Commande robuste avec relâchement des contraintes temps-réel

Patrick Jocelyn Andrianiaina, Alexandre Seuret, Daniel Simon

Commande robuste avec relâchement des contraintes temps-réel ⋆

Patrick Jocelyn Andrianiaina * **Alexandre Seuret** ** **Daniel Simon** ***

* *Avionics and Simulations Department (Airbus Operations SAS), 316, route de Bayonne 31060 Toulouse Cedex 09, France (e-mail : Patrick.Andrianiaina@airbus.com)*
** *NeCS Team, Department of Automatic Control, Gipsa-lab, 961 rue de la Houille Blanche, BP 46, 38402 Grenoble Cedex, France(e-mail : Alexandre.seuret@gipsa-lab.fr)*
*** *NeCS Team, INRIA Rhône Alpes, Inovallee, 655 avenue de l'Europe, Montbonnot 38 334 Saint Ismier (e-mail : Daniel.Simon@inria.fr)*

Résumé: Une méthode d'implémentation de lois de commande sous contraintes temps-réel relâchées est proposée pour palier au conservatisme d'implémentation de contrôleurs basés sur un dimensionnement au "pire cas", tout en préservant la stabilité et la performance de la commande. Reposant sur des résultats récents de l'automatique, la méthode évalue la stabilité des systèmes linéaires avec entrée retardée et échantillonnée. Cet article prend en compte les effets de non respect d'échéances dans la production des valeurs de commande ainsi que les incertitudes dans les paramètres du système. La méthodologie est appliquée au contrôle de tangage d'un avion, démontrant que l'on peut affaiblir les contraintes temps réel et économiser la puissance de calcul tout en préservant la stabilité et la robustesse du système.

Mots-clés: Robustesse, retard, asynchrone, ordonnancement, temps-réel.

1. CONTEXTE

Le processus de développement des systèmes avioniques suit des réglementations de sûreté de fonctionnement très strictes, incluant l'analyse du déterminisme et de la prédictibilité temporelle des systèmes. L'approche est basée sur la séparation des étapes de conception et d'implémentation (Årzén et al. (2000); Xia and Sun (2006)). D'une part, le concepteur utilise des hypothèses de périodes d'échantillonnages fixes (sans gigue et sans pertes) et des retards fixes et connus d'avance. D'autre part, la théorie de l'ordonnancement se concentre principalement sur la problématique du dimensionnement des ressources d'exécution pour respecter les contraintes de temps-réel fournies par les concepteurs (Sha et al. (2004)). L'approche la plus répandue consiste ainsi à considérer des périodes d'échantillonnage fixes et des échéances dures basées sur une hypothèse de connaissance du pire temps d'exécution (WCET pour Worst Case Execution Time en anglais) des tâches informatiques constituant le logiciel embarqué.

Un inconvénient majeur de cette hypothèse est la sous-utilisation des ressources de traitement induisant des difficultés à la fois techniques, économiques et industrielles. Une des plus grandes difficultés dans l'approche actuelle se trouve dans la détermination du WCET, qui est nécessaire pour prouver la satisfaction des contraintes de temps-réel dur du système. La précision du résultat dépend de la prédictibilité de l'unité de calcul utilisé. Cependant les nouvelles générations de processeurs ont une architecture peu déterministe rendant difficile la prédiction des durées d'exécution. Ainsi, simplement estimer le temps d'exécution d'un simple bloc de base n'est pas trivial à cause des anomalies temporelles qui peuvent résulter de l'ordonnancement dynamique des instructions, de l'influence sur l'état du pipeline des blocs de base exécutés avant et après (Barre et al. (2006)). Actuellement, plusieurs travaux se proposent de définir des méthodes de plus en plus fiable pour déterminer le WCET (e.g. Benhamamouch (2011)) sans toutefois éliminer le conservatisme des résultats pour les nouvelles générations de processeurs (Puschner and Schoeberl (2008)).

De plus, en supposant la détermination des WCET résolue, cette approche basée uniquement sur le "pire cas" est fondamentalement pénalisante du point de vue de l'utilisation des ressources d'exécution et conduit à un sur-dimensionnement du système dont l'utilisation moyenne peut être très inférieure à sa capacité maximale. En fait, les systèmes de commande par rétroaction possèdent des propriétés de robustesse et de tolérance aux aléas temporels d'exécution remettant en cause les considérations de "temps-réel dur" utilisées habituellement. L'exploitation des ces propriétés de robustesse doit permettre de relâcher les contraintes d'ordonnancement des tâches de commande et de mieux exploiter les capacités des ressources d'exécution des contrôleurs.

L'article est organisé comme suit : la section 2 expose le problème d'ordonnancement flexible de boucles de commande et reconsidère l'hypothèse de temps-réel dur. La section 3 formalise le problème des systèmes de commande soumis à des incertitudes et des entrées retardées. La section 4 propose de nouvelles conditions de stabilité pour des systèmes soumis à des incertitudes paramétriques, à des retards et à des variations de la période d'échantillonnage. La section 5 présente un cas d'étude où la méthodologie exposée est appliquée au contrôle de l'axe de tangage d'un avion F-16. Enfin la section 6 conclut l'article et propose quelques pistes pour les travaux futurs.

Notations : Dans le reste de l'article, l'ensemble $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^{n\times n}$

⋆ La thèse CIFRE de P. Andrianiaina est financée par Airbus Operations SAS.

et $\mathbb{S}^n$ dénoteront respectivement l'ensemble des réels positifs, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{R}^{n\times n}$. L'exposant 'T' indiquera la transposition des matrices. La notation $P > 0$, pour $P \in \mathbb{S}^n$, signifiera que P est une matrice symétrique définie positive. Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la notation $\mathrm{He}\{A\} > 0$ signifiera que $A + A^T > 0$.

2. POSITION DU PROBLÈME

2.1 Ordonnancement basé sur le WCET

Actuellement, les systèmes de commande, comme les commandes de vols ou de freinages, sont généralement considérés comme des systèmes temps-réel durs. Il est souvent supposé dès la phase de conception que les tâches logiciels devront s'exécuter de manière strictement périodique. Des créneaux de temps préfixés sont alloués aux tâches de contrôle, et les dépassements d'échéances et le phénomène de gigue sont interdits. On considère que toute déviation par rapport cet ordonnancement idéal est une panne du système. La connaissance supposée sûre des WCET est utilisée pour dimensionner le système. La figure 1 montre un schéma d'exécution des tâches de contrôle dans ce contexte.

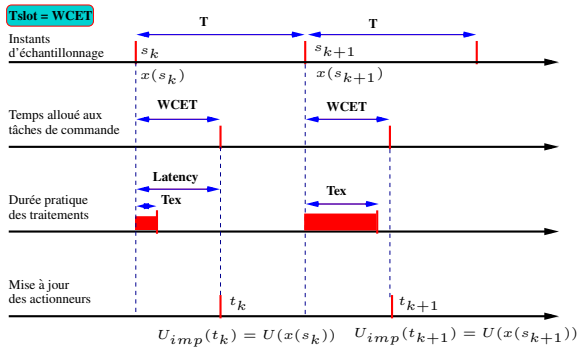

Fig. 1. Diagramme temporel d'exécution de tâche basée sur le WCET

Une tâche donnée s'exécute périodiquement sur une fenêtre de temps $T_{slot} = WCET$ allouée à son exécution. La tâche est déclenchée à une période $s_k - s_{k-1} = T$ par l'arrivée des mesures $x(s_k)$, qui représentent l'état du système à l'instant s_k. La durée de traitement est de T_{ex}, qui est toujours inférieure au $WCET$. Pour éviter la gigue, le signal de contrôle $U(x(s_k))$ est seulement appliqué aux actionneurs à la fin de la période, c'est-à-dire à l'instant $s_k + WCET$.

$$\forall t \in [s_k + WCET, s_{k+1} + WCET[, \quad U = U(x(s_k)).$$

Ainsi, il s'agit d'un système de commande périodique soumis à un retard constant $T_{slot} = WCET$ et une période de T. Ce schéma d'exécution implémente bien l'hypothèse "temps-réel dur". Cependant, le traitement est achevé toujours avant la fin du temps alloué et une fraction de la puissance de calcul disponible est inutilisée. La perte en temps processeur est d'autant plus importante que le WCET s'écarte de la valeur moyenne des temps d'exécution T_{ex} observés. En effet, les hautes performances des nœuds de calculs modernes sont dues à l'introduction de mécanismes architecturaux tels que les pipelines, les mécanismes d'exécution spéculatifs et l'utilisation des mémoires caches à plusieurs niveaux qui réduisent le déterminisme temporel des processeurs. L'estimation du WCET devient de plus en plus difficile, et l'étalement de la distribution des temps d'exécution rend l'approche "pire cas"encore plus conservatrice. (Souyris et al. (2005)).

Une courbe typique de distribution du temps d'exécution (figure 2) pour un processeur embarqué donné (Hansen et al. (2009)) montre que l'on s'attend à ce qu'une exécution proche du WCET soit un événement plutôt rare et qu'un ordonnancement basé sur une occupation moyenne du CPU plutôt que sur le pire cas donnerait des gains substantiels en terme de dimensionnement des équipements embarqués.

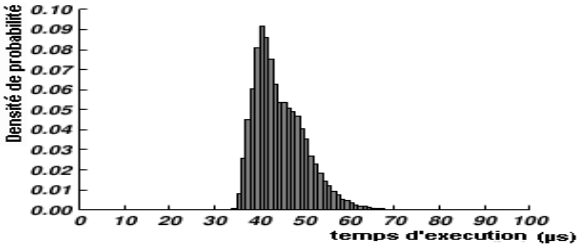

Fig. 2. Distribution caractéristique du temps d'exécution

La validité de l'hypothèse habituelle de temps-réel "dur" mérite donc d'être réexaminée soigneusement en tenant compte de la robustesse des systèmes de commande par rétroaction.

2.2 Robustesse des systèmes bouclés et aléas temporels

La robustesse d'un système définit sa capacité à conserver sa stabilité ainsi que des performances spécifiées en dépit de déviations des paramètres réels par rapport au modèle nominal, c'est une préoccupation constante dans le conception de systèmes de commande.

L'évaluation de la robustesse en utilisant la simulation peut difficilement donner des résultats exhaustifs pour des systèmes complexes, en raison du nombre important de paramètres mal connus, susceptibles de varier dans le temps, et de la large combinatoire induite. La théorie de la commande robuste en automatique est une approche formelle permettant de concevoir des commandes robustes aux incertitudes des paramètres du modèle du procédé commandé. Cette notion de robustesse est moins courante en informatique : Hamann et al. (2006) propose par exemple une approche formelle d'évaluation de la robustesse des systèmes embarqués temps-réel, en définissant des métriques de performance informatique de systèmes sur puce.

Cependant le problème de la robustesse de systèmes commandés par rétroaction aux variations et incertitudes des paramètres temporels d'exécution est jusqu'ici peu abordé. Il s'agit ici, en complément de la robustesse aux incertitudes du procédé, de prendre en compte les phénomènes de gigue ou de dépassements d'échéances d'exécution.

Pour des systèmes linéaires SISO, la robustesse est classiquement quantifiée par les notions de marge de phase, marge de retards et de marge de module. Il apparaît que la marge de phase implique une marge de retard (c'est-à-dire le retard maximum non modélisé que le système peut tolérer avant de devenir instable) mais aussi une marge de gigue qui est plus difficile à quantifier (Cervin et al. (2004)) mais qui peut être montrée expérimentalement (Cervin (2003)).

Le point intéressant est qu'un système robuste aux incertitudes de paramètres est aussi, de manière générale, robuste aux incer-

titudes temporelles. Les systèmes en boucle fermée, alors qu'ils sont souvent classés comme systèmes temps-réel durs, sont donc plutôt des systèmes temps-réel "faiblement durs" *(weakly hard real-time systems)* : selon Bernat et al. (2001), ce sont des systèmes capables de supporter des déviations *spécifiées* des paramètres temps-réel d'exécution, tout en maintenant le niveau désiré de performance de commande.

2.3 Temps-réel relâché et objectifs de commande

Nous souhaitons améliorer l'utilisation des ressources de calcul tout en préservant la stabilité et les performances du système. . Nous proposons donc de relâcher les contraintes temps-réel selon l'ordonnancement et les objectifs de commande suivants (Figure 3) :

L'échantillonnage des données capteurs est toujours effectué

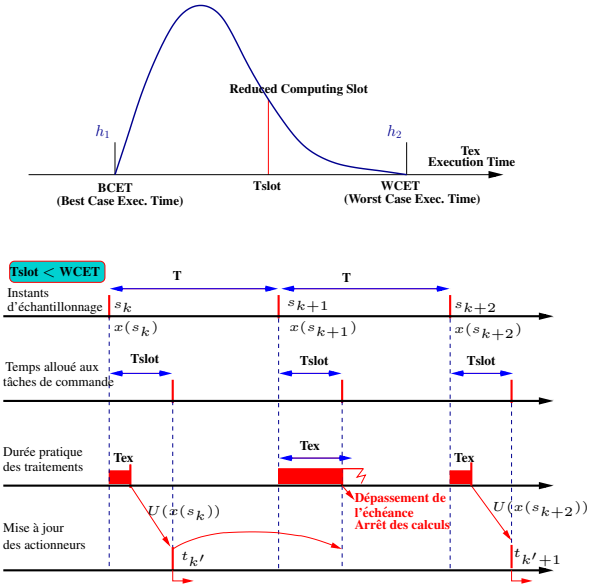

Fig. 3. Proposition de diagramme temporel d'exécution de tâche

périodiquement (de période T). Un temps $T_{slot} < WCET$ est maintenant alloué à la tâche de contrôle. Le signal de contrôle obtenu est envoyé aux actionneurs à la fin du temps T_{slot}, c'est-à-dire que $U(x(s_k))$ est envoyé à l'instant $s_k + T_{slot}$, où T_{slot} représente le retard tel que :

$$\forall t \in [s_k + T_{slot}, s_{k+1} + T_{slot}[, \quad U = U(x(s_k)).$$

Cependant, avec une allocation de temps d'exécution réduite, il peut arriver que occasionnellement une tâche de contrôle dépasse son échéance. Il est alors proposé d'arrêter le traitement en cours, de maintenir la précédente valeur de commande $U(x(s_k))$ pendant la prochaine période, et de lancer un nouveau traitement utilisant la nouvelle mesure. Ainsi, si le non respect de l'échéance se fait à l'instant $s_k + T_{slot}$, le signal de contrôle est :

$$\forall t \in [s_k + T_{slot}, s_{k+2} + T_{slot}[, \quad U = U(x(s_k)),$$

et pour N violations d'échéance consécutives :

$$\forall t \in [s_k + T_{slot}, s_{k+N} + T_{slot}[, \quad U = U(x(s_k)).$$

En d'autres termes, un nouveau signal de commande est envoyé aux actionneurs, si et seulement si l'exécution de la tâche de contrôle s'est terminée correctement. La commande est appliquée à des instants non équidistants $t_{k'}$ tels que :

$$t_{k'} = s_k + T_{slot} \quad \text{if} \quad T_{ex} \leq T_{slot},$$

où k' est un entier positif qui représente le nombre des entrées calculées avant $s_k = kT$. Ainsi, les entrées du système peuvent être asynchrones puisque l'intervalle entre deux instants d'échantillonnage $t_{k'+1} - t_{k'}$ varie dans le temps mais reste toutefois bornée entre T et NT. Les nouveaux instants d'échantillonnage sont alors $t_{k'+1} - t_{k'} = \alpha T$, où α est un entier $[1, ..., N]$. L'échantillonnage asynchrone est déterminé par le couple (T, N).

Comme il a déjà été observé et exploité (Cervin et al. (2002); Felicioni et al. (2010)), un système de commande en boucle fermée peut rester stable malgré des aléas temporels d'exécution, au prix d'une dégradation contrôlable des performances. Ainsi, étant donnés un système LTI, une loi de commande, une distribution des temps d'exécution sur l'unité de calcul et une spécification des paramètres d'ordonnancement nominaux, les problèmes à résoudre peuvent être formulés comme suit :

- Trouver N, le nombre maximal de dépassements d'échéances consécutifs avant instabilité du système en boucle fermée;
- Trouver une valeur adéquate de T_{slot} pour gérer le compromis entre qualité de commande et utilisation des ressources;
- Évaluer la robustesse du système en boucle fermée asynchrone par rapport aux incertitudes sur les paramètres du processus.

3. FORMULATION DU PROBLÈME

Considérons le système linéaire représentant un système de commande avec une entrée échantillonnée et retardée :

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta_\mu A(t))x(t) + (B + \Delta_\mu B(t))u(t), \quad (1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement les vecteurs d'états et d'entrée. Les matrices A et B sont supposées constantes et connues. Les matrices $\Delta_\mu A$ and $\Delta_\mu B$ représentent les incertitudes du modèle qui peuvent être constantes ou variant dans le temps. Ces incertitudes sont données sous la représentation polytopique suivante :

$$\Delta_\mu A(t) = \mu \sum_{i=1}^{M} \lambda_i(t) A_i, \ \Delta_\mu B(t) = \mu \sum_{i=1}^{M} \lambda_i(t) B_i,$$

où M correspond au nombre de sommets du polytope. Les matrices A_i et B_i sont constantes. Le scalaire $\mu \in R$, caractérise la grandeur de l'incertitude. Notons que si $\mu = 0$, alors, il n'existe aucune incertitude sur le système. La fonction $\lambda_i(.)$ est une fonction de pondération convexe, c'est-à-dire que, pour tout $i = 1, .., M$ et pour tout $t \geq 0$, $\lambda_i(t) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{M} \lambda_i(t) = 1$. On suppose que l'ordonnancement des tâches de commande induisent un délai de calcul T_{slot} et un échantillonnage du signal de commande. Pour un gain donné, $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$, la loi de commande est un retour d'état statique, constant par morceaux, et de la forme $u(t) = Kx(t_{k'} - T_{slot}), \forall t \in [t_{k'}, \ t_{k'+1}]$.

Les instants $t_{k'}$ représentent les instants où la sortie du contrôleur est actualisée. Le système en boucle fermée peut ainsi s'écrire :

$$\forall t \in [t_{k'}, \ t_{k'+1}] \dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)Kx(t_{k'} - T_{slot}) \quad (2)$$

où $\bar{A}(t) = A + \Delta_\mu A(t)$ et $\bar{B}(t) = B + \Delta_\mu B(t)$.

Plusieurs travaux ont contribué à garantir la stabilité de ce type de système. Dans Fridman et al. (2004), Millán et al. (2009) et Liu and Fridman (2009), les auteurs ont proposé une

formulation agrégée des retards. Ils ont ensuite développé des critères de stabilité prenant en considération les effets du retard. Toutefois, ils n'ont pas considéré les différentes natures des retards de temps de calcul et d'échantillonnage. Quand $\mu = 0$, la discrétisation de ce type de système est facilement obtenue par l'intégration de l'équation différentielle (2) sur l'intervalle $[t_{k'},\ t_{k'} + \tau]$. Ainsi, $\forall \tau \in [0,\ \bar{T}]$, on obtient :

$$\begin{aligned} &x(t_{k'} + \tau) = \tilde{A}(\tau)x(t_{k'}) + \tilde{B}(\tau)Kx(t_{k'} - T_{slot}), \\ &\tilde{A}(\tau) = e^{A\tau}, \quad \tilde{B}(\tau) = \int_0^\tau e^{A(\tau-\theta)}d\theta B. \end{aligned} \tag{3}$$

On définit alors pour tout entier k', la fonction $\chi_{k'}^{T_{slot}} : [0,\ NT] \times [-T_{slot},\ 0] \to \mathbb{R}^n$ telle que $\forall \tau \in [0,\ NT]$ et $\theta \in [-T_{slot},\ 0]$, $\chi_{k'}(\tau, \theta) = x(t_{k'} + \tau + \theta)$. L'ensemble $\mathbb{K}_{NT}^{T_{slot}}$ représente l'ensemble des fonctions définies par $\chi_k^{T_{slot}}$, continues de $[0,\ NT] \times [-T_{slot},\ 0]$ vers $\mathbb{R}^n$.

Toutefois, la même méthode de discrétisation conduit à d'importantes difficultés quand le système contient des intervalles d'échantillonnage variables et des paramètres variants dans le temps. Ceci montre la nécessité d'introduire de nouvelles conditions de stabilité qui soient adaptées à ce type de problèmes. Dans ce papier, une méthode innovante est proposée pour évaluer la stabilité des systèmes soumis à des échantillonnages variables, à des retards constants et à des incertitudes de paramètres variants dans le temps.

4. ANALYSE DE STABILITÉ

4.1 Système non soumis à des incertitudes

Dans cette section, une étude de la stabilité asymptotique des solutions du système échantillonné (1) avec $\mu = 0$ est présentée. Ici, la contribution est basée sur les conditions de stabilité asymptotique développées dans Seuret (2011).

Theorème 1. Considérons un entier N et deux réels positifs T_{slot} et T. Supposons, qu'il existe $Q > 0$, $R_1 > 0$ et $R_2 > 0 \in \mathbb{S}^n$, $P > 0, U > 0$, $S_1 \in \mathbb{S}^{2n}$ et $S_2, X \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $Y \in \mathbb{R}^{5n\times 2n}$ qui satisfont aux conditions suivantes, pour $j = 1, 2, :$

$$\begin{aligned} &\Psi_1(A, B) = \Pi_1(T_{slot}) + T_j\Pi_2 + T_j\Pi_3 < 0, \\ &\Psi_2(A, B) = \begin{bmatrix} \Pi_1(T_{slot}) - T_j\Pi_3 & T_jY \\ T_jY^T & -T_jU \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \tag{4}$$

où $T_1 = T, T_2 = NT$ et

$$\begin{aligned} \Pi_1(T_{slot}) &= \text{He}\{N_1^T P N_0 - Y N_{12} - N_2^T S_2 N_{12}\} \\ &\quad + M_1^T Q M_1 - M_2^T Q M_2 - M_5^T R_1 M_5 - N_{12}^T S_1 N_{12} \\ &\quad + M_0^T (R_1 + T_{slot} R_2) M_0 - M_{12}^T R_2 / T_{slot} M_{12} \\ \Pi_2 &= N_0^T U N_0 + \text{He}\{N_0^T (S_1 N_{12} + S_2^T N_2)\}, \\ \Pi_3 &= N_2^T X N_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &M_0(A, B) = [A\ 0\ 0\ BK\ 0]\,, && M_1 = [I\ 0\ 0\ 0\ 0]\,, \\ &M_2 = [0\ I\ 0\ 0\ 0]\,, && M_3 = [0\ 0\ I\ 0\ 0]\,, \\ &M_4 = [0\ 0\ 0\ I\ 0]\,, && M_5 = [0\ 0\ 0\ 0\ I] \\ &N_0 = [M_0^T(A, B)\ M_5^T]^T, && N_1 = [M_1^T\ M_2^T]^T, \\ &N_2 = [M_3^T\ M_4^T]^T, && M_{12} = M_1 - M_2, \\ &N_{12} = N_1 - N_2. \end{aligned}$$

Le système (2) est alors asymptotiquement stable pour tout échantillonnage asynchrone et retard définis respectivement par (T, N) et T_{slot}

Preuve. La preuve de ce théorème ne sera pas détaillée dans cet article mais est disponible dans Seuret (2011). ■

Il est à noter que les conditions du théorème 1 incluent les propriétés de stabilité robuste par rapport au retard en entrée T_{slot}. Ceci signifie que (4) requiert que le système soit stable au moins pour un retard de transmission T_{slot} et une période $T = T_i$.

4.2 Systèmes soumis à des incertitudes

Dans cette section, nous considérons que μ n'est pas nul. Nous allons donc étendre le théorème précédent pour couvrir le cas des systèmes soumis à des incertitudes variant dans le temps. Dans le théorème précédent, les conditions dépendent linéairement des matrices du modèle continu du système. Le corollaire suivant présente une extension de ce théorème au cas des système incertains ou à temps variant.

Corollaire 1. Soient un entier N et les scalaires positifs T_{slot}, T et μ. Soient les matrices Q, R_1, R_2, P, U, S_1 et S_2 comme dans le théorème 1 et $X_i \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $Y_i \in \mathbb{R}^{5n\times 2n}$ qui satisfont aux conditions suivantes, pour $i = 1, \ldots, M$ et $j = 1, 2$:

$$\Psi_1(A_i, B_i) < 0, \quad \Psi_2(A_i, B_i) < 0, \tag{5}$$

où les éléments du polytope $A_i = A + \mu A_i$ et $B_i = B + \mu B_i$. Le système (2) est alors asymptotiquement stable pour la période d'échantillonnage définie par T et le retard défini par T_{slot}.

Preuve. Considérons les conditions de stabilité décrites dans le théorème 1. En notant que

$$M_0(\bar{A}(t), \bar{B}(t)) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i(t) M_0(A_i, B_i),$$

et en introduisant les matrices variables $Y(t) = \sum_{i=1}^M \lambda_i(t) Y_i$ et $X(t) = \sum_{i=1}^M \lambda_i(t) X_i$ et en utilisant le complément de Schur, on remarque que les deux conditions sont linéaires par rapport aux matrices M_{0i} and N_{0i} et donc, pour $j = 1, 2$, $\Psi_j(\bar{A}(t), \bar{B}(t)) = \sum_{i=1}^M \lambda_i(t) \Psi_j(A_i, B_i)$. ■

5. ÉTUDE DE CAS

Cette étude de cas utilise l'approche précédente de robustesse à l'ordonnancement temps-réel relâché de la commande de tangage d'un avion. Nous considérerons seulement un des modes longitudinaux de l'avion, que l'on appelle "le mode oscillatoire à courte période". Ce modèle est un modèle linéarisé avec des conditions nominales de vols données fournis par un ouvrage de référence du domaine (Stevens and Lewis (2003)) :

$$\begin{cases} E\dot{x} = Fx + Gu, \\ y = Hx. \end{cases} \tag{6}$$

Le vecteur d'état est $x = [\alpha\ \theta\ q]$ où α est l'angle d'attaque, θ est l'angle de tangage, q est la vitesse de tangage, le vecteur d'entrée $u = \delta_E$ contient uniquement la déflection de la gouverne de profondeur de l'avion.

$$\begin{aligned} &E = \begin{bmatrix} V_T - Z_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -M_{\dot{\alpha}} & 0 & 1 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{180}{\pi} \\ 0 & \frac{180}{\pi} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &G = \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ 0 \\ M_{\delta_e} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} Z_\alpha & -g_0' sin\gamma_e & V_T + Z_q \\ 0 & 0 & 1 \\ M_\alpha & 0 & M_q \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

On note que la matrice E est toujours inversible dans les conditions normales de vols. Les paramètres du modèle sont données à partir du modèle standard d'avion fournit par

(Stevens and Lewis (2003))En pratique, un filtre passe-bas est systématiquement rajouté à la lecture de l'angle d'attaque α. La dynamique de la gouverne de profondeur ainsi qu'un intégrateur agissant sur la consigne (pour assurer une erreur nulle en régime permanent) sont ajoutés au système initial. Le vecteur d'état devient $[\alpha\ q\ \delta_E\ \alpha_F\ \beta]$ où α_F est la mesure de α filtré, et β est la sortie de l'intégrateur. Le modèle d'état complet est :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{8}$$

où $A = E^{-1}F$ et $B = E^{-1}G$. Dans ce cas d'étude, les paramètres sont ceux d'un avion F16 bien documenté dans la littérature (Stevens and Lewis (2003) par exemple).

Les paramètres de vol nominaux à altitude nulle donnent le modèle numérique suivant :

$$A = \begin{bmatrix} -1.01887 & 0.90506 & -0.00215 & 0 & 0 \\ 0.82225 & -1.07741 & -0.17555 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20.2 & 0 & 0 \\ 10.0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -57.2958 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 57.2958 & 0 \\ 0 & 57.2958 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Un contrôleur par retour de sortie $u = Ky = -k_\alpha\alpha_F - k_q q - k_i\beta$ est conçu en utilisant les techniques de placement de pôle classique, donnant $K = [-0.04238; -0.4098; 0.8426]$. La période d'échantillonnage du contrôleur est fixée à $T = 0.08$sec et le temps d'exécution d'une tâche de contrôle supposé égal à $WCET = 0.02$ sec (en supposant qu'il existe 4 contrôleurs qui se partagent l'unité de traitement). Les matrices A_i et B_i, éléments de la combinaison convexe $\Delta_\mu A(t)$ et $\Delta_\mu B(t)$ sont définies dans un polytope à deux sommets définis par $A_i = (-1)^i A$ et $B_i = (-1)^i B$ pour $i = 1, 2$. Le principe consiste à commencer l'analyse en partant des hypothèses classiques "au pire cas" décrites dans la figure 1, où une fenêtre de temps égale au $WCET$ est allouée à la tâche de contrôle avec une période T et ensuite à réduire pas à pas cette grandeur. Deux scénarios sont alors considérés dans l'étude (Figure 4) :

Cas 1 : Une fenêtre de temps $T_{slot} < WCET$ est allouée à la tâche, et la période du système garde sa valeur initiale T_{init}. Dans ce cas, un gain en temps de traitement est obtenu (qui pourra être utilisé pour d'autres activités du processeur) avant l'arrivée de la prochaine activation. Des améliorations sont alors attendues grâce à la réduction du retard de $WCET$ à T_{slot};

Cas 2 : Un temps $T_{slot} < WCET$ est alloué à la tâche de contrôle, mais cette fois la période du système est aussi réduite de la même quantité, soit $T_{nouv} = T_{init} - (WCET - T_{slot})$. Dans ce cas, des améliorations sont attendues à la fois par la réduction du retard et de l'intervalle d'échantillonnage.

Les conditions de stabilité du théorème 1 sont utilisées pour trouver des liens entre le gain en temps de traitement (que l'on note $\epsilon = \frac{T_{slot}}{WCET}$) et N, le nombre maximum de dépassements d'échéances (et donc de perte d'échantillon) consécutifs tolérables avant instabilité du système. L'analyse du Cas 1 (partie gauche de la figure 5), montre que la tolérance aux dépassements d'échéance du contrôleur, mesuré par N, croît quand T_{slot} et donc le retard sont réduits. Cette expérience montre aussi qu'une grande incertitude des paramètres du

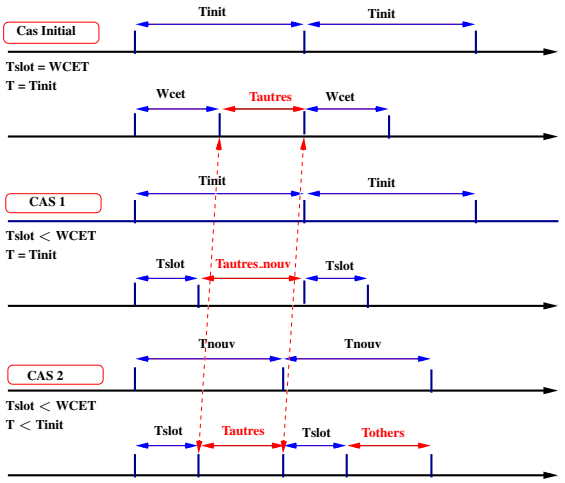

Fig. 4. Ordonnancements proposés

système (μ croissant)réduit la robustesse du contrôleur aux pertes d'échantillons. Dans le Cas 2, (partie droite de la figure 5), la robustesse du système aux dépassements d'échéances est encore améliorée du fait que ce scénario d'ordonnancement induit à la fois une réduction de l'intervalle d'échantillonnage et du retard.

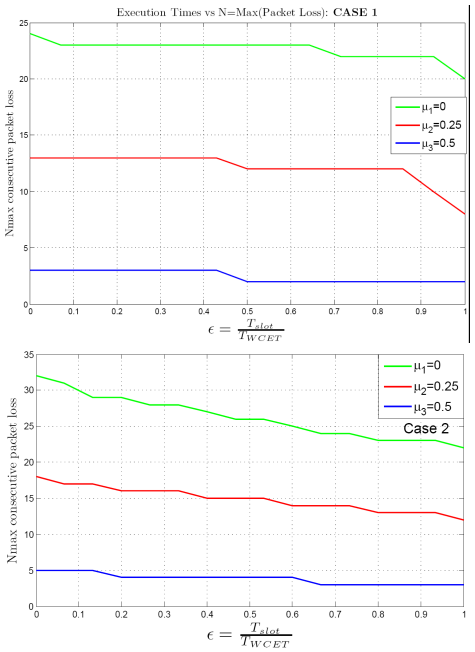

Fig. 5. Nombre maximum de dépassements d'échéances consécutifs admissibles

Cependant, la réduction de T_{slot} augmente manifestement le risque de perte d'échantillon. Pour une distribution de temps d'exécution donnée, la probabilité de dépasser une échéance varie de 1 à 0 lorsque le facteur d'ordonnancement ϵ varie de 1 ($T_{slot} = WCET$) à une valeur minimale $T_{slot} = BCET$ (Best Case Execution Time).

En supposant que les durées d'exécution des tâches sur des intervalles successifs sont des variables indépendantes, la probabilité d'occurrence d'un évènement où l'on atteint le nombre maximal de dépassements d'échéances consécutives admissibles est donnée dans la figure 6 pour les deux scénarios décrits et pour différentes valeurs de mu. Cette valeur peut être utilisée

comme métrique de conception en alternative à l'approche du pire cas. Ainsi, pour un scénario d'ordonnancement considéré et une hypothèse sur les incertitudes du système, il est facile de calculer la valeur de ϵ correspondant à un taux de défaillance spécifié.

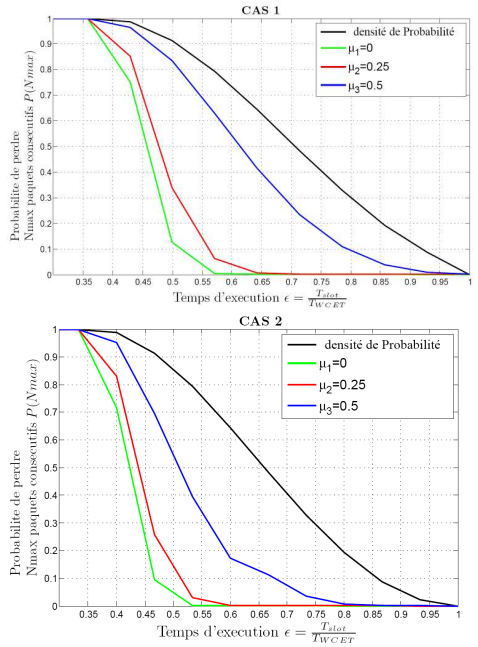

Fig. 6. Probabilité d'atteindre le nombre maximum de dépassement d'échéance consécutive admissible

6. CONCLUSION

Dans ce papier, les hypothèses de "temps-réel dur" habituellement utilisées dans les systèmes embarqués ont été réévaluées sous des considérations de robustesses des systèmes commandés par rétroaction. La contribution théorique fournit de nouvelles conditions de stabilité pour les systèmes asservis linéaires soumis à des retards, des variations de l'intervalle d'échantillonnage et des incertitudes sur les paramètres.

Ces conditions de stabilité permettent d'ordonnancer des tâches de commande en utilisant les ressources de calcul embarqués de façon plus efficace que l'ordonnancement classique basé sur le pire cas, tout en préservant la stabilité et les performances du système. La méthodologie présentée devrait maintenant être intégrée dans une démarche de type Qualité de Service, en formalisant dans un critère global l'expression du compromis entre gain en puissance de calcul, performances de commande, robustesse, tolérance aux fautes et contraintes opérationnelles et réglementaires.

BIBLIOGRAPHIE

Årzén, K.E., Cervin, A., Eker, J., and Sha, L. (2000). An introduction to control and scheduling co-design. In *39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia.

Barre, J., Landet, C., Rochange, C., and Sainrat, P. (2006). Calcul de temps d'exécution pire cas pour un processeur superscalaire à exécution non ordonnée. In *RenPar'17/SympA'2006/CFSE'5/JC'2006*. Canet en Roussillon.

Benhamamouch, B. (2011). *Calcul du pire temps d'exécution: Méthode formelle s'adaptant à la sophistication croissante des architectures matérielles*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble.

Bernat, G., Burns, A., and Llamosí, A. (2001). Weakly hard real-time systems. *IEEE Trans. on Computers*, 50(4), 308–321.

Cervin, A. (2003). *Integrated Control and Real-Time Scheduling*. Ph.D. thesis, Dpt of Automatic Control, Lund Inst. of Technology, Sweden.

Cervin, A., Eker, J., Bernhardsson, B., and Årzén, K.E. (2002). Feedback-feedforward scheduling of control tasks. *Real-Time Systems*, 23(1–2), 25–53.

Cervin, A., Lincoln, B., Eker, J., Årzén, K.E., and Buttazzo, G. (2004). The jitter margin and its application in the design of real-time control systems. In *10th International Conference on Real-Time and Embedded Computing Systems and Applications*. Göteborg, Sweden.

Felicioni, F., Simonot, F., Simonot Lion, F., and Song, Y.Q. (2010). Overload Management Through Selective Data Dropping. In *Co-design Approaches for Dependable Networked Control Systems*, 187–224. ISTE - Wiley.

Fridman, E., Seuret, A., and Richard, J.P. (2004). Robust sampled-data stabilization of linear systems: An input delay approach. *Automatica*, 40(8), 1141–1446.

Hamann, A., Racu, R., and Ernst, R. (2006). A formal approach to robustness maximization of complex heterogeneous embedded systems. In *4th international conference on Hardware/software codesign and system synthesis CODES+ISSS'06*.

Hansen, J., Hissam, S., and Moreno, G. (2009). Statistical-based WCET estimation and validation. In *9th International Workshop on Worst-Case Execution Time (WCET) Analysis ECRTS'09*. Dagstuhl, Germany.

Liu, K. and Fridman, E. (2009). Stability analysis of networked control systems: a discontiuous Lyapunov functional approach. In *Joint* 48^{th} *IEEE CDC and* 28^{th} *CCC*. Shanghai, China.

Millán, P., Orihuela, L., Vivas, C., and Rubio, F. (2009). Improved delay-dependent stability criterion for uncertain networked control systems with induced time-varying delays. In 1^{rst} *IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems Necsys'09*. Venise, Italy.

Puschner, P. and Schoeberl, M. (2008). On composable system timing, task timing, and WCET analysis. In *8th International Workshop on Worst-Case Execution Time (WCET) Analysis*. Prague, Czech Republic.

Seuret, A. (2011). Stability analysis of networked control systems with asynchronous sampling and input delay. In *IEEE American Control Conference*. San Francisco, USA.

Sha, L., Abdelzaher, T., Årzén, K.E., Cervin, A., Baker, T., Burns, A., Buttazzo, G., Caccamo, M., Lehoczky, J., and Mok, A. (2004). Real-time scheduling theory: A historical perspective. *Real-Time Systems*, 28(2–3), 101–155.

Souyris, J., Le Pavec, E., Himbert, G., Jégu, V., and Borios, G. (2005). Computing the worst case execution time of an avionics program by abstract interpretation. In *5th Intl. Workshop on Worst-Case Execution Time (WCET) Analysis*, 21–24.

Stevens, B. and Lewis, F. (2003). *Aircraft Control and Simulation*. Wiley-Interscience.

Xia, F. and Sun, Y. (2006). Control-scheduling codesign: A perspective on integrating control and computing. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems - Series B*, Special Issue on ICSCA 06, 1352–1358.