



**HAL**  
open science

# Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 2

Paul-Louis George, Houman Borouchaki

► **To cite this version:**

Paul-Louis George, Houman Borouchaki. Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 2. [Rapport de recherche] RR-8202, INRIA. 2013, pp.22. hal-00776196

**HAL Id: hal-00776196**

**<https://inria.hal.science/hal-00776196>**

Submitted on 15 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 2.

Paul Louis George, Houman Borouchaki

**RESEARCH  
REPORT**

**N° 8202**

Janvier 2013

Project-Team Gamma3





## Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 2.

Paul Louis George\*, Houman Borouchaki†

Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 8202 — Janvier 2013 — 22 pages

**Résumé :** Ce rapport fait suite aux papiers discutant des éléments finis classiques de Lagrange de degré 2. Ici, on regarde le cas des carreaux de Bézier rationnels non pas en temps qu'ingrédients de base d'une méthode de définition de surfaces (application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ ) mais en temps qu'éléments support de calculs (application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ ). Dans ce cas, se pose la question de la positivité du jacobien de cette transformation. C'est donc ce point que nous regardons pour un carreau quadrilatéral et un carreau hexaédrique, c'est la partie 1 de ce travail. Ici, la partie 2 de ce rapport regarde le cas des triangles et des tétraèdres.

**Mots-clés :** Courbe de Bézier rationnelle. Carreau de Bézier rationnel. Triangle. Tétraèdre.

---

\* INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

† UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Technologie de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

**RESEARCH CENTRE  
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt  
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

## Rational Bezier patches of degree 2. Part 2.

**Abstract:** Following our previous reports related to classical Lagrange finite elements of degree 2, we consider the case of rational Bézier patches not as a method to define a surface (and then a mapping from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^3$ ) but as the support of a calculus (therefore a mapping from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^2$ ). In this usage, the jacobian of the mapping must be positive and this is the point discussed in this report for both a quad patch and a hex patch (Part 1). Hereafter, Part 2 discusses the case of triangular and tet patches.

**Key-words:** Rational Bézier curve. Rational Bézier patch. Triangle. Tet.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Courbe de Bézier rationnelle de degré 1</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Triangle de Bézier rationnel de degré 1</b>	<b>5</b>
3.1	Calcul et comportement du jacobien . . . . .	5
3.2	Conclusion sur le carreau de degré 1 . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Courbe de Bézier rationnelle de degré 2</b>	<b>6</b>
4.1	La courbe . . . . .	6
4.2	La tangente . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Triangle de Bézier rationnel de degré 2</b>	<b>9</b>
5.1	Calcul et comportement du jacobien . . . . .	10
5.2	Conclusion sur le carreau triangulaire de degré 2 . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Extension au cas volumique</b>	<b>14</b>
6.1	Calcul et comportement du jacobien . . . . .	14
6.2	Conclusion sur le carreau tétraédrique de degré 2 . . . . .	20
6.3	Expression pour le carreau tétraédrique de degré 1 . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>21</b>

## 1 Introduction

L'utilisation d'éléments finis de degré autre que 1 nous a amené à examiner les éléments finis classiques de Lagrange de degré 2, par exemple pour le quadrilatère dans [3] et pour l'hexaèdre dans [4], en exhibant des conditions suffisantes (nécessaires et suffisantes dans certains cas) assurant la positivité du jacobien (le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation). On a vu que ces éléments (dans leur version complète) ne sont autres que des carreaux de Bézier. Dans le formalisme éléments finis, les éléments sont définis via les fonctions de forme et les nœuds, dans l'écriture sous forme de Bézier, ces mêmes éléments sont définis par les polynômes de Bernstein et les points de contrôle, avec un passage immédiat d'une écriture à l'autre.

L'idée de prendre comme fonction de forme pour effectuer un calcul, les fonctions définissant la géométrie est une idée ancienne récemment remise à la mode<sup>1</sup> et largement exploitée. Les fonctions utilisées en CAO peuvent être des Bézier (et on retrouve les éléments finis de Lagrange) ou d'autres type de description comme les Bézier rationnels, les B-splines, les Nurbs, etc. La partie géométrique (la CAO) ne s'est pas directement intéressée au prérequis permettant d'effectuer correctement des calculs avec ses propres fonctions. En particulier, nous n'avons pas trouvé de discussion sur le signe du jacobien<sup>2</sup> des transformations utilisées. L'objet de ce rapport est justement de regarder ce problème en examinant le cas des Bézier rationnels et plus précisément au degré 2.

Étudier directement le degré 2 nous a semblé quelque peu délicat aussi, dans une première partie, on revient au degré 1 qui, même s'il ne présente pas de réel intérêt, permet de commencer à se familiariser avec les Bézier rationnels et quelques uns de leurs aspects dans leur écriture dans le système de coordonnées barycentriques utilisé pour les triangles et les tétraèdres. En particulier, le degré des polynômes jacobiens<sup>3</sup> n'est pas celui auquel on pouvait, *a priori*, s'attendre. Dans ce cas, on pensait à un polynôme de degré 2 et on trouve un polynôme de degré 1 qui est identique à celui obtenu pour un carreau de Bézier classique.

<sup>1</sup>voir tout ce qui a trait à l'"isogeometric analysis".

<sup>2</sup>Notons que le jacobien n'est défini que pour des applications de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , c'est dire que l'espace des paramètres et l'espace physique sont les mêmes excluant de fait le cas des surfaces.

<sup>3</sup>On verra, en fait, que l'on se débarrasse du dénominateur et que le polynôme étudié n'est pas le vrai jacobien mais se comporte, pour ce qui a trait à son signe, comme lui.

La seconde partie concerne le degré 2. De même un calcul direct indique que le degré est 4 alors que, en affinant l'analyse, nous ne trouvons que le degré 3, réduction de degré immédiate aux bords mais obtenu par continuité pour le carreau lui-même.

Avant de conclure, on regarde le cas d'un carreau volumique (tétraèdre) de degré 2. Dans ce cas, l'analyse exhibe un degré 5 mais on montre qu'il se réduit à un degré 4. Le cas, sans réel intérêt, du degré 1 est déduit de la discussion.

Du point de vue pratique, le calcul des coefficients de contrôle devra être réalisé via un programme.

## 2 Courbe de Bézier rationnelle de degré 1

Certainement d'un intérêt limité (si ce n'est de modifier la position des points, par exemple le milieu), cette courbe (un segment de droite) est regardée pour faciliter la compréhension des courbes de degré 2.

**Système avec le paramètre naturel.** Pour définir la courbe, on se donne des points de contrôle  $P_i$  et des poids  $\omega_i$  supposés positifs. L'expression de la courbe est :

$$\gamma(u) = \frac{\sum_{i=0,1} B_i^1(u)\omega_i P_i}{\sum_{i=0,1} B_i^1(u)\omega_i}, u \in [0, 1], \quad (1)$$

c'est-à-dire simplement :

$$\gamma(u) = \frac{(1-u)\omega_0 P_0 + u\omega_1 P_1}{(1-u)\omega_0 + u\omega_1} = \frac{(1-u)\omega_0 P_0 + u\omega_1 P_1}{D(u)} \text{ en posant } D(u) = (1-u)\omega_0 + u\omega_1.$$

Un calcul direct donne la tangente, on a :

$$D(u)^2 \gamma(u)' = \omega_0 \omega_1 \overrightarrow{P_0 P_1},$$

la tangente est parallèle au segment. À noter que l'on pouvait s'attendre à trouver une expression de degré 1 au numérateur alors que l'on ne trouve qu'une expression de degré 0, caractéristique qui sera confirmée en discutant du degré 2. Quand les poids sont égaux, on retrouve le cas classique.

**Système de paramètres barycentriques.** La même courbe s'écrit maintenant :

$$\gamma(u, v) = \frac{\sum_{i+j=1} B_{ij}^1(u, v)\omega_{ij} P_{ij}}{\sum_{i+j=1} B_{ij}^1(u, v)\omega_{ij}}, u \in [0, 1], v \in [0, 1] \text{ avec } u + v = 1, \quad (2)$$

et, ici, les Bernstein sont définis par :

$$B_{ij}^1(u, v) = u^i v^j, i + j = 1, u + v = 1.$$

Si on pose  $D(u, v) = \omega_{10}u + \omega_{01}v$ , la courbe s'écrit simplement comme :

$$\gamma(u, v) = \frac{u\omega_{10}P_{10} + v\omega_{01}P_{01}}{D(u, v)},$$

et un calcul direct donne la tangente, à savoir, au facteur  $\frac{1}{D^2(u, v)}$  près :

$$\omega_{10}\omega_{01}\overrightarrow{P_{01}P_{10}},$$

qui est à l'envers de la direction trouvée plus haut (car  $u$  varie en sens inverse ici par rapport au cas naturel).

### 3 Triangle de Bézier rationnel de degré 1

Le carreau se définit par :

$$\sigma(u, v, w) = \frac{\sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk} P_{ijk}}{\sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk}}, u \in [0, 1], v \in [0, 1], w \in [0, 1] \quad \text{avec} \quad u+v+w = 1, \quad (3)$$

avec

$$B_{ijk}^1(u, v, w) = u^i v^j w^k, i + j + k = 1, u + v + w = 1.$$

#### 3.1 Calcul et comportement du jacobien

Pour analyser le jacobien de cette transformation, on reprend la méthode par composantes telle que décrite dans [5]. On considère le point  $P = \sigma(u, v, w)$  et on note  $(x, y)$  ses coordonnées. Si  $(x_{ijk}, y_{ijk})$  désigne les coordonnées du point de contrôle  $P_{ijk}$ , on a :

$$x = \frac{\sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk} x_{ijk}}{\sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk}},$$

$$y = \frac{\sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk} y_{ijk}}{\sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk}}.$$

Comme  $u + v + w = 1$ , on considère le jacobien comme le déterminant :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Si on note  $D(u, v, w) = \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk}$ , on a :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \frac{1}{D(u, v, w)^4} \begin{vmatrix} D(u, v, w) \frac{\partial X}{\partial v} - X \frac{\partial D(u, v, w)}{\partial v} & D(u, v, w) \frac{\partial X}{\partial w} - X \frac{\partial D(u, v, w)}{\partial w} \\ D(u, v, w) \frac{\partial Y}{\partial v} - Y \frac{\partial D(u, v, w)}{\partial v} & D(u, v, w) \frac{\partial Y}{\partial w} - Y \frac{\partial D(u, v, w)}{\partial w} \end{vmatrix},$$

avec, maintenant,  $X = \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk} x_{ijk}$  et  $Y = \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk} y_{ijk}$ , les numérateurs de ces quantités telles que définies initialement.

En développant ce déterminant, on obtient l'écriture sous la forme du déterminant  $3 \times 3$  suivant :

$$\frac{1}{D(u, v, w)^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} & X \\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial w} & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial w} & Z \end{vmatrix},$$

avec  $Z = D(u, v, w)$ . Passant dans  $\mathbb{R}^3$ , on définit les points  $Q_{ijk}$  par  $Q_{ijk} = (P_{ijk}, \omega_{ijk})$ , c'est-à-dire de coordonnées  $(\omega_{ijk} x_{ijk}, \omega_{ijk} y_{ijk}, \omega_{ijk} z_{ijk})$  avec  $z_{ijk} = 1$  puis le point  $Q$  de  $\mathbb{R}^3$  de coordonnées  $(X, Y, Z)$  données par :

$$X = \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk} x_{ijk},$$

$$Y = \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk} y_{ijk},$$

$$Z = \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \omega_{ijk} z_{ijk},$$

alors ce point de  $\mathbb{R}^3$  est défini par un Bézier classique :

$$Q(u, v, w) = \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) Q_{ijk},$$

et on a (si  $O$  désigne l'origine) :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \frac{1}{D(u, v, w)^3} \left| \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

c'est-à-dire que le jacobien a une interprétation dans l'espace de dimension supérieure. Son signe est celui de :

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

et le polynôme correspondant est obtenu en exprimant ces quantités. On trouve comme polynôme :

$$\sum_{i+j+k=0,1} B_{ijk}^1(u, v, w) \left| \Delta_{100}^{010Q} \quad \Delta_{100}^{001Q} \quad \overrightarrow{OQ_{ijk}} \right|,$$

soit 3 coefficients. Dans cette relation, on a  $\Delta_{ijk}^{010Q} = Q_{i-1, j+1, k} - Q_{ijk}$  et  $\Delta_{ijk}^{001Q} = Q_{i-1, j, k+1} - Q_{ijk}$ , dans  $\mathbb{R}^3$  donc. Explicitant ce polynôme, on trouve :

$$u \left| \Delta_{100}^{010Q} \quad \Delta_{100}^{001Q} \quad \overrightarrow{OQ_{100}} \right| + v \left| \Delta_{100}^{010Q} \quad \Delta_{100}^{001Q} \quad \overrightarrow{OQ_{010}} \right| + w \left| \Delta_{100}^{010Q} \quad \Delta_{100}^{001Q} \quad \overrightarrow{OQ_{001}} \right|,$$

ou

$$u \left| \overrightarrow{Q_{100}Q_{010}} \quad \overrightarrow{Q_{100}Q_{001}} \quad \overrightarrow{OQ_{100}} \right| + v \left| \overrightarrow{Q_{100}Q_{010}} \quad \overrightarrow{Q_{100}Q_{001}} \quad \overrightarrow{OQ_{010}} \right| + w \left| \overrightarrow{Q_{100}Q_{010}} \quad \overrightarrow{Q_{100}Q_{001}} \quad \overrightarrow{OQ_{001}} \right|,$$

qui se simplifie en :

$$(u + v + w) \left| \overrightarrow{Q_{100}Q_{010}} \quad \overrightarrow{Q_{100}Q_{001}} \quad \overrightarrow{OQ_{100}} \right|,$$

et, au final :

$$\left| \overrightarrow{Q_{100}Q_{010}} \quad \overrightarrow{Q_{100}Q_{001}} \quad \overrightarrow{OQ_{100}} \right|,$$

ou encore, en fonction des  $P_{ijk}$  :

$$\omega_{100}\omega_{010}\omega_{001} \left| \overrightarrow{P_{100}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{001}} \right|.$$

Ce résultat est identique à celui du triangle classique (et les poids n'interviennent pas). À noter la simplicité de ce calcul qui donne immédiatement la condition de positivité (comparé au cas du quadrilatère, [5], dans lequel il avait fallu combiner de nombreux termes pour arriver à nos fins).

### 3.2 Conclusion sur le carreau de degré 1

Une analyse rapide du jacobien indique qu'il se comporte comme un polynôme de degré 2, une analyse plus fine montre que ce polynôme est de degré 1, ce qui était prévisible (puisque l'élément est droit). On retrouve ici le même résultat que celui relatif aux quadrilatères, cf. [5], mais il convient de noter que l'analyse du triangle est nettement plus simple. Le coefficient de contrôle unique est la surface du triangle (et les poids n'interviennent pas).

## 4 Courbe de Bézier rationnelle de degré 2

### 4.1 La courbe

L'expression de la courbe (en coordonnées barycentriques) est :

$$\gamma(u, v) = \frac{\sum_{i+j=2} B_{ij}^2(u, v) \omega_{ij} P_{ij}}{\sum_{i+j=2} B_{ij}^2(u, v) \omega_{ij}}, \quad u \in [0, 1], v \in [0, 1] \quad \text{avec} \quad u + v = 1, \quad (4)$$

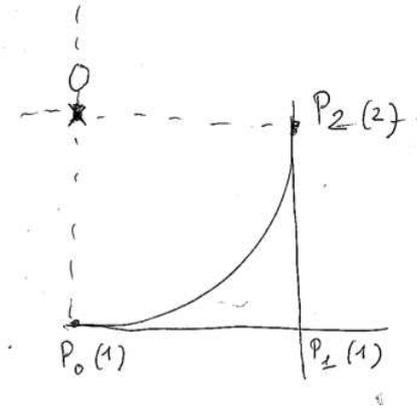


FIG. 1 – Le cas classique de la construction d'un arc de cercle (centré à l'origine et de rayon 1),  $P_{20} = (0, -1)$ ,  $P_{11} = (1, -1)$ ,  $P_{02} = (1, 0)$  et  $\omega_{20} = \omega_{11} = 1, \omega_{02} = 2$ . Sur le dessin  $P_{20} = P_0, P_{11} = P_1$  et  $P_{02} = P_2$ , passage des indices barycentriques aux indices naturels.

et, ici, les Bernstein sont définis par :

$$B_{ij}^2(u, v) = \frac{2!}{i!j!} u^i v^j, i + j = 2, u + v = 1.$$

La courbe s'écrit également

$$\gamma(u, v) = \sum_{i+j=2} R_{ij}^2(u, v) P_{ij},$$

avec

$$R_{ij}^2(u, v) = \frac{B_{ij}^2(u, v) \omega_{ij}}{\sum_{k+l=2} B_{kl}^2(u, v) \omega_{kl}},$$

les  $R_{ij}^2(u, v)$  étant les fonctions de formes. En introduisant  $D(u, v) = \sum_{i+j=2} B_{ij}^2(u, v) \omega_{ij}$ , il vient :

$$R_{ij}^2(u, v) = \frac{B_{ij}^2(u, v) \omega_{ij}}{D(u, v)}.$$

La courbe passe par  $P_0$  ( $u = 1$ ), alias  $P_{20}$ , et par  $P_2$  ( $v = 1$ ), alias  $P_{02}$ , tandis que le nœud milieu qui correspond à  $u = v = \frac{1}{2}$  vaut

$$M = \frac{\omega_{20} P_{20} + 2\omega_{11} P_{11} + \omega_{02} P_{02}}{\omega_{20} + 2\omega_{11} + \omega_{02}},$$

et que, en sens inverse, le nœud milieu permet de trouver le point de contrôle  $P_{11}$  :

$$2\omega_{11} P_{11} = (\omega_{20} + 2\omega_{11} + \omega_{02})M - \omega_{20} P_{20} - \omega_{02} P_{02}.$$

## 4.2 La tangente

La dérivée de  $D(u, v)$  a la forme classique :

$$D'(u, v) = 2 \sum_{i+j=1} B_{ij}^1(u, v) (\omega_{i+1, j} - \omega_{i, j+1}).$$

On calcule maintenant la dérivée de  $R_{ij}^2(u, v)$ , il vient :

$$R_{ij}^2(u, v)' = \frac{B_{ij}^2(u, v)' D(u, v) - B_{ij}^2(u, v) D'(u, v)}{D^2(u, v)} \omega_{ij},$$

qui se comporte comme

$$\left\{ B_{ij}^2(u, v)' D(u, v) - B_{ij}^2(u, v) D'(u, v) \right\} \omega_{ij},$$

puisque le dénominateur est positif. Par suite, la tangente se comporte comme :

$$\sum_{i+j=2} \left\{ B_{ij}^2(u, v)' D(u, v) - B_{ij}^2(u, v) D'(u, v) \right\} \omega_{ij} P_{ij}.$$

Cette expression suggère que la forme est de degré 3, en fait, on va montrer qu'elle n'est que de degré 2 dans le cas général et même de degré 1 quand tous les poids sont égaux. Pour ce faire, on manipule l'expression précédente. En premier, on considère séparément les deux termes de l'expression et, dans le premier, on explicite la dérivée des  $B_{ij}^2(u, v)$ , on a ainsi :

$$2 \sum_{k+l=1} B_{kl}^1(u, v) D(u, v) (\omega_{k+1, l} P_{k+1, l} - \omega_{k, l+1} P_{k, l+1}) - \sum_{i+j=2} B_{ij}^2(u, v) D'(u, v) \omega_{ij} P_{ij},$$

ensuite, on explicite  $D(u, v)$  et sa dérivée, il vient :

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k+l=1} B_{kl}^1(u, v) \sum_{i+j=2} B_{ij}^2(u, v) \omega_{ij} (\omega_{k+1, l} P_{k+1, l} - \omega_{k, l+1} P_{k, l+1}) \\ & - 2 \sum_{i+j=2} B_{ij}^2(u, v) \sum_{k+l=1} B_{kl}^1(u, v) (\omega_{k+1, l} - \omega_{k, l+1}) \omega_{ij} P_{ij}, \end{aligned}$$

omettant le facteur 2, on regroupe les termes :

$$\sum_{i+j=2} \sum_{k+l=1} B_{ij}^2(u, v) B_{kl}^1(u, v) \{ \omega_{ij} (\omega_{k+1, l} P_{k+1, l} - \omega_{k, l+1} P_{k, l+1}) - (\omega_{k+1, l} - \omega_{k, l+1}) \omega_{ij} P_{ij} \},$$

et on examine le terme  $\omega_{ij} (\omega_{k+1, l} P_{k+1, l} - \omega_{k, l+1} P_{k, l+1}) - (\omega_{k+1, l} - \omega_{k, l+1}) \omega_{ij} P_{ij}$  en factorisant les différents  $\omega$ .  $\omega_{ij} P_{ij}$ . Il vient :

$$\omega_{ij} \omega_{k+1, l} P_{k+1, l} - \omega_{ij} \omega_{k, l+1} P_{k, l+1} - \omega_{k+1, l} \omega_{ij} P_{ij} + \omega_{k, l+1} \omega_{ij} P_{ij}.$$

Pour  $\omega_{20} P_{20}$  on a les indices suivants :

$$(k = 1, i = 0, 1, 2)(\dots)(k = 0, 1)(k = 0, 1),$$

ce qui fait 7 termes, en explicitant les Bernstein :

$$\begin{aligned} & B_{02}^2(u, v) B_{10}^1(u, v) \omega_{02} + B_{11}^2(u, v) B_{10}^1(u, v) \omega_{11} + B_{20}^2(u, v) B_{10}^1(u, v) \omega_{20} - \\ & B_{20}^2(u, v) B_{01}^1(u, v) \omega_{11} - B_{20}^2(u, v) B_{10}^1(u, v) \omega_{20} + \\ & B_{20}^2(u, v) B_{01}^1(u, v) \omega_{02} + B_{20}^2(u, v) B_{10}^1(u, v) \omega_{11}, \end{aligned}$$

soit la somme :

$$\begin{aligned} & B_{02}^2(u, v) B_{10}^1(u, v) \omega_{02} + B_{11}^2(u, v) B_{10}^1(u, v) \omega_{11} - \\ & B_{20}^2(u, v) B_{01}^1(u, v) \omega_{11} + \\ & B_{20}^2(u, v) B_{01}^1(u, v) \omega_{02} + B_{20}^2(u, v) B_{10}^1(u, v) \omega_{11}, \end{aligned}$$

ou encore, en factorisant les poids :

$$\begin{aligned} & (B_{11}^2(u, v) B_{10}^1(u, v) - B_{20}^2(u, v) B_{01}^1(u, v) + B_{20}^2(u, v) B_{10}^1(u, v)) \omega_{11} + \\ & (B_{02}^2(u, v) B_{10}^1(u, v) + B_{20}^2(u, v) B_{01}^1(u, v)) \omega_{02}, \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$u^2 \omega_{11} + uv \omega_{02}.$$

Pour  $\omega_{11}P_{11}$  on a les indices suivants :

$$(k = 0, i = 0, 1, 2)(k = 1, i = 0, 1, 2)(i = 1, k = 0, 1)(i = 1, k = 0, 1),$$

ce qui fait 10 termes, en explicitant les Bernstein :

$$\begin{aligned} & B_{02}^2(u, v)B_{01}^1(u, v)\omega_{02} + B_{11}^2(u, v)B_{01}^1(u, v)\omega_{11} + B_{20}^2(u, v)B_{01}^1(u, v)\omega_{20} - \\ & B_{02}^2(u, v)B_{10}^1(u, v)\omega_{02} - B_{11}^2(u, v)B_{10}^1(u, v)\omega_{11} - B_{20}^2(u, v)B_{10}^1(u, v)\omega_{20} - \\ & B_{11}^2(u, v)B_{01}^1(u, v)\omega_{11} - B_{11}^2(u, v)B_{10}^1(u, v)\omega_{20} + \\ & B_{11}^2(u, v)B_{01}^1(u, v)\omega_{02} + B_{11}^2(u, v)B_{10}^1(u, v)\omega_{11}, \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$-u^2\omega_{20} + v^2\omega_{02}.$$

Pour  $\omega_{02}P_{02}$  on a les indices suivants :

$$(\dots)(k = 0, i = 0, 1, 2)(i = 0, k = 0, 1)(i = 0, k = 0, 1),$$

soit 7 termes, en explicitant les Bernstein :

$$\begin{aligned} & -B_{02}^2(u, v)B_{01}^1(u, v)\omega_{02} - B_{11}^2(u, v)B_{01}^1(u, v)\omega_{11} - B_{20}^2(u, v)B_{01}^1(u, v)\omega_{20} - \\ & B_{02}^2(u, v)B_{10}^1(u, v)\omega_{11} - B_{02}^2(u, v)B_{10}^1(u, v)\omega_{20} + \\ & B_{02}^2(u, v)B_{01}^1(u, v)\omega_{02} + B_{02}^2(u, v)B_{10}^1(u, v)\omega_{11}, \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$-uv\omega_{20} - v^2\omega_{11}.$$

On obtient le résultat en regroupant ces trois contributions, soit :

$$(u^2\omega_{11} + uv\omega_{02})\omega_{20}P_{20} + (-u^2\omega_{20} + v^2\omega_{02})\omega_{11}P_{11} - (uv\omega_{20} + v^2\omega_{11})\omega_{02}P_{02},$$

et, en explicitant :

$$u^2\omega_{11}\omega_{20}P_{20} + uv\omega_{02}\omega_{20}P_{20} - u^2\omega_{20}\omega_{11}P_{11} + v^2\omega_{02}\omega_{11}P_{11} - uv\omega_{20}\omega_{02}P_{02} - v^2\omega_{11}\omega_{02}P_{02},$$

c'est-à-dire :

$$u^2\omega_{11}\omega_{20}\overrightarrow{P_{11}P_{20}} + uv\omega_{02}\omega_{20}\overrightarrow{P_{02}P_{20}} + v^2\omega_{02}\omega_{11}\overrightarrow{P_{02}P_{11}}.$$

Notons que cette expression est de degré 2 seulement et peut être comparée à l'expression trouvée dans [5] dans le système de paramètres habituels.

La tangente en  $P_{20}$ ,  $u = 1, v = 0$ , est parallèle à  $\overrightarrow{P_{11}P_{20}}$ . En  $P_{02}$ , elle est parallèle à  $\overrightarrow{P_{02}P_{11}}$ , au milieu,  $u = v = \frac{1}{2}$ , elle est parallèle à  $\omega_{11}\omega_{20}\overrightarrow{P_{11}P_{20}} + \omega_{02}\omega_{20}\overrightarrow{P_{02}P_{20}} + \omega_{02}\omega_{11}\overrightarrow{P_{02}P_{11}}$ .

Quand les poids sont égaux, on trouve :

$$u^2\overrightarrow{P_{11}P_{20}} + uv\overrightarrow{P_{02}P_{20}} + v^2\overrightarrow{P_{02}P_{11}},$$

et, en ouvrant  $\overrightarrow{P_{02}P_{20}}$  en  $P_{11}$ , il vient :

$$u\overrightarrow{P_{11}P_{20}} + v\overrightarrow{P_{02}P_{11}},$$

qui est de degré 1 comme attendu, la courbe rationnelle se confond avec la courbe de Bézier classique.

## 5 Triangle de Bézier rationnel de degré 2

Le carreau se définit par :

$$\sigma(u, v, w) = \frac{\sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w)\omega_{ijk}P_{ijk}}{\sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w)\omega_{ijk}}, u \in [0, 1], v \in [0, 1], w \in [0, 1] \quad \text{avec} \quad u+v+w = 1, \quad (5)$$

avec

$$B_{ijk}^2(u, v, w) = \frac{2!}{i!j!k!}u^i v^j w^k, i + j + k = 2, u + v + w = 1.$$

## 5.1 Calcul et comportement du jacobien

Pour analyser le jacobien de cette transformation, on reprend la méthode par composantes telle que décrite dans [5]. On considère le point  $P = \sigma(u, v), w$  et on note  $(x, y)$  ses coordonnées. Si  $(x_{ijk}, y_{ijk})$  désigne les coordonnées du point de contrôle  $P_{ijk}$ , on a :

$$x = \frac{\sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) \omega_{ijk} x_{ijk}}{\sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) \omega_{ijk}},$$

$$y = \frac{\sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) \omega_{ijk} y_{ijk}}{\sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) \omega_{ijk}}.$$

Comme  $u + v + w = 1$ , on considère le jacobien comme le déterminant :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Si on note  $D(u, v, w) = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) \omega_{ijk}$ , on a :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \frac{1}{D(u, v, w)^4} \begin{vmatrix} D(u, v, w) \frac{\partial X}{\partial v} - X \frac{\partial D(u, v, w)}{\partial v} & D(u, v, w) \frac{\partial X}{\partial w} - X \frac{\partial D(u, v, w)}{\partial w} \\ D(u, v, w) \frac{\partial Y}{\partial v} - Y \frac{\partial D(u, v, w)}{\partial v} & D(u, v, w) \frac{\partial Y}{\partial w} - Y \frac{\partial D(u, v, w)}{\partial w} \end{vmatrix},$$

avec, maintenant,  $X = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) \omega_{ijk} x_{ijk}$  et  $Y = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) \omega_{ijk} y_{ijk}$ ,

les numérateurs de ces quantités telles que définies initialement.

En développant ce déterminant, on obtient l'écriture sous la forme du déterminant  $3 \times 3$  suivant :

$$\frac{1}{D(u, v, w)^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} & X \\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial w} & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial w} & Z \end{vmatrix},$$

avec  $Z = D(u, v, w)$ . Passant dans  $\mathbb{R}^3$ , on définit les points  $Q_{ijk}$  par  $Q_{ijk} = (P_{ijk}, \omega_{ijk})$ , c'est-à-dire de coordonnées  $(\omega_{ijk} x_{ijk}, \omega_{ijk} y_{ijk}, \omega_{ijk} z_{ijk})$  avec  $z_{ijk} = 1$  puis le point  $Q$  de  $\mathbb{R}^3$  de coordonnées  $(X, Y, Z)$  données par :

$$X = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) \omega_{ijk} x_{ijk},$$

$$Y = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) \omega_{ijk} y_{ijk},$$

$$Z = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) \omega_{ijk} z_{ijk},$$

alors ce point de  $\mathbb{R}^3$  est défini par un Bézier classique :

$$Q(u, v, w) = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) Q_{ijk},$$

et on a (si  $O$  désigne l'origine) :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \frac{1}{D(u, v, w)^3} \left| \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

c'est-à-dire que le jacobien a une interprétation dans l'espace de dimension supérieure. Son signe est celui de :

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

et le polynôme correspondant est obtenu en exprimant ces quantités. On trouve comme polynôme :

$$\left| 2 \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{010Q} \quad 2 \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{001Q} \quad \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) Q_{ijk} \right|,$$

avec, rappelons le :

$$\begin{aligned} \Delta_{ijk}^{010Q} &= Q_{i-1, j+1, k} - Q_{ijk}, \\ \Delta_{ijk}^{001Q} &= Q_{i-1, j, k+1} - Q_{ijk}. \end{aligned}$$

Le polynôme est de degré 4. Considérons, pour  $v$  et  $w$  non nuls, le polynôme suivant :

$$\mathcal{J}^*(u, v, w) = \left| -\frac{v}{2} \frac{\partial Q}{\partial v} \quad -\frac{w}{2} \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

en notant que  $\mathcal{J}^*(u, v, w) = \frac{vw}{4} \mathcal{J}(u, v, w)$ , on a également :

$$\mathcal{J}^*(u, v, w) = \left| -\frac{v}{2} \frac{\partial Q}{\partial v} \quad -\frac{w}{2} \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \overrightarrow{OQ} - \frac{v}{2} \frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{w}{2} \frac{\partial Q}{\partial w} \right|,$$

et la troisième colonne s'écrit :

$$\sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) Q_{ijk} - v \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{010Q} - w \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{001Q},$$

que l'on développe, il vient :

$$\begin{aligned} &u^2 Q_{200} + 2uv Q_{110} + v^2 Q_{020} + 2vw Q_{011} + w^2 Q_{002} + 2uw Q_{101} \\ &-v \{u(Q_{110} - Q_{200}) + v(Q_{020} - Q_{110}) + w(Q_{011} - Q_{101})\} \\ &-w \{u(Q_{101} - Q_{200}) + v(Q_{011} - Q_{110}) + w(Q_{002} - Q_{101})\}, \end{aligned}$$

qui se réduit, pas à pas, à :

$$\begin{aligned} &(u^2 + uv + uw) Q_{200} + (2uv - uv + v^2 + vw) Q_{110} + (2uw + vw - uv + w^2) Q_{101}, \\ &u(u + v + w) Q_{200} + v(u + v + w) Q_{110} + w(u + v + w) Q_{101}, \\ &u Q_{200} + v Q_{110} + w Q_{101}, \end{aligned}$$

et on a gagné un degré. Ceci se formalise en :

$$\sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) Q_{i+1, j, k},$$

et ainsi :

$$\mathcal{J}^*(u, v, w) = \frac{vw}{4} \left| 2 \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{010Q} \quad 2 \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{001Q} \quad \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) Q_{i+1, j, k} \right|,$$

ou encore

$$\mathcal{J}^*(u, v, w) = vw \left| \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{010Q} \quad \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{001Q} \quad \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) Q_{i+1, j, k} \right|,$$

donc

$$\mathcal{J}(u, v, w) = 4 \left| \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{010Q} \quad \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jk}^{001Q} \quad \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) Q_{i+1, j, k} \right|,$$

est le polynôme qui traduit le comportement de l'élément. Ce polynôme est de degré 3 et possède 10 coefficients. Il s'écrit aussi (multiplication des Bernstein) comme :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = 4 \sum_{I+J+K=3} B_{IJK}^3(u, v, w) \sum_{i_1+i_2+i_3=I, \dots} \frac{1}{C_{IJK}^3} \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1}^{010Q} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2}^{001Q} \quad Q_{i_3+1, j_3, k_3} \right|,$$

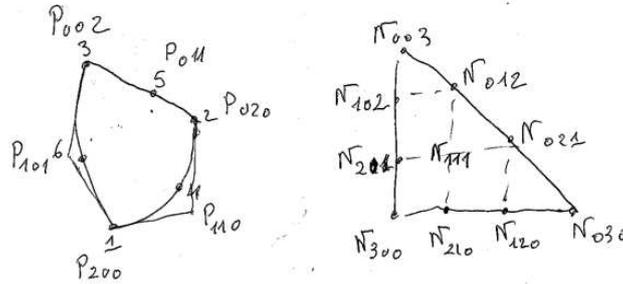


FIG. 2 – L'élément courant, la numérotation façon éléments finis et en notation Bézier. Le schéma synoptique des coefficients de contrôle et leur numérotation.

soit :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \sum_{I+J+K=3} B_{IJK}^3(u, v, w) N_{IJK},$$

avec

$$N_{IJK} = 4 \sum_{i_1+i_2+i_3=I, j_1+j_2+j_3=J, k_1+k_2+k_3=K} \frac{1}{C_{IJK}^3} \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1}^{010Q} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2}^{001Q} \quad Q_{i_3+1, j_3, k_3} \right|.$$

Notons que ce résultat établi pour  $v$  et  $w$  non nuls s'étend, par continuité, au carreau tout entier.

**Calculs des coefficients.** Il y a 10 coefficients qui sont de 3 types, ceux associés aux sommets, ceux associés aux arêtes (deux par arêtes mais l'un symétrique par rapport à l'autre) et un coefficient interne.

On explicite un coefficient relatif à un sommet, par exemple,  $N_{300}$  pour lequel  $i_1 = i_2 = i_3 = 1$ , les autres indices étant nuls. Il vient (un seul terme) :

$$N_{300} = 4 \left| \Delta_{2,0,0}^{010Q} \quad \Delta_{2,0,0}^{001Q} \quad Q_{2,0,0} \right|,$$

soit, pas à pas :

$$N_{300} = 4 \left| Q_{1,1,0} - Q_{2,0,0} \quad Q_{1,0,1} - Q_{2,0,0} \quad Q_{2,0,0} \right|,$$

$$N_{300} = 4 \left| Q_{1,1,0} \quad Q_{1,0,1} \quad Q_{2,0,0} \right|,$$

$$N_{300} = 4\omega_{200}\omega_{110}\omega_{101} \left| \overrightarrow{P_{200}P_{1,1,0}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{1,0,1}} \right|,$$

coefficient qui contrôle l'angle entre les deux tangentes en  $P_{200}$ .

On regarde un coefficient relatif à une arête, soit  $N_{210}$ , ici on a  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , l'un des  $j_1, j_2$  ou  $j_3$  qui vaut 1 (3 combinaisons) et la somme de deux des indices en  $i$  qui vaut 2 (3 combinaisons). Il y a, *a priori*, 9 combinaisons possibles, mais il y en a moins car on a les contraintes comme  $i_1 + j_1 + k_1 = 1$  qui interdisent certaines d'entre elles.

```

en i:      en j :      en k:
  1 1 0      1 0 0      0 0 0
  1 0 1      0 1 0
  0 1 1      0 0 1
donnerait:
  110 100 000
  100 110 000
  100 100 010 existe
  110 000 100
  100 010 100 existe
  100 000 110
  010 100 100 existe
  000 110 100
  000 100 110

```

donc

$$\begin{aligned}
N_{210} &= \frac{4}{3} \left\{ |\Delta_{200}^{010Q} \quad \Delta_{200}^{001Q} \quad Q_{110}| + |\Delta_{200}^{010Q} \quad \Delta_{110}^{001Q} \quad Q_{200}| + |\Delta_{110}^{010Q} \quad \Delta_{200}^{001Q} \quad Q_{200}| \right\}, \\
N_{210} &= \frac{4}{3} \left\{ |Q_{110} - Q_{200} \quad Q_{101} - Q_{200} \quad Q_{110}| + |Q_{110} - Q_{200} \quad Q_{011} - Q_{110} \quad Q_{200}| + |Q_{020} - Q_{110} \quad Q_{101} - Q_{200}| \right\}, \\
N_{210} &= \frac{4}{3} \left\{ |-Q_{200} \quad Q_{101} \quad Q_{110}| + |Q_{110} \quad Q_{011} \quad Q_{200}| + |Q_{020} - Q_{110} \quad Q_{101} \quad Q_{200}| \right\}, \\
N_{210} &= \frac{4}{3} \left\{ |Q_{110} \quad Q_{101} \quad Q_{200}| + |Q_{110} \quad Q_{011} \quad Q_{200}| + |Q_{020} \quad Q_{101} \quad Q_{200}| + |Q_{101} \quad Q_{110} \quad Q_{200}| \right\}, \\
N_{210} &= \frac{4}{3} \left\{ |Q_{110} \quad Q_{011} \quad Q_{200}| + |Q_{020} \quad Q_{101} \quad Q_{200}| \right\},
\end{aligned}$$

et, en fonction des  $P_{ijk}$  :

$$N_{210} = \frac{4}{3} \left\{ \omega_{110}\omega_{011}\omega_{200} |\overrightarrow{P_{200}P_{110}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{011}}| + \omega_{020}\omega_{101}\omega_{200} |\overrightarrow{P_{200}P_{020}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{101}}| \right\}.$$

Le coefficient  $N_{120}$  doit avoir la même forme, on trouve :

$$N_{120} = \frac{4}{3} \left\{ \omega_{110}\omega_{101}\omega_{020} |\overrightarrow{P_{110}P_{020}} \quad \overrightarrow{P_{110}P_{101}}| + \omega_{020}\omega_{011}\omega_{200} |\overrightarrow{P_{200}P_{020}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{011}}| \right\},$$

qui est bien de la même forme. Les coefficients des autres arêtes s'en déduisent et le dernier coefficient à calculer est  $N_{111}$ . Les combinaisons sont les suivantes mais seules celles qui conviennent sont notées dans ce qui suit :

```

en i:      en j :      en k:
  1 0 0      1 0 0      1 0 0
  0 1 0      0 1 0      0 1 0
  0 0 1      0 0 1      0 0 1
donnent seulement:
100 010 001
100 001 010

010 100 001
010 001 100

001 100 010
001 010 100

```

donc

$$\begin{aligned}
N_{111} &= \frac{4}{6} \left\{ |\Delta_{200}^{010Q} \quad \Delta_{110}^{001Q} \quad Q_{101}| + |\Delta_{200}^{010Q} \quad \Delta_{101}^{001Q} \quad Q_{110}| + |\Delta_{110}^{010Q} \quad \Delta_{200}^{001Q} \quad Q_{101}| + \right. \\
&\quad \left. |\Delta_{110}^{010Q} \quad \Delta_{101}^{001Q} \quad Q_{200}| + |\Delta_{101}^{010Q} \quad \Delta_{200}^{001Q} \quad Q_{110}| + |\Delta_{101}^{010Q} \quad \Delta_{110}^{001Q} \quad Q_{200}| \right\},
\end{aligned}$$

soit<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned}
N_{111} &= \frac{4}{6} \left\{ |Q_{110} - Q_{200} \quad Q_{011} - Q_{110} \quad Q_{101}| + |Q_{110} - Q_{200} \quad Q_{002} - Q_{101} \quad Q_{110}| + \right. \\
&\quad |Q_{020} - Q_{110} \quad Q_{101} - Q_{200} \quad Q_{101}| + |Q_{020} - Q_{110} \quad Q_{002} - Q_{101} \quad Q_{200}| + \\
&\quad \left. |Q_{011} - Q_{101} \quad Q_{101} - Q_{200} \quad Q_{110}| + |Q_{011} - Q_{101} \quad Q_{011} - Q_{110} \quad Q_{200}| \right\}, \\
N_{111} &= \frac{4}{6} \left\{ |Q_{110} - Q_{200} \quad Q_{011} - Q_{110} \quad Q_{101}| - |Q_{200} \quad Q_{002} - Q_{101} \quad Q_{110}| - \right. \\
&\quad |Q_{020} - Q_{110} \quad Q_{200} \quad Q_{101}| + |Q_{020} - Q_{110} \quad Q_{002} - Q_{101} \quad Q_{200}| + \\
&\quad \left. |Q_{011} - Q_{101} \quad Q_{101} - Q_{200} \quad Q_{110}| + |Q_{011} - Q_{101} \quad Q_{011} - Q_{110} \quad Q_{200}| \right\},
\end{aligned}$$

et, en ouvrant<sup>5</sup>, on a simplement :

$$N_{111} = \frac{4}{6} \left\{ 2|Q_{110} \quad Q_{011} \quad Q_{101}| + |Q_{020} \quad Q_{002} \quad Q_{200}| \right\},$$

soit :

$$N_{111} = \frac{4}{6} \left\{ 2\omega_{110}\omega_{011}\omega_{101} |\overrightarrow{P_{101}P_{110}} \quad \overrightarrow{P_{101}P_{011}}| + \omega_{020}\omega_{002}\omega_{200} |\overrightarrow{P_{200}P_{020}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{002}}| \right\},$$

qui est totalement symétrique et se compose des deux seuls triangles qui "entourent" le milieu du triangle.

<sup>4</sup>par facilité les vecteurs sont à l'envers ce qui ne change pas le résultat.

<sup>5</sup>prenant notre courage à deux mains.

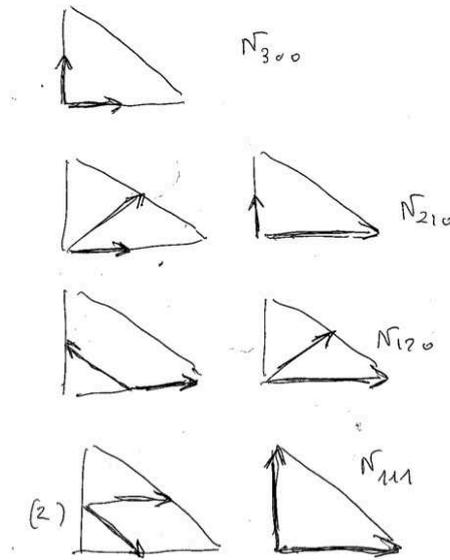


FIG. 3 – Un exemple de chaque type de coefficients,  $N_{300}$  pour un sommet,  $N_{210}$  et  $N_{120}$  pour une arête et  $N_{111}$  pour le contrôle central.

## 5.2 Conclusion sur le carreau triangulaire de degré 2

Une analyse rapide du jacobien indique qu'il se comporte comme un polynôme de degré 4, une analyse plus fine montre que ce polynôme est de degré 3, c'est-à-dire un de plus que le degré du triangle P2 classique. On retrouve ici le même résultat que celui relatif aux quadrilatères, cf. [5], mais il convient de noter que l'analyse du triangle est nettement plus simple. Les coefficients de contrôle sont au nombre de 10 et se compose de 17 termes, Figure 3. À noter que les poids interviennent dans les coefficients composés de plus d'un terme.

## 6 Extension au cas volumique

Le carreau se définit par :

$$\theta(u, v, w, t) = \frac{\sum_{i+j+k+l=2} B_{ijkl}^2(u, v, w, t) \omega_{ijkl} P_{ijkl}}{\sum_{i+j+k+l=2} B_{ijkl}^2(u, v, w, t) \omega_{ijkl}}, u \in [0, 1], v \in [0, 1], w \in [0, 1], t \in [0, 1], \quad (6)$$

avec  $u + v + w + t = 1$  et

$$B_{ijkl}^2(u, v, w, t) = \frac{2!}{i!j!k!l!} u^i v^j w^k t^l, i + j + k + l = 2, u + v + w + t = 1.$$

### 6.1 Calcul et comportement du jacobien

Notre analyse dans [5] de l'hexaèdre (au regard du quadrilatère) nous permet directement de dire que le jacobien se comporte comme le déterminant :

$$\frac{1}{D^4} \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} & \frac{\partial X}{\partial t} & X \\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial w} & \frac{\partial Y}{\partial t} & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial w} & \frac{\partial Z}{\partial t} & Z \\ \frac{\partial T}{\partial v} & \frac{\partial T}{\partial w} & \frac{\partial T}{\partial t} & T \end{vmatrix},$$

avec  $T = D(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=2} B_{ijkl}^2(u, v, w, t)\omega_{ijkl}$ . Passant dans  $\mathbb{R}^4$ , on définit les points  $Q_{ijkl}$  par  $Q_{ijkl} = (P_{ijkl}, \omega_{ijkl})$ , c'est-à-dire de coordonnées  $(\omega_{ijkl}x_{ijkl}, \omega_{ijkl}y_{ijkl}, \omega_{ijkl}z_{ijkl}, \omega_{ijkl}t_{ijkl})$  avec  $t_{ijkl} = 1$  puis le point  $Q$  de  $\mathbb{R}^4$  de coordonnées  $(X, Y, Z, T)$  données par :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i+j+k+l=2} B_{ijkl}^2(u, v, w, t)\omega_{ijkl}x_{ijkl}, \\ Y &= \sum_{i+j+k+l=2} B_{ijkl}^2(u, v, w, t)\omega_{ijkl}y_{ijkl}, \\ Z &= \sum_{i+j+k+l=2} B_{ijkl}^2(u, v, w, t)\omega_{ijkl}z_{ijkl}, \\ T &= \sum_{i+j+k+l=2} B_{ijkl}^2(u, v, w, t)\omega_{ijkl}t_{ijkl}, \end{aligned}$$

alors ce point de  $\mathbb{R}^4$  est défini par un Bézier classique :

$$Q(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=2} B_{ijkl}^2(u, v, w, t)Q_{ijkl},$$

et on a (si  $O$  désigne l'origine) :

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \frac{1}{D(u, v)^4} \left| \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

c'est-à-dire que le jacobien a une interprétation dans l'espace de dimension supérieure. Son signe est celui de :

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

et le polynôme correspondant est obtenu en exprimant ces quantités. Donc, *a priori*, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u, v, w, t) &= \frac{8}{D(u, v)^4} \left| \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t)\Delta_{i+1,jkl}^{0100Q} \quad \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t)\Delta_{i+1,jkl}^{0010Q} \quad \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t)\Delta_{i+1,jkl}^{0001Q} \quad \sum_{i+j+k+l=2} B_{ijkl}^2(u, v, w, t)Q_{ijkl} \quad \right|, \end{aligned}$$

avec :  $\Delta_{ijkl}^{0100Q} = Q_{i-1,j+1,k,l} - Q_{ijkl}$ ,  $\Delta_{ijkl}^{0010Q} = Q_{i-1,j,k+1,l} - Q_{ijkl}$  et  $\Delta_{ijkl}^{0001Q} = Q_{i-1,j,k,l+1} - Q_{ijkl}$ . Cette expression semble être de degré 5 et doit s'écrire (au facteur  $\frac{8}{D^4}$  près) :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u, v, w, t) &= \sum_{I+J+K+L=5} B_{IJKL}^5(u, v, w, t) \sum_{i_1+i_2+i_3+i=I} \sum_{j_1+j_2+j_3+j=J} \sum_{k_1+k_2+k_3+k=K} \frac{1}{C_{IJKL}^5} \dots \\ &\quad \dots \left| \Delta_{i_1+1,j_1k_1}^{0100Q} \quad \Delta_{i_2+1,j_2k_2}^{0010Q} \quad \Delta_{i_3+1,j_3k_3}^{0001Q} \quad Q_{ijk} \right|, \end{aligned}$$

où l'on devine les coefficients  $N_{IJKL}$ .

On a (au facteur près) :

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \left| \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

et on construit le polynôme :

$$\mathcal{J}^*(u, v, w, t) = \left| -\frac{v}{2} \frac{\partial Q}{\partial v} \quad -\frac{w}{2} \frac{\partial Q}{\partial w} \quad -\frac{t}{2} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

en notant que

$$\mathcal{J}^*(u, v, w, t) = -\frac{vwt}{8} \mathcal{J}(u, v, w, t),$$

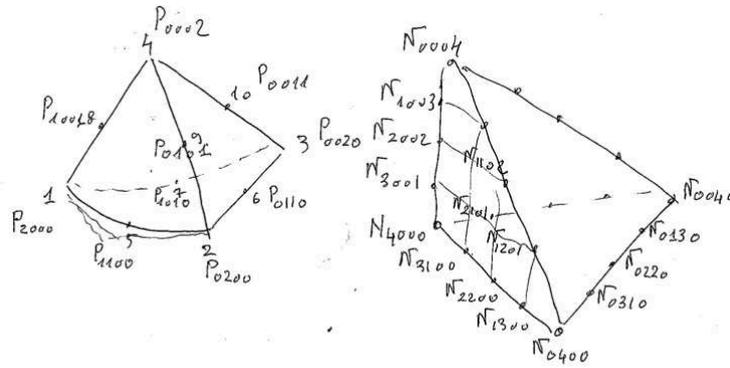


FIG. 4 – L'élément courant, la numérotation façon éléments finis et en notation Bézier. Le schéma synoptique des coefficients de contrôle et leur numérotation (seuls quelques coefficients sont représentés).

pour  $v$ ,  $w$  et  $t$  non nuls. Mais on a aussi :

$$\mathcal{J}^*(u, v, w, t) = \left| -\frac{v}{2} \frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{w}{2} \frac{\partial Q}{\partial w} - \frac{t}{2} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \overrightarrow{OQ} - \frac{v}{2} \frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{w}{2} \frac{\partial Q}{\partial w} - \frac{t}{2} \frac{\partial Q}{\partial t} \right|,$$

et la quatrième colonne s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{i+j+k+l=2} B_{ijkl}^2(u, v, w, t) Q_{ijkl} - v \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \Delta_{i+1, jkl}^{0100Q} - w \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \Delta_{i+1, jkl}^{0010Q} \\ - t \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \Delta_{i+1, jkl}^{0001Q} \end{aligned}$$

qui, comme pour le triangle, est égal à :

$$\sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) Q_{i+1, jkl}$$

et, ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^*(u, v, w, t) = -vwt \left| \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \Delta_{i+1, jkl}^{0100Q} \quad \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \Delta_{i+1, jkl}^{0010Q} \quad \dots \right. \\ \left. \dots \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \Delta_{i+1, jkl}^{0001Q} \quad \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) Q_{i+1, jkl} \right|, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u, v, w, t) = 8 \left| \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \Delta_{i+1, jkl}^{0100Q} \quad \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \Delta_{i+1, jkl}^{0010Q} \quad \dots \right. \\ \left. \dots \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \Delta_{i+1, jkl}^{0001Q} \quad \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) Q_{i+1, jkl} \right|, \end{aligned}$$

représente le polynôme qui traduit le comportement de l'élément. Ce polynôme est de degré 4 et possède 35 coefficients. Il s'écrit aussi comme :

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=4} B_{IJKL}^4(u, v, w, t) N_{IJKL},$$

avec

$$N_{IJKL} = \frac{8}{C_{IJKL}^4} \sum_{i_1+i_2+i_3+i=I, \dots} \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1 l_1}^{0100Q} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2 l_2}^{0010Q} \quad \Delta_{i_3+1, j_3 k_3 l_3}^{0001Q} \quad Q_{i+1, jkl} \right|.$$

et que ce résultat établi pour  $vwt$  non nul s'étend, par continuité, à l'ensemble du carreau.

**Calcul de quelques coefficients.** Le plus simple à calculer est  $N_{4000}$  car  $i_1 = i_2 = i_3 = i = 1$ , les autres indices étant nuls. Il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} N_{4000} &= 8 \left| \Delta_{2000}^{0100Q} \quad \Delta_{2000}^{0010Q} \quad \Delta_{2000}^{0001Q} \quad Q_{2000} \right|, \\ N_{4000} &= 8 \left| Q_{1100} - Q_{2000} \quad Q_{1010} - Q_{2000} \quad Q_{1001} - Q_{2000} \quad Q_{2000} \right|, \\ N_{4000} &= 8 \left| Q_{1100} \quad Q_{1010} \quad Q_{1001} \quad Q_{2000} \right|, \\ N_{4000} &= 8 \omega_{1100} \omega_{1010} \omega_{1001} \omega_{2000} \left| \overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1001}} \right|, \end{aligned}$$

qui contrôle les tangentes en  $P_{2000}$ .

On va calculer les 3 coefficients de l'arête  $P_{2000}P_{0200}$ . Pour  $N_{3100}$ , on a trois indices en  $i$  à 1 et un indice en  $j$  à 1, les autres étant nuls. Ceci donne 4 termes.

$$\begin{aligned} N_{3100} &= \frac{8}{4} \left\{ \left| \Delta_{2000}^{0100Q} \quad \Delta_{2000}^{0010Q} \quad \Delta_{2000}^{0001Q} \quad Q_{1100} \right| + \left| \Delta_{2000}^{0100Q} \quad \Delta_{1100}^{0010Q} \quad \Delta_{2000}^{0001Q} \quad Q_{2000} \right| + \right. \\ &\quad \left. \left| \Delta_{1100}^{0100Q} \quad \Delta_{2000}^{0010Q} \quad \Delta_{2000}^{0001Q} \quad Q_{2000} \right| + \left| \Delta_{2000}^{0100Q} \quad \Delta_{2000}^{0010Q} \quad \Delta_{1100}^{0001Q} \quad Q_{2000} \right| \right\}, \end{aligned}$$

et au final il reste :

$$\begin{aligned} N_{3100} &= 2 \left\{ \left| Q_{1100} \quad Q_{0110} \quad Q_{1001} \quad Q_{2000} \right| + \left| Q_{0200} \quad Q_{1010} \quad Q_{1001} \quad Q_{2000} \right| + \right. \\ &\quad \left. \left| Q_{1100} \quad Q_{1010} \quad Q_{0101} \quad Q_{2000} \right| \right\}, \end{aligned}$$

ou, en termes des  $P_{ijkl}$ , omettant les poids :

$$\begin{aligned} N_{3100} &= 2 \left\{ \left| \overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1001}} \right| + \left| \overrightarrow{P_{2000}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1001}} \right| + \right. \\ &\quad \left. \left| \overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{0101}} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Afin de vérifier ce coefficient, on calcule également  $N_{1300}$  qui doit être symétrique.

Pour  $N_{1300}$ , on a trois indices à 1 en  $j$  et un indice à 1 en  $i$ , les autres étant nuls. Ceci donne 4 termes.

$$\begin{aligned} N_{1300} &= \frac{8}{4} \left\{ \left| \Delta_{2000}^{0100Q} \quad \Delta_{1100}^{0010Q} \quad \Delta_{1100}^{0001Q} \quad Q_{1100} \right| + \left| \Delta_{1100}^{0100Q} \quad \Delta_{2000}^{0010Q} \quad \Delta_{1100}^{0001Q} \quad Q_{1100} \right| + \right. \\ &\quad \left. \left| \Delta_{1100}^{0100Q} \quad \Delta_{1100}^{0010Q} \quad \Delta_{2000}^{0001Q} \quad Q_{1100} \right| + \left| \Delta_{1100}^{0100Q} \quad \Delta_{1100}^{0010Q} \quad \Delta_{1100}^{0001Q} \quad Q_{2000} \right| \right\}, \end{aligned}$$

et au final il reste :

$$\begin{aligned} N_{1300} &= 2 \left\{ \left| Q_{0200} \quad Q_{1010} \quad Q_{0101} \quad Q_{1100} \right| + \left| Q_{0200} \quad Q_{0110} \quad Q_{1001} \quad Q_{1100} \right| + \right. \\ &\quad \left. \left| Q_{0200} \quad Q_{0110} \quad Q_{0101} \quad Q_{2000} \right| \right\}, \end{aligned}$$

ou, en termes des  $P_{ijkl}$ , omettant les poids :

$$\begin{aligned} N_{1300} &= 2 \left\{ \left| \overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{0101}} \right| + \left| \overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{1001}} \right| + \right. \\ &\quad \left. \left| \overrightarrow{P_{2000}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{0101}} \right| \right\}, \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi comme :

$$\begin{aligned} N_{1300} &= 2 \left\{ \left| \overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{0101}} \right| + \left| \overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{1001}} \right| + \right. \\ &\quad \left. \left| \overrightarrow{P_{2000}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{0200}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{0101}} \right| \right\}, \end{aligned}$$

qui a bien le même aspect que  $N_{3100}$ . Enfin, on calcule  $N_{2200}$ , le dernier coefficient de cette arête. Pour les coefficients restants (faces et interne), le calcul est trop fastidieux et seul un programme, à écrire, pourra le faire.

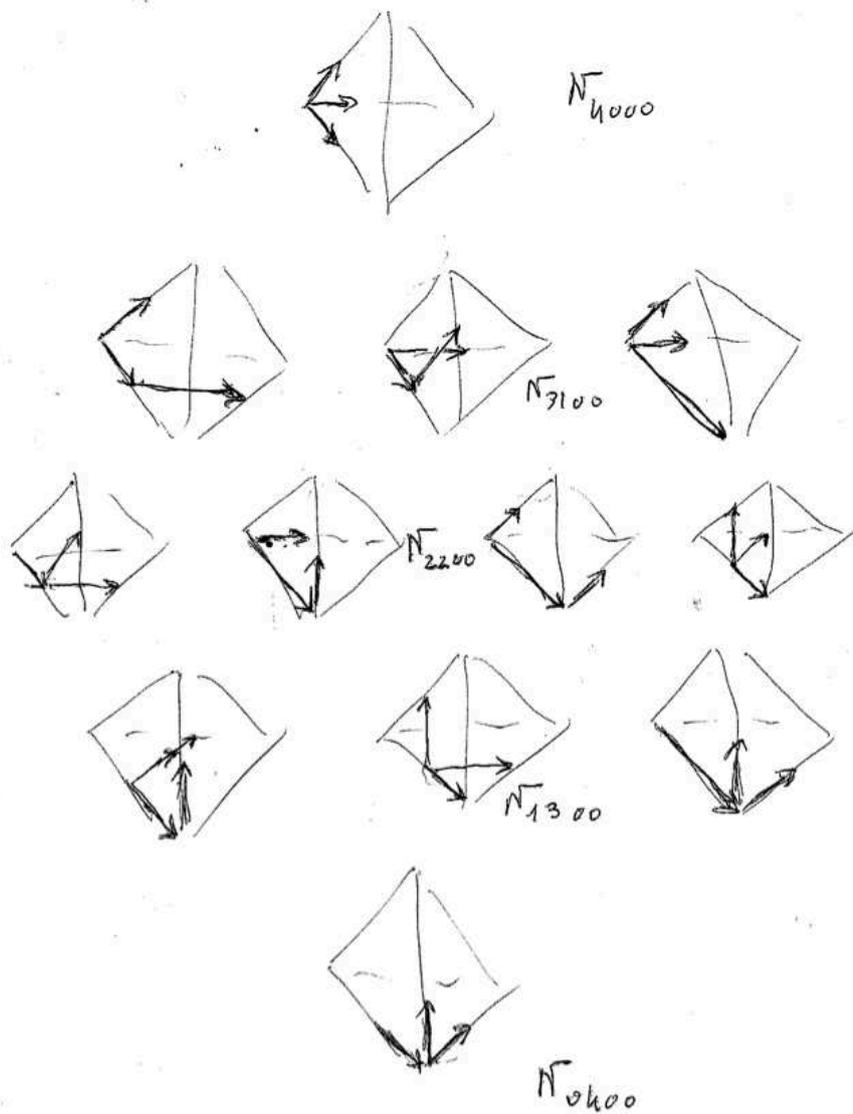


FIG. 5 – Quelques exemples de coefficients, de haut en bas, les coefficients relatifs à l'arête  $P_{2000}P_{0200}$ . On montre le nombre de déterminants de chaque coefficient et les vecteurs impliqués dans ces déterminants.

Pour  $N_{2200}$ , on a deux indices en  $i$  à 1 et les 2 indices en  $j$  des 2 autres quadruplets à 1, ceci fait 6 termes.

$$N_{2200} = \frac{8}{6} \left\{ \begin{aligned} &|\Delta_{2000}^{0100Q} \quad \Delta_{2000}^{0010Q} \quad \Delta_{1100}^{0001Q} \quad Q_{1100}| + |\Delta_{2000}^{0100Q} \quad \Delta_{1100}^{0010Q} \quad \Delta_{2000}^{0001Q} \quad Q_{1100}| + \\ &|\Delta_{2000}^{0100Q} \quad \Delta_{1100}^{0010Q} \quad \Delta_{1100}^{0001Q} \quad Q_{2000}| + |\Delta_{1100}^{0100Q} \quad \Delta_{2000}^{0010Q} \quad \Delta_{2000}^{0001Q} \quad Q_{1100}| + \\ &|\Delta_{1100}^{0100Q} \quad \Delta_{2000}^{0010Q} \quad \Delta_{1100}^{0001Q} \quad Q_{2000}| + |\Delta_{1100}^{0100Q} \quad \Delta_{1100}^{0010Q} \quad \Delta_{2000}^{0001Q} \quad Q_{2000}| \end{aligned} \right\},$$

soit (hors le facteur  $\frac{8}{6}$ ) :

$$\begin{aligned} &|Q_{1100}-Q_{2000} \quad Q_{1010}-Q_{2000} \quad Q_{0101}-Q_{1100} \quad Q_{1100}| + |Q_{1100}-Q_{2000} \quad Q_{0110}-Q_{1100} \quad Q_{1001}-Q_{2000} \quad Q_{1100}| + \\ &|Q_{1100}-Q_{2000} \quad Q_{0110}-Q_{1100} \quad Q_{0101}-Q_{1100} \quad Q_{2000}| + |Q_{0200}-Q_{1100} \quad Q_{1010}-Q_{2000} \quad Q_{1001}-Q_{2000} \quad Q_{1100}| + \\ &|Q_{0200}-Q_{1100} \quad Q_{1010}-Q_{2000} \quad Q_{0101}-Q_{1100} \quad Q_{2000}| + |Q_{0200}-Q_{1100} \quad Q_{0110}-Q_{1100} \quad Q_{1001}-Q_{2000} \quad Q_{2000}|, \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} &-|Q_{2000} \quad Q_{1010} \quad Q_{0101} \quad Q_{1100}| - |Q_{2000} \quad Q_{0110} \quad Q_{1001} \quad Q_{1100}| + \\ &|Q_{1100} \quad Q_{0110} \quad Q_{0101} \quad Q_{2000}| + |Q_{0200} \quad Q_{1010} - Q_{2000} \quad Q_{1001} - Q_{2000} \quad Q_{1100}| + \\ &|Q_{0200}-Q_{1100} \quad Q_{1010} \quad Q_{0101}-Q_{1100} \quad Q_{2000}| + |Q_{0200}-Q_{1100} \quad Q_{0110}-Q_{1100} \quad Q_{1001} \quad Q_{2000}|, \end{aligned}$$

ouvert (les 3 derniers déterminants) en :

$$\begin{aligned} &-|Q_{2000} \quad Q_{1010} \quad Q_{0101} \quad Q_{1100}| - |Q_{2000} \quad Q_{0110} \quad Q_{1001} \quad Q_{1100}| + \\ &|Q_{1100} \quad Q_{0110} \quad Q_{0101} \quad Q_{2000}| + \\ &|Q_{0200} \quad Q_{1010} \quad Q_{1001} - Q_{2000} \quad Q_{1100}| - |Q_{0200} \quad Q_{2000} \quad Q_{1001} - Q_{2000} \quad Q_{1100}| \\ &|Q_{0200} \quad Q_{1010} \quad Q_{0101} - Q_{1100} \quad Q_{2000}| - |Q_{1100} \quad Q_{1010} \quad Q_{0101} - Q_{1100} \quad Q_{2000}| + \\ &|Q_{0200} \quad Q_{0110} - Q_{1100} \quad Q_{1001} \quad Q_{2000}| - |Q_{1100} \quad Q_{0110} - Q_{1100} \quad Q_{1001} \quad Q_{2000}| +, \end{aligned}$$

qui se simplifie en :

$$\begin{aligned} &-|Q_{2000} \quad Q_{1010} \quad Q_{0101} \quad Q_{1100}| - |Q_{2000} \quad Q_{0110} \quad Q_{1001} \quad Q_{1100}| + |Q_{1100} \quad Q_{0110} \quad Q_{0101} \quad Q_{2000}| + \\ &|Q_{0200} \quad Q_{1010} \quad Q_{1001} \quad Q_{1100}| - |Q_{0200} \quad Q_{1010} \quad Q_{2000} \quad Q_{1100}| - |Q_{0200} \quad Q_{2000} \quad Q_{1001} \quad Q_{1100}| \\ &|Q_{0200} \quad Q_{1010} \quad Q_{0101} \quad Q_{2000}| - |Q_{0200} \quad Q_{1010} \quad Q_{1100} \quad Q_{2000}| - |Q_{1100} \quad Q_{1010} \quad Q_{0101} \quad Q_{2000}| + \\ &|Q_{0200} \quad Q_{0110} \quad Q_{1001} \quad Q_{2000}| - |Q_{0200} \quad Q_{1100} \quad Q_{1001} \quad Q_{2000}| - |Q_{1100} \quad Q_{0110} \quad Q_{1001} \quad Q_{2000}| +, \end{aligned}$$

que l'on regroupe, il reste simplement(!) :

$$\begin{aligned} &|Q_{1100} \quad Q_{0110} \quad Q_{0101} \quad Q_{2000}| + |Q_{0200} \quad Q_{1010} \quad Q_{1001} \quad Q_{1100}| + \\ &|Q_{0200} \quad Q_{1010} \quad Q_{0101} \quad Q_{2000}| + |Q_{0200} \quad Q_{0110} \quad Q_{1001} \quad Q_{2000}|, \end{aligned}$$

soit, en fonction des  $P_{ijkl}$  (hors poids) :

$$N_{2200} = \frac{4}{3} \left\{ \begin{aligned} &|\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{0101}}| + |\overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{1001}}| + \\ &|\overrightarrow{P_{2000}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{0101}}| + |\overrightarrow{P_{2000}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1001}}| \end{aligned} \right\},$$

qui s'écrit de manière plus parlante :

$$N_{2200} = \frac{4}{3} \left\{ \begin{aligned} &|\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{0101}}| + |\overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{1001}}| + \\ &|\overrightarrow{P_{2000}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{0200}P_{0101}}| + |\overrightarrow{P_{2000}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{0200}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{0200}P_{1001}}| \end{aligned} \right\},$$

dont l'interprétation est montrée sur la Figure 5.

## 6.2 Conclusion sur le carreau tétraédrique de degré 2

Une analyse rapide du jacobien indique qu'il se comporte comme un polynôme de degré 5, une analyse plus fine montre que ce polynôme est de degré 4, c'est-à-dire un de plus que le degré du tétraèdre P2 classique. On retrouve ici le même résultat que celui relatif aux quadrilatères, cf. [5], mais il convient de noter que l'analyse du tétraèdre est sensiblement plus simple. Les coefficients de contrôle sont au nombre de 35, Figure 5. À noter que les poids interviennent dans les coefficients composés de plus d'un terme. Le calcul effectif devra être réalisé via un programme.

## 6.3 Expression pour le carreau tétraédrique de degré 1

Par souci de complétude on donne les résultats relatifs à un carreau de degré 1. Il suffit de reprendre les grandes étapes des calculs précédents et de fixer le degré à 1. On a donc, successivement :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \omega_{ijkl} x_{ijkl}, \\ Y &= \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \omega_{ijkl} y_{ijkl}, \\ Z &= \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \omega_{ijkl} z_{ijkl}, \\ T &= \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \omega_{ijkl} t_{ijkl}, \end{aligned}$$

alors ce point de  $\mathbb{R}^4$  est défini par un Bézier classique :

$$Q(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) Q_{ijkl},$$

et on a (si  $O$  désigne l'origine) :

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \frac{1}{D(u, v)^4} \left| \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

c'est-à-dire que le jacobien a une interprétation dans l'espace de dimension supérieure. Son signe est celui de :

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

et le polynôme correspondant est obtenu en exprimant ces quantités. Donc, *a priori*, on a :

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \frac{1}{D(u, v)^4} \left| \Delta_{1000}^{0100Q} \quad \Delta_{1000}^{0010Q} \quad \Delta_{1000}^{0001Q} \quad \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) Q_{ijkl} \right|,$$

avec :  $\Delta_{ijkl}^{0100Q} = Q_{i-1, j+1, k, l} - Q_{ijkl}$ ,  $\Delta_{ijkl}^{0010Q} = Q_{i-1, j, k+1, l} - Q_{ijkl}$  et  $\Delta_{ijkl}^{0001Q} = Q_{i-1, j, k, l+1} - Q_{ijkl}$ . Cette expression semble être de degré 1 et s'écrit (au facteur  $\frac{1}{D^4}$  près) :

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) \left| \Delta_{1000}^{0100Q} \quad \Delta_{1000}^{0010Q} \quad \Delta_{1000}^{0001Q} \quad Q_{ijkl} \right|,$$

où l'on devine les coefficients  $N_{IJKL}$ .

On a (au facteur près) :

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \left| \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

et on construit le polynôme :

$$\mathcal{J}^*(u, v, w, t) = \left| -v \frac{\partial Q}{\partial v} \quad -w \frac{\partial Q}{\partial w} \quad -t \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \overrightarrow{OQ} \right|,$$

en notant que

$$\mathcal{J}^*(u, v, w, t) = -vwt\mathcal{J}(u, v, w, t),$$

pour  $v, w$  et  $t$  non nuls. Mais on a aussi :

$$\mathcal{J}^*(u, v, w, t) = \left| -v \frac{\partial Q}{\partial v} \quad -w \frac{\partial Q}{\partial w} \quad -t \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \overrightarrow{OQ} - v \frac{\partial Q}{\partial v} - w \frac{\partial Q}{\partial w} - t \frac{\partial Q}{\partial t} \right|,$$

et la quatrième colonne s'écrit :

$$\sum_{i+j+k+l=1} B_{ijkl}^1(u, v, w, t) Q_{ijkl} - v \Delta_{1000}^{0100Q} - w \Delta_{1000}^{0010Q} - t \Delta_{1000}^{0001Q},$$

qui est égal simplement à  $Q_{1000}$  et, ainsi

$$\mathcal{J}^*(u, v, w, t) = -vwt \left| \Delta_{1000}^{0100Q} \quad \Delta_{1000}^{0010Q} \quad \Delta_{1000}^{0001Q} \quad Q_{1000} \right|,$$

donc :

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \left| \Delta_{1000}^{0100Q} \quad \Delta_{1000}^{0010Q} \quad \Delta_{1000}^{0001Q} \quad Q_{1000} \right|,$$

représente le polynôme qui traduit le comportement de l'élément. Ce polynôme est de degré 0 (constant) et possède un seul coefficient. Il s'écrit aussi comme :

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \left| Q_{0100} \quad Q_{0010} \quad Q_{0001} \quad Q_{1000} \right|,$$

ou encore :

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \omega_{0100}\omega_{0010}\omega_{0001}\omega_{1000} \left| \overrightarrow{P_{1000}P_{0100}} \quad \overrightarrow{P_{1000}P_{0010}} \quad \overrightarrow{P_{1000}P_{0001}} \right|,$$

donc le contrôle se réduit à vérifier le signe de :

$$\left| \overrightarrow{P_{1000}P_{0100}} \quad \overrightarrow{P_{1000}P_{0010}} \quad \overrightarrow{P_{1000}P_{0001}} \right|,$$

comme pour le tétraèdre classique et ce résultat établi pour  $vwt$  non nul s'étend, par continuité, à l'ensemble du carreau.

## 7 Conclusion

Après avoir étudié les jacobiens des éléments finis classique de degré 2 qui ne sont autres que des Bézier, nous avons regardé comment se comportaient les jacobiens d'éléments construits à partir de Bézier rationnel. Le cas des quadrilatères (plans) et des hexaèdres a été traité dans la première partie de ce document et ici on a regardé le cas des triangles (plans) et des tétraèdres.

Le comportement des éléments est celui d'un polynôme dont le degré est de 1 supérieur à celui de ces mêmes éléments quand ils sont construits sur un Bézier classique, c'est le prix à payer pour tenir compte de l'aspect rationnel présent ici.

L'analyse des simplexes est globalement plus facile que celle des quadrilatères et des hexaèdres et le degré du polynôme est également inférieur.

Pour le triangle, on a trouvé un polynôme de degré 3 possédant 10 coefficients, pour le tétraèdre on a trouvé un polynôme de degré 4 possédant 35 coefficients. Les poids interviennent dans tous les coefficients qui sont composés de plus d'un seul terme.

Le calcul a été fait explicitement (à la main) pour le triangle mais seuls quelques coefficients ont été explicités pour le tétraèdre, un programme (formel pour avoir les combinaisons d'indices admissibles) devant être développé pour les obtenir tous.

Le calcul des coefficients de contrôle permet donc de donner une condition suffisante de validité des éléments. La stricte positivité est nécessaire aux coefficients associés aux nœuds, la non négativité est suffisante pour les autres coefficients.

## Références

- [1] P. BÉZIER, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, **4**, Hermès, Paris, 1986.
- [2] G. FARIN, *Curves and surfaces for CAGD. A practical guide*. 5<sup>th</sup> edition, Academic Press, 2002.
- [3] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2 (version 2), *RR INRIA* **7964**, 2012.
- [4] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Sur les éléments finis hexaédriques de degré 1 et 2, *RR INRIA* **8039**, 2012.
- [5] P.L. GEORGE ET H. BOROUCHAKI, Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 1. *RR INRIA* **8201**, 2013.
- [6] J.C. LÉON, *Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO*, Hermès, 1991.
- [7] L. PIEGL AND W. TILLER, *The NURBS Book*, Springer, 1997.



**RESEARCH CENTRE  
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt  
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher  
Inria  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex  
inria.fr

ISSN 0249-6399