ENDDO
C
MAT2 = PY(1) * XYZ(1,1) + PY(3) * XYZ(1,3) + PY(10) * XYZ(1,10)
MAT5 = PY(1) * XYZ(2,1) + PY(3) * XYZ(2,3) + PY(10) * XYZ(2,10)
MAT8 = PY(1) * XYZ(3,1) + PY(3) * XYZ(3,3) + PY(10) * XYZ(3,10)
DO J=5,8
    MAT2 = MAT2 + PY(J) * XYZ(1,J)
    MAT5 = MAT5 + PY(J) * XYZ(2,J)
    MAT8 = MAT8 + PY(J) * XYZ(3,J)
ENDDO
C
MAT3 = PZ(1) * XYZ(1,1) + PZ(4) * XYZ(1,4) + PZ(5) * XYZ(1,5)
MAT6 = PZ(1) * XYZ(2,1) + PZ(4) * XYZ(2,4) + PZ(5) * XYZ(2,5)
MAT9 = PZ(1) * XYZ(3,1) + PZ(4) * XYZ(3,4) + PZ(5) * XYZ(3,5)
DO J=7,10
    MAT3 = MAT3 + PZ(J) * XYZ(1,J)
    MAT6 = MAT6 + PZ(J) * XYZ(2,J)
    MAT9 = MAT9 + PZ(J) * XYZ(3,J)
ENDDO
C      --- LE JACOBIEN P2 AU NOEUD DE MESURE XCH :
DET2 = MAT1 * ( MAT5 * MAT9 - MAT8 * MAT6 )
+     + MAT4 * ( MAT3 * MAT8 - MAT2 * MAT9 )
+     + MAT7 * ( MAT2 * MAT6 - MAT5 * MAT3 )
C
END

```




**RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-6399