

Equations de réaction-diffusion anisotropes sur couches minces pour la cardiologie

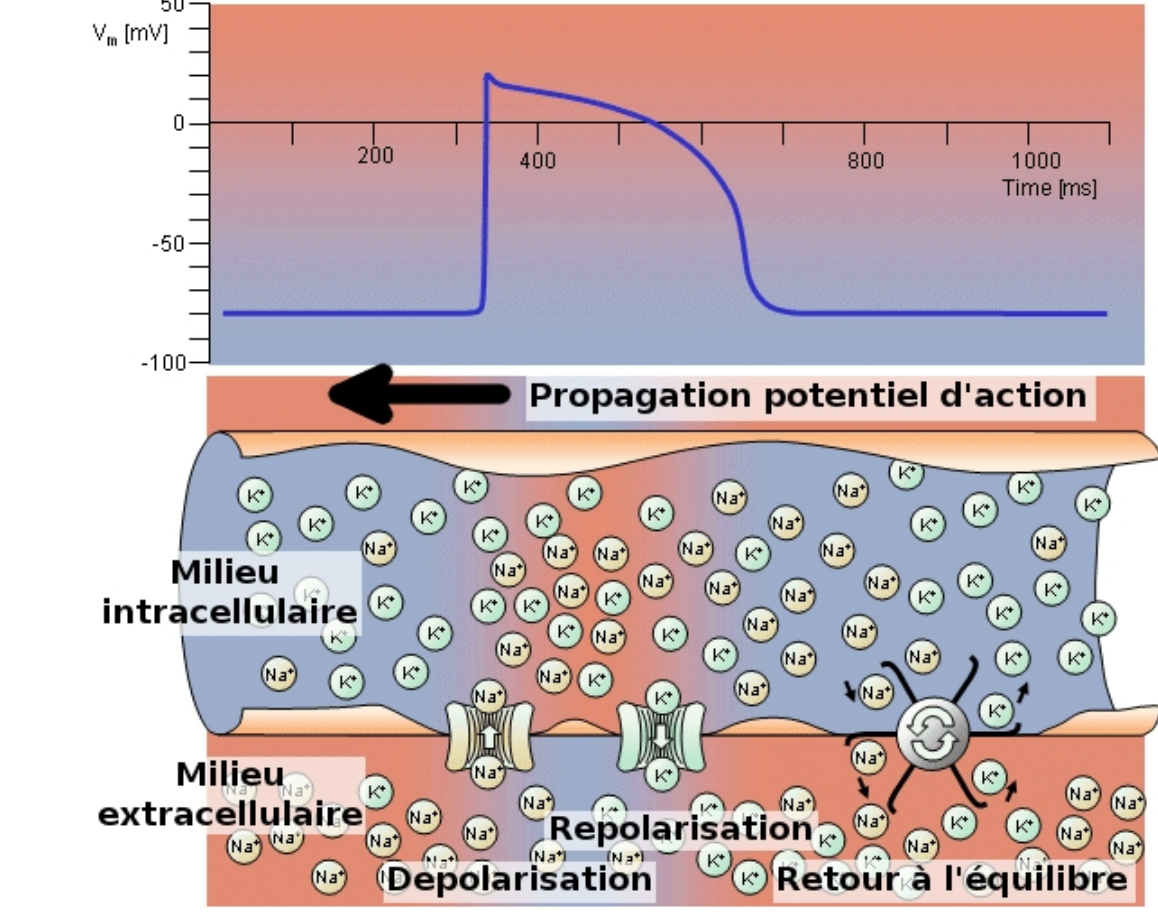
SIMON LABARTHE, YVES COUDIÈRE, JACQUES HENRY, MOSTAFA BENDAHMANE

simon.labarthe@u-bordeaux2.fr, yves.coudiere@inria.fr, jacques.henry@inria.fr, mostafa.bendahmane@u-bordeaux2.fr

MODÈLE MATHÉMATIQUE

BIOLOGIE SOUS-JACENTE

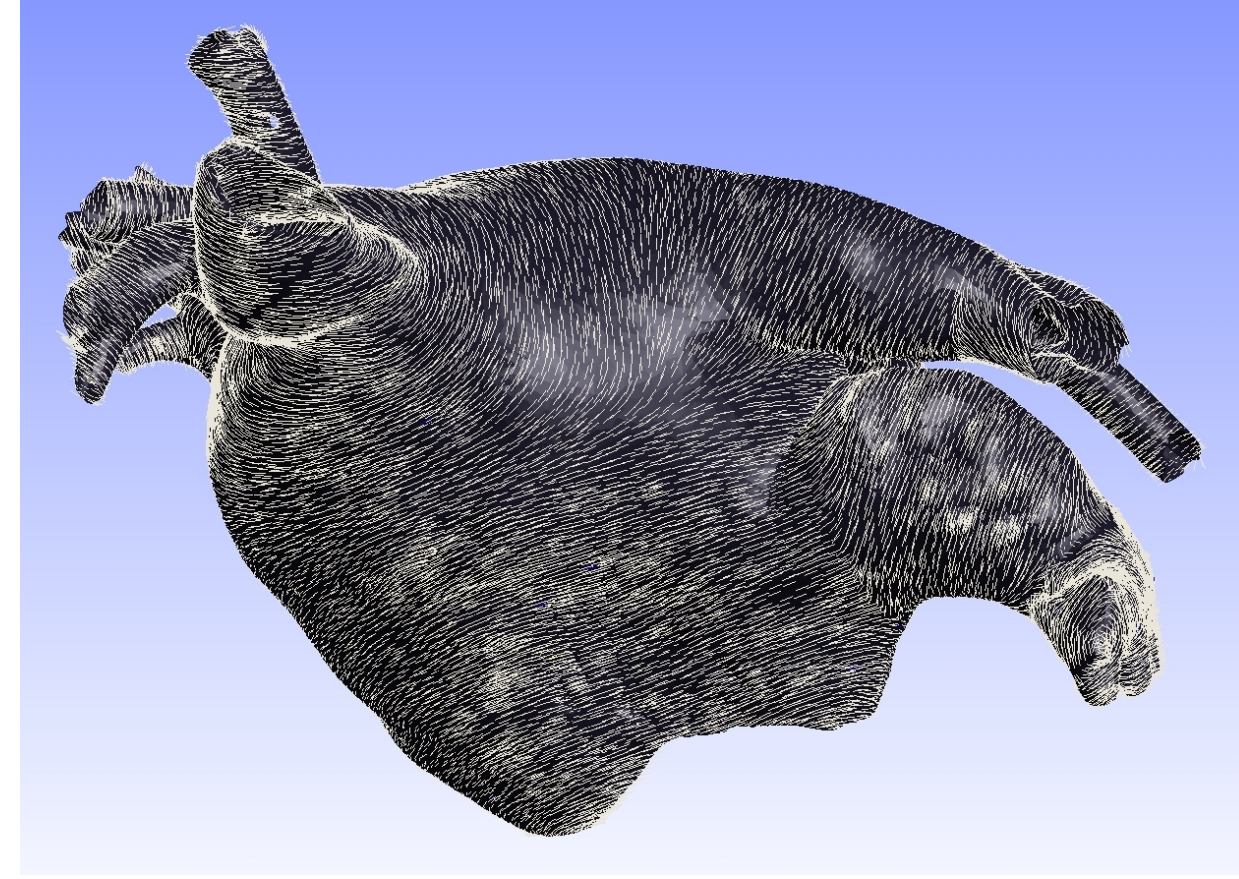
ELECTROPHYSIOLOGIE



[J. Malmivuo et al. Bioelectromagnetism]

- Echelles cellulaire/tissulaire
- modélisation phénoménologique /physiologique (complexe).

GÉOMÉTRIE



- imagerie
- anisotropie (fibres musculaires)

MODÉLISATION

Bidomaine : Evolution couplée de Φ_i et Φ_e (potentiel intra et extra-cellulaire)

$$\begin{cases} V_m = \Phi_i - \Phi_e \\ \chi(C_m \partial_t V + I_{ion}(V)) - \text{div} D_i \nabla \Phi_i = 0 \\ \chi(C_m \partial_t V + I_{ion}(V)) + \text{div} D_e \nabla \Phi_e = I_{app} \end{cases}$$

électrophysiologie couplage stim

Monodomaine : simplification du bidomaine

$$\chi(C_m \partial_t V + I_{ion}(V)) - \text{div} D \nabla V = I_{app}$$

électrophysiologie couplage stim

Difficultés mathématiques :

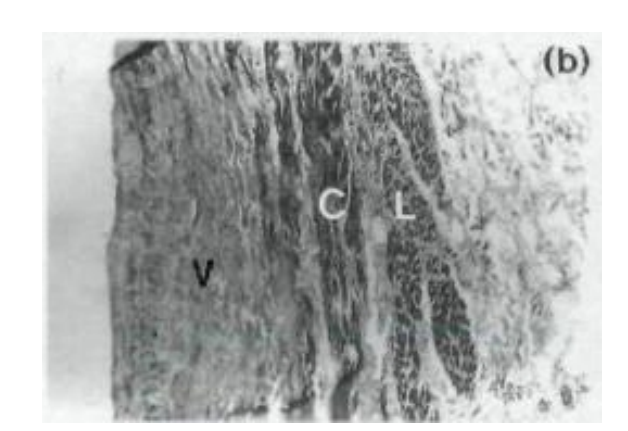
- problème raide : I_{ion} non linéaire prépondérant.
- bidomaine : dégénéré.

Difficultés numériques :

- discrétisation fines (temps et espace).
- Convergence ?

1) PROBLÉMATIQUE

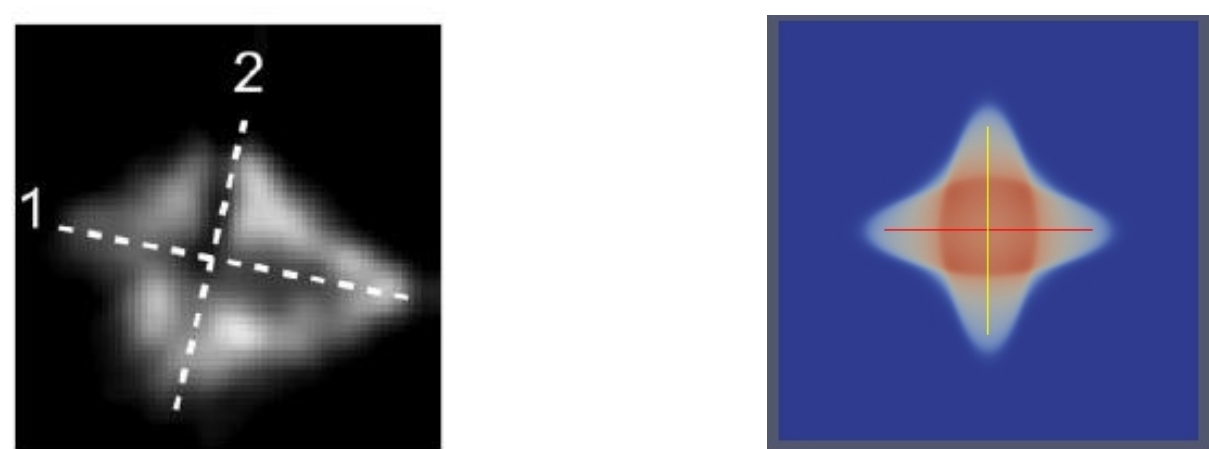
HISTOLOGIE



Coupe de veines pulmonaires. C : fibres circonférentielles. L : fibres longitudinales. [S.Y.Ho, J. Cardio. Electro. (1999)]

- Couches minces superposées.
- Direction d'anisotropie discontinue.

OPTICAL MAPPING MODÉLISATION 3D



Onde de dépolarisation dans un épicaarde porcine avec deux couches de fibres superposées [Vetter, Circ. Research. (2005)]

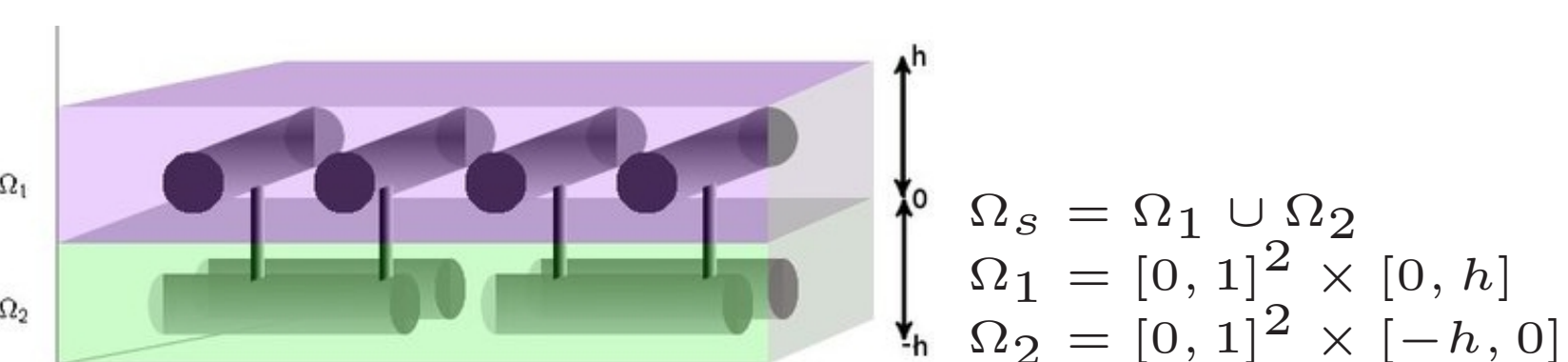
Simulation monodomaine sur un pavé avec deux couches de fibres superposées. Le résultat est moyenné dans l'épaisseur.

- Propagation en diamant.
- Deux directions d'anisotropie.
- Substrat pour arythmies.

QUESTIONS

- Simulations 2D avec prise en compte d'une discontinuité de l'anisotropie dans l'épaisseur ?
- Conservation du pattern de propagation complexe ?

2) MODÉLISATION 3D



$$\begin{aligned} \Omega_s &= \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ \Omega_1 &= [0, 1]^2 \times [0, h] \\ \Omega_2 &= [0, 1]^2 \times [-h, 0] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \chi(C_m \partial_t U + f(U)) = \text{div} \sigma_1 \nabla U \text{ sur } [0, T] \times \Omega_1 \\ \chi(C_m \partial_t V + f(V)) = \text{div} \sigma_2 \nabla V \text{ sur } [0, T] \times \Omega_2 \\ \nabla U \cdot \eta = \nabla V \cdot \eta, \quad U = V \text{ sur } [0, T] \times [0, 1]^2 \times \{0\} \\ \sigma_1 \nabla U \cdot \eta = \sigma_2 \nabla V = 0 \text{ sur } [0, T] \times \partial \Omega_s \end{cases}$$

avec $\sigma_i = \sum_{j=1}^3 a_{i,j} u_{i,j} \otimes u_{i,j}$

- $(u_{i,j})_j$ est b.o.n. de Ω_i avec $u_{i,1}$ tangent aux fibres et $u_{i,3} = z$
- 2 couches avec fibres orthogonales.
- Continuité de flux et de potentiel à l'interface, $a_{1,3} = a_{2,3} = a_t$.
- Coeur isolé électriquement.
- Conditions initiales compatibles.

3) MODÈLE 2D MONOCOUCHE

ADIMENSIONNEMENT

On pose $\varepsilon = h$:

$$\begin{aligned} \alpha(\partial_t U + \beta f(U)) &= \text{div}(\tilde{\sigma}_1 \nabla U) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \partial_{zz} U \\ \alpha(\partial_t V + \beta f(V)) &= \text{div}(\tilde{\sigma}_2 \nabla V) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \partial_{zz} V \end{aligned}$$

où $\alpha = \frac{A_m C_m L_0^2}{\sigma_{max} T_0}$, $\beta = \frac{T_0 I_{max}}{C_m \delta V}$, $\gamma = \frac{a_t L_0^2}{\sigma_{max}}$.

Régimes d'étude : (non physiologique)
 $h \simeq 0.01 \text{cm} : \partial_{zz} \gg f$

ASYMPTOTIQUE FORMELLE

On pose :

$$\begin{aligned} U &= U_0 + \varepsilon^2 U_1 + o(\varepsilon^2) \\ V &= V_0 + \varepsilon^2 V_1 + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Identification des coefficients de ε :

$$\begin{aligned} U_0(x, y, \cdot) &= V_0(x, y, \cdot) = \mathcal{U}(x, y) \\ U_1(x, y, z) &= \frac{-\mathcal{B}(x, y)}{2} z^2 + \mathcal{B}(x, y) z \\ V_1(x, y, z) &= \frac{\mathcal{B}(x, y)}{2} z^2 + \mathcal{B}(x, y) z \end{aligned}$$

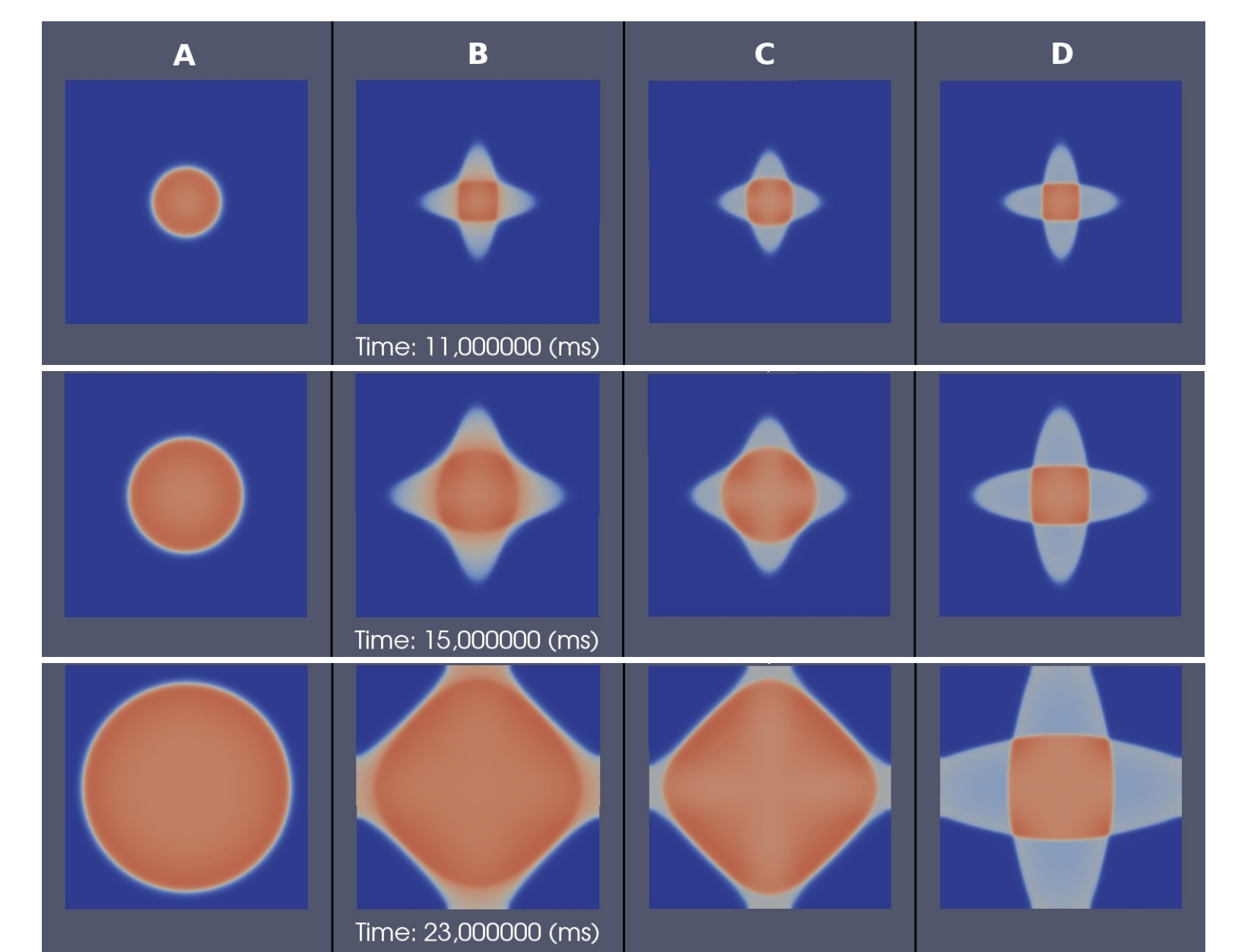
avec \mathcal{U} et \mathcal{B} solutions (2D) de :

$$\begin{aligned} \chi(\partial_t \mathcal{U} + f(\mathcal{U})) &= \text{div}(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \nabla \mathcal{U}) \\ \mathcal{B} &= \text{div}(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \nabla \mathcal{U}) \end{aligned}$$

CONCLUSIONS

- Au plus une direction d'anisotropie pour \mathcal{U} (tenseur moyen).
- Conductions complexes (diamants) non capturées.

5) COMPARAISON NUMÉRIQUE



V_m au cours du temps pour $h = 0.1 \text{cm}$.

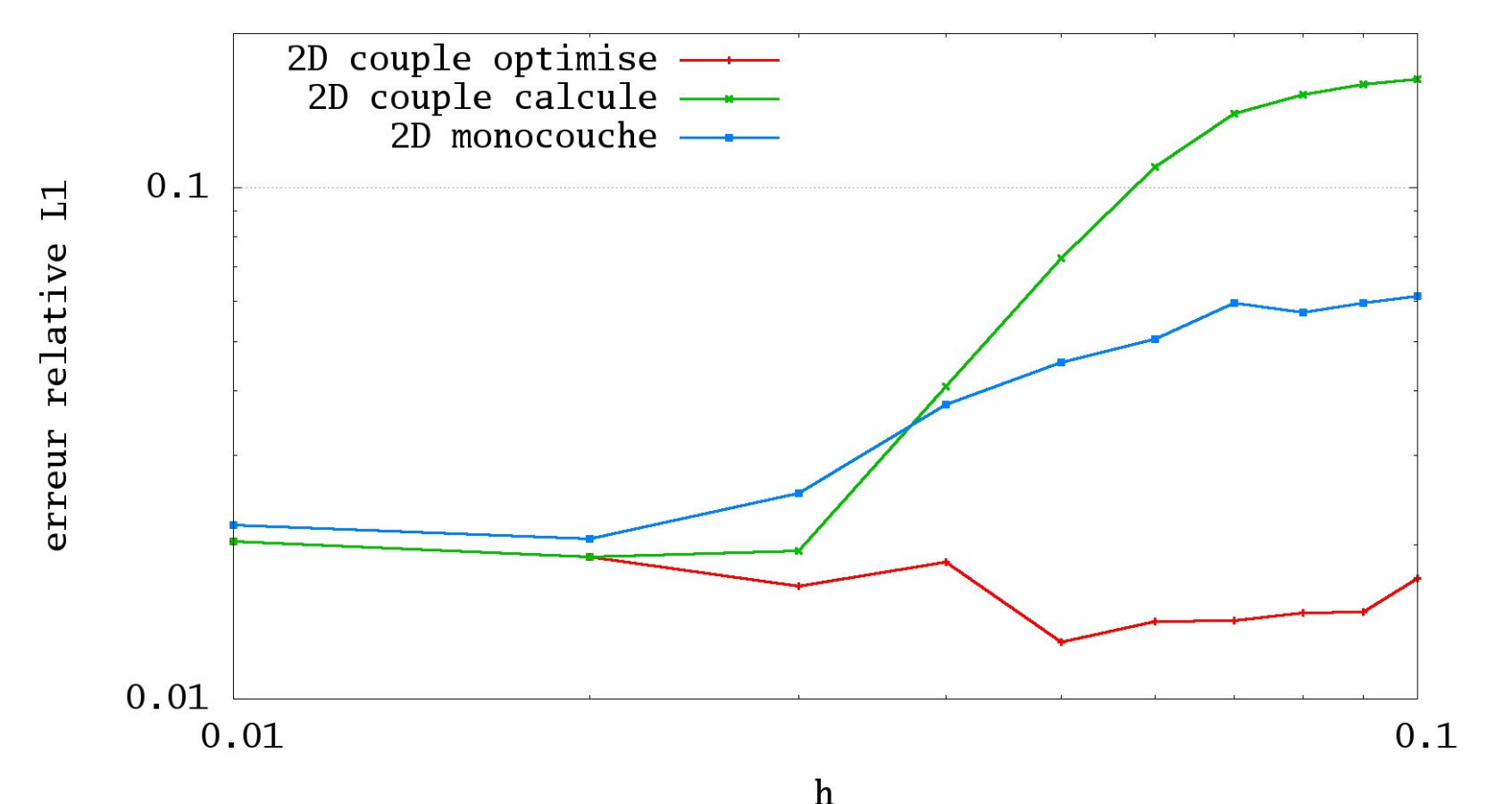
- A) 2D monocouche (\mathcal{U}).
- B) 3D moyenné dans l'épaisseur ($\frac{\hat{U}_h + \hat{V}_h}{2}$).
- C) 2D couplé moyenné ($\frac{\hat{u}_h + \hat{v}_h}{2}$, $\frac{a}{h^2}$ optimisé).
- D) 2D couplé moyenné ($\frac{\hat{u}_h + \hat{v}_h}{2}$, $\frac{a}{h^2}$ calculé).

CRITÈRE

Critère de comparaison : erreurs L_1 sur les cartes d'activation (temps d'arrivée du front)

Définition :

$$\begin{aligned} \Lambda : X &\mapsto \min_{t \in [0, T]} \{t \mid \frac{\hat{U} + \hat{V}}{2}(t, X) > U_{th}\} \\ \lambda : X &\mapsto \min_{t \in [0, T]} \{t \mid \frac{\hat{u} + \hat{v}}{2}(t, X) > U_{th}\} \end{aligned}$$



Résultats préliminaires : erreur relative L_1 par rapport à la simulation 3D moyennée dans l'épaisseur. Echelle $\log - \log$.

CONCLUSIONS

- Amélioration de la modélisation de Weber dos Santos et al. (FIMH 2003)
- Le modèle couplé capture les directions d'anisotropie multiples.
- Optimisation du paramètre de couplage $\frac{a}{h^2}$ en fonction de h nécessaire.
- Perspectives : fibres non orthogonales ? Variations de la direction des fibres ? Epaisseur non uniforme ?
- Construction d'un modèle physiologique d'oreillette gauche et veines pulmonaires. Couches de fibres arythmogènes ?

4) MODÈLE 2D COUPLÉ

ASYMPTOTIQUE FORMELLE

Soient U_h, V_h solutions du problème 3D pour h donné.

On note $\hat{U}_h = \frac{1}{h} \int_0^h U_h$ et $\hat{V}_h = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 V_h$

$\Rightarrow (\hat{U}_h, \hat{V}_h)$ solution de :

$$\begin{aligned} \chi(\partial_t \hat{U} + f(\hat{U})) &= \text{div}(\sigma_1 \nabla \hat{U}) + a \frac{\hat{V} - \hat{U}}{h^2} + \mathcal{R}_1(h) \\ \chi(\partial_t \hat{V} + f(\hat{V})) &= \text{div}(\sigma_2 \nabla \hat{V}) + a \frac{\hat{U} - \hat{V}}{h^2} + \mathcal{R}_2(h) \end{aligned}$$

approx.f approx. flux correction

RÉSULTATS

Soient $(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h)$ solutions du problème

$$\begin{aligned} \chi(\partial_t u + f(u)) &= \text{div}(\sigma_1 \nabla u) + a \frac{v-u}{h^2} \\ \chi(\partial_t v + f(v)) &= \text{div}(\sigma_2 \nabla v) + a \frac{u-v}{h^2} \end{aligned}$$

alors $\|(\tilde{u}_h + \tilde{v}_h) - (\hat{U}_h + \hat{V}_h)\|_{\mathcal{H}} \leq C.h^2$