HAL open science

Fonctions de forme des éléments finis généralisés de Bézier rationnels

Paul-Louis George

To cite this version:

Paul-Louis George. Fonctions de forme des éléments finis généralisés de Bézier rationnels. [Rapport de recherche] RR-8289, INRIA. 2015, pp.10. hal-00816851v2

HAL Id: hal-00816851

https://inria.hal.science/hal-00816851v2

Submitted on 21 Sep 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Fonctions de forme des éléments finis généralisés de Bézier rationnels

Paul Louis George

RESEARCH REPORT
N° 8289
Septembre 2015
Project-Team Gamma3

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--8289--FR+ENG

Fonctions de forme des éléments finis généralisés de Bézier rationnels

Paul Louis George*

Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 8289 — Septembre 2015 — 10 pages

Résumé : Ce court rapport fait suite aux papiers discutant des éléments finis classiques de Lagrange de degré 2 et des éléments finis basés sur des Bézier rationnels. Le but est de regarder les éléments finis, dits généralisés, correspondant à ces courbes en exhibant leurs fonctions de forme ou polynômes de base.

Mots-clés : Élements de Lagrange. Carreau de Bézier rationnel. Triangle à 6 nœuds. Quadrilatère à 9 nœuds.

* INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Shape functions for the rational Bezier generalized finite elements.

Abstract: Following our previous reports related to classical Lagrange finite elements of degree 2, we consider the case of rational Bézier patches and the corresponding generalized finite elements. The purpose is to give the expression of the shape functions of those elements.

Key-words: Lagrange and Rational Bézier patch. 6-node Triangle. 9-node Quad.

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Triangle à 6 nœuds **3**
2.1 Triangle de Lagrange 3
2.2 Triangle Bézier rationnel 4

3 Quadrilatère à 9 nœuds **6**
3.1 Quadrilatère de Lagrange 6
3.2 Quadrilatère Bézier rationnel 8

4 Conclusion **10**

1 Introduction

Dans [1], on a décrit le triangle de Lagrange de degré 2 avec ses 6 nœuds et ses 6 fonctions de forme (ou polynômes de base) appuyées sur ses nœuds. On a montré que cet élément est en fait un carreau de Bézier faisant intervenir les polynômes de Bernstein et, maintenant, les points de contrôle de l'élément courant. On a montré qu'il est immédiat de passer de l'une de ces écritures à l'autre. On rappele ici ce cas puis on considère le carreau rationnel, voir [4], pour en déduire l'aspect de l'élément fini que l'on peut en déduire en exhibant ses fonctions de forme. Un tel élément est dit élément fini généralisé.

On traite également le cas d'un quadrilatère à 9 nœuds de Lagrange, voir [2], afin d'établir le même parallèle avec son homologue rationnel décrit dans [3].

2 Triangle à 6 nœuds

On donne, pour mémoire, les six polynômes de base de ce triangle de Lagrange afin de pouvoir les comparer avec ceux associés à un carreau de Bézier rationnel.

2.1 Triangle de Lagrange

En notation classique, en $\hat{x}, \hat{y}$, les 6 fonctions de forme du triangle de Lagrange s'écrivent :
- $p_1 = (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\,\hat{x} - 2\,\hat{y})$,
- $p_2 = \hat{x}(2\hat{x} - 1)$,
- $p_3 = \hat{y}(2\hat{y} - 1)$,
- $p_4 = 4\,(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}$,
- $p_5 = 4\,\hat{x}\,\hat{y}$,
- $p_6 = 4\,(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}$.

tandis que dans le système de coordonnées barycentriques défini par $u = 1 - x - y, v = x$ et $w = y$, les expressions se réduisent simplement à :
- $p_1 = u(1 - 2v - 2w) = u(u - v - w)$,
- $p_2 = v(2v - 1)$,
- $p_3 = w(2w - 1)$,
- $p_4 = 4uv$,
- $p_5 = 4vw$,
- $p_6 = 4uw$.

Si on note A_i les nœuds de l'élément fini courant et F_K la transformation permettant de passer de l'élément de référence à l'élément courant, on a, dans le formalisme éléments finis :

$$M(\hat{x}, \hat{y}) = F_K(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=1,6} p_i(\hat{x}, \hat{y})A_i\,.$$

Dans le formalisme de Bézier, ce même point s'exprime comme :

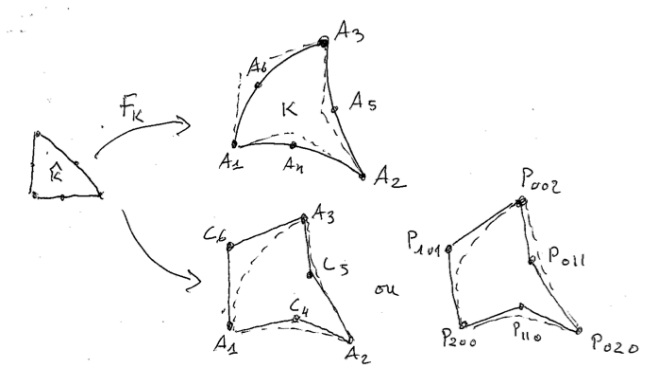

FIG. 1 – *L'élément de référence, l'élément fini courant et le carreau associé avec les différentes notations des nœuds et points de contrôle.*

$$M(u,v,w) = \sum_{i+j+k=2} B^2_{ijk}(u,v,w) P_{ijk}\,,$$

où les P_{ijk} sont les points de contrôle de l'élément courant. Il est immédiat de passer d'une écriture à l'autre en exprimant dans un sens les A_i en fonction des P_{ijk} ou, dans l'autre sens, les P_{ijk} en fonction des A_i. On a, en effet :

$$A_1 = P_{200}, A_2 = P_{020}, A_3 = P_{002}$$

pour les nœuds sommet et :

$$A_4 = \frac{P_{200} + 2P_{110} + P_{020}}{4}$$

pour le nœud de l'arête A_1A_2 et des expressions similaires pour les deux autres nœuds d'arête tandis que, en sens inverse, on a :

$$P_{200} = A_1, P_{020} = A_2, P_{002} = A_3$$

et, par exemple pour P_{110} :

$$P_{110} = \frac{4A_4 - A_1 - A_2}{2}$$

et des expressions similaires pour les autres points de contrôle des arêtes.

2.2 Triangle Bézier rationnel

Sous forme Bézier, un tel triangle (de degré 2) est défini par :

$$M(u,v,w) = \frac{\displaystyle\sum_{i+j+k=2} \omega_{ijk} B^2_{ijk}(u,v,w) P_{ijk}}{\displaystyle\sum_{i+j+k=2} \omega_{ijk} B^2_{ijk}(u,v,w)}\,, \tag{1}$$

expression de laquelle on va déduire la forme élément fini (généralisé) associée. En notant $D(u,v,w) = \displaystyle\sum_{i+j+k=2} \omega_{ijk} B^2_{ijk}(u,v,w)$, l'expression devient :

$$M(u,v,w) = \frac{\displaystyle\sum_{i+j+k=2} \omega_{ijk} B^2_{ijk}(u,v,w) P_{ijk}}{D(u,v,w)}\,.$$

Rappelons que :

$$B^2_{ijk}(u,v,w) = C^2_{ijk} u^i v^j w^k = \frac{2!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \text{ avec } i+j+k=2\,, \tag{2}$$

ainsi, pour un sommet, par exemple $(u,v,w)=(1,0,0)$, on a :

$$M(1,0,0)=\frac{\sum_{i+j+k=2}\omega_{ijk}B^2_{ijk}(1,0,0)P_{ijk}}{D(1,0,0)}=\frac{\omega_{200}B^2_{200}(1,0,0)P_{200}}{D(1,0,0)}=\frac{\omega_{200}B^2_{200}(1,0,0)P_{200}}{\omega_{200}}=P_{200}\,.$$

Pour un nœud d'arête, par exemple $(u,v,w)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, on a :

$$M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)=\frac{\sum_{i+j+k=2}\omega_{ijk}B^2_{ijk}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)P_{ijk}}{D(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)}=$$

$$\frac{\omega_{200}B^2_{200}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)P_{200}+\omega_{110}B^2_{110}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)P_{110}+\omega_{020}B^2_{020}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)P_{020}}{\omega_{200}B^2_{200}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)+\omega_{110}B^2_{110}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)+\omega_{020}B^2_{020}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)}=\frac{\omega_{200}P_{200}+2\omega_{110}P_{110}+\omega_{020}P_{020}}{4\frac{\omega_{200}+2\omega_{110}+\omega_{020}}{4}}\,,$$

et, en notant $4\,D_{110}=\omega_{200}+2\omega_{110}+\omega_{020}$, on a la relation entre $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, alias M_{110} (ou A_4, voir le dessin) et P_{110} ainsi que la relation en sens inverse. Il suffit alors de remplacer les P_{ijk} de l'Expression (1) en fonction de ces M_{ijk} pour avoir l'écriture élément fini de ce triangle en exhibant ses six fonctions de forme. Une simple identification donne le résultat pour les trois premières fonctions qui sont la somme de trois termes, ainsi

$$p_1(u,v,w)\;=\;D_{200}\,\frac{B^2_{200}(u,v,w)\;-\;\frac{B^2_{110}(u,v,w)}{2}\;-\;\frac{B^2_{101}(u,v,w)}{2}}{D(u,v,w)}\;=\;\frac{D_{200}u(1-2v-2w)}{D(u,v,w)}\,,$$

et des expressions analogue pour p_2 et p_3 tandis que pour les trois dernières la réponse est immédiate (un seul terme), ainsi

$$p_4(u,v,w)\;=\;\frac{4\,D_{110}uv}{D(u,v,w)}$$

et des expressions analogue pour p_5 et p_6.

On vérifie que ces polynômes sont nuls aux nœuds autres que celui leur correspondant et valent un en ce dernier. Par exemple :

$$p_1(u,v,w)=0\,\text{pour}(u=0),(v=\frac{1}{2},w=0),(v=0,w=\frac{1}{2})\,,$$

soit les 5 autres nœuds, à savoir :

$$(u=0,v=\frac{1}{2},w=0),(u=0,v=\frac{1}{2},w=\frac{1}{2}),(u=0,v=0,w=1),(u=\frac{1}{2},v=\frac{1}{2},w=0),(u=\frac{1}{2},v=0,w=\frac{1}{2})\,,$$

tandis que :

$$p_1(1,0,0)\;=\;\frac{D_{200}}{D(1,0,0)}\;=\;\frac{D_{200}}{D_{200}}\;=\;1\,.$$

De même, par exemple pour le quatrième polynôme, on a la seule valeur non nulle :

$$p_4(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)\;=\;\frac{4\,D_{110}}{D(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\;=\;1\,,$$

car $D(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)=D_{110}$.

Deux remarques s'imposent :
- le polynôme rationnel se réduit au polynôme de Lagrange quand les poids sont égaux (ce qui est rassurant),
- le polynôme rationnel se construit simplement à partir du polynôme de Lagrange, on rajoute comme coefficient la fraction $\frac{D_{ijk}}{\sum_{i+j+k=2}\omega_{ijk}B^2_{ijk}(u,v,w)}$ qui s'écrit également

$\dfrac{D_{ijk}}{\sum\limits_{i+j+k=2} D_{ijk} p_{ijk}(u,v,w)}$. Ce dernier r'esultat s'obtient facilement. On observe que $B^2_{110}(u,v,w) = \frac{p_{110}(u,v,w)}{2}$ et de même que $B^2_{101}(u,v,w) = \frac{p_{101}(u,v,w)}{2}$ puis on exprime $p_{200}(u,v,w) = u(u-v-w) = B^2_{200}(u,v,w) - \frac{B^2_{110}(u,v,w)}{2} - \frac{B^2_{101}(u,v,w)}{2}$ pour en déduire, en sens inverse, $p_{110}(u,v,w) = 2\,B^2_{110}(u,v,w)$, $p_{101}(u,v,w) = 2\,B^2_{101}(u,v,w)$ et $B^2_{200}(u,v,w) = p_{200}(u,v,w) + \frac{p_{110}(u,v,w)}{4} + \frac{p_{101}(u,v,w)}{4}$ et il suffit remplacer les Bernstein (ces trois et les autres qui s'expriment de la même façon) dans l'expression générale pour établir l'égalité entre les deux formulations.

En conclusion et *in extenso*, les polynômes sont les suivants :

$$p_1(u,v,w) = \frac{D_{200}}{D(u,v,w)} u(1-2v-2w) = \frac{\omega_{200}}{D(u,v,w)} u(1-2v-2w)$$

$$p_2(u,v,w) = \frac{D_{020}}{D(u,v,w)} v(2v-1) = \frac{\omega_{020}}{D(u,v,w)} v(2v-1)$$

$$p_3(u,v,w) = \frac{D_{002}}{D(u,v,w)} w(2w-1) = \frac{\omega_{002}}{D(u,v,w)} w(2w-1)$$

$$p_4(u,v,w) = \frac{4\,D_{110}}{D(u,v,w)} uv = \frac{\omega_{200} + 2\omega_{110} + \omega_{020}}{D(u,v,w)} uv$$

$$p_5(u,v,w) = \frac{4\,D_{011}}{D(u,v,w)} vw = \frac{\omega_{020} + 2\omega_{011} + \omega_{002}}{D(u,v,w)} vw$$

$$p_6(u,v,w) = \frac{4\,D_{101}}{D(u,v,w)} uw = \frac{\omega_{200} + 2\omega_{101} + \omega_{002}}{D(u,v,w)} uw$$

avec, rappelons le, $D(u,v,w) = \sum\limits_{i+j+k=2} \omega_{ijk} B^2_{ijk}(u,v,w) = \sum\limits_{i+j+k=2} D_{ijk} p_{ijk}(u,v,w)$ (où $p_{ijk}(u,v,w)$ est ici le polynôme classique) et l'élément fini s'écrit classiquement :

$$M(u,v,w) = \sum_{i=1,6} p_i(u,v,w) A_{ijk}\,,$$

avec A_{ijk} les nœuds (et non plus les points de contrôle) de l'élément courant.

3 Quadrilatère à 9 nœuds

On regarde de la même façon le quadrilatère à 9 nœuds en rappelant ce qu'est l'élément de Lagrange et son écriture en Bézier puis le carreau rationnel afin d'en exhiber la forme élément fini avec ses fonctions de forme.

3.1 Quadrilatère de Lagrange

En notation classique, en $\hat{x}, \hat{y}$, les 9 fonctions de forme du quadrilatère complet de Lagrange s'écrivent :

- $p_1 = \frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1-\hat{x})(1-\hat{y})$,
- $p_2 = -\frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1+\hat{x})(1-\hat{y})$,
- $p_3 = \frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1+\hat{x})(1+\hat{y})$,
- $p_4 = -\frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1-\hat{x})(1+\hat{y})$,
- $p_5 = -\frac{1}{2}(1+\hat{x})(1-\hat{x})\hat{y}(1-\hat{y})$,
- $p_6 = \frac{1}{2}\hat{x}(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})$,
- $p_7 = \frac{1}{2}(1-\hat{x})(1+\hat{x})\hat{y}(1+\hat{y})$,
- $p_8 = -\frac{1}{2}\hat{x}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})$,
- $p_9 = (1-\hat{x})(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})$.

quand le carré de référence est $\hat{K} = [-1,1] \times [-1,1]$. Pour faciliter la comparaison avec le cas rationnel, par changement de variable, on regarde comment s'écrivent ces mêmes polynômes. On note $u = \frac{\hat{x}+1}{2}$ et $v = \frac{\hat{y}+1}{2}$ et on obtient :

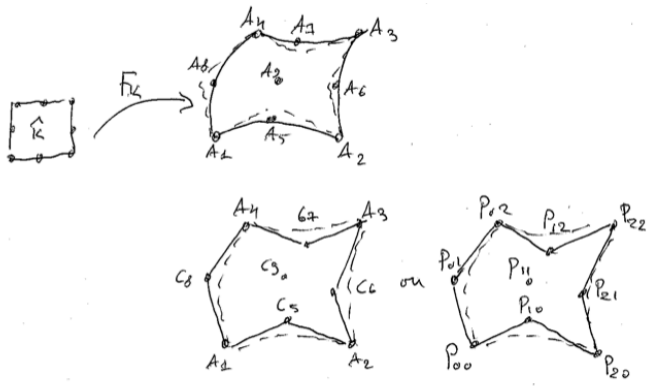

FIG. 2 – *L'élément de référence, l'élément fini courant et le carreau associé avec les différentes notations des nœuds et points de contrôle.*

- $p_1 = (1-u)(1-2u)(1-v)(1-2v)$,
- $p_2 = -u(1-2u)(1-v)(1-2v)$,
- $p_3 = u(1-2u)v(1-2v)$,
- $p_4 = -(1-u)(1-2u)v(1-2v)$,
- $p_5 = 4u(1-u)(1-v)(1-2v)$,
- $p_6 = -4u(1-2u)v(1-v)$,
- $p_7 = -4u(1-u)v(1-2v)$,
- $p_8 = 4(1-u)(1-2u)v(1-v)$,
- $p_9 = 16u(1-u)v(1-v)$,

et le le carré de référence est maintenant $\hat{K} = [0,1] \times [0,1]$.

Si on note A_i les nœuds de l'élément fini courant et F_K la transformation permettant de passer de l'élément de référence à l'élément courant, on a, dans le formalisme éléments finis :

$$M(\hat{x},\hat{y}) = F_K(\hat{x},\hat{y}) = \sum_{i=1,9} p_i(\hat{x},\hat{y})A_i\,.$$

Dans le formalisme de Bézier, ce même point s'exprime comme :

$$M(u,v) = \sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)P_{ij}\,,$$

où les P_{ij} sont les points de contrôle de l'élément courant. Il est immédiat de passer d'une écriture à l'autre en exprimant dans un sens les A_i en fonction des P_{ij} ou, dans l'autre sens, les P_{ij} en fonction des A_i. On a, en effet :

$$A_1 = P_{00}, A_2 = P_{20}, A_3 = P_{22}, A_4 = P_{02}$$

pour les nœuds sommet et :

$$A_5 = \frac{P_{00} + 2P_{10} + P_{20}}{4}$$

pour le nœud de l'arête A_1A_2 et des expressions similaires pour les trois autres nœuds d'arête tandis que le nœud central vaut

$$A_9 = \frac{(P_{00} + P_{20} + P_{22} + P_{02}) + 2(P_{10} + P_{21} + P_{12} + P_{01}) + 4P_{11}}{16}\,.$$

En sens inverse, on a :

$$P_{00} = A_1, P_{20} = A_2, P_{22} = A_3, P_{02} = A_4$$

et, par exemple pour P_{10} :

$$P_{10} = \frac{4A_5 - A_1 - A_2}{2}$$

et des expressions similaires pour les autres points de contrôle des arêtes. Enfin, pour le centre :

$$P_{11} = \frac{(P_{00} + P_{20} + P_{22} + P_{02}) + 2(P_{10} + P_{21} + P_{12} + P_{01}) - 16A_9}{4} .$$

3.2 Quadrilatère Bézier rationnel

Sous forme Bézier, un tel quadrilatère (de degré 2) est défini par :

$$M(u,v) = \frac{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}P_{ij}}{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}} , (u,v) \in [0,1]\times[0,1] , \tag{3}$$

en notant $D(u,v) = \sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}$, l'expression devient :

$$M(u,v) = \frac{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}P_{ij}}{D(u,v)} .$$

Rappelons que :

$$B_i^2(u) = C_i^2 u^i (1-u)^{2-i} = \frac{2!}{i!(2-i)!} u^i (1-u)^{2-i} , \tag{4}$$

En un sommet, par exemple $(u,v) = (0,0)$, on a :

$$M(0,0) = \frac{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(0)B_j^2(0)\omega_{ij}P_{ij}}{D(0,0)} = \frac{\omega_{00}P_{00}}{D(0,0)} = P_{00} ,$$

et pour les trois autres sommets, on a la même forme. Pour un nœud d'arête, par exemple $(u,v) = (\frac{1}{2},0)$, on a :

$$M(\frac{1}{2},0) = \frac{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(\frac{1}{2})B_j^2(0)\omega_{ij}P_{ij}}{D(\frac{1}{2},0)} = \frac{\omega_{00}P_{00} + 2\omega_{10}P_{10} + \omega_{20}P_{20}}{4\,\frac{\omega_{00}+2\omega_{10}+\omega_{20}}{4}} ,$$

et, en notant $4\,D_{10} = \omega_{00} + 2\omega_{10} + \omega_{20}$, on a la relation entre $M(\frac{1}{2},0)$, alias M_{10} ou encore A_5 (voir le dessin) et P_{10} ainsi que la relation inverse que nous utiliserons par la suite. Les autres liens entre nœuds d'arête et points de contrôle d'arête on la même forme. Il reste a voir le lien entre le nœud central et les points de contrôle. On fixe donc $(u,v) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, il vient :

$$M(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(\frac{1}{2})B_j^2(\frac{1}{2})\omega_{ij}P_{ij}}{D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} ,$$

en notant

$$D_{11} = D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

on a

$$16\,D_{11} = (\omega_{00} + \omega_{20} + \omega_{22} + \omega_{02}) + 2(\omega_{10} + \omega_{21} + \omega_{12} + \omega_{01}) + 4\omega_{11} ,$$

et il vient :

$$16\,D_{11}A_9 = (\omega_{00}P_{00}+\omega_{20}P_{20}+\omega_{22}P_{22}+\omega_{02}P_{02})+2(\omega_{10}P_{10}+\omega_{21}P_{21}+\omega_{12}P_{12}+\omega_{01}P_{01})+4\omega_{11}P_{11} ,$$

expression qui avec les autres va nous permettre d'exprimer les points de contrôle en fonction des nœuds et, ainsi, de trouver les polynômes cherchés. Ils sont de trois types, p_9, puis p_1 (avec p_2, p_3 et p_4 qui ont la même forme) et enfin p_5 (avec p_6, p_7 et p_8 qui ont la même forme).

Pour trouver p_9, on regarde comment A_9 se cache dans la formule générale. Il n'y a qu'un seul terme provenant de P_{11} et la contribution sur A_9 est simplement :

$$p_9(u,v) = 4\frac{D_{11}B_1^2(u)B_1^2(v)}{D(u,v)} = 16\,\frac{D_{11}}{D(u,v)}u(1-u)v(1-v) .$$

Pour trouver, par exemple p_5, on regarde comment A_5 se cache dans la formule générale. Il y a deux termes, celui provenant de P_{10} directement et celui provenant de ce même P_{10} via le terme en P_{11}, ceci donne donc :

$$p_5(u,v) \;=\; \frac{D_{10}}{D(u,v)}\,(2\,B_1^2(u)B_0^2(v) - B_1^2(u)B_1^2(v)) \;=\; \frac{D_{10}}{D(u,v)}\,\left\{4u(1-u)(1-v)^2 - 4u(1-u)v(1-v)\right\}$$

qui se réduit à :

$$p_5(u,v) \;=\; 4\,\frac{D_{10}}{D(u,v)}u(1-u)(1-v)(1-2v)\,.$$

Pour trouver, par exemple p_1, on regarde comment A_1 se cache dans la formule générale. Il y a six termes, celui provenant de P_{00} directement et ceux provenant de ce même P_{00} via le terme en P_{10} et celui en P_{01} plus ceux provenant de P_{11} qui sont au nombre de 3 (via P_{00}, P_{10} et P_{01}). Ceci donne donc :

$$p_1(u,v) \;=\; \frac{D_{00}}{D(u,v)}(B_0^2(u)B_0^2(v) - \frac{B_1^2(u)B_0^2(v)}{2} - \frac{B_0^2(u)B_1^2(v)}{2} - \frac{B_1^2(u)B_1^2(v)}{4} + \frac{B_1^2(u)B_1^2(v)}{4} + \frac{B_1^2(u)B_1^2(v)}{4})\,,$$

qui se réduit à :

$$p_1(u,v) \;=\; \frac{D_{00}}{D(u,v)}(B_0^2(u)B_0^2(v) - \frac{B_1^2(u)B_0^2(v)}{2} - \frac{B_0^2(u)B_1^2(v)}{2} + \frac{B_1^2(u)B_1^2(v)}{4})\,,$$

qui vaut, en regroupant :

$$p_1(u,v) \;=\; \frac{D_{00}}{D(u,v)}(1-u)(1-2u)(1-v)(1-2v)\,.$$

On a les mêmes remarques que pour le triangle :
- les polynômes ont la propriété du Kronecker (nullité et valeur 1),
- le polynôme rationnel se réduit au polynôme de Lagrange quand les poids sont égaux (ce qui est rassurant),
- le polynôme rationnel se construit simplement à partir du polynôme de Lagrange, on rajoute comme coefficient la fraction $\frac{D_{ij}}{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}\omega_{ij}B_i^2(u)B_j^2(v)}$ qui, comme pour le triangle, s'écrit aussi $\frac{D_{ij}}{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}D_{ij}p_{ij}(u,v)}$.

En conclusion et *in extenso*, les polynômes sont les suivants (lire p_1 comme p_{00} etc.) :

$$p_1(u,v) = \frac{D_{00}}{D(u,v)}(1-u)(1-2u)(1-v)(1-2v) = \frac{\omega_{00}}{D(u,v)}(1-u)(1-2u)(1-v)(1-2v)$$

$$p_2(u,v) = -\frac{D_{20}}{D(u,v)}u(1-2u)(1-v)(1-2v) = -\frac{\omega_{20}}{D(u,v)}u(1-2u)(1-v)(1-2v)$$

$$p_3(u,v) = \frac{D_{22}}{D(u,v)}u(1-2u)v(1-2v) = \frac{\omega_{22}}{D(u,v)}u(1-2u)v(1-2v)$$

$$p_4(u,v) = -\frac{D_{02}}{D(u,v)}(1-u)(1-2u)v(1-2v) = -\frac{\omega_{02}}{D(u,v)}(1-u)(1-2u)v(1-2v)$$

$$p_5(u,v) = 4\,\frac{D_{10}}{D(u,v)}u(1-u)(1-v)(1-2v) = \frac{(\omega_{00}+2\omega_{10}+\omega_{20})}{D(u,v)}u(1-u)(1-v)(1-2v)$$

$$p_6(u,v) = -4\,\frac{D_{21}}{D(u,v)}u(1-2u)v(1-v) = -\frac{(\omega_{20}+2\omega_{22}+\omega_{20})}{D(u,v)}u(1-2u)v(1-v)$$

$$p_7(u,v) = -4\,\frac{D_{12}}{D(u,v)}u(1-u)v(1-2v) = -\frac{(\omega_{22}+2\omega_{12}+\omega_{02})}{D(u,v)}u(1-u)v(1-2v)$$

$$p_8(u,v) = 4,\frac{D_{01}}{D(u,v)}(1-u)(1-2u)v(1-v) = \frac{(\omega_{00}+2\omega_{01}+\omega_{02})}{D(u,v)}(1-u)(1-2u)v(1-v)$$

$$p_9(u,v) = 16\,\frac{D_{11}}{D(u,v)}u(1-u)v(1-v)\,,\ \text{voir ci-dessus la valeur de}\,D_{11}$$

et l'élément fini s'écrit classiquement :

$$M(u,v) = \sum_{i=1,9} p_i(u,v)A_i\,,$$

avec A_i les nœuds (et non plus les points de contrôle) de l'élément courant.

4 Conclusion

On a donné l'expression des fonctions de forme associées aux éléments finis généralisés construits à partir de carreaux de Bézier rationnels. Le résultat est étonnament simple, ces polynômes se déduisent facilement des polynômes de Lagrange. En sens inverse, on aurait pu poser directement le résultat et établir la correspondance avec la formulation en Bézier, la question étant également de trouver la relation entre les poids d'un système et ceux de l'autre. La discussion donnée ici pour le degré 2 s'étend évidemment à tout degré et à la trois dimension, à tout le moins pour les tétraèdres, les pentaèdres (prismes) complets et les hexaèdres complets.

Références

[1] P.L. George, H. Borouchaki et P. Laug, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 1 : Triangle P2, *RR INRIA* **7519**, 2011.

[2] P.L. George et H. Borouchaki, Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2 (version 2), *RR INRIA* **7964**, 2012.

[3] P.L. George et H. Borouchaki, Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 1. *RR INRIA* **8201**, 2013.

[4] P.L. George et H. Borouchaki, Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 2. *RR INRIA* **8202**, 2013.

RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-6399