



**HAL**  
open science

## Un nouveau type d'observateur impulsif

Yassine Khaled, Jean-Pierre Barbot, Djamila Benmerzouk

► **To cite this version:**

Yassine Khaled, Jean-Pierre Barbot, Djamila Benmerzouk. Un nouveau type d'observateur impulsif. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Jul 2012, Grenoble, France. hal-00749707

**HAL Id: hal-00749707**

**<https://inria.hal.science/hal-00749707>**

Submitted on 8 Nov 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un nouveau type d'observateur impulsionnel

Yassine Khaled\* Jean-Pierre Barbot\*\*  
Djamila Benmerzouk\*\*\*

\* ECS-lab, ENSEA

6, avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise Cedex, France.  
et Department de Mathematique, Université de Tlemcen, Algerie.

\*\* ECS-lab, ENSEA,

6, avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise Cedex, France.  
et EPI Non-A, INRIA Lille, Nord Europe.

\*\*\* Department de Mathematique, Université de Tlemcen, Algerie.

---

**Résumé :** Dans cet article, dans un premier temps, un nouveau type d'observateur hybride pour une classe de systèmes linéaires continus avec des mesures discrètes est présenté. L'approche utilisée est basée sur des conditions suffisantes de stabilité des systèmes dynamiques linéaires impulsifs. Celles-ci seront rappelées. Puis, des exemples seront donnés afin de mettre en évidence la conception de ces observateurs et montrer que ceux-ci sont généralisables aux systèmes non linéaires et aux mesures de type clairsemé (c-à-d en dessous de la fréquence de Shannon-Nyquist).

*Mots-clés:* Impulsive dy, Stabilité, observateur échantillonné, mesure sous la fréquence de Shannon-Nyquist.

---

## 1. INTRODUCTION

Pour la plupart des systèmes, qu'il soient mécaniques, électroniques, pneumatiques, hydrauliques, . . . la mesure des variables d'état s'effectue en temps discret et ceci pour de multiples raisons technologiques et économiques. Une question centrale, dans ce contexte, est la possibilité de réaliser un observateur qui reçoit des informations échantillonnées et estime les états en temps continu. En outre la conception d'un observateur approprié permettant d'estimer les états du système en temps continu peut s'avérer primordiale; télé opération, synchronisation...

Dans ce contexte l'observateur impulsionnel est souvent utilisé, en raison de sa structure hybride. Plusieurs travaux dans la littérature sont dédiés à la stabilité de ce type de système; Lakshmikantham et al. [1989], Haddad et al. [2006], Brogliato [1999].

Depuis quelques années, plusieurs chercheurs se sont intéressés aux conceptions des observateurs de type impulsionnel. Ce problème a été abordé par exemple en synchronisation des systèmes chaotiques par Yang et Chua [1997] ou dans Raff et Allgower [2007] et Zheng et al. [2011] avec des sorties continues et des impulsions assurant la convergence en temps fini. De même Hetel et al. [2011] et Andrieu et Nadri [2010] ont proposé des observateurs impulsionnels avec des conditions géométriques comme l'observabilité forte et l'atteignabilité avec la résolution des LMI qui ne sont pas facile à résoudre. Nadri et al. [2004] ont donné des conditions suffisantes sur le temps d'échantillonnage de sortie, qui permettent de préserver l'observabilité du système et, par conséquent, garantir la convergence de l'observateur.

## 2. FORMULATION DU PROBLÈME

Considérons le système linéaire Multi-sorties avec des mesures discrètes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t_k) = Cx(t_k) \end{cases} \quad (1)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ , et  $y(t_k) \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur des sorties mesurées en temps discret.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  sont des matrices constantes.

Tout d'abord, il est important de rappeler que si on applique un observateur continu classique pour ce type de systèmes (dynamique continu avec des mesures discrètes) cela produit une erreur d'observation, car la sortie est supposée être constante pendant tout l'intervalle de temps d'échantillonnage alors qu'en réalité la sortie évolue durant cette période. Cette non prise en compte de l'évolution de la sortie est particulièrement sensible pour les mesures "clairsemées" (sous la fréquence de Shannon-Nyquist). Pour cette raison, il est possible d'utiliser un prédicteur de la sortie si on opte pour un observateur classique. Ce prédicteur réduit l'erreur d'observation, mais cette façon de faire et très vite limiter.

L'objectif principal de cet article est de concevoir un observateur impulsionnel (c'est un système composé d'un sous-système dynamique continu couplé avec une équation algébrique décrivant le comportement impulsif aux instants de mesure (Goebel et al. [2009]) pour le système (1) de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) \\ \hat{x}(t_k^+) = R\hat{x}(t_k^-) + (I_d - R)Cx(t_k^-) \end{cases} \quad (2)$$

Les  $t_k$  représentent les instants de mesures,  $t_k^+$  est le temps juste après la  $k^{eme}$  mesure et  $t_k^-$  le temps juste avant.

Le problème consiste à déterminer des conditions suffisantes sur le gain  $R$  de l'observateur impulsif et sur la distance entre les impulsions (temps de séjour)  $\theta_k = t_{k+1} - t_k$ , telles que la dynamique d'erreur d'observation ( $e = x - \hat{x}$ ) soit au moins stable. Cette erreur est modélisée par un système dynamique impulsif qui sera étudié dans la section suivante.

La principale contribution de l'article est de proposer un nouveau schéma d'observateur, appelé observateur impulsif généralisé. Ce dernier permet d'observer des systèmes ayant des dynamiques instables de dimension plus grande que la dimension de la sortie. Dans la dernière section une ébauche d'extension aux systèmes non linéaires est présentée.

### 3. STABILITÉ DES SYSTÈMES DYNAMIQUES LINÉAIRE IMPULSIFS

Dans cette section, nous allons rappeler quelques définitions de base pour les systèmes dynamiques linéaires impulsifs. Ensuite, de nouvelles conditions suffisantes de stabilité seront données.

Considérons le système linéaire impulsif suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Ae(t); & t \neq t_k \\ e(t_k^+) = Be(t_k) \end{cases} \quad (3)$$

$t_k \in T = \{t_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  avec  $\forall i \in \mathbb{N} : t_i \leq t_{i+1}$ .

On définit le temps de séjour par  $\theta_k \triangleq t_{k+1} - t_k$  avec

$$e(t_k^+) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} e(t_k + h) \text{ et } e(t_k^-) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} e(t_k - h) \triangleq e(t_k).$$

les matrices  $A$  et  $B$  sont constantes et de dimension appropriée.

Les conditions suffisantes pour garantir l'existence et l'unicité des solutions de (3) sont supposées être vérifiées, pour plus de détails voir Ballinger et Lui [2000].

Même si le système dynamique (3) est linéaire, il n'est généralement pas possible de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité en termes de valeurs propres de la matrice  $A$  ou en utilisant une des fonctions simples de Lyapunov comme il est possible pour les systèmes linéaires sans impulsions, ceci est dû à la structure de réinitialisation donnée dans la deuxième ligne du système (3). Dans toute la suite de l'article nous faisons l'hypothèse suivante :

*Hypothèse 1.* Il existe un changement de coordonnées  $T$  qui transforme le système (3) de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t) + A_{12}e_2(t); & t \neq t_k \\ \dot{e}_2(t) = A_{22}e_2(t); & t \neq t_k \\ e_1(t_k^+) = Re_1(t_k) \\ e_2(t_k^+) = e_2(t_k) \end{cases} \quad (4)$$

Où  $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-\gamma) \times (n-\gamma)}$ ,  $A_{12} \in \mathbb{R}^{(n-\gamma) \times \gamma}$ ,  $A_{21} \in \mathbb{R}^{\gamma \times \gamma}$  et  $R \in \mathbb{R}^{(n-\gamma) \times (n-\gamma)}$ , où  $\gamma$  est la dimension de l'ensemble  $\Gamma$  avec :

$$\Gamma = \{e \in \mathbb{R}^n : e^T(B^T S B - S)e = 0\} \quad (5)$$

où  $S$  est une matrice symétrique définie positive.

*Remarque 1.* L'hypothèse 1 n'est pas très restrictive, car si  $\ker\{C\}$  est inclus dans le sous espace stable  $E_S$  de  $A$ , il est toujours possible de prendre seulement une partie de  $y$  afin de rendre possible la transformation. Dans le cas où  $\ker\{C\}$  n'est pas inclus dans le sous espace stable  $E_S$  de  $A$  la transformation peut ne pas exister.

*Définition 1.* Stamova [2009] le système (4) est dit :

- (1) Pratiquement stable par rapport à  $(\delta, \epsilon)$ , si pour tout  $\epsilon > 0$  donnée,  $\exists \delta > 0 : 0 < \delta < \epsilon : \|x(t_0)\| < \delta$  implique  $\|x(t)\| < \epsilon, \forall t > t_0$  pour quelque  $t_0 \in \mathbb{R}$  fixé.
- (2) Uniformément pratiquement stable par rapport à  $(\delta, \epsilon)$ , si (1) est vérifiée pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ .
- (3) Pratiquement asymptotiquement stable par rapport à  $(\delta, \epsilon)$ , si (1) est vérifiée et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ .

*Théorème 1.* Franklin [2000] Pour toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (1)  $A$  est une matrice de Hurwitz discrete <sup>1</sup>.
- (2)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ .
- (3) Il existe au moins une norme matricielle  $\|\bullet\|$  tel que  $\|A\| < 1$ .

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes de stabilité du système (4).

*Théorème 2.* Soit le système dynamique linéaire impulsif (4). Si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1)  $A_{22}$  est une matrice de Hurwitz continue.
- (2)  $\|Re^{A_{11}\theta_k}\|^2 < 1$  pour tout  $k > 0$ .

Alors,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tel que l'état du système (4) converge vers une boule de rayon  $\epsilon$  (stabilité pratique) lorsque  $x(0)$  est dans la boule de rayon  $\delta$ .

*Preuve 1.* Considérons la différence de la fonction de Lyapunov  $V(x(t))$  entre deux temps d'impulsion successive  $t_k^+$  et  $t_{k+1}^+$  :

$$\Delta V(x_1(t_k), x_2(t_k)) \triangleq V(x(t_{k+1}^+)) - V(x(t_k^+))$$

La solution du système (4) pour  $t \in [t_k^+, t_{k+1}^-]$  et  $t_0 = t_k^+$  est :

$$x_1(t) = e^{A_{11}(t-t_k)} x_1(t_k^+) + \int_{t_k}^t e^{A_{11}(t-\tau)} A_{12} x_2(\tau) d\tau \quad (6)$$

et

$$x_2(t) = e^{A_{22}(t-t_k)} x_2(t_k^+) \quad (7)$$

Remplaçons (7) dans (6), on obtient à  $t = t_{k+1}^+$  :

$$\begin{aligned} x_1(t_{k+1}) &= e^{A_{11}\theta_k} x_1(t_k^+) \\ &+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A_{11}(t_{k+1}-\tau)} A_{12} e^{A_{22}(\tau-t_k)} x_2(t_k^+) d\tau \\ x_2(t_{k+1}) &= e^{A_{22}\theta_k} x_2(t_k^+) \end{aligned}$$

avec  $\theta_k = t_{k+1} - t_k$ .

Maintenant, nous décomposons la fonction de Lyapunov  $V$  en deux parties :

$$V(x) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$$

avec :

$$\begin{aligned} V_1(x_1) &= x_1^T S_1^T S_1 x_1 = \|S_1 x_1\|^2 \\ V_2(x_2) &= x_2^T S_2^T S_2 x_2 = \|S_2 x_2\|^2. \end{aligned}$$

tel que  $S_1$  et  $S_2$  sont deux matrices symétriques définie positive avec des dimensions approprié et solution de l'équation de Lyapunov  $S^T A + A S = -I_d$ .

Commençons par  $V_2(x_2)$ , on obtient :

1. Toutes les valeurs propres sont strictement dans le cercle unité.

$$\begin{aligned}
\Delta V_2(x_2(t_k)) &= V_2(x_2(t_{k+1}^+)) - V_2(x_2(t_k^+)) \\
&= V_2(x_2(t_{k+1})) - V_2(x_2(t_k)) \\
&= V_2(e^{A_{22}\theta_k}x_2(t_k)) - V_2(x_2(t_k)) \\
&= \|S_2 e^{A_{22}\theta_k}x_2(t_k)\|^2 - \|S_2x_2(t_k)\|^2 \\
&\leq (\|e^{A_{22}\theta_k}\|^2 - 1)V(x_2)
\end{aligned}$$

puisque la matrice  $A_{22}$  est de Hurwitz continue, cela implique que  $e^{A_{22}\theta_k}$  est de Hurwitz discrete, ce qui donne d'après le théorème (1) que  $\|e^{A_{22}\theta_k}\|^2 < 1$ . En conséquence,

$$\Delta V_2(x_2(t_k)) < 0 \quad (8)$$

Cette inégalité rassure la convergence uniforme de  $x_2$  vers zero (indépendamment de  $x_1$ ). Ce qui donne

$$\forall \epsilon > 0 : \exists h > 0 : \forall k > h : \|x_2(t_k)\| < \epsilon$$

D'autre part, pour  $V_1$  on a :

$$\begin{aligned}
\Delta V_1(x_1(t_k)) &= V_1(x(t_{k+1}^+)) - V_1(x(t_k^+)) \\
&= V_1(Rx_1(t_{k+1})) - V_1(x_1(t_k^+))
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&V_1(Rx_1(t_{k+1})) \\
&= V_1(R(e^{A_{11}\theta_k}x_1(t_k^+))) \\
&+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A_{11}(t_{k+1}-\tau)} A_{12} e^{A_{22}(\tau-t_k)} d\tau x_2(t_k^+)
\end{aligned}$$

Ansi,

$$\begin{aligned}
\Delta V_1(x_1(t_k)) &\leq \|S_1 R e^{A_{11}\theta_k} x_1\|^2 - \|S_1 x_1\|^2 \\
&+ \|S_1 R \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A_{11}(t_{k+1}-\tau)} A_{12} e^{A_{22}(\tau-t_k)} d\tau x_2\|^2 \\
&\leq (\|R e^{A_{11}\theta_k}\|^2 - 1)V_1(x_1) \\
&+ \|A_{12}\|^2 \|S_1 S_2^{-1}\|^2 V_2(x_2) \\
&\times \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|R e^{A_{11}(t_{k+1}-\tau)}\|^2 \|e^{A_{22}(\tau-t_k)}\|^2 d\tau
\end{aligned}$$

Puisque  $A_{22}$  est de Hurwitz continue et d'après la deuxième hypothèse du théorème  $\|R e^{A_{11}(t_{k+1}-\tau)}\|^2 < 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta V_1(x_1(t_k)) &\leq (\|R e^{A_{11}\theta_k}\|^2 - 1)V_1(x_1) \\
&+ \|A_{12}\|^2 \|S_1 S_2^{-1}\|^2 V_2(x_2) \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau \\
&\leq (\|R e^{A_{11}\theta_k}\|^2 - 1)V_1(x_1) \\
&+ \theta_k \|A_{12}\|^2 \|S_1 S_2^{-1}\|^2 V_2(x_2)
\end{aligned}$$

Donc, à partir de (8), on a  $\forall \epsilon > 0, \exists h > 0, \forall k > h : \|x_2(t_k)\| < \epsilon$ , ce qui implique que  $\forall \epsilon^* > 0, \exists h : \forall k > h$  tel que  $V_2(x_2) < \epsilon^*$ . Maintenant, choisissons  $\epsilon > 0$  et définissons  $V_{1min} = \min_{\|x_1\|=\epsilon} V_1(x_1)$ , alors pour tout  $\|x_1(k)\| > \epsilon$  et  $\theta_k < \frac{(1-\|R e^{A_{11}\theta_k}\|^2)V_{1min}}{\|A_{12}\|^2 \|S_1 S_2^{-1}\|^2 \epsilon^*}$ , on obtient :

$$\Delta V_1(x_1(t_k)) < 0$$

Compte tenu du fait que  $\epsilon^* > 0$  peut être choisi arbitrairement, donc la seule contrainte est le choix de  $\theta_k$  et

$\|R e^{A_{11}\theta_k}\|^2 < 1$ . Par conséquent, on obtient :  $\forall \epsilon > 0, \exists h : \forall k > h : \Delta V(x_1(t_k), x_2(t_k)) < 0$  si  $\|x_1\| > \epsilon$ . Ceci achève la preuve du théorème.

#### 4. CONCEPTION D'OBSERVATEUR IMPULSIONNEL

Dans cette section, un observateur impulsif est proposé, celui-ci permet d'estimer les états en utilisant seulement les mesures échantillonnées des sorties. Premièrement, le cas des systèmes où tous les états instables sont mesurés est considéré. Ensuite, le cas des systèmes avec des dynamiques instables non mesurées sera considéré. Dans toute cette section nous supposons que l'hypothèse 1 est vérifiée, nous considérerons donc des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \tilde{A}_{11}z_1(t) + \tilde{A}_{12}z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = \tilde{A}_{22}z_2(t) \\ y(t_k) = z_1(t_k) \end{cases} \quad (9)$$

Où  $z(t) = \begin{pmatrix} z_1^T \\ z_2^T \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\tilde{A}_{12} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$ ,  $\tilde{A}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ .

Le système est supposé au moins détectable (la partie instable est observée).

##### 4.1 1<sup>er</sup> Cas : Les états instables sont mesurés

Soit le système (9) avec les hypothèses suivantes :

*Hypothèse 2.* Supposons que  $\text{Ker } C \subset \text{span } \{E^s\}$ , où  $E^s$  est le sous-espace stable.

*Remarque 2.* L'hypothèse 2 signifie que le nombre de sorties doit être au moins égal au nombre de directions instables. Cette condition est conforme avec la conjecture de Pyragas c-à-d il faut autant de mesures que de dynamiques instables (la conjecture de Pyragas est donnée pour les mesures en temps continu Pyragas [1993] et a été contredit dans Panas et Yang [1998] et Boutat-Baddas et al. [2009]. Mais ici dans un premier temps, elle est considéré possible pour les observateurs impulsifs).

L'observateur impulsif proposé lié au système (9) est conçu comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1(t) = \tilde{A}_{11}\hat{z}_1(t) + \tilde{A}_{12}\hat{z}_2(t) \\ \dot{\hat{z}}_2(t) = \tilde{A}_{22}\hat{z}_2(t) \\ \hat{z}_1(t_k^+) = R\hat{z}_1(t_k) + (I_d - R)z_1(t_k) \end{cases} \quad (10)$$

Où  $R = \text{diag}\{r_1, \dots, r_p\}$  avec  $-1 < r_i < 1$ , pour  $i = 1, \dots, p$ . Notons que le système (10) a la même dynamique continue que le système (9), sauf qu'à chaque instant de mesure de l'état, l'observateur est réinitialisé en fonction de l'erreur entre la sortie estimée  $\hat{y}(t_k)$  et la sortie mesurée  $y(t_k)$ .

*Proposition 1.* Sous l'hypothèse (2) et pour des périodes d'échantillonnage  $\theta_k$  bornées, il est toujours possible de concevoir un observateur de type (10) qui converge vers les états du système (9).

*Preuve 2.* D'après (9) et (10), l'erreur dynamique d'observateur ( $e = z - \hat{z}$ ) est :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = \tilde{A}_{11}e_1(t) + \tilde{A}_{12}e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) = \tilde{A}_{22}e_2(t) \\ e_1(t_k^+) = R e_1(t_k) \\ e_2(t_k^+) = e_2(t_k) \end{cases} \quad (11)$$

On constate bien que l'erreur d'observation (11) prend la même forme que le système (4) où les conditions du théorème 2 sont satisfaites. ce qui implique la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation (11) juste en remplaçons  $E^s$  par  $Ker \Gamma$ ,  $R$  par  $r$  et  $p$  par  $n - \gamma$ . Ceci achève la preuve de la proposition.

*Remarque 3.* La condition d'observabilité ou de détectabilité n'est pas suffisante pour la synthèse de ce type d'observateur impulsif, car ici la mesure est discrète. Il faut ici ajouter une condition sur les états instables, ici ils sont mesurés. Dans la prochaine section, on relaxe cette condition et il est aussi démontrer que la conjecture de Pyragas est aussi caduc pour la synchronisation impulsif.

#### 4.2 2<sup>ème</sup> Cas : Des états instables sont non mesurés

Considérons le système (9) défini ci-dessus.

Où  $z = [z_1^T, z_2^T]^T$  avec  $z_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$  et  $z_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ , pour  $n = n_1 + n_2$ , tel que

- $z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  sont les états mesurés instables ou stables.
- $z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$  sont les états non mesurés instables ou stables, mais détectables.

L'observateur impulsif généralisé proposé est conçu comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1(t) = A_{11}\hat{z}_1(t) + A_{12}\hat{z}_2(t) \\ \dot{\hat{z}}_2(t) = A_{22}\hat{z}_2(t) + M(\tilde{z}_2(t) - \hat{z}_2(t)) \\ \dot{\tilde{z}}_1(t) = A_{11}\tilde{z}_1(t) + A_{12}\tilde{z}_2(t) + L_1(\hat{z}_1(t) - \tilde{z}_1(t)) \\ \dot{\tilde{z}}_2(t) = A_{22}\tilde{z}_2(t) + L_2(\hat{z}_1(t) - \tilde{z}_1(t)) \\ \hat{z}_1(t_k^+) = R\hat{z}_1(t_k) + (I_d - R)z_1(t_k) \end{cases} \quad (12)$$

Tel que  $R = \text{diag}\{r_1, \dots, r_{n_1}\}$  et  $-1 < r_i < 1$ , pour  $i = \overline{1, n_1}$  et  $R, M, L_1$  et  $L_2$  sont des matrices constantes avec des dimensions appropriées.

L'erreur d'observation  $\chi \triangleq (e_i, \bar{e}_i)$  avec  $e_i = z_i - \hat{z}_i$  et

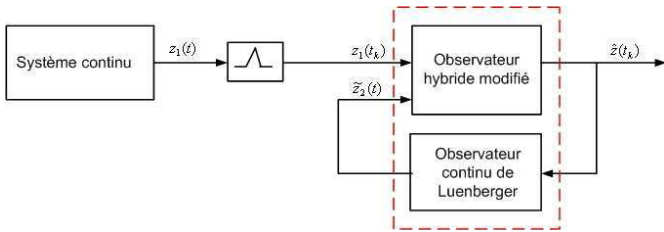


FIGURE 1. Observateur impulsif généralisé

$\bar{e}_i = z_i - \tilde{z}_i$  est régie par la dynamique linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t) + A_{12}e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) = A_{22}e_2(t) + M\bar{e}_2(t) - Me_2 \\ \dot{\bar{e}}_1(t) = A_{11}\bar{e}_1(t) + A_{12}\bar{e}_2(t) - L_1\bar{e}_1(t) + L_1e_1 \\ \dot{\bar{e}}_2(t) = A_{22}\bar{e}_2(t) - L_2\bar{e}_1(t) + L_2e_1 \\ e_1(t_k^+) = Re_1(t_k) \end{cases} \quad (13)$$

*Proposition 2.* Etant donné le système (9) et l'observateur (12), pour tout  $\beta_{max} > 0$  et  $\epsilon > 0$ , tel que  $\beta_{max} > \epsilon$ , il existe une période d'échantillonnage maximale  $\theta_{max} > 0$  et une matrice d'initialisation  $R$ , de telle sorte que pour toute condition initiale  $\|\chi(0)\| < \beta_{max}$ , l'erreur d'observation (13) converge vers une boule de rayon  $\frac{\epsilon}{2} + (\frac{\epsilon}{4})^2$ .

*Preuve 3.* Posons  $\chi_1 = e_1$  et  $\chi_2 = (e_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ . Ainsi, l'erreur d'observation prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\chi}(t) = A\chi(t) \\ \chi_1(t_k^+) = R\chi_1(t_k) \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} - M & 0 & M \\ L_1 & 0 & A_{11} - L_1 & A_{12} \\ L_2 & 0 & -L_2 & A_{22} \end{pmatrix}$$

Définissons la fonction de Lyapunov :

$$V_1(\chi_1) \triangleq \chi_1^T H_1^T H_1 \chi_1 \text{ and } V_2(\chi_2) \triangleq \chi_2^T H_2^T H_2 \chi_2$$

avec  $P_2 = H_2^T H_2$  et  $H_i$  sont des matrices symétriques définies positives, on obtient :

$$V_1(\chi_1(t_{k+1}^+)) = V_1 \left[ R \left( e^{\tilde{A}_{11}\theta_k} e_1(t_k^+) + \int_{t_k}^{t_{k+1}^+} e^{\tilde{A}_{11}(t_{k+1}^+ - \tau)} \tilde{A}_{12} e_2(\tau) d\tau \right) \right]$$

supposons que  $\forall \tau \in [t_k^+, t_{k+1}^+] : \|e_2(\tau)\| < \beta_{max}$  (elle sera démontrée ultérieurement), avec les mêmes arguments que pour le théorème 2, on a :

$$\begin{aligned} & V_1(e_1(t_{k+1}^+)) \\ & \leq \|H_1 R e^{\tilde{A}_{11}\theta_k} \xi_1\|^2 \\ & + \|H_1 R \int_{t_k}^{t_{k+1}^+} e^{\tilde{A}_{11}(t_{k+1}^+ - \tau)} \tilde{A}_{12} \beta_{max} d\tau\|^2 \\ & \leq (\|R e^{\tilde{A}_{11}\theta_k}\|^2) V_{1,Max} \\ & + \|H_1\|^2 \|\tilde{A}_{12}\|^2 \beta_{max}^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}^+} \|R e^{\tilde{A}_{11}(t_{k+1}^+ - \tau)}\|^2 d\tau \end{aligned}$$

avec  $V_{1,Max} \triangleq \max_{\|\chi_1\|=\beta_{max}^2} \{V_1(\chi_1)\}$ , alors  $\forall \epsilon' > 0$  suffisamment petit, il est toujours possible de trouver  $R$  tel que,  $V_1(\chi_1(t_{k+1}^+)) < \epsilon'$  et par continuité, on obtient :

$$\|\chi_1(t_{k+1})\| < \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2 \quad (14)$$

Notons que pour  $R = 0$ , l'inégalité précédente est vérifiée et par la continuité aussi sur n'importe quel quartier de la petite  $R = 0$ .

D'autre part, on a :

$$\dot{V}_2 = [A_2 \chi_2 + B_2 \chi_1]^T P_2 \chi_2 + \chi_2^T P_2 [A_2 \chi_2 + B_2 \chi_1]$$

avec :

$$A_2 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{22} - M & 0 & M \\ 0 & \tilde{A}_{11} - L_1 & \tilde{A}_{12} \\ 0 & -L_2 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

et  $B_2 = [0^T, L_1^T, L_2^T, (\tilde{B}_1 K_1)^T, (\tilde{B}_2 K_2)^T]^T$ . les conditions 1 et 2 du théorème 2 assurent que  $A_2$  est une matrice Hurwitz continue, en conséquence il existe  $P_2$  tel que  $A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -I_d$  ce qui nous donne :

$$\dot{V}_2 = -\|\chi_2\|^2 + 2\|B_2\| \|\chi_1\| \|P_2\| \|\chi_2\|$$

Considérons  $\|\chi_2\| \geq \frac{\epsilon}{2}$  et pour  $\|\chi_1\| \leq (\frac{\epsilon}{4})^2$  par continuité de  $\chi_1$  entre  $[t_k, t_{k+1}]$ , alors il existe  $\theta_{Max}$  tel que  $\forall \tau \in [t_k, t_k + \theta_{Max}]$ , on a :  $\dot{V}_2 < 0$ .

Donc,  $\chi_2$  converge vers une boule de rayon  $\frac{\epsilon}{2}$  et  $\chi_1(t_k)$  converge la boule de rayon  $(\frac{\epsilon}{4})^2$  d'où  $\chi(t_k)$  converge vers  $\frac{\epsilon}{2} + (\frac{\epsilon}{4})^2$ .

Ceci achève la preuve.

*Remarque 4.* Dans la condition (2) de la proposition, il est important de remarquer que c'est la matrice  $M$  qui joue un rôle clé car la matrice  $A_{22}$  n'est pas stable. Ceci sera mis en évidence dans le prochain exemple.

Les résultats présentés ci-dessus, peuvent être dans certains cas étendus aux systèmes non linéaires. En effet, pour un système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ y(t_k) = h(x(t_k)) \end{cases} \quad (15)$$

sous certaines conditions il peut être transformé par un difféomorphisme Isidori [1995]  $z = \Phi(x)$  sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 = f_2(z_2) \\ y(t_k) = z_1(t_k) \end{cases} \quad (16)$$

alors il peut exister un observateur impulsif qui converge vers le système (16).

Afin de montrer que ces observateurs impulsifs généralisés sont efficaces pour certains systèmes non linéaires, un exemple sera présenté et simulé dans la section suivante, mais avant un exemple linéaire avec des mesures clairsemées sera présenté et commenté.

## 5. EXEMPLES ILLUSTRATIFS

### 5.1 Système linéaire

Soit le système dynamique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 20x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -20x_1(t) \\ y(t_k) = x_1(t_k) \end{cases} \quad (17)$$

Les paramètres de l'observateur (12) associé au système

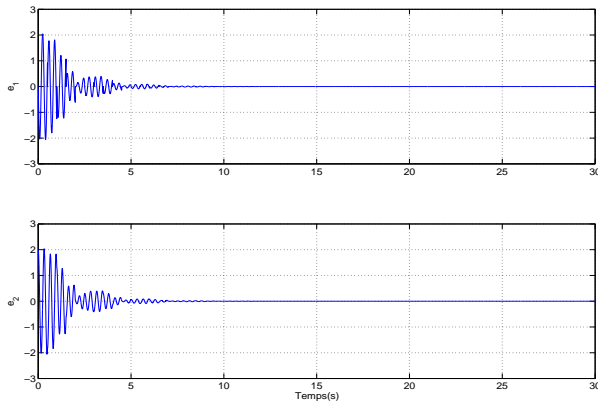


FIGURE 2. Les erreurs d'observation pour  $\theta \in [0.1, 0.5]$

(?) qui vérifient le théorème ( ) sont choisis comme suit :  $M = 3$ ,  $L = [L_1, L_2]^T = [2.5, 1.5]^T$  et  $R = 0$ . La matrice d'observateur est  $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -1 & -2.5 & 1 \\ -1 & -1.5 & 0 \end{pmatrix}$  de valeurs propres :  $-2.2500 + 1.5612i$ ,  $-2.2500 - 1.5612i$  et  $-1$ .

La figure 2 montre les performances de l'observateur (??) avec une période de mesure  $\theta_k \in [0.1s, 0.5s]$ , celle-ci ne vérifie pas le théorème de Shannon-Nyquist c-à-d la

fréquence d'échantillonnage des mesures de sortie ( $\frac{1}{T} = 2Hz$ ) est inférieure au double de la fréquence du système dynamique (17) ( $f = 3.1831Hz$ ). Il est important de noter que pour  $m = 0$  il n'y a pas de convergence, ce qui illustre bien le rôle clé joué par la matrice  $m$ .

### 5.2 Système non linéaire

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a(x_2(t) - x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = bx_1(t) + cx_2(t) - x_1(t)x_3(t) + x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = -dx_3(t) + x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_4(t) = -kx_1(t) + x_4(t) \\ y(t_k) = x_2(t_k) \end{cases} \quad (18)$$

Avec :  $a = 35$ ,  $b = 7$ ,  $c = 12$ ,  $d = 3$ ,  $k = 5$  et  $(x_10, x_20, x_30, x_40) = (0.05, 0.01, 0.05, 0.5)$ . Les exposants de Lyapunov sont :  $\lambda_1 = 16.472$ ,  $\lambda_2 = 1.2729$ ,  $\lambda_3 = -3$  et  $\lambda_4 = -39.7443$ . Le système (18) est hyperchaotique (deux exposants de Lyapunov positives) figure 4.

Similairement au cas linéaire, on propose un observateur

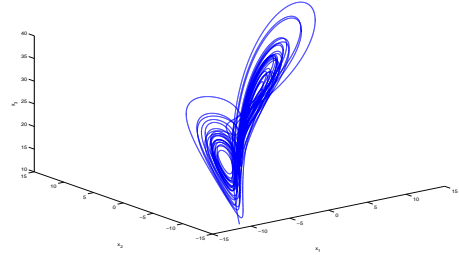


FIGURE 3. Portrait de phase du système

impulsif couplé avec un observateur continu, celui-ci de type super twisting Levant [1993]. Ce dernier sert à reconstruire les autres états non mesurés à partir des mesures continues provenant de l'observateur impulsif. L'observateur impulsif généralisé est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = a(\hat{x}_2(t) - \hat{x}_1(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = b\hat{x}_1(t) + c\hat{x}_2(t) - \hat{x}_1(t)\hat{x}_3(t) + \hat{x}_4(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) = -d\hat{x}_3(t) + \hat{x}_1(t)\hat{x}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) = -k\hat{x}_1(t) + \hat{x}_4(t) + M(z_4(t) - \hat{x}_4(t)) \\ \hat{x}_2(t_k^+) = \hat{x}_2(t_k) + R(x_2(t_k) - \hat{x}_2(t_k)) \end{cases} \quad (19)$$

avec

$$\begin{cases} z_4(t) = z_{d2}(t) - b\hat{x}_1(t) - cz_2(t) + \hat{x}_1(t)\hat{x}_3(t) \\ \dot{z}_2(t) = z_{d2}(t) + \lambda_1|z_2(t) - \hat{x}_2(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_2(t) - \hat{x}_2(t)) \\ \dot{z}_{d2}(t) = \lambda_2 \text{sign}(z_2(t) - \hat{x}_2(t)) \end{cases}$$

L'observateur impulsif joue le rôle d'un prédicteur de l'état  $x_2$ . La continuité du super twisting évite les sauts aux instants  $t_k$ . De plus comme il est robuste par rapport aux bruits et perturbations, au moment de l'impulsion sur l'état  $\hat{x}_2$  l'observateur ne varie pas brusquement, ce qui nous donne une meilleure estimation de  $x_2$  par rapport à l'observateur impulsif.

Les figures 5 et 6 montrent les performances de l'observateur (19) avec deux périodes de mesure différente  $\theta_k = 0.005s$  et  $\theta_k = 0.01s$ . Les conditions initiales et les gains d'observabilité sont choisis comme suit :  $\hat{x} = 0$   $\lambda_1 = 70$ ,  $\lambda_2 = 9500$  et  $r_1 = r_2 = 0$ .

## RÉFÉRENCES

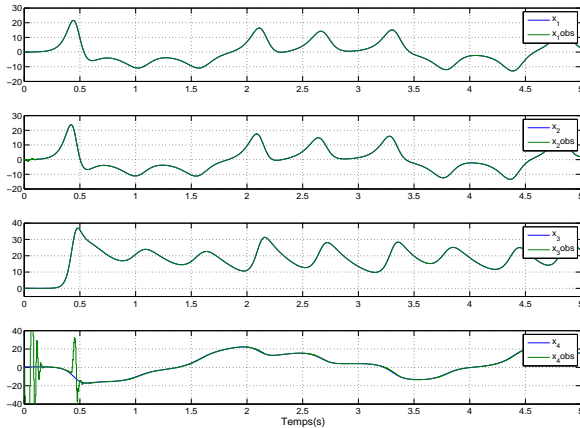


FIGURE 4. Les états du système et l'observateur pour  $\theta = 0.005$

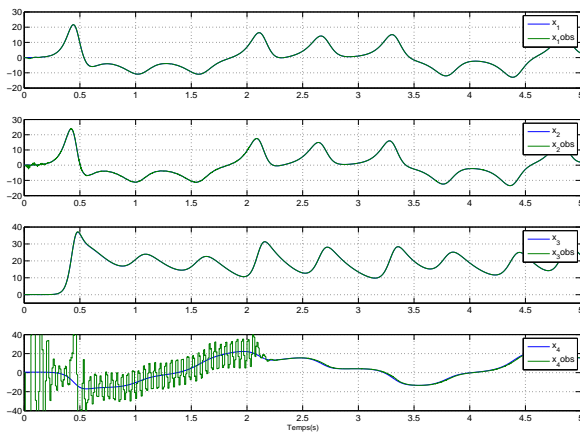


FIGURE 5. Les états du système et l'observateur pour  $\theta = 0.01$

Les résultats de la figure 5 montrent qu'à partir de  $t = 0.6$ , les états du système (18) et (19) sont synchronisés, l'observateur a convergé pour  $\theta_k = 0.005s$ . Les résultats de la figure 6 montrent que pour  $\theta_k = 0.01s$  à partir de  $t = 2.5$ , les états du système (18) et (19) sont synchronisés.

## 6. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons montré qu'il est possible de concevoir un observateur hybride pour des systèmes linéaires continus avec des mesures discrètes. Deux types d'observateurs ont été conçus, l'un (impulsionnel) pour des systèmes où les états instables sont mesurés, et l'autre (impulsionnel généralisé) pour les systèmes où des états instables sont non mesurés. La conception est basée sur l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires impulsifs. En outre cet observateur peut être étendu pour des systèmes non linéaires et particulièrement pour les systèmes chaotiques. Les résultats de simulation obtenus ont confirmé les bonnes performances de l'observateur et ceci aussi bien sur des systèmes linéaires que sur des systèmes chaotiques.

- Andrieu, V. et Nadri, M. (2010). Observer design for lipschitz systems with discrete-time measurements. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, 6522–6527. IEEE.
- Ballinger, G. et Lui, X. (2000). Existence, uniqueness and boundedness results for impulsive delay differential equations. *Applicable Analysis*, 74.
- Boutat-Baddas, L., Boutat, D., et Barbot, J. (2009). Observability analysis by poincaré normal forms. *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS)*, 21(2), 147–170.
- Brogliato, B. (1999). *Nonsmooth mechanics : models, dynamics, and control*. Springer Verlag.
- Franklin, J.N. (2000). *Matrix theory*. Dover Pubns.
- Goebel, R., Sanfelice, R., et Teel, A. (2009). Hybrid dynamical systems. *Control Systems Magazine, IEEE*, 29(2), 28–93.
- Haddad, W., Chellaboina, V., et Nersesov, S. (2006). *Impulsive and hybrid dynamical systems : stability, dissipativity, and control*. Princeton Univ Pr.
- Hetel, L., Daafouz, J., Tarbouriech, S., et Prieur, C. (2011). Reset control systems : stabilization by nearly-periodic reset. *IFAC World Congress*.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear control systems* (3rd edition). London : Springer-Verlag.
- Lakshmikantham, V., Baïnov, D., et Simeonov, P. (1989). *Theory of impulsive differential equations*, volume 6. World Scientific Pub Co Inc.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6), 1247–1263.
- Nadri, M., Hammouri, H., Astorga Zaragoza, C., et al. (2004). Observer design for continuous-discrete time state affine systems up to output injection. *European journal of control*, 10(03), 252–263.
- Panas, A. et Yang, T. (1998). Experimental results of impulsive synchronization between two chua's circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8, 639–644.
- Pyragas, K. (1993). Predictable chaos in slightly perturbed unpredictable chaotic systems. *Physics Letters A*, 181(3), 203–210.
- Raff, T. et Allgower, F. (2007). An impulsive observer that estimates the exact state of a linear continuous-time system in predetermined finite time. *Control & Automation, 2007. MED'07. Mediterranean Conference on*.
- Stamova, I. (2009). *Stability analysis of impulsive functional differential equations*, volume 52. de Gruyter.
- Yang, T. et Chua, L. (1997). Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems : Theory and application to secure communication. *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 44(10), 976–988.
- Zheng, G., Orlov, Y., Perruquetti, W., et Richard, J.P. (2011). Finite time observer-based control of linear impulsive systems with persistently acting impact. *IFAC World Congress*, 18(1), 2442–2447.