



**HAL**  
open science

## Sur les éléments finis pentaédriques de degré 1 et 2

Paul-Louis George, Houman Borouchaki

► **To cite this version:**

Paul-Louis George, Houman Borouchaki. Sur les éléments finis pentaédriques de degré 1 et 2. [Rapport de recherche] RR-7992, INRIA. 2012, pp.47. hal-00707184

**HAL Id: hal-00707184**

**<https://inria.hal.science/hal-00707184>**

Submitted on 12 Jun 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Sur les éléments finis pentaédriques de degré 1 et 2

Paul Louis George, Houman Borouchaki

**RESEARCH  
REPORT**

**N° 7992**

Juin 2012

Project-Team Gamma3





## Sur les éléments finis pentaédriques de degré 1 et 2

Paul Louis George\*, Houman Borouchaki†

Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 7992 — Juin 2012 — 47 pages

**Résumé :** Ce rapport fait suite aux papiers discutant des éléments finis triangulaires, quadrilatéraux, tétraédriques et hexaédriques de Lagrange de degré 2. Ici, on regarde le cas d'un élément fini de Lagrange pentaédrique de degré 2 à 18 nœuds et à 15 nœuds. Néanmoins on revient également sur le cas du pentaèdre de degré 1 à 6 nœuds. Quelques surprises sont mises en évidence sur ces différents éléments. On discute aussi de ce que pourrait être une définition abstraite de la notion de qualité pour de tels éléments.

**Mots-clés :** Prisme. Pentaèdre R1. Pentaèdre à 6 nœuds. Pentaèdre R2. Pentaèdre à 18 nœuds. Pentaèdre à 15 nœuds. Éléments Finis R1 et R2. Courbe de Bézier. Pentaèdre de Bézier.

---

\* INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

† UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Technologie de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

**RESEARCH CENTRE  
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt  
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

## Lagrange pentahedra of degree 1 and 2

**Abstract:** Following our previous reports related to Lagrange triangles, quadrilaterals, tetrahedra and hexahedra of degree 2, we consider the case of a Lagrange pentahedral finite element of degree 2. By the way, we also return to the pentahedron of degree 1. A couple of surprising things appear. We also discuss the notion of a quality of such elements.

**Key-words:** Prism. R1 penta. 6-node penta. R2 penta. 18-node penta. 15-node penta. R1 mesh. R2 mesh. R1 finite element. R2 finite element. Bézier curve. Bézier penta.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Courbe de Bézier de degré 2</b>	<b>3</b>
2.1	La courbe . . . . .	3
2.2	La tangente . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Carreaux de Bézier</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Élément fini pentaédrique de degré 1, le <math>R1</math> à 6 nœuds</b>	<b>6</b>
4.1	Condition de validité . . . . .	6
4.2	En pratique . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Élément fini pentaédrique de degré 2, le <math>R2</math> à 18 nœuds</b>	<b>12</b>
5.1	Forme éléments finis classique . . . . .	12
5.2	Forme de Bézier . . . . .	13
5.3	En pratique . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Élément fini pentaédrique de degré 2, le <math>R2</math> à 15 nœuds</b>	<b>21</b>
6.1	Forme éléments finis classique . . . . .	21
6.2	Forme de Bézier . . . . .	22
6.2.1	Les dérivées . . . . .	23
6.2.2	Quelques jacobiens particuliers . . . . .	25
6.2.3	Expression générale du jacobien . . . . .	36
6.3	Construction effective de cet élément . . . . .	37
6.3.1	Interpolation transfinie dégénérée . . . . .	37
6.3.2	Interpolation transfinie directe . . . . .	39
6.3.3	Par élimination . . . . .	40
6.3.4	Une solution équivalente par identification directe . . . . .	41
6.4	En pratique . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Vers une définition de la qualité d'un élément</b>	<b>42</b>
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>42</b>

## 1 Introduction

On poursuit ici l'étude des éléments finis<sup>1</sup> de Lagrange usuels de degré 1 et 2 en considérant le cas d'un pentaèdre (ou prisme). La question que nous regardons concerne la validité de cet élément au sens de la positivité de son jacobien (hors de toute considération sur la qualité).

La validité étant établie, on discute de ce que pourrait être une définition de la notion de qualité géométrique de ces éléments.

## 2 Courbe de Bézier de degré 2

Les points de contrôle introduits dans la suite sont dans  $\mathbb{R}^3$ .

### 2.1 La courbe

On se donne trois points de contrôle,  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  et un paramètre  $t$  variant dans  $[0, 1]$ . On définit la courbe  $\Gamma$  par la fonction  $\gamma$  suivante :

$$\gamma(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0, 1]. \quad (1)$$

Cette courbe passe par  $P_0$  et  $P_2$ . Le point  $\gamma(\frac{1}{2})$  est appelé *milieu* de la courbe.

<sup>1</sup>Ce travail rentre dans le cadre du IILab INRIA-Distène.

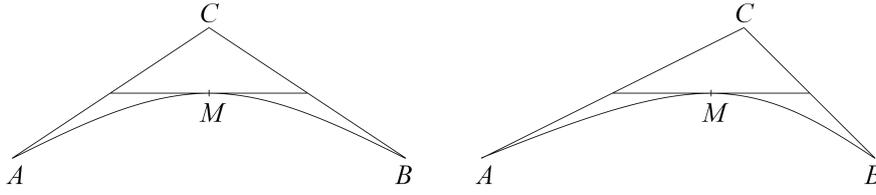


FIG. 1 – La courbe  $AB$  avec ses trois points de contrôle  $A$ ,  $B$  et  $C$  et son milieu  $M$ . Deux positions de  $C$ , pour  $A$  et  $B$  fixés, donnent deux courbes différentes.

En vue de la construction des éléments finis P2, on va utiliser ces courbes pour définir les arêtes des éléments. Soit maintenant  $AB$  un segment et  $C$  un point quelconque pour l'instant. On définit une arête comme le lieu des points  $P(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  correspondant à la courbe  $\Gamma$  et la fonction  $\gamma$  ci-dessus dans laquelle on fixe  $P_0 = A$ ,  $P_1 = C$  et  $P_2 = B$ . Donc

$$P(t) = (1-t)^2A + 2t(1-t)C + t^2B, \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

le milieu, correspondant par définition à  $t = \frac{1}{2}$ , vaut

$$M = P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{A + B + 2C}{4}, \quad (3)$$

le point  $M$  est donc le milieu des milieux respectifs de  $AC$  et de  $BC$ . Inversement, on a

$$C = \frac{4M - A - B}{2}. \quad (4)$$

Dès lors que  $C$  n'est pas aligné avec  $A$  et  $B$ , l'arête est courbe, en cas contraire l'arête reste droite et on impose que  $C = M$  ce qui revient à dire que le nœud milieu est bien le milieu de l'arête<sup>2</sup>.

Notons pour finir que la Relation (2), exprimée cette fois en fonction des nœuds  $A$ ,  $B$  et  $M$ , tels que définis ci-dessus, s'écrit

$$P(t) = (1-t)(1-2t)A + 4t(1-t)M + t(2t-1)B, \quad t \in [0, 1], \quad (5)$$

où on retrouve les polynômes de Lagrange de degré 2 des éléments finis (ici en une dimension). Par ailleurs, en fonction maintenant des points de contrôle, cette même expression s'écrit

$$P(u, v) = u^2A + 2uvC + v^2B, \quad (6)$$

avec  $u + v = 1$ ,  $u \in [0, 1]$  qui est la forme de Bernstein (ou de Bézier) bien connue. Pour simplifier l'écriture, on a gardé la même notation pour  $P$ , *i.e.*,  $P(t)$  ou  $P(u, v)$ . De façon formelle,  $P(u, v)$  s'écrit aussi comme

$$P(u, v) = \sum_{i+j=2} B_{i,j}^2(u, v) P_{i,j}, \quad (7)$$

avec  $P_{20} = A$ ,  $P_{11} = C$  et  $P_{02} = B$ .

## 2.2 La tangente

La tangente de  $\Gamma$  est définie par

$$\gamma'(t) = -2(1-t)P_0 + (2-4t)P_1 + 2tP_2, \quad t \in [0, 1]. \quad (8)$$

<sup>2</sup>Ceci n'est pas strictement nécessaire, on pourrait, a priori, définir comme nœud "milieu" interne de l'arête tout point  $P(\alpha) = (1-\alpha)A + \alpha B$  avec néanmoins la limitation  $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{4}$ . Cette limitation vient du lien entre  $M$  et  $C$  qui n'a de sens que si  $M$  et  $C$  sont compris entre  $A$  et  $B$ . Sortir de cette intervalle conduirait à une boucle car  $C$  sort de  $AB$ . Néanmoins, mettre le nœud exactement au milieu rend le traitement élément fini en P2 (droit) cohérent avec l'élément P1 sous-jacent et identique au cas courbe, voir plus bas.

En  $t = 0$ ,  $\gamma'(t) = 2\overrightarrow{P_0P_1}$ , en  $t = 1$ ,  $\gamma'(t) = 2\overrightarrow{P_1P_2}$  et en  $t = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma'(t) = \overrightarrow{P_0P_2}$ . Autrement dit, la courbe part de  $P_0$  tangente à  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , est parallèle au segment  $P_0P_2$  au point  $\gamma(\frac{1}{2})$  et arrive en  $P_2$  tangente à  $\overrightarrow{P_1P_2}$ . Un résultat connu est que cette tangente est elle-même une forme de Bézier. En effet, on peut écrire  $\gamma'(t)$  comme

$$\gamma'(t) = 2 \left[ (1-t)\overrightarrow{P_0P_1} + t\overrightarrow{P_1P_2} \right], \quad (9)$$

ainsi on trouve la forme de Bézier de degré un dont les "points" de contrôle sont les vecteurs  $\overrightarrow{P_0P_1}$  et  $\overrightarrow{P_1P_2}$ . On peut l'écrire également comme

$$\gamma'(u(t), v(t)) = -2 \left[ u\overrightarrow{P_0P_1} + v\overrightarrow{P_1P_2} \right],$$

avec  $u = 1 - t$  et  $u + v = 1$ . Notons ainsi que  $\gamma'(u, v) = -\gamma'(t)$ .

Ceci permet de trouver simplement la tangente en tout point  $\gamma(t)$  de la courbe  $\Gamma$  par une construction géométrique évidente. Appliqué à l'arête  $AB$  de points de contrôle  $A, B$  et  $C$ , on voit que la tangente en  $A$  est portée par le vecteur  $\overrightarrow{AC}$ , la tangente en  $B$  est portée par le vecteur  $\overrightarrow{CB}$  et que la tangente en  $M$ , le milieu, est parallèle au vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

### 3 Carreaux de Bézier

**Les polynômes de Bernstein.** Pour construire la forme de Bézier des éléments pentaédriques, nous devons utiliser les polynômes de Bernstein dans leurs deux possibilités, à savoir sur un intervalle et, également, sur un triangle.

Le polynôme de Bernstein de degré  $n$  défini sur un intervalle s'exprime comme :

$$B_i^n(u) = C_i^n u^i (1-u)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i},$$

où  $u \in [0, 1]$ .

Le polynôme de Bernstein de degré  $n$  défini sur un triangle en coordonnées barycentriques s'exprime comme :

$$B_{i,j,k}^n(u, v, w) = C_{ijk}^n u^i v^j w^k = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k,$$

où  $u \in [0, 1]$ ,  $v \in [0, 1]$ ,  $w \in [0, 1]$  avec  $u + v + w = 1$ .

**Forme de Bézier du pentaèdre de degré 1x1.** On se donne six points de contrôle, notés  $P_{ijkl}$ , et on construit l'élément de degré 1x1 suivant :

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k=1} \sum_{l=0,1} B_{i,j,k}^1(u, v, w) B_l^1(t) P_{ijkl}, \quad (10)$$

avec  $u, v, w$  et  $t$  dans  $[0, 1]$  et  $u + v + w = 1$ . Cet élément n'est autre que le pentaèdre de Lagrange R1 à 6 nœuds discuté ci-dessous. Les  $P_{ijkl}$  sont ses sommets qui forment le réseau suivant :

$$P_{0010}$$

$$P_{1000} \quad P_{0100}$$

pour la base "inférieure" et

$$P_{0011}$$

$$P_{1001} \quad P_{0101}$$

pour la base "supérieure". De manière classique, la variation des indices  $ijk$ , liée au système de coordonnées barycentriques, est différente de celle de l'indice  $l$  qui est classique.

**Forme de Bézier du pentaèdre de degré 2x2.** On se donne 18 points de contrôle, notés  $P_{ijkl}$ , et on construit l'élément de degré 2x2 suivant :

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k=2} \sum_{l=0,2} B_{i,j,k}^2(u, v, w) B_l^2(t) P_{ijkl}, \quad (11)$$

avec  $u, v, w$  et  $t$  dans  $[0, 1]$  et  $u + v + w = 1$ . Cet élément n'est autre que le pentaèdre de Lagrange R2 complet à 18 nœuds discuté ci-dessous. Les  $P_{ijkl}$  comprennent les sommets et les points de contrôle des arêtes. Ils forment le réseau suivant :

$$\begin{array}{c} P_{002l} \\ \\ P_{101l} \quad P_{011l} \\ \\ P_{200l} \quad P_{110l} \quad P_{020l} \end{array}$$

pour la section, en  $t$ , correspondant à la valeur de  $l$  variant de 0 à 2. De manière classique, rappelons que la variation des indices  $ijk$ , liée au système de coordonnées barycentriques, est différente de celle de l'indice  $l$  qui est classique.

Regardons la restriction de  $\theta(u, v, w, t)$  à  $v = t = 0$ . Il vient :

$$\theta(u, 0, w, 0) = \sum_{i+j+k=2} B_{i,j,k}^2(u, 0, w) B_l^2(t) P_{ijk0}$$

$$\theta(u, 0, w, 0) = w^2 P_{0010} + 2uw P_{1010} + u^2 P_{2000} = (1-u)^2 P_{0010} + 2u(1-u) P_{1010} + u^2 P_{2000},$$

donc une courbe de Bézier de degré 2, ici pour l'arête  $A_1 A_3$ . En effet, par rapport à la numérotation éléments finis, on a  $P_{2000} = A_1$ ,  $P_{0020} = A_3$  et  $P_{1010} = C_9$  où  $C_9$  est le contrôle associé à  $A_9$  le nœud de l'arête  $A_1 A_3$ , voir la figure plus bas.

Regardons une arête "verticale", par exemple  $u = 1, v = 0, w = 0$ , il vient :

$$\theta(1, 0, 0, t) = \sum_{i+j+k=2} \sum_{l=0,2} B_{i,j,k}^2(1, 0, 0) B_l^2(t) P_{ijkl}$$

$$\theta(1, 0, 0, t) = \sum_{l=0,2} B_{i,j,k}^2(1, 0, 0) B_l^2(t) P_{200l} = (1-t)^2 P_{2000} + 2t(1-t) P_{2001} + t^2 P_{2002},$$

où l'on retrouve la courbe de Bézier de degré 2 pour l'arête  $A_1 A_4$  dans la numérotation éléments finis. Le point  $P_{2001}$  est le point de contrôle de cette arête,  $C_{13}$ , lié au nœud  $A_{13}$ , voir la figure plus bas.

## 4 Élément fini pentaédrique de degré 1, le R1 à 6 nœuds

Les notations sont les notations classiques des éléments finis. On note  $\hat{K}$  l'élément de référence,  $K$  l'élément courant,  $F_K$  la transformation permettant de passer de  $\hat{K}$  à  $K$ ,  $p_i$  le polynôme de base numéro  $i$  et  $A_i$  le nœud  $i$  de  $K$ .  $\hat{x}, \hat{y}$  et  $\hat{z}$  désignent les coordonnées d'un point dans  $\hat{K}$ ,  $x, y$  et  $z$  les coordonnées d'un point courant. Les nœuds de  $\hat{K}$  ou  $(\hat{x} \in [0, 1], \hat{y} \in [0, 1], \hat{x} + \hat{y} \leq 1) \times [0, 1]$ , à savoir les 6 sommets, sont les suivants :

- $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$
- $(0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$

Un élément est décrit par la liste de ses nœuds (ou sommets, dans ce cas précis) .

### 4.1 Condition de validité

Les six polynômes de base, du point de vue élément fini et du point de vue de la transformation géométrique, sont (en variables  $\hat{x}, \hat{y}$  et  $\hat{z}$ ) :

- $p_1 = (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - \hat{z}),$
- $p_2 = \hat{x}(1 - \hat{z}),$
- $p_3 = \hat{y}(1 - \hat{z}),$

- $p_4 = (1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{z}$ ,
- $p_5 = \hat{x}\hat{z}$ ,
- $p_6 = \hat{y}\hat{z}$ .

La transformation  $F_K$  permettant de passer de  $\hat{K}$  à  $K$  est  $F_K(\hat{M}) = \sum_i p_i(\hat{M})A_i$ , on a ainsi  $M = F_K(\hat{M})$ . On vérifie immédiatement que cette expression n'est autre que la Relation (10).

La matrice jacobienne, dont le déterminant nous intéresse, est définie à partir des dérivées des polynômes de base. Pour mémoire, au point<sup>3</sup>  $x, y, z$ , la matrice des dérivées des polynômes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -(1-z) & (1-z) & 0 & -z & z & 0 \\ -(1-z) & 0 & (1-z) & -z & 0 & z \\ -(1-x-y) & -x & -y & (1-x-y) & x & y \end{bmatrix}.$$

La matrice jacobienne s'écrit

$$\begin{bmatrix} \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})x_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})x_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})x_i \\ \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})y_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})y_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})y_i \\ \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})z_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})z_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})z_i \end{bmatrix},$$

où  $x_i, y_i$  et  $z_i$  sont les coordonnées du nœud courant  $A_i$  et  $\hat{A}$  est le nœud d'évaluation. En ce nœud d'évaluation, le jacobien qui est le déterminant de cette matrice, s'écrit comme le produit mixte  $\langle \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \rangle$  ou encore le déterminant  $|\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}|$ . Il représente donc, au facteur 6 près, le volume du tétraèdre formé par les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  rapportés en un point, ici avec,  $\vec{u} = \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})\vec{A}_i$ ,  $\vec{v} = \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})\vec{A}_i$  et  $\vec{w} = \sum \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})\vec{A}_i$  avec  $\hat{A}$  le nœud d'évaluation et  $A_i$  les nœuds de l'élément considéré.

**Le jacobien en un sommet.** Regardons, à titre d'exercice, ce jacobien vu par le nœud  $\hat{A}_1$  donc pour le triplet  $\hat{x} = 0, \hat{y} = 0, \hat{z} = 0$ , la matrice ci-dessus vaut :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{u} = -A_1 + A_2 \quad , \quad \vec{v} = -A_1 + A_3 \quad \text{et} \quad \vec{w} = -A_1 + A_4,$$

par suite

$$\mathcal{J}(\hat{A}_1) = \langle \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \rangle, \tag{12}$$

qui mesure (six fois) le volume du tétraèdre  $A_1A_2A_3A_4$ , coin en  $A_1$  du pentaèdre. Des formules identiques valent pour les 5 autres jacobiens associés aux autres sommets.

**Le jacobien sur une arête.** Regardons comment varie le jacobien quand  $\hat{x}$  varie dans  $[0, 1]$  pour  $\hat{y} = \hat{z} = 0$ . On a, pour les dérivées, la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(1-x) & -x & 0 & (1-x) & x & 0 \end{bmatrix}.$$

donc

$$\vec{u} = -A_1 + A_2, \quad \vec{v} = -A_1 + A_3 \quad \text{et} \quad \vec{w} = -(1-x)A_1 - xA_2 + (1-x)A_4 + xA_5,$$

<sup>3</sup>en omettant le symbole  $\hat{\phantom{x}}$

soit

$$\vec{u} = \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v} = \overrightarrow{A_1A_3} \text{ et } \vec{w} = (1-x)\overrightarrow{A_1A_4} + x\overrightarrow{A_2A_5},$$

par suite

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x) &= |\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad (1-x)\overrightarrow{A_1A_4} + x\overrightarrow{A_2A_5}|, \\ \mathcal{J}(x) &= (1-x)|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| + x|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_2A_5}|, \\ \mathcal{J}(x) &= (1-x)|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| + x|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_2A_3} \quad \overrightarrow{A_2A_5}|, \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{J}(x) = (1-x)\mathcal{J}(\hat{A}_1) + x\mathcal{J}(\hat{A}_2), \quad (13)$$

qui est positif dès que  $\mathcal{J}(\hat{A}_1)$  et  $\mathcal{J}(\hat{A}_2)$  sont positifs. Le jacobien varie linéairement sur les arêtes des plans  $\hat{z} = 0$  et  $\hat{z} = 1$ .

Regardons maintenant l'arête liée à  $\hat{z}$  variant dans  $[0, 1]$  pour  $\hat{x} = \hat{y} = 0$ . On a, pour les dérivées, la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} -(1-z) & (1-z) & 0 & -z & z & 0 \\ -(1-z) & 0 & (1-z) & -z & 0 & z \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

soit

$$\vec{u} = (1-z)\overrightarrow{A_1A_2} + z\overrightarrow{A_4A_5}, \vec{v} = (1-z)\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_4A_6} \text{ et } \vec{w} = \overrightarrow{A_1A_4},$$

par suite

$$\mathcal{J}(z) = |(1-z)\overrightarrow{A_1A_2} + z\overrightarrow{A_4A_5} \quad (1-z)\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}|.$$

En fonction de  $z$ , il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(z) &= (1-z)^2|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| \\ &+ 2z(1-z)\frac{|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| + |\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}|}{2} \\ &+ z^2|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}|, \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{J}(z) = (1-z)^2\mathcal{J}(\hat{A}_1) + 2z(1-z)\frac{|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| + |\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}|}{2} + z^2\mathcal{J}(\hat{A}_4),$$

où l'on retrouve une forme de Bézier en  $z$ .

Si les faces quadrilatérales sont planes, on peut écrire

$$\overrightarrow{A_4A_5} = a\overrightarrow{A_1A_2} + b\overrightarrow{A_1A_4} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A_4A_6} = c\overrightarrow{A_1A_3} + d\overrightarrow{A_1A_4},$$

alors

$$\mathcal{J}(z) = |(1-z)\overrightarrow{A_1A_2} + z\overrightarrow{A_4A_5} \quad (1-z)\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}|.$$

se simplifie en

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(z) &= |(1-z+az)\overrightarrow{A_1A_2} \quad (1-z+cz)\overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| \\ &= (1-z+az)(1-z+cz)|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| = (1-z+az)(1-z+cz)\mathcal{J}(\hat{A}_1). \end{aligned}$$

Pour  $z = 1$ , on trouve la relation  $\mathcal{J}(\hat{A}_4) = ac\mathcal{J}(\hat{A}_1)$ . Comme les faces quadrilatérales sont convexes (sinon au moins un des jacobiens coins serait négatif), on a  $a > 0$  et  $c > 0$ .

Le signe de  $\mathcal{J}(z)$  est celui de  $(1-z+az)(1-z+cz)$  que l'on écrit sous la forme  $(1-z)^2 + z(1-z)(a+c) + acz^2$ , comme  $z \in [0, 1]$ , que  $ac > 0$  et que  $a+c > 0$ , le jacobien est positif dès que le jacobien coin l'est, ceci est synthétisé dans le résultat suivant :

**Théorème** Pour un élément avec des faces quadrilatérales planes, le jacobien est valide sur les arêtes si et seulement si les jacobiens associés aux sommets sont positifs.  $\square$

**Le jacobien sur une face.** Regardons maintenant le jacobien sur une face. Pour la face  $z = 0$ , face triangulaire, on trouve

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(1-x-y) & -x & -y & (1-x-y) & x & y \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\vec{u} = \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v} = \overrightarrow{A_1A_3} \text{ et } \vec{w} = (1-x-y)\overrightarrow{A_1A_4} + x\overrightarrow{A_2A_5} + y\overrightarrow{A_3A_6}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x, y, 0) &= (1-x-y)|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_1A_4}| + x|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_2A_5}| + y|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_3A_6}|, \\ &= (1-x-y)|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_1A_4}| + x|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_2A_3} \ \overrightarrow{A_2A_5}| + y|\overrightarrow{A_3A_2} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_3A_6}|, \end{aligned}$$

qui n'est autre que

$$\mathcal{J}(x, y, 0) = (1-x-y)\mathcal{J}(\hat{A}_1) + x\mathcal{J}(\hat{A}_2) + y\mathcal{J}(\hat{A}_3),$$

par suite, le jacobien est positif si les trois jacobiens coins le sont.

Pour la face  $y = 0$ , face quadrilatérale, on a

$$\begin{bmatrix} -(1-z) & (1-z) & 0 & -z & z & 0 \\ -(1-z) & 0 & (1-z) & -z & 0 & z \\ -(1-x) & -x & 0 & (1-x) & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$\vec{u} = (1-z)\overrightarrow{A_1A_2} + z\overrightarrow{A_4A_5}, \vec{v} = (1-z)\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_4A_6} \text{ et } \vec{w} = (1-x)\overrightarrow{A_1A_4} + x\overrightarrow{A_2A_5}.$$

Et

$$\mathcal{J}(x, 0, z) = |(1-z)\overrightarrow{A_1A_2} + z\overrightarrow{A_4A_5} \ (1-z)\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_4A_6} \ (1-x)\overrightarrow{A_1A_4} + x\overrightarrow{A_2A_5}|.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x, 0, z) &= (1-z)^2(1-x)|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_1A_4}| + (1-z)^2x|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_2A_5}| \\ &\quad + z(1-z)(1-x)|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_4A_6} \ \overrightarrow{A_1A_4}| + z(1-z)x|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_4A_6} \ \overrightarrow{A_2A_5}| \\ &\quad + z(1-z)(1-x)|\overrightarrow{A_4A_5} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_1A_4}| + z(1-z)x|\overrightarrow{A_4A_5} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_2A_5}| \\ &\quad + z^2(1-x)|\overrightarrow{A_4A_5} \ \overrightarrow{A_4A_6} \ \overrightarrow{A_1A_4}| + z^2x|\overrightarrow{A_4A_5} \ \overrightarrow{A_4A_6} \ \overrightarrow{A_2A_5}|, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x, 0, z) &= (1-z)^2(1-x)\mathcal{J}(\hat{A}_1) + (1-z)^2x\mathcal{J}(\hat{A}_2) \\ &\quad + 2z(1-z)\frac{(1-x)(|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_4A_6} \ \overrightarrow{A_1A_4}| + |\overrightarrow{A_4A_5} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_1A_4}|) + x(|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_4A_6} \ \overrightarrow{A_2A_5}| + |\overrightarrow{A_4A_5} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_2A_5}|)}{2} \\ &\quad + z^2(1-x)\mathcal{J}(\hat{A}_4) + z^2x\mathcal{J}(\hat{A}_5), \end{aligned}$$

où l'on voit, de fait, une forme de Bézier faisant intervenir les quatre jacobiens coins de la face et deux valeurs de contrôle autres (correspondant à  $z(1-z)$ , soit quatre valeurs au total). On sait ainsi exhiber une condition suffisante de positivité.

Si les faces quadrilatérales sont planes, les termes en  $z(1-z)$  se simplifient car, pour le premier, on peut écrire, avec des coefficients adéquats

$$\overrightarrow{A_4A_6} = a\overrightarrow{A_1A_3} + b\overrightarrow{A_1A_4},$$

et donc

$$|\overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_4A_6} \ \overrightarrow{A_1A_4}| = |\overrightarrow{A_1A_2} \ a\overrightarrow{A_1A_3} + b\overrightarrow{A_1A_4} \ \overrightarrow{A_1A_4}|$$

$$= |\overrightarrow{A_1A_2} \quad a\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4}| = a|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4}| = a\mathcal{J}(\hat{A}_1),$$

avec  $a > 0$ , par convexité de la face.

Pour le second terme, on écrit, avec des coefficients adéquats

$$\overrightarrow{A_1A_3} = c\overrightarrow{A_1A_4} + d\overrightarrow{A_4A_6},$$

et donc

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| &= |\overrightarrow{A_4A_5} \quad c\overrightarrow{A_1A_4} + d\overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| \\ &= |\overrightarrow{A_4A_5} \quad d\overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| = d|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| = d\mathcal{J}(\hat{A}_4), \end{aligned}$$

avec  $d > 0$ , par convexité de la face.

Pour le troisième terme, on écrit

$$\overrightarrow{A_1A_2} = e\overrightarrow{A_4A_5} + f\overrightarrow{A_2A_5},$$

et donc

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| &= |e\overrightarrow{A_4A_5} + f\overrightarrow{A_2A_5} \quad \overrightarrow{A_4A_6} + \overrightarrow{A_5A_6} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| \\ &= |e\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_4A_6} + \overrightarrow{A_5A_6} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| = |e\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_5A_6} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| = e|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_5A_6} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| = e\mathcal{J}(\hat{A}_5), \end{aligned}$$

avec  $e > 0$ , par convexité de la face.

Enfin, pour le dernier terme, on pose

$$\overrightarrow{A_4A_5} = g\overrightarrow{A_1A_2} + h\overrightarrow{A_2A_5},$$

et donc

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| &= |g\overrightarrow{A_1A_2} + h\overrightarrow{A_2A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| \\ &= |g\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_2A_3} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| = g|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_2A_3} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| = g\mathcal{J}(\hat{A}_2), \end{aligned}$$

avec  $g > 0$ , par convexité de la face.

Le résultat est alors le suivant :

**Théorème** Pour un élément avec des faces quadrilatérales planes, le jacobien est valide sur les faces si et seulement si les jacobiens associés aux sommets sont positifs.  $\square$

**Le jacobien dans l'élément.** Dans ce cas, on a

$$\vec{u} = (1-z)\overrightarrow{A_1A_2} + z\overrightarrow{A_4A_5} \text{ et } \vec{v} = (1-z)\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_4A_6}$$

comme ci-dessus, tandis que

$$\vec{w} = (1-x-y)\overrightarrow{A_1A_4} + x\overrightarrow{A_2A_5} + y\overrightarrow{A_3A_6}.$$

On peut écrire, en complétant mécaniquement l'expression de  $\mathcal{J}(x, 0, z)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x, y, z) &= \\ & (1-z)^2(1-x-y)|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| + (1-z)^2x|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| + (1-z)^2y|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| \\ & + z(1-z)(1-x-y)|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| + z(1-z)x|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| + z(1-z)y|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| \\ & + z(1-z)(1-x-y)|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| + z(1-z)x|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| + z(1-z)y|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| \\ & + z^2(1-x-y)|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| + z^2x|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| + z^2y|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_3A_6}|, \end{aligned}$$

soit, encore

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x, y, z) &= (1-z)^2(1-x-y)\mathcal{J}(\hat{A}_1) + (1-z)^2x\mathcal{J}(\hat{A}_2) + (1-z)^2y\mathcal{J}(\hat{A}_3) \\ & + z(1-z)(1-x-y)|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| + z(1-z)x|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| + z(1-z)y|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| \end{aligned}$$

$$+ z(1-z)(1-x-y)|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| + z(1-z)x|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| + z(1-z)y|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| \\ + z^2(1-x-y)\mathcal{J}(\hat{A}_4) + z^2x\mathcal{J}(\hat{A}_5) + z^2y\mathcal{J}(\hat{A}_6),$$

ou, pour finir

$$\mathcal{J}(x, y, z) = (1-z)^2(1-x-y)\mathcal{J}(\hat{A}_1) + (1-z)^2x\mathcal{J}(\hat{A}_2) + (1-z)^2y\mathcal{J}(\hat{A}_3) \\ + 2z(1-z)(1-x-y)\frac{\left\{|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_1A_4}| + |\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_1A_4}|\right\}}{2} \\ + 2z(1-z)x\frac{\left\{|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_2A_5}| + |\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_2A_5}|\right\}}{2} \\ + 2z(1-z)y\frac{\left\{|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| + |\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_3A_6}|\right\}}{2}, \\ + z^2(1-x-y)\mathcal{J}(\hat{A}_4) + z^2x\mathcal{J}(\hat{A}_5) + z^2y\mathcal{J}(\hat{A}_6),$$

que, introduisant les coefficients  $N_{ijkl}$ , l'on écrit comme

$$\mathcal{J}(x, y, z) = \sum_{i+j+k=1} \sum_{l=0,2} B_{i,j,k}^1(u, v, w) B_l^2(t) N_{ijkl},$$

avec  $u = (1-x-y)$ ,  $v = x$ ,  $w = y$  et  $t = z$ , c'est-à-dire, de fait, une forme de Bézier faisant intervenir les six jacobiens coins de l'élément et trois valeurs de contrôle autres. On sait ainsi exhiber une condition suffisante de positivité.

Si les faces quadrilatérales sont planes, les termes en  $z(1-z)$  se simplifient. En regardant les faces, on a vu 4 de tels termes, il reste à vérifier que les deux termes restant conduisent à la même conclusion. On regarde donc seulement  $|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_3A_6}|$  et  $|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_3A_6}|$ . Pour le premier on écrit

$$\overrightarrow{A_4A_6} = a\overrightarrow{A_3A_6} + b\overrightarrow{A_1A_3},$$

et donc

$$|\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| = |\overrightarrow{A_1A_2} \quad \overrightarrow{A_3A_6} + \overrightarrow{A_1A_3} \quad a\overrightarrow{A_3A_6} + b\overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| \\ = |\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_2} \quad b\overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| = |\overrightarrow{A_3A_2} \quad b\overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| = b|\overrightarrow{A_3A_2} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| = b\mathcal{J}(\hat{A}_3),$$

avec  $b > 0$ , par convexité de la face.

Pour le second on écrit

$$\overrightarrow{A_1A_3} = c\overrightarrow{A_4A_6} + d\overrightarrow{A_3A_6},$$

et donc

$$|\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_1A_3} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| = |\overrightarrow{A_4A_5} \quad \overrightarrow{A_4A_6} + \overrightarrow{A_6A_5} \quad c\overrightarrow{A_4A_6} + d\overrightarrow{A_3A_6} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| \\ = |\overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_6A_5} \quad c\overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| = |\overrightarrow{A_6A_5} \quad c\overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| = c|\overrightarrow{A_6A_5} \quad \overrightarrow{A_4A_6} \quad \overrightarrow{A_3A_6}| = c\mathcal{J}(\hat{A}_6),$$

avec  $c > 0$ , par convexité de la face.

Ceci permet de conclure :

**Théorème** Pour un élément avec des faces quadrilatérales planes, le jacobien est valide si et seulement si les jacobiens associés aux sommets sont positifs.  $\square$

Ce qui revient à ce que les faces (quadrilatérales) soient convexes et, donc, que le polyèdre lui-même est convexe.

Ce résultat peut sembler trivial, il n'était pas si clair au regard des formules.

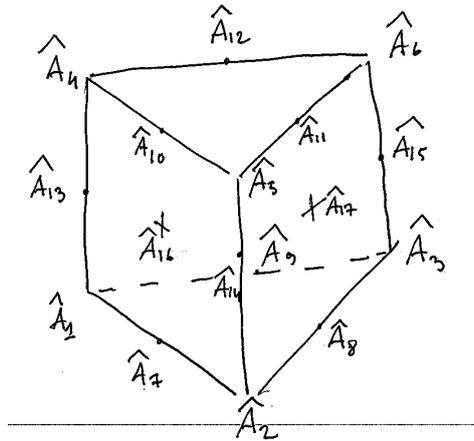


FIG. 2 – Numérotation des nœuds de l'élément de référence à 18 nœuds ( $\hat{A}_{18}$ , face de derrière, n'est pas montré).

## 4.2 En pratique

Si les faces sont planes, il suffit de vérifier les 6 jacobiens coins donc le volume des six tétraèdres coins. Si les faces ne sont pas planes (ou si on n'a pas cette information), il faut vérifier, en premier, ces six jacobiens puis les trois coefficients de contrôle (6 termes) apparaissant dans la formule de  $\mathcal{J}(x, y, z)$  ci-dessus.

## 5 Élément fini pentaédrique de degré 2, le R2 à 18 nœuds

### 5.1 Forme éléments finis classique

**Numérotation des nœuds.** La convention<sup>4</sup> de numérotation des nœuds est la suivante, les 6 sommets en premier (1 à 6), les 3 nœuds "milieux" des arêtes de la face du bas (7 à 9), les 3 nœuds "milieux" des arêtes de la face du haut (10 à 12), les 3 nœuds "milieux" des arêtes latérales (13 à 15), les 3 nœuds "centraux" des faces latérales (16 à 18), soit le schéma suivant, coupes de bas (à gauche) en haut (à droite) :

3		15		6				
9	8	18	17	12	11			
1	7	2	13	16	14	4	10	5

**Les 18 polynômes de base de l'élément.** L'élément de référence est défini comme le triangle  $[0, 1]$  en  $(\hat{x}, \hat{y})$  via le segment  $[0, 1]$  en  $\hat{z}$ .

- $p_1 = (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y})(1 - \hat{z}(1 - 2\hat{z}))$ ,
- $p_2 = \hat{x}(2\hat{x} - 1)(1 - \hat{z}(1 - 2\hat{z}))$ ,
- $p_3 = \hat{y}(2\hat{y} - 1)(1 - \hat{z}(1 - 2\hat{z}))$ ,
- $p_4 = (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y})\hat{z}(2\hat{z} - 1)$ ,
- $p_5 = \hat{x}(2\hat{x} - 1)\hat{z}(2\hat{z} - 1)$ ,
- $p_6 = \hat{y}(2\hat{y} - 1)\hat{z}(2\hat{z} - 1)$ ,
- $p_7 = 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}(1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z})$ ,
- $p_8 = 4\hat{x}\hat{y}(1 - \hat{z}(1 - 2\hat{z}))$ ,

<sup>4</sup>Il ne s'agit que d'une convention.

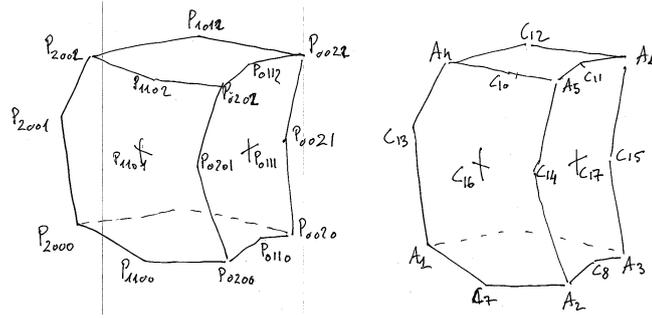


FIG. 3 – Numérotation des points de contrôle d'un élément à 18 nœuds (certains points ne sont pas montrés) et correspondance avec la numérotation éléments finis.

$$\begin{aligned}
- p_9 &= 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}(1 - \hat{z}(1 - 2\hat{z})), \\
- p_{10} &= 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}\hat{z}(2\hat{z} - 1), \\
- p_{11} &= 4\hat{x}\hat{y}\hat{z}(2\hat{z} - 1), \\
- p_{12} &= 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}\hat{z}(2\hat{z} - 1), \\
- p_{13} &= 4(1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y})\hat{z}(1 - \hat{z}), \\
- p_{14} &= 4\hat{x}(2\hat{x} - 1)\hat{z}(1 - \hat{z}), \\
- p_{15} &= 4\hat{y}(2\hat{y} - 1)\hat{z}(1 - \hat{z}), \\
- p_{16} &= 16(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}\hat{z}(1 - \hat{z}), \\
- p_{17} &= 16\hat{x}\hat{y}\hat{z}(1 - \hat{z}), \\
- p_{18} &= 16(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}\hat{z}(1 - \hat{z}).
\end{aligned}$$

Pour établir cette liste, on est parti du triangle P2 que l'on a "tensorisé" dans la troisième direction au degré 2.

La transformation  $F_K$  permettant de passer de  $\hat{K}$  à  $K$ , l'élément courant de nœuds  $A_i$ , est  $F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,18} p_i(\hat{M})A_i$  avec  $\hat{M}$  le point de coordonnées  $\hat{x}, \hat{y}$  et  $\hat{z}$  dans  $\hat{K}$ . On vérifie immédiatement que cette expression n'est autre que la Relation (11),  $F_K$  étant exprimée en fonction des nœuds,  $\theta$  étant exprimée en fonction des points de contrôle.

**Les arêtes sont des arcs de parabole.** Il est facile de voir que dans ces cas  $F_K$  se réduit à une courbe de Bézier de degré 2. Ainsi, pour  $\hat{y} = 0$  et  $\hat{z} = 0$ , seuls contribuent dans  $F_K$ ,  $p_1, p_2$  et  $p_7$  et on a  $p_1 = (1 - \hat{x})(1 - 2\hat{x})$ ,  $p_2 = \hat{x}(2\hat{x} - 1)$  et  $p_7 = 4\hat{x}(1 - \hat{x})$ , par suite

$$F_K = (1 - \hat{x})(1 - 2\hat{x})A_1 + 4\hat{x}(1 - \hat{x})A_7 + \hat{x}(2\hat{x} - 1)A_2,$$

qui est le résultat attendu. Pour le cas  $\hat{x} = \hat{y} = 0$ , on trouve les contributions de  $p_1 = (1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z})$ ,  $p_4 = \hat{z}(2\hat{z} - 1)$  et  $p_{13} = 4\hat{z}(1 - \hat{z})$  et  $F_k$  se réduit à

$$F_k = (1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z})A_1 + 4\hat{z}(1 - \hat{z})A_{13} + \hat{z}(2\hat{z} - 1)A_4,$$

qui est le résultat attendu.

## 5.2 Forme de Bézier

On a vu que

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k=2} \sum_{l=0,2} B_{i,j,k}^2(u, v, w) B_l^2(t) P_{ijkl}$$

est la forme de Bézier du pentaèdre à 18 nœuds avec  $t \in [0, 1]$  et  $u + v + w = 1$ .

**Dérivées et jacobien.** On cherche à évaluer  $\mathcal{J}$ . On cherche donc, par définition

$$\mathcal{J} = \left| \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} \quad \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} \quad \frac{\partial F_K}{\partial \hat{z}} \right|,$$

pour ce faire, on va utiliser la fonction  $\theta$  et comme  $u = 1 - \hat{x} - \hat{y}$ ,  $v = \hat{x}$ ,  $w = \hat{y}$  et  $t = \hat{z}$ , on a simplement :

$$\frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial \theta}{\partial w} \text{ et } \frac{\partial F_K}{\partial \hat{z}} = \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

Trouver la dérivée en  $t$  est facile, on ouvre  $\theta(u, v, w, t)$  en  $t$ , il vient :

$$\frac{\partial \theta(u, v, w, t)}{\partial t} = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w) \left\{ B_0^{2'}(t)P_{ijk0} + B_1^{2'}(t)P_{ijk1} + B_2^{2'}(t)P_{ijk2} \right\}.$$

En calculant les dérivées de  $B_l^2(t)$  puis en regroupant les termes et en posant

$$\Delta_{ijkl}^{001} = \overrightarrow{P_{ijk,l}P_{ijk,l+1}},$$

il vient :

$$\frac{\partial F_K}{\partial z} = \frac{\partial \theta(u, v, w, t)}{\partial t} = 2 \sum_{i+j+k=2} \sum_{l=0,1} B_l^1(t)B_{ijk}^2(u, v, w) \Delta_{ijkl}^{001}.$$

Pour calculer les autres dérivées, on ouvre  $\theta(u, v, w, t)$  en  $(u, v, w)$ , il vient :

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{l=0,2} B_l^2(t) \left\{ B_{200}^2 P_{200l} + B_{110}^2 P_{110l} + B_{020}^2 P_{020l} + B_{011}^2 P_{011l} + B_{002}^2 P_{002l} + B_{101}^2 P_{101l} \right\},$$

autrement dit :

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{l=0,2} B_l^2(t) \left\{ u^2 P_{200l} + 2uv P_{110l} + v^2 P_{020l} + 2vw P_{011l} + w^2 P_{002l} + 2uw P_{101l} \right\},$$

donc

$$\frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \theta}{\partial v} = 2 \sum_{l=0,2} B_l^2(t) \left\{ u(P_{110l} - P_{200l}) + v(P_{020l} - P_{110l}) + w(P_{011l} - P_{101l}) \right\},$$

et

$$\frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial \theta}{\partial w} = 2 \sum_{l=0,2} B_l^2(t) \left\{ u(P_{101l} - P_{200l}) + v(P_{011l} - P_{110l}) + w(P_{002l} - P_{101l}) \right\}.$$

En posant

$$\Delta_{ijkl}^{100} = \overrightarrow{P_{ijkl}P_{i-1,j+1,kl}} \quad \text{et} \quad \Delta_{ijkl}^{010} = \overrightarrow{P_{ijkl}P_{i-1,j,k+1,l}}$$

il vient

$$\frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} = 2 \sum_{l=0,2} B_l^2(t) \left\{ u\Delta_{200l}^{100} + v\Delta_{110l}^{100} + w\Delta_{101l}^{100} \right\} = 2 \sum_{l=0,2} \sum_{i+j+k=1} B_l^2(t)B_{ijk}^1(u, v, w)\Delta_{i+1,jkl}^{100},$$

et

$$\frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} = 2 \sum_{l=0,2} B_l^2(t) \left\{ u\Delta_{200l}^{010} + v\Delta_{110l}^{010} + w\Delta_{101l}^{010} \right\} = 2 \sum_{l=0,2} \sum_{i+j+k=1} B_l^2(t)B_{ijk}^1(u, v, w)\Delta_{i+1,jkl}^{010}.$$

Au final le jacobien  $\mathcal{J}$  est le déterminant :

$$\mathcal{J} = 8 \left| \sum_{l=0,2} \sum_{i+j+k=1} B_l^2(t)B_{ijk}^1(u, v, w)\Delta_{i+1,jkl}^{100} \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} \sum_{l=0,2} \sum_{i+j+k=1} B_l^2(t)B_{ijk}^1(u, v, w)\Delta_{i+1,jkl}^{010} & \sum_{l=0,1} \sum_{i+j+k=2} B_l^1(t)B_{ijk}^2(u, v, w)\Delta_{ijkl}^{001} \end{array} \right|$$

que l'on note  $8 \left| \vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w} \right|$ .

**Quelques jacobiens particuliers.** Au coin  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (0, 0, 0)$ , on a  $(u, v, w, t) = (1, 0, 0, 0)$ , donc, en fonction des  $P_{ijkl}$  ou des  $A_i$  et  $C_i$ , on trouve

$$\begin{aligned}\vec{u} &= B_0^2(0)B_{100}^1(1, 0, 0)\Delta_{2000}^{100} = \overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} = \overrightarrow{A_1C_7}, \\ \vec{v} &= B_0^2(0)B_{100}^1(1, 0, 0)\Delta_{2000}^{010} = \overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} = \overrightarrow{A_1C_9}, \\ \vec{w} &= B_0^1(0)B_{200}^2(1, 0, 0)\Delta_{2000}^{001} = \overrightarrow{P_{2000}P_{2001}} = \overrightarrow{A_1C_{13}},\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{J}(0, 0, 0) = 8 \left| \overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}} \right|,$$

c'est-à-dire, à un facteur près, le volume du tétraèdre dont les sommets sont  $A_1$  et les trois points de contrôle adjacents. Ce jacobien, comme pour les autres éléments finis de Lagrange de degré 2, contrôle les tangentes en  $A_1$  et les plans tangents en  $A_1$  des trois faces incidentes. Les autres jacobiens associés aux coins ont la même forme.

Pour l'arête  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (\hat{x}, 0, 0)$ , on a  $(u, v, w, t) = (1 - \hat{x}, \hat{x}, 0, 0)$ .

$$\vec{u} = \sum_{i+j=1} B_{ij0}^1(u, v, 0)\Delta_{i+1,j00}^{100} = u\Delta_{2000}^{100} + v\Delta_{1100}^{100} = u\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} + v\overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} = u\overrightarrow{A_1C_7} + v\overrightarrow{C_7A_2},$$

$$\vec{v} = \sum_{i+j=1} B_{ij0}^1(u, v, 0)\Delta_{i+1,j00}^{010} = u\Delta_{2000}^{010} + v\Delta_{1100}^{010} = u\overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} + v\overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} = u\overrightarrow{A_1C_9} + v\overrightarrow{C_9A_2},$$

$$\vec{w} = \sum_{i+j=2} B_{ij0}^2(u, v, 0)\Delta_{ij00}^{001} = u^2\Delta_{2000}^{001} + 2uv\Delta_{1100}^{001} + v^2\Delta_{0200}^{001},$$

$$\vec{w} = u^2\overrightarrow{P_{2000}P_{2001}} + 2uv\overrightarrow{P_{1100}P_{1101}} + v^2\overrightarrow{P_{0200}P_{0201}} = u^2\overrightarrow{A_1C_{13}} + 2uv\overrightarrow{C_7C_{16}} + v^2\overrightarrow{A_2C_{14}}.$$

Notons que pour le milieu, on trouve  $\vec{u} = \overrightarrow{A_1A_2}$ , l'arête observée, et  $\vec{v} = \overrightarrow{A_1C_{897}}$  avec  $C_{897} = C_8 + C_9 - C_7$ , donc ces deux vecteurs sont les mêmes que ceux du tétraèdre P2. Par contre,  $\vec{w} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{A_1C_{13}} + 2\overrightarrow{C_7C_{16}} + \overrightarrow{A_2C_{14}})$ , où l'on voit les trois arêtes "verticales" incidentes en l'arête observée comme pour les autres éléments.

Pour la face  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (\hat{x}, \hat{y}, 0)$ , on a  $(u, v, w, t) = (1 - \hat{x} - \hat{y}, \hat{x}, \hat{y}, 0)$ . Par suite :

$$\vec{u} = \sum_{i+j+k=1} B_{ij0}^1(u, v, w)\Delta_{i+1,jk0}^{100} = u\Delta_{2000}^{100} + v\Delta_{1100}^{100} + w\Delta_{1010}^{100}$$

$$= u\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} + v\overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} + w\overrightarrow{P_{1010}P_{0110}} = u\overrightarrow{A_1C_7} + v\overrightarrow{C_7A_2} + w\overrightarrow{C_9C_8},$$

$$\vec{v} = \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w)\Delta_{i+1,jk0}^{010} = u\Delta_{2000}^{010} + v\Delta_{1100}^{010} + w\Delta_{1010}^{010}$$

$$= u\overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} + v\overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} + w\overrightarrow{P_{1010}P_{0020}} = u\overrightarrow{A_1C_9} + v\overrightarrow{C_7C_8} + w\overrightarrow{C_9A_3},$$

$$\vec{w} = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u, v, w)\Delta_{ijk0}^{001} = u^2\Delta_{2000}^{001} + 2uv\Delta_{1100}^{001} + v^2\Delta_{0200}^{001} + 2vw\Delta_{0110}^{001} + w^2\Delta_{0020}^{001} + 2uw\Delta_{1010}^{001},$$

$$= u^2\overrightarrow{A_1C_{13}} + 2uv\overrightarrow{C_7C_{16}} + v^2\overrightarrow{A_2C_{14}} + 2vw\overrightarrow{C_8C_{17}} + w^2\overrightarrow{A_3C_{15}} + 2uw\overrightarrow{C_9C_{18}}.$$

Les vecteurs qui interviennent sont, logiquement, les composantes des dérivées dans le plan et les vecteurs "verticaux" issus des six points de contrôle du plan.

Néanmoins, l'observation de ces jacobiens particuliers ne nous donnent pas d'indications précises (hormis pour les coins) sur la validité de l'élément. La suite va exhiber les coefficients de contrôle utiles pour établir une condition suffisante de validité.

**Les coefficients de contrôle.** On a vu que le jacobien s'écrit :

$$\mathcal{J} = 8 \left| \sum_{l=0,2} \sum_{i+j+k=1} B_l^2(t) B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jkl}^{100} \right. \\ \left. \sum_{l=0,2} \sum_{i+j+k=1} B_l^2(t) B_{ijk}^1(u, v, w) \Delta_{i+1, jkl}^{010} \quad \sum_{l=0,1} \sum_{i+j+k=2} B_l^1(t) B_{ijk}^2(u, v, w) \Delta_{ijkl}^{001} \right|,$$

mais, à cause des propriétés des polynômes de Bernstein, on sait que l'on peut l'exprimer comme

$$\mathcal{J} = \sum_{l=0,5} \sum_{i+j+k=4} B_l^5(t) B_{ijk}^4(u, v, w) N_{ijkl},$$

où l'on voit les polynômes de degré 5 et 4 et des coefficients  $N_{ijkl}$  qu'il convient de calculer. Ceci fait, on trouvera une condition suffisante évidente.

Le jacobien est réarrangé en :

$$\mathcal{J} = 8 \sum_{l_1=0,2} \sum_{i_1+j_1+k_1=1} B_{l_1}^2(t) B_{i_1 j_1 k_1}^1(u, v, w) \sum_{l_2=0,2} \sum_{i_2+j_2+k_2=1} B_{l_2}^2(t) B_{i_2 j_2 k_2}^1(u, v, w) \\ \sum_{l_3=0,1} \sum_{i_3+j_3+k_3=2} B_{l_3}^1(t) B_{i_3 j_3 k_3}^2(u, v, w) \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1 l_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2 l_2}^{010} \quad \Delta_{i_3 j_3 k_3 l_3}^{001} \right|,$$

soit

$$\mathcal{J} = 8 \sum_{l_1=0,2} \sum_{i_1+j_1+k_1=1} \sum_{l_2=0,2} \sum_{i_2+j_2+k_2=1} \sum_{l_3=0,1} \sum_{i_3+j_3+k_3=2} B_{l_1}^2(t) B_{i_1 j_1 k_1}^1(u, v, w) B_{l_2}^2(t) B_{i_2 j_2 k_2}^1(u, v, w) \\ B_{l_3}^1(t) B_{i_3 j_3 k_3}^2(u, v, w) \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1 l_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2 l_2}^{010} \quad \Delta_{i_3 j_3 k_3 l_3}^{001} \right|,$$

soit encore

$$\mathcal{J} = 8 \sum_{l_1=0,2} \sum_{l_2=0,2} \sum_{l_3=0,1} \sum_{i_1+j_1+k_1=1} \sum_{i_2+j_2+k_2=1} \sum_{i_3+j_3+k_3=2} B_{l_1}^2(t) B_{l_2}^2(t) B_{l_3}^1(t) \\ B_{i_1 j_1 k_1}^1(u, v, w) B_{i_2 j_2 k_2}^1(u, v, w) B_{i_3 j_3 k_3}^2(u, v, w) \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1 l_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2 l_2}^{010} \quad \Delta_{i_3 j_3 k_3 l_3}^{001} \right|.$$

Il suffit maintenant de regrouper les termes en les exprimant dans leur forme générique (Section 3). Par exemple, pour les termes en  $t$ , on a :

$$\sum_{l_1=0,2} \sum_{l_2=0,2} \sum_{l_3=0,1} B_{l_1}^2(t) B_{l_2}^2(t) B_{l_3}^1(t)$$

c'est-à-dire, simplement

$$\sum_{l_1=0,2} \sum_{l_2=0,2} \sum_{l_3=0,1} C_{l_1}^2 C_{l_2}^2 C_{l_3}^1 t^{l_1+l_2+l_3} (1-t)^{5-l_1-l_2-l_3}$$

qui n'est autre que

$$\sum_{l_1+l_2+l_3=0,5} \frac{C_{l_1}^2 C_{l_2}^2 C_{l_3}^1}{C_{l_1+l_2+l_3}^5} B_{l_1+l_2+l_3}^5(t).$$

Les termes en  $(u, v, w)$  sont traités de la même manière. On part de

$$\sum_{i_1+j_1+k_1=1} \sum_{i_2+j_2+k_2=1} \sum_{i_3+j_3+k_3=2} B_{i_1 j_1 k_1}^1(u, v, w) B_{i_2 j_2 k_2}^1(u, v, w) B_{i_3 j_3 k_3}^2(u, v, w),$$

et on regroupe les termes en les exprimant dans leur forme générique (Section 3). Soit

$$\sum_{i_1+j_1+k_1=1} \sum_{i_2+j_2+k_2=1} \sum_{i_3+j_3+k_3=2} C_{i_1 j_1 k_1}^1 C_{i_2 j_2 k_2}^1 C_{i_3 j_3 k_3}^2 u^{i_1+i_2+i_3} v^{j_1+j_2+j_3} w^{k_1+k_2+k_3},$$

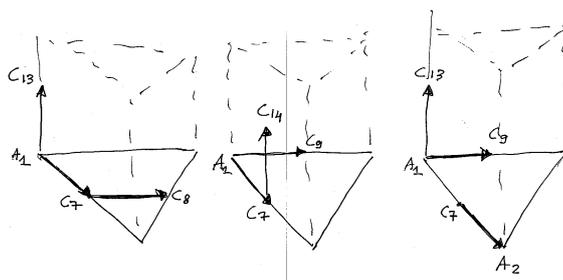


FIG. 4 – Les vecteurs impliqués dans le coefficient  $N_{3100}$ .

qui n'est autre que

$$\sum_{i_1+i_2+i_3+j_1+j_2+j_3+k_1+k_2+k_3=4} \frac{C_{i_1 j_1 k_1}^1 C_{i_2 j_2 k_2}^1 C_{i_3 j_3 k_3}^2}{C_{i_1+i_2+i_3, j_1+j_2+j_3, k_1+k_2+k_3}^4} B_{i_1+i_2+i_3, j_1+j_2+j_3, k_1+k_2+k_3}^4(u, v, w).$$

Par suite, le jacobien s'écrit comme prévu

$$\mathcal{J} = \sum_{L=0,5} \sum_{I+J+K=4} B_L^5(t) B_{IJK}^4(u, v, w) N_{IJKL},$$

avec

$$N_{IJKL} = 8 \sum_{l_1+l_2+l_3=L} \sum_{i_1+i_2+i_3=I, j_1+j_2+j_3=J, k_1+k_2+k_3=K} \frac{C_{l_1}^2 C_{l_2}^2 C_{l_3}^1}{C_L^5} \frac{C_{i_1 j_1 k_1}^1 C_{i_2 j_2 k_2}^1 C_{i_3 j_3 k_3}^2}{C_{I,J,K}^4} \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1 l_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2 l_2}^{010} \quad \Delta_{i_3 j_3 k_3 l_3}^{001} \right|.$$

Il y a ainsi 90 coefficients de contrôle mettant en jeu 972 termes (liés aux déterminants des  $9 \times 9 \times 12$  vecteurs des 3 directions).

À titre d'exercice (et de vérification partielle), on va calculer le coefficient  $N_{4000}$ . Ce coefficient est trouvé pour les jeux  $(i_1, i_2, i_3) = (1, 1, 2)$ ,  $j_i = 0$ ,  $k_i = 0$  et  $l_i = 0$ , par suite, il ne reste qu'un seul terme :

$$8 \left| \Delta_{i_1+1, j_1 k_1 l_1}^{100} \quad \Delta_{i_2+1, j_2 k_2 l_2}^{010} \quad \Delta_{i_3 j_3 k_3 l_3}^{001} \right|$$

avec ces valeurs pour les indices, soit :

$$8 \left| \Delta_{2000}^{100} \quad \Delta_{2000}^{010} \quad \Delta_{2000}^{001} \right|,$$

et on retrouve, comme attendu,  $\mathcal{J}(0, 0, 0)$ , voir plus haut.

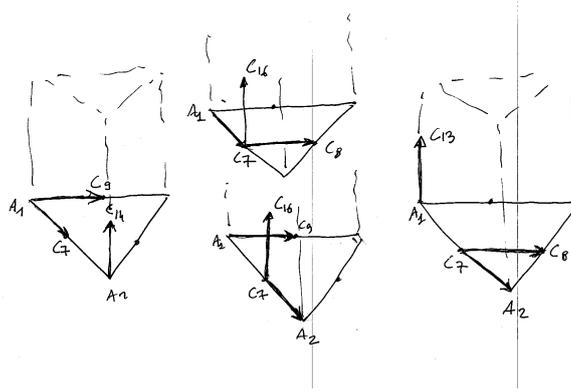
Pour mieux comprendre la mécanique du calcul des  $N_{IJKL}$ , on va considérer les coefficients liés à l'arête  $A_1 A_2$ . Il s'agit de  $N_{4000}$ ,  $N_{3100}$ ,  $N_{2200}$ ,  $N_{1300}$  et  $N_{0400}$ . Le premier a été vu ci-dessus,  $N_{0400}$  se construit de la même façon. Les coefficients  $N_{3100}$  et  $N_{1300}$  sont analogues (par symétrie). Par suite on ne regarde que l'un d'entre eux,  $N_{3100}$  et enfin  $N_{2200}$  qui, lui, est différent.

– Le coefficient  $N_{3100}$ .

On a  $I = 3, J = 1, K = L = 0$ , par suite,  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$  et  $i_1 = i_2 = i_3 = 0$ . Il reste à trouver  $(i_1, i_2, i_3)$  et  $(j_1, j_2, j_3)$  tels que  $i_1 + i_2 + i_3 = 3$ ,  $j_1 + j_2 + j_3 = 1$  et  $i_1 + j_1 = 1$ ,  $i_2 + j_2 = 1$ ,  $i_3 + j_3 = 2$ , le degré des polynômes correspondants à ces termes. La solution est donc la suivante :

$$(i_1, i_2, i_3) = (1, 0, 2) \quad \text{avec} \quad (j_1, j_2, j_3) = (0, 1, 0),$$

$$(i_1, i_2, i_3) = (1, 1, 1) \quad \text{avec} \quad (j_1, j_2, j_3) = (0, 0, 1),$$

FIG. 5 – Les vecteurs impliqués dans le coefficient  $N_{2200}$ .

$$(i_1, i_2, i_3) = (0, 1, 2) \quad \text{avec} \quad (j_1, j_2, j_3) = (1, 0, 0),$$

ainsi, il y a trois termes dans ce coefficient. On remplace les indices dans l'expression du coefficient, il vient :

$$N_{3100} = 2 \left\{ \left| \Delta_{2000}^{100} \quad \Delta_{1100}^{010} \quad \Delta_{2000}^{001} \right| + 2 \left| \Delta_{2000}^{100} \quad \Delta_{2000}^{010} \quad \Delta_{1100}^{001} \right| \right. \\ \left. + \left| \Delta_{1100}^{100} \quad \Delta_{2000}^{010} \quad \Delta_{2000}^{001} \right| \right\},$$

et, en fonction des  $P_{ijkl}$  :

$$N_{3100} = 2 \left\{ \left| \overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{2001}} \right| + 2 \left| \overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{1101}} \right| \right. \\ \left. + \left| \overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{2001}} \right| \right\},$$

soit, en fonction des  $A_i$  et des  $C_i$  :

$$N_{3100} = 2 \left\{ \left| \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_7 C_8} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}} \right| + 2 \left| \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_7 C_{16}} \right| + \left| \overrightarrow{C_7 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}} \right| \right\},$$

qui, sous une forme plus parlante, s'écrit :

$$N_{3100} = 8 \left\{ \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_7 C_8} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_7 C_{16}} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{C_7 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}} \right| \right\},$$

et la figure montre les vecteurs constitutifs de ces trois termes.

– Le coefficient  $N_{2200}$ .

On a  $I = 2, J = 2, K = L = 0$ , par suite,  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$  et  $i_1 = i_2 = i_3 = 0$ . Il reste à trouver  $(i_1, i_2, i_3)$  et  $(j_1, j_2, j_3)$  tels que  $i_1 + i_2 + i_3 = 2, j_1 + j_2 + j_3 = 2$  et  $i_1 + j_1 = 1, i_2 + j_2 = 1, i_3 + j_3 = 2$ , le degré des polynômes correspondants à ces termes. La solution est donc la suivante :

$$(i_1, i_2, i_3) = (1, 1, 0) \quad \text{avec} \quad (j_1, j_2, j_3) = (0, 0, 2),$$

$$(i_1, i_2, i_3) = (1, 0, 1) \quad \text{avec} \quad (j_1, j_2, j_3) = (0, 1, 1),$$

$$(i_1, i_2, i_3) = (0, 1, 1) \quad \text{avec} \quad (j_1, j_2, j_3) = (1, 0, 1),$$

$$(i_1, i_2, i_3) = (0, 0, 2) \quad \text{avec} \quad (j_1, j_2, j_3) = (1, 1, 0),$$

ainsi, il y a quatre termes dans ce coefficient. On remplace les indices dans l'expression du coefficient, il vient :

$$N_{2200} = \frac{4}{3} \left\{ \left| \Delta_{2000}^{100} \quad \Delta_{2000}^{010} \quad \Delta_{0200}^{001} \right| + 2 \left| \Delta_{2000}^{100} \quad \Delta_{1100}^{010} \quad \Delta_{1100}^{001} \right| \right.$$

$$+2 \left| \Delta_{1100}^{100} \quad \Delta_{2000}^{010} \quad \Delta_{1100}^{001} \right| + \left| \Delta_{1100}^{100} \quad \Delta_{1100}^{010} \quad \Delta_{2000}^{001} \right| ,$$

et, en fonction des  $P_{ijkl}$  :

$$N_{2200} = \frac{4}{3} \left\{ \left| \overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{0200}P_{0201}} \right| + 2 \left| \overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{1101}} \right| \right. \\ \left. + 2 \left| \overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{1101}} \right| + \left| \overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} \quad \overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{2001}} \right| \right\} ,$$

soit, en fonction des  $A_i$  et des  $C_i$  :

$$N_{2200} = \frac{4}{3} \left\{ \left| \overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_2C_{14}} \right| + 2 \left| \overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \overrightarrow{C_7C_{16}} \right| \right. \\ \left. + 2 \left| \overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{C_7C_{16}} \right| + \left| \overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}} \right| \right\} ,$$

qui, sous une forme plus parlante, s'écrit :

$$N_{2200} = 8 \left\{ \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_2C_{14}} \right| + \frac{1}{3} \left| \overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \overrightarrow{C_7C_{16}} \right| \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left| \overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{C_7C_{16}} \right| + \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}} \right| \right\} ,$$

et la figure montre les vecteurs constitutifs de ces quatre termes.

Pour finir, nous allons donner les expressions relatives à une arête communes à deux faces quadrilatérales, par exemple l'arête  $A_1A_4$ , soit les coefficients  $N_{4001}, N_{4002}, N_{4003}$  et  $N_{4004}$ . Au facteur 8 près, les calculs donnent :

– Pour  $N_{4001}$ , les trois combinaisons d'indices mènent à :

$$N_{4001} = \frac{2}{5} \left| \overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{C_{13}C_{18}} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}} \right| + \frac{1}{5} \left| \overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4} \right| + \frac{2}{5} \left| \overrightarrow{C_{13}C_{16}} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}} \right| .$$

– Pour  $N_{4002}$ , les 5 combinaisons d'indices mènent à :

$$N_{4002} = \frac{2}{10} \left| \overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{C_{13}C_{18}} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4} \right| + \frac{2}{10} \left| \overrightarrow{C_{13}C_{16}} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4} \right| \\ + \frac{4}{10} \left| \overrightarrow{C_{13}C_{16}} \quad \overrightarrow{C_{13}C_{18}} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}} \right| + \frac{1}{10} \left| \overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_4C_{12}} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}} \right| + \frac{1}{10} \left| \overrightarrow{A_4C_{10}} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}} \right| .$$

– Pour  $N_{4003}$  on a les combinaisons symétriques de celles de  $N_{4002}$ , d'où la solution :

$$N_{4003} = \frac{2}{10} \left| \overrightarrow{A_4C_{10}} \quad \overrightarrow{C_{13}C_{18}} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}} \right| + \frac{2}{10} \left| \overrightarrow{C_{13}C_{16}} \quad \overrightarrow{A_4C_{12}} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}} \right| \\ + \frac{4}{10} \left| \overrightarrow{C_{13}C_{16}} \quad \overrightarrow{C_{13}C_{18}} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4} \right| + \frac{1}{10} \left| \overrightarrow{A_4C_{10}} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4} \right| + \frac{1}{10} \left| \overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_4C_{12}} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4} \right| .$$

– Pour  $N_{4004}$  on a les combinaisons symétriques de celles de  $N_{4001}$ , d'où la solution :

$$N_{4004} = \frac{2}{5} \left| \overrightarrow{A_4C_{10}} \quad \overrightarrow{C_{13}C_{18}} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4} \right| + \frac{1}{5} \left| \overrightarrow{A_4C_{10}} \quad \overrightarrow{A_4C_{12}} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}} \right| + \frac{2}{5} \left| \overrightarrow{C_{13}C_{16}} \quad \overrightarrow{A_4C_{12}} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4} \right| .$$

Les coefficients liés aux faces et les coefficients internes sont trop pénibles à expliciter, nous ne le ferons pas, on va juste donner le nombre de termes constitutifs des combinaisons formant les coefficients.

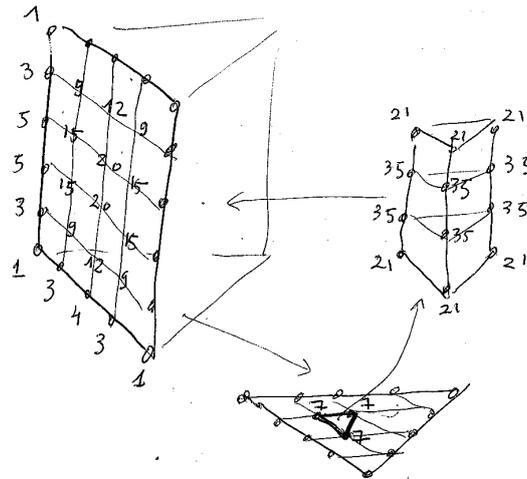


FIG. 6 – Le nombre de termes entrant dans les combinaisons linéaires constitutives des coefficients de contrôle.

**Sur les termes constitutifs des coefficients.** On va vérifier que le nombre de termes (volumes) des coefficients est de 972 soit  $9 \times 9 \times 12$ , c'est-à-dire toutes les combinaisons possibles entre les vecteurs de chaque direction. On symbolise l'agencement des coefficients sur un prisme, voir la figure, et on analyse chaque coefficient pour en donner le nombre de termes. En premier on regarde les faces de ce prisme complet. On découvre successivement :

- les coins où le coefficient n'a qu'un terme, le volume du tétraèdre coin, ceci donne donc, au total, 6 termes, un par sommet,
- les arêtes partagées par une face triangulaire et une face quadrilatérale avec deux coefficients internes à 3 termes et un coefficient à 4 termes, soit, au total,  $6 \times (2 \times 3 + 4)$  termes,
- les arêtes partagées par deux faces quadrilatérales avec deux coefficients à 3 termes et deux autres coefficients à 5 termes, soit, au total,  $3(2 \times 3 + 2 \times 5)$  termes,
- les coefficients internes à une face quadrilatérale, soit 12 coefficients qui se répartissent en 4 coefficients coins à 9 termes, 4 coefficients à 15 termes, 2 coefficients à 18 termes et 2 coefficients à 45 termes, soit, au total,  $3(4 \times 9 + 4 \times 15 + 2 \times 18 + 2 \times 45)$  termes,
- les coefficients internes à une face triangulaire, soit 3 coefficients à 7 termes, soit, au total,  $2(3 \times 7)$  termes,

on "épluche" alors le prisme complet pour découvrir le sous-prisme avec :

- les coins où le coefficient a 21 termes, ceci donne donc, au total,  $6 \times 21$  termes
- les arêtes partagées par deux faces quadrilatérales avec deux coefficients à 35 termes, soit, au total,  $3(2 \times 35)$  termes,

et, en additionnant le nombre de tous les termes trouvés, on trouve exactement 972.

Une question qui reste pendante, si on suppose que tous les coefficients de la frontière (sommets, arêtes et faces) sont valides, alors est-il nécessaire de calculer les autres coefficients ? À ce jour, nous ne savons pas répondre.

### 5.3 En pratique

Pour valider un élément pentaédrique de degré 2 à 18 nœuds, on calcule d'abord les points de contrôle puis les 6 jacobiens coins. S'ils sont strictement positifs, on calcule alors les 84 coefficients restants qui doivent être positifs ou nuls, bon courage.

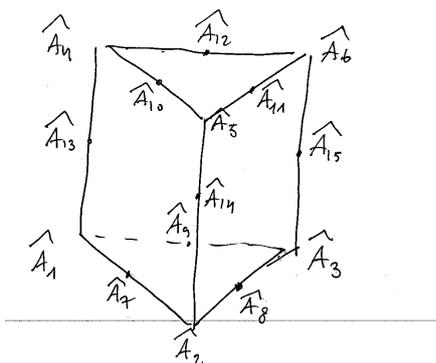


FIG. 7 – Numérotation des nœuds de l'élément de référence à 15 nœuds.

## 6 Élément fini pentaédrique de degré 2, le R2 à 15 nœuds

### 6.1 Forme éléments finis classique

**Numérotation des nœuds.** La convention<sup>5</sup> de numérotation des nœuds est la suivante, les 6 sommets en premier (1 à 6), les 3 nœuds "milieux" des arêtes de la face du bas (7 à 9), les 3 nœuds "milieux" des arêtes de la face du haut (10 à 12), les 3 nœuds "milieux" des arêtes latérales (13 à 15), soit le schéma suivant, coupes de bas (à gauche) en haut (à droite) :

3	15	6
9	8	12
1	7	2
13	14	4
10	5	11

**Les 15 polynômes de base de l'élément.** L'élément de référence est défini comme le triangle  $[0, 1]$  en  $(\hat{x}, \hat{y})$  via le segment  $[0, 1]$  en  $\hat{z}$ .

- $p_1 = (1 - \hat{x} - \hat{y})(-1 + 2\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z})(\hat{z} - 1)$ ,
- $p_2 = \hat{x}(2\hat{z} - 2\hat{x} + 1)(\hat{z} - 1)$ ,
- $p_3 = \hat{y}(2\hat{z} - 2\hat{y} + 1)(\hat{z} - 1)$ ,
- $p_4 = (1 - \hat{x} - \hat{y})(-1 - 2\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z})\hat{z}$ ,
- $p_5 = \hat{x}(2\hat{x} + 2\hat{z} - 3)\hat{z}$ ,
- $p_6 = \hat{y}(2\hat{y} + 2\hat{z} - 3)\hat{z}$ ,
- $p_7 = 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}(1 - \hat{z})$ ,
- $p_8 = 4\hat{x}\hat{y}(1 - \hat{z})$ ,
- $p_9 = 4\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - \hat{z})$ ,
- $p_{10} = 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}\hat{z}$ ,
- $p_{11} = 4\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ ,
- $p_{12} = 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}\hat{z}$ ,
- $p_{13} = 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{z}(1 - \hat{z})$ ,
- $p_{14} = 4\hat{x}\hat{z}(1 - \hat{z})$ ,
- $p_{15} = 4\hat{y}\hat{z}(1 - \hat{z})$ .

La transformation  $F_K$  permettant de passer de  $\hat{K}$  à  $K$ , l'élément courant de nœuds  $A_i$ , est  $F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,15} p_i(\hat{M})A_i$  avec  $\hat{M}$  le point de coordonnées  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  et  $\hat{z}$  dans  $\hat{K}$ .

<sup>5</sup>Il ne s'agit que d'une convention.

**Les arêtes sont des arcs de parabole.** Il est facile de voir que dans ces cas  $F_K$  se réduit à une courbe de Bézier de degré 2. Ainsi, pour  $\hat{y} = 0$  et  $\hat{z} = 0$ , seuls contribuent dans  $F_K$ ,  $p_1, p_2$  et  $p_7$  et on a  $p_1 = -(1 - \hat{x})(-1 + 2\hat{x})$ ,  $p_2 = -\hat{x}(-2\hat{x} + 1)$  et  $p_7 = 4\hat{x}(1 - \hat{x})$ , par suite

$$F_K = (1 - \hat{x})(1 - 2\hat{x})A_1 + 4\hat{x}(1 - \hat{x})A_7 + \hat{x}(2\hat{x} - 1)A_2,$$

qui est le résultat attendu. Pour le cas  $\hat{x} = \hat{y} = 0$ , on trouve les contributions de  $p_1 = (1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z})$ ,  $p_4 = \hat{z}(2\hat{z} - 1)$  et  $p_{13} = 4\hat{z}(1 - \hat{z})$  et  $F_k$  se réduit à

$$F_k = (1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z})A_1 + 4\hat{z}(1 - \hat{z})A_{13} + \hat{z}(2\hat{z} - 1)A_4,$$

qui est le résultat attendu.

## 6.2 Forme de Bézier

Il n'y a pas de telle écriture, du moins dans sa version complète<sup>6</sup>. Pour trouver la forme incomplète, on va travailler directement sur les polynômes  $p_i$  car nous n'avons pas trouvé de définition directe de cet élément via une interpolation transfinie (voir plus bas). L'idée est de réécrire la fonction  $F_K$  en fonction, non des  $A_i$  et des  $p_i$ , mais des  $C_i$  et des polynômes en découlant pour, ensuite, les formuler dans le système de coordonnées de Bézier,  $(u, v, w, t)$ , à l'aide des polynômes de Bernstein. La correspondance entre les deux systèmes de coordonnées est la suivante :

$$u = 1 - \hat{x} - \hat{y}, v = \hat{x}, w = \hat{y} \text{ et } t = \hat{z}.$$

On part donc de

$$F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,15} p_i(\hat{M})A_i,$$

et on exprime les  $A_i$ , autres que les sommets, en fonction des  $C_i$ . Il est facile de voir que l'on a deux cas, celui correspondant à un sommet où vont contribuer le polynôme associé à ce sommet et ceux relatifs aux nœuds des trois arêtes incidentes et celui correspondant à un nœud d'arête où seul le polynôme associé à ce nœud contribue. Les contributions se font au travers des relations comme :  $A_7 = \frac{A_1 + A_2 + 2C_7}{4}$  donc avec le poids  $\frac{1}{4}$  pour un sommet et  $\frac{1}{2}$  ailleurs.

Le cas le plus simple est celui des nœuds d'arête, ceci donne le tableau suivant :

controle	indice	en $\hat{x}, \dots$	en $u, \dots$	en Bernstein
$C_7$	1100	$2(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}(1 - \hat{z})$	$2uv(1 - t)$	$B_{110}^2(u, v, w)B_0^1(t)$
$C_8$	0110	$2\hat{x}\hat{y}(1 - \hat{z})$	$2vw(1 - t)$	$B_{011}^2(u, v, w)B_0^1(t)$
$C_9$	1010	$2(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}(1 - \hat{z})$	$2uw(1 - t)$	$B_{101}^2(u, v, w)B_0^1(t)$
$C_{10}$	1102	$2(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}\hat{z}$	$2wvt$	$B_{110}^2(u, v, w)B_1^1(t)$
$C_{11}$	0112	$2\hat{x}\hat{y}\hat{z}$	$2vwt$	$B_{011}^2(u, v, w)B_1^1(t)$
$C_{12}$	1012	$2(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}\hat{z}$	$2wvt$	$B_{101}^2(u, v, w)B_1^1(t)$
$C_{13}$	2001	$2(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{z}(1 - \hat{z})$	$2ut(1 - t)$	$B_{100}^1(u, v, w)B_1^2(t)$
$C_{14}$	0201	$2\hat{x}\hat{z}(1 - \hat{z})$	$2vt(1 - t)$	$B_{010}^1(u, v, w)B_1^2(t)$
$C_{15}$	0021	$2\hat{y}\hat{z}(1 - \hat{z})$	$2wt(1 - t)$	$B_{001}^1(u, v, w)B_1^2(t)$
Tab 1				

Dans ces termes, on trouve des polynômes de Bernstein qui pourront s'arranger et former un Bézier incomplet. Les sommes relatives à ce tableau se traitent facilement. Pour les trois premières lignes, les trois suivantes et les trois dernières, on trouve successivement :

$$\sum_{\substack{i,j,k \leq 1 \\ i+j+k=2}} B_{ijk}^2(u, v, w)B_0^1(t)P_{ijk,0},$$

$$\sum_{\substack{i,j,k \leq 1 \\ i+j+k=2}} B_{ijk}^2(u, v, w)B_1^1(t)P_{ijk,2},$$

<sup>6</sup>Comme pour le quadrilatère réduit à 8 nœuds, voir [5].

$$\sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) B_1^2(t) Q_{ijk1},$$

avec  $Q_{i00l} = P_{i+1,00l}$ ,  $Q_{0j0l} = P_{0,j+1,0l}$  et  $Q_{00kl} = P_{00,k+1,l}$ .

On réalise maintenant le regroupement des  $p_i$  pour les six sommets. Il est facile de voir que l'on a les résultats du tableau suivant :

controle	indice	en $\hat{x}, \dots$	en $u, \dots$	en Bernstein
$A_1$	2000	$(1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - \hat{z})(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})$	$u(1-t)(u-t)$	$B_{200}^2(u, v, w) B_0^1(t) - \frac{1}{2} B_{100}^1(u, v, w) B_1^2(t)$
$A_2$	0200	$\hat{x}(1 - \hat{z})(\hat{x} - \hat{z})$	$v(1-t)(v-t)$	$B_{020}^2(u, v, w) B_0^1(t) - \frac{1}{2} B_{010}^1(u, v, w) B_1^2(t)$
$A_3$	0020	$\hat{y}(1 - \hat{z})(\hat{y} - \hat{z})$	$w(1-t)(w-t)$	$B_{002}^2(u, v, w) B_0^1(t) - \frac{1}{2} B_{001}^1(u, v, w) B_1^2(t)$
$A_4$	2002	$(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{z}(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z})$	$ut(u-1+t)$	$B_{200}^2(u, v, w) B_1^1(t) - \frac{1}{2} B_{100}^1(u, v, w) B_1^2(t)$
$A_5$	0202	$\hat{x}\hat{z}(\hat{x} - \hat{z})$	$vt(v-1+t)$	$B_{020}^2(u, v, w) B_1^1(t) - \frac{1}{2} B_{010}^1(u, v, w) B_1^2(t)$
$A_6$	0022	$\hat{y}\hat{z}(\hat{y} - \hat{z})$	$wt(w-1+t)$	$B_{002}^2(u, v, w) B_1^1(t) - \frac{1}{2} B_{001}^1(u, v, w) B_1^2(t)$
Tab 2				

Dans ces termes, on trouve des polynômes de Bernstein mais avec des sommes additives ou négatives ce qui est une particularité plutôt inquiétante *a priori*.

Les lignes 1, 2 et 3 de ce tableau conduisent à la somme :

$$\sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \neq 1} B_{ijk}^2(u, v, w) B_0^1(t) P_{ijk0} - \frac{1}{2} \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) B_1^2(t) Q_{ijk0}.$$

Les trois autres lignes conduisent à une somme très similaire :

$$\sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \neq 1} B_{ijk}^2(u, v, w) B_1^1(t) P_{ijk2} - \frac{1}{2} \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) B_1^2(t) Q_{ijk2}.$$

La forme de Bézier incomplète est donc :

$$\begin{aligned} \theta(u, v, w, t) &= \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \leq 1} B_{ijk}^2(u, v, w) B_0^1(t) P_{ijk0} + \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \leq 1} B_{ijk}^2(u, v, w) B_1^1(t) P_{ijk,2} \\ &\quad + \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) B_1^2(t) Q_{ijk1} \\ &\quad + \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \neq 1} B_{ijk}^2(u, v, w) B_0^1(t) P_{ijk0} - \frac{1}{2} \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) B_1^2(t) Q_{ijk0} \\ &\quad + \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \neq 1} B_{ijk}^2(u, v, w) B_1^1(t) P_{ijk2} - \frac{1}{2} \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) B_1^2(t) Q_{ijk2}. \end{aligned} \quad (14)$$

### 6.2.1 Les dérivées

À partir de cette expression, on peut calculer les dérivées partielles et en déduire la forme du polynôme jacobien :

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial v} & \frac{\partial \theta}{\partial w} & \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

La dérivé en  $v$  donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial v} &= 2(u-v)(1-t)P_{1100} + 2w(1-t)P_{0110} - 2w(1-t)P_{1010} + 2(u-v)tP_{1102} + 2wtP_{0112} - 2wtP_{1012} \\ &\quad - 2t(1-t)Q_{1001} + 2t(1-t)Q_{0101} \\ &\quad - (1-t)(2u-t)P_{2000} + (1-t)(2v-t)P_{0200} - t(2u-1+t)P_{2002} + t(2v-1+t)P_{0202}, \end{aligned}$$

calcul fait en prenant terme à terme l'expression. En regroupant correctement les termes de cette dérivée, on voit ce que sont les vecteurs qui contrôlent cette direction. En effet, il vient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = 2w(1-t)\overrightarrow{P_{1010}P_{0110}} + 2wt\overrightarrow{P_{1012}P_{0112}} + 2t(1-t)\overrightarrow{Q_{1001}Q_{0101}}$$

$$2u(1-t)\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} + 2v(1-t)\overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} + 2ut\overrightarrow{P_{2002}P_{1102}} + 2vt\overrightarrow{P_{1102}P_{0202}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0200}P_{2000}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0202}P_{2002}}.$$

Les 7 premiers vecteurs sont naturels, les 2 derniers sont, pour le moins, surprenants, voyons si ce phénomène se retrouve dans la dérivée suivante.

La dérivée en  $w$  donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial w} = & -2v(1-t)P_{1100} + 2v(1-t)P_{0110} + 2(u-w)(1-t)P_{1010} - 2vtP_{1102} + 2vtP_{0112} + 2(u-w)tP_{1012} \\ & - 2t(1-t)Q_{1001} + 2t(1-t)Q_{0011} \end{aligned}$$

$$- (1-t)(2u-t)P_{2000} + (1-t)(2w-t)P_{0020} - t(2u-1+t)P_{2002} + t(2w-1+t)P_{0022},$$

calcul fait également en prenant terme à terme l'expression. En regroupant correctement les termes de cette dérivée, on voit ce que sont les vecteurs qui contrôlent cette direction. En effet, il vient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial w} = 2v(1-t)\overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} + 2vt\overrightarrow{P_{1102}P_{0112}} + 2t(1-t)\overrightarrow{Q_{1001}Q_{0011}}$$

$$2u(1-t)\overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} + 2w(1-t)\overrightarrow{P_{1010}P_{0020}} + 2ut\overrightarrow{P_{2002}P_{1012}} + 2wt\overrightarrow{P_{1012}P_{0022}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0020}P_{2000}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0022}P_{2002}}.$$

Ici, aussi, les 7 premiers vecteurs sont naturels, les 2 derniers sont, pour le moins, surprenants comme pour la dérivée précédente.

La dérivée en  $t$  conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & - \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \leq 1} B_{ijk}^2(u,v,w)P_{ijk0} + \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \leq 1} B_{ijk}^2(u,v,w)P_{ijk,2} + 2 \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u,v,w)(1-2t)Q_{ijk1} \\ & - \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \neq 1} B_{ijk}^2(u,v,w)P_{ijk0} - \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u,v,w)(1-2t)Q_{ijk0} + \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \neq 1} B_{ijk}^2(u,v,w)P_{ijk2} \\ & - \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u,v,w)(1-2t)Q_{ijk2}, \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \leq 1} B_{ijk}^2(u,v,w)\overrightarrow{P_{ijk0}P_{ijk,2}} + 2 \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u,v,w)(1-2t)Q_{ijk1}$$

$$+ \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \neq 1} B_{ijk}^2(u,v,w)\overrightarrow{P_{ijk0}P_{ijk2}} - \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u,v,w)(1-2t)Q_{ijk0} - \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u,v,w)(1-2t)Q_{ijk2},$$

soit, au final :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \leq 1} B_{ijk}^2(u,v,w)\overrightarrow{P_{ijk0}P_{ijk,2}} + \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u,v,w)(1-2t)\overrightarrow{Q_{ijk0}Q_{ijk1}} \\ & + \sum_{i+j+k=2}^{i,j,k \neq 1} B_{ijk}^2(u,v,w)\overrightarrow{P_{ijk0}P_{ijk2}} + \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u,v,w)(1-2t)\overrightarrow{Q_{ijk2}Q_{ijk1}}, \end{aligned}$$

Notons, également dans ces expressions, des termes *a priori* surprenants liés au fait que la dérivée d'un polynôme incomplet prend une forme non standard.

### 6.2.2 Quelques jacobiens particuliers

Pour voir et essayer de comprendre plus précisément le caractère particulier de cet élément, nous allons regarder quelques jacobiens particuliers. On note  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  les trois vecteurs relatifs aux dérivées.

**Restriction à la face  $t = 0$ .** On pose  $t = 0$ , alors on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2w\overrightarrow{P_{1010}P_{0110}} + 2u\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} + 2v\overrightarrow{P_{1100}P_{0200}}. \\ \vec{v} &= 2v\overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} + 2u\overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} + 2w\overrightarrow{P_{1010}P_{0020}}. \\ \vec{w} &= \sum_{\substack{i,j,k \leq 1 \\ i+j+k=2}} B_{ijk}^2(u, v, w)\overrightarrow{P_{ijk0}P_{ijk,2}} + \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w)\overrightarrow{Q_{ijk0}Q_{ijk1}} \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k \neq 1 \\ i+j+k=2}} B_{ijk}^2(u, v, w)\overrightarrow{P_{ijk0}P_{ijk2}} + \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w)\overrightarrow{Q_{ijk2}Q_{ijk1}}.\end{aligned}$$

**Restriction au sommet  $u = 1, t = 0$ .** On reprend les trois vecteurs ci-dessus et on pose  $v = w = 0$ , alors on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} \\ \vec{v} &= 2\overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} \\ \vec{w} &= \overrightarrow{Q_{1000}Q_{1001}} + \overrightarrow{P_{2000}P_{2002}} + \overrightarrow{Q_{1002}Q_{1001}} = \overrightarrow{P_{2000}P_{2001}} + \overrightarrow{P_{2000}P_{2002}} + \overrightarrow{P_{2002}P_{2001}} = 2\overrightarrow{P_{2000}P_{2001}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{J}(1, 0, 0, 0) = 8 |\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} \quad \overrightarrow{P_{2000}P_{2001}}|$$

ou encore :

$$\mathcal{J}(1, 0, 0, 0) = 8 |\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}|,$$

qui a la forme habituelle et controle les tangentes comme pour tous les autres éléments de Lagrange de degré 2.

**Restriction à l'arête  $w = 0, t = 0$ .** On reprend les trois vecteurs initiaux et on fait  $w = 0$ , arête  $A_1A_2$ . Il vient :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2u\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} + 2v\overrightarrow{P_{1100}P_{0200}}, \\ \vec{v} &= 2v\overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} + 2u\overrightarrow{P_{2000}P_{1010}}, \\ \vec{w} &= 2uv\overrightarrow{P_{1100}P_{110,2}} + u\overrightarrow{Q_{1000}Q_{1001}} + v\overrightarrow{Q_{0100}Q_{0101}} \\ &+ u^2\overrightarrow{P_{2000}P_{2002}} + v^2\overrightarrow{P_{0200}P_{0202}} + u\overrightarrow{Q_{1002}Q_{1001}} + v\overrightarrow{Q_{0102}Q_{0101}},\end{aligned}$$

soit, encore :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= 2uv\overrightarrow{P_{1100}P_{110,2}} + u\overrightarrow{P_{2000}P_{2001}} + v\overrightarrow{P_{0200}P_{0201}} \\ &+ u^2\overrightarrow{P_{2000}P_{2002}} + v^2\overrightarrow{P_{0200}P_{0202}} + u\overrightarrow{P_{2002}P_{2001}} + v\overrightarrow{P_{0202}P_{0201}},\end{aligned}$$

et, au final :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2u\overrightarrow{A_1C_7} + 2v\overrightarrow{C_7A_2}. \\ \vec{v} &= 2u\overrightarrow{A_1C_9} + 2v\overrightarrow{C_7C_8} \\ \vec{w} &= 2uv\overrightarrow{C_7C_{10}} + 2u\overrightarrow{A_1C_{13}} + 2v\overrightarrow{A_2C_{14}} + u^2\overrightarrow{A_1A_4} + v^2\overrightarrow{A_2A_5} + u\overrightarrow{A_4A_1} + v\overrightarrow{A_5A_2}.\end{aligned}$$

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont la forme attendue, le vecteur  $\vec{w}$  semble avoir une drôle de tête (notons que si on pose  $u = 1$ , on retrouve bien le vecteur associé à  $A_1$  calculé ci-dessus).

Dans ce cas particulier, arête  $A_1A_2$ , on va exhiber tous les coefficients obtenus, donc, par regroupement des termes de degré identique. On note  $|ijk|$  le déterminant obtenu en

combinant le vecteur  $i$  de  $\vec{u}$  avec le vecteur  $j$  de  $\vec{v}$  et le vecteur  $k$  de  $\vec{w}$ . Il y a 28 termes à regrouper. Soit :

$$\begin{aligned} & 8u^3v|111| + 8u^3|112| + 8u^2v|113| + 4u^4|114| + 4u^2v^2|115| - 4u^3|116| - 4u^2v|117| \\ & + 8u^2v^2|121| + 8u^2v|122| + 8uv^2|123| + 4u^3v|124| + 4uv^3|125| - 4u^2v|126| - 4uv^2|127| \\ & + 8u^2v^2|211| + 8u^2v|212| + 8uv^2|213| + 4u^3v|214| + 4uv^3|215| - 4u^2v|216| - 4uv^2|217| \\ & + 8uv^3|221| + 8uv^2|222| + 8v^3|223| + 4u^2v^2|224| + 4v^4|225| - 4uv^2|226| - 4v^3|227|, \end{aligned}$$

et, à l'éditeur de texte, on regroupe ces résultats en :

$$\begin{aligned} & 4u^4|114| + 4v^4|225| \\ & + 8u^3v|111| + 4u^3v|124| + 4u^3v|214| \\ & + 4u^2v^2|115| + 8u^2v^2|121| + 8u^2v^2|211| + 4u^2v^2|224| \\ & + 4uv^3|125| + 4uv^3|215| + 8uv^3|221| \\ & + 8u^3|112| - 4u^3|116| + 8v^3|223| - 4v^3|227| \\ & + 8u^2v|122| + 8u^2v|113| - 4u^2v|117| + 8u^2v|212| - 4u^2v|126| - 4u^2v|216| \\ & + 8uv^2|123| - 4uv^2|127| + 8uv^2|213| - 4uv^2|217| + 8uv^2|222| - 4uv^2|226|, \end{aligned}$$

ce qui semble donner 9 termes (5 associés au degré 4, 4 associés au degré 3), en fait certains se regroupent pour construire les coefficients effectifs. Ainsi :

$$N_{4000} = 4u^4|114| + 8u^3|112| - 4u^3|116| \text{ pour } u = 1, \text{ soit } 4|114| + 8|112| - 4|116|,$$

qui se réduit à  $8|112|$  et n'est autre que

$$8|\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}|,$$

comme attendu. De même, pour  $v = 1$ , on trouve

$$N_{0400} = 4|225| + 8|223| - 4|227|,$$

qui n'est autre que :

$$8|\overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \overrightarrow{A_2C_{14}}| = 8|\overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{A_2C_8} \quad \overrightarrow{A_2C_{14}}|.$$

Pour trouver les autres coefficients, on réécrit les 9 termes ci-dessus sous forme générique. Avec des notations évidentes, il vient :

$$\mathcal{J}(u, v, 0, 0) = \sum_{i+j+k=4}^{k=0} B_{ijk}^4(u, v, 0)N_{ij00}^4 + \sum_{i+j+k=3}^{k=0} B_{ijk}^3(u, v, 0)N_{ij00}^3,$$

et il suffit de voir comment les coefficients (indiqués avec <sup>4</sup> et <sup>3</sup>) se combinent pour définir les coefficients  $N_{ij00}$  effectifs. On reprend à nouveau les 9 termes écrits de manière plus précise comme :

$$\begin{aligned} & u^4(4|114|) + v^4(4|225|) \\ & + 4u^3v(2|111| + |124| + |214|) \\ & + 6u^2v^2\left(\frac{2}{3}|115| + \frac{4}{3}|121| + \frac{4}{3}|211| + \frac{2}{3}|224|\right) \\ & + 4uv^3(|125| + |215| + 2|221|) \\ & + u^3(8|112| - 4|116|) + v^3(8|223| - 4|227|) \\ & + 3u^2v\left(\frac{8}{3}|122| + \frac{8}{3}|113| - \frac{4}{3}|117| + \frac{8}{3}|212| - \frac{4}{3}|126| - \frac{4}{3}|216|\right) \end{aligned}$$

$$+3uv^2\left(\frac{8}{3}|123| - \frac{4}{3}|127| + \frac{8}{3}|213| - \frac{4}{3}|217| + \frac{8}{3}|222| - \frac{4}{3}|226|\right),$$

d'où on déduit les  $N_{ijkl}^4$  et les  $N_{ijkl}^3$  avant de trouver les  $N_{ijkl}$  de cette arête. Ainsi,

$$\begin{aligned} N_{4000}^4 &= 4|114| \quad , \quad N_{0400}^4 = 4|225| \\ N_{3100}^4 &= 2|111| + |124| + |214| \\ N_{2200}^4 &= \frac{2}{3}|115| + \frac{4}{3}|121| + \frac{4}{3}|211| + \frac{2}{3}|224| \\ N_{1300}^4 &= |125| + |215| + 2|221| \\ N_{3000}^3 &= 8|112| - 4|116| \quad , \quad N_{0300}^3 = 8|223| - 4|227| \\ N_{2100}^3 &= \frac{8}{3}|122| + \frac{8}{3}|113| - \frac{4}{3}|117| + \frac{8}{3}|212| - \frac{4}{3}|126| - \frac{4}{3}|216| \\ N_{1200}^3 &= \frac{8}{3}|123| - \frac{4}{3}|127| + \frac{8}{3}|213| - \frac{4}{3}|217| + \frac{8}{3}|222| - \frac{4}{3}|226|. \end{aligned}$$

Et la définition des coefficients effectifs découle de la règle d'élévation du degré pour les coefficients  $N_{ijkl}^3$  suivie du regroupement des termes. On a donc :

$$\begin{aligned} N_{4000} &= N_{4000}^4 + N_{3000}^3 \\ N_{3100} &= N_{3100}^4 + \frac{N_{3000}^3 + 3N_{2100}^3}{4} \\ N_{2200} &= N_{2200}^4 + \frac{2N_{2100}^3 + 2N_{1200}^3}{4} \\ N_{1300} &= N_{1300}^4 + \frac{3N_{1200}^3 + N_{0300}^3}{4} \\ N_{0400} &= N_{0400}^4 + N_{0300}^3. \end{aligned}$$

On a déjà vu la validité et l'interprétation géométrique de cette définition pour  $N_{4000}$  et  $N_{0400}$ . On va expliciter les 3 autres coefficients pour analyser leurs expressions. On a, successivement :

$$N_{3100} = 2|111| + |124| + |214| + 2|112| - |116| + 2|122| + 2|113| - |117| + 2|212| - |126| - |216|,$$

soit, avec des notations évidentes :

$$N_{3100} = |11 \quad 2(1) + 2(2) + 2(3) - (6) - (7)| + |12 \quad (4) + 2(2) - (6)| + |21 \quad (4) + 2(2) - (6)|,$$

$$\begin{aligned} N_{3100} &= |\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad 2\overrightarrow{C_7C_{10}} + 2\overrightarrow{A_1C_{13}} + 2\overrightarrow{A_2C_{14}} - \overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{A_2A_5}| \\ &\quad + 2|\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}| + 2|\overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}|, \end{aligned}$$

soit, en posant  $\vec{T} = 2\overrightarrow{C_7C_{10}} + 2\overrightarrow{A_1C_{13}} + 2\overrightarrow{A_2C_{14}} - \overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{A_2A_5}$ , le vecteur "central" qui s'exprime sous la forme maintenant classique (cf. le quadrilatère de degré 2 incomplet) :

$$\vec{T} = 2\overrightarrow{C_7C_{10}} + (\overrightarrow{A_1C_{13}} - \overrightarrow{C_{13}A_4}) + (\overrightarrow{A_2C_{14}} - \overrightarrow{C_{14}A_5}).$$

Ainsi, on a :

$$N_{3100} = 2|\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}| + |\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \vec{T}| + 2|\overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}|,$$

tandis que  $N_{1300}$  est symétrique, à savoir :

$$N_{1300} = 2|\overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_2C_{14}}| + |\overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \vec{T}| + 2|\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \overrightarrow{A_2C_{14}}|,$$

et on vérifie que ces deux coefficients sont de module 1 pour un élément droit de coté 1.

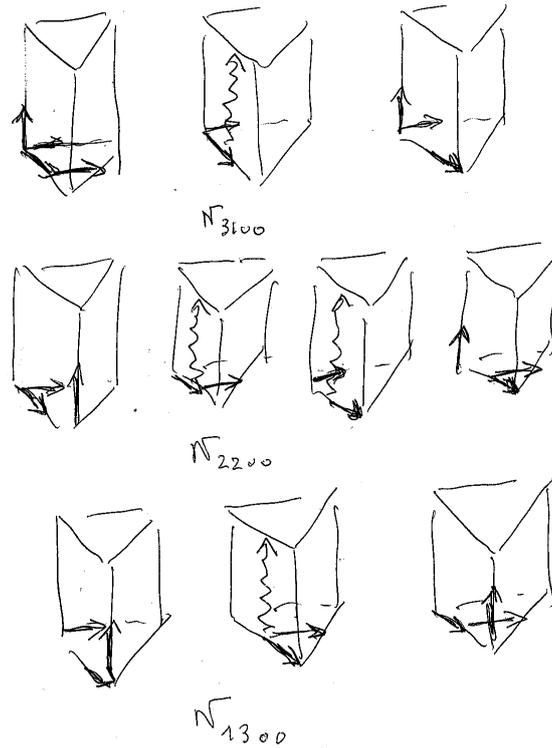


FIG. 8 – Les vecteurs impliqués dans les coefficients  $N_{3100}$ ,  $N_{2200}$  et  $N_{1300}$ .

Il reste à voir  $N_{2200}$ , le coefficient central de l'arête. On a, successivement :

$$\begin{aligned}
 N_{2200} &= \frac{2}{3}|115| + \frac{4}{3}|121| + \frac{4}{3}|211| + \frac{2}{3}|224| \\
 &+ \frac{4}{3}|122| + \frac{4}{3}|113| - \frac{2}{3}|117| + \frac{4}{3}|212| - \frac{2}{3}|126| - \frac{2}{3}|216| \\
 &+ \frac{4}{3}|123| - \frac{2}{3}|127| + \frac{4}{3}|213| - \frac{2}{3}|217| + \frac{4}{3}|222| - \frac{2}{3}|226|, \\
 N_{2200} &= |\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \frac{4}{3}\overrightarrow{A_2C_{14}}| + |\overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \frac{4}{3}\overrightarrow{A_1C_{13}}| \\
 &+ |\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \frac{4}{3}\overrightarrow{C_7C_{10}} + \frac{4}{3}\overrightarrow{A_1C_{13}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A_4} + \frac{4}{3}\overrightarrow{A_2C_{14}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A_2A_5}| \\
 &+ |\overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \frac{4}{3}\overrightarrow{C_7C_{10}} + \frac{4}{3}\overrightarrow{A_1C_{13}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A_4} + \frac{4}{3}\overrightarrow{A_2C_{14}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A_2A_5}|,
 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 N_{2200} &= \frac{4}{3}|\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_2C_{14}}| \\
 &+ \frac{2}{3}|\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \overrightarrow{T}| + \frac{2}{3}|\overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{T}| \\
 &+ \frac{4}{3}|\overrightarrow{C_7A_2} \quad \overrightarrow{C_7C_8} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}|,
 \end{aligned}$$

ce coefficient est totalement symétrique (premier et dernier terme entre eux et les deux termes du milieu également).

On vérifie facilement que, pour un élément droit, les cinq coefficients du jacobien ont un module (volume) égal et constant. Ceci conclut cette analyse de l'arête  $A_1A_2$ . Les coefficients des autres arêtes des faces triangulaires ont la même forme. Pour une arête commune à deux faces quadrilatérales (arêtes verticales), nous donnerons plus bas l'analyse correspondante.

**Restriction à la face  $w = 0$ .** On va ici regarder ce qui se passe pour une arête verticale et, en premier, on considère la face  $w = 0$ . On a alors :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2t(1-t)\overrightarrow{Q_{1001}Q_{0101}} + 2u(1-t)\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} + 2v(1-t)\overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} \\ &+ 2ut\overrightarrow{P_{2002}P_{1102}} + 2vt\overrightarrow{P_{1102}P_{0202}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0200}P_{2000}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0202}P_{2002}}. \\ \vec{v} &= 2v(1-t)\overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} + 2vt\overrightarrow{P_{1102}P_{0112}} + 2t(1-t)\overrightarrow{Q_{1001}Q_{0011}} \\ &+ 2u(1-t)\overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} + 2ut\overrightarrow{P_{2002}P_{1012}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0020}P_{2000}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0022}P_{2002}}. \\ \vec{w} &= \sum_{\substack{i,j,k \leq 1 \\ i+j+k=2}} B_{ijk}^2(u,v,w)\overrightarrow{P_{ijk0}P_{ijk,2}} + \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u,v,w)(1-2t)\overrightarrow{Q_{ijk0}Q_{ijk1}} \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k \neq 1 \\ i+j+k=2}} B_{ijk}^2(u,v,w)\overrightarrow{P_{ijk0}P_{ijk2}} + \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u,v,w)(1-2t)\overrightarrow{Q_{ijk2}Q_{ijk1}}.\end{aligned}$$

**Restriction au sommet  $u = 1, w = 0, t = 0$ .** On recommence l'analyse de ce jacobien en notant qu'il se définit ici par trois contraintes (au lieu de 2 ci-dessus). Il vient :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}}, \\ \vec{v} &= 2\overrightarrow{P_{2000}P_{1010}}, \\ \vec{w} &= \overrightarrow{P_{2000}P_{2001}} + \overrightarrow{P_{2000}P_{2002}} + \overrightarrow{P_{2002}P_{2001}} = 2\overrightarrow{P_{2000}P_{2001}}.\end{aligned}$$

On retrouve donc bien  $\mathcal{J}(1, 0, 0, 0)$ .

**Restriction au sommet  $u = 1, w = 0, t = 1$ .** On recommence l'analyse de ce jacobien en notant qu'il se définit ici par trois contraintes (au lieu de 2 ci-dessus). Il vient :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2\overrightarrow{P_{2002}P_{1102}}, \\ \vec{v} &= 2\overrightarrow{P_{2002}P_{1012}}, \\ \vec{w} &= -\overrightarrow{P_{2000}P_{2001}} + \overrightarrow{P_{2000}P_{2002}} - \overrightarrow{P_{2002}P_{2001}} = 2\overrightarrow{P_{2001}P_{2002}}.\end{aligned}$$

On trouve donc pour  $\mathcal{J}(1, 0, 0, 1)$  la valeur attendue.

**Restriction à l'arête  $w = 0, u = 1$ .** On repart de l'expression initiale de la face  $w = 0$  et on fait  $u = 1$ , il vient :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2t(1-t)\overrightarrow{Q_{1001}Q_{0101}} + 2(1-t)\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} + 2t\overrightarrow{P_{2002}P_{1102}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0200}P_{2000}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0202}P_{2002}}. \\ \vec{v} &= 2t(1-t)\overrightarrow{Q_{1001}Q_{0011}} + 2(1-t)\overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} + 2t\overrightarrow{P_{2002}P_{1012}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0020}P_{2000}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0022}P_{2002}}. \\ \vec{w} &= (1-2t)\overrightarrow{Q_{1000}Q_{1001}} + \overrightarrow{P_{2000}P_{2002}} + (1-2t)\overrightarrow{Q_{1002}Q_{1001}},\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2t(1-t)\overrightarrow{C_{13}C_{14}} + 2(1-t)\overrightarrow{A_1C_7} + 2t\overrightarrow{A_4C_{10}} + t(1-t)\overrightarrow{A_2A_1} + t(1-t)\overrightarrow{A_5A_4}, \\ \vec{v} &= 2t(1-t)\overrightarrow{C_{13}A_{15}} + 2(1-t)\overrightarrow{A_1C_9} + 2t\overrightarrow{A_4C_{12}} + t(1-t)\overrightarrow{A_3A_1} + t(1-t)\overrightarrow{A_6A_4}, \\ \vec{w} &= (1-2t)\overrightarrow{A_1C_{13}} + \overrightarrow{A_1A_4} + (1-2t)\overrightarrow{A_4C_{13}},\end{aligned}$$

et  $\vec{w}$  s'écrit aussi sous une forme plus parlante :

$$\vec{w} = 2(1-t)\overrightarrow{A_1C_{13}} + 2t\overrightarrow{C_{13}A_4}.$$

Comme pour l'arête  $A_1A_2$ , nous allons exhiber tous les coefficients obtenus en suivant la même approche. On utilise la même convention pour les notations. Il vient 50 termes<sup>7</sup> (au lieu de 28 dans le cas précédent!) à additionner :

$$\begin{aligned} & 8t^2(1-t)^3|111| + 8t^3(1-t)^2|112| + 8t(1-t)^3|121| + 8t^2(1-t)^2|122| + 8t^2(1-t)^2|131| \\ & + 8t^3(1-t)|132| + 4t^2(1-t)^3|141| + 4t^3(1-t)^2|142| + 4t^2(1-t)^3|151| + 4t^3(1-t)^2|152| \\ & + 8t(1-t)^3|211| + 8t^2(1-t)^2|212| + 8(1-t)^3|221| + 8t(1-t)^2|222| + 8t(1-t)^2|231| \\ & + 8t^2(1-t)|232| + 4t(1-t)^3|241| + 4t^2(1-t)^2|242| + 4t(1-t)^3|251| + 4t^2(1-t)^2|252| \\ & + 8t^2(1-t)^2|311| + 8t^3(1-t)|312| + 8t(1-t)^2|321| + 8t^2(1-t)|322| + 8t^2(1-t)|331| \\ & + 8t^3|332| + 4t^2(1-t)^2|341| + 4t^3(1-t)|342| + 4t^2(1-t)^2|351| + 4t^3(1-t)|352| \\ & 4t^2(1-t)^3|411| + 4t^3(1-t)^2|412| + 4t(1-t)^3|421| + 4t^2(1-t)^2|422| + 4t^2(1-t)^2|431| \\ & + 4t^3(1-t)|432| + 2t^2(1-t)^3|441| + 2t^3(1-t)^2|442| + 2t^2(1-t)^3|451| + 2t^3(1-t)^2|452| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4t^2(1-t)^3|511| + 4t^3(1-t)^2|512| + 4t(1-t)^3|521| + 4t^2(1-t)^2|522| + 4t^2(1-t)^2|531| \\ & + 4t^3(1-t)|532| + 2t^2(1-t)^3|541| + 2t^3(1-t)^2|542| + 2t^2(1-t)^3|551| + 2t^3(1-t)^2|552|, \end{aligned}$$

on regroupe alors les termes. On trouve certains des termes de  $B_l^5(t)$ , de  $B_l^4(t)$  et de  $B_l^3(t)$ . En premier, regardons les termes en  $t^3(1-t)^2$ , soit :

$$10t^3(1-t)^2\left(\frac{4}{5}|112| + \frac{2}{5}|142| + \frac{2}{5}|152| + \frac{2}{5}|412| + \frac{1}{5}|442| + \frac{1}{5}|452| + \frac{2}{5}|512| + \frac{1}{5}|542| + \frac{1}{5}|552|\right),$$

puis les termes en  $t^2(1-t)^3$ , soit

$$10t^2(1-t)^3\left(\frac{4}{5}|111| + \frac{2}{5}|141| + \frac{2}{5}|151| + \frac{2}{5}|411| + \frac{1}{5}|441| + \frac{1}{5}|451| + \frac{2}{5}|511| + \frac{1}{5}|541| + \frac{1}{5}|551|\right),$$

pour le degré 5, puis les termes en  $t^3(1-t)$ , soit :

$$4t^3(1-t)(2|132| + 2|312| + |342| + |352| + |432| + |532|),$$

puis les termes en  $t^2(1-t)^2$ , soit :

$$6t^2(1-t)^2\left(\frac{4}{3}|122| + \frac{4}{3}|131| + \frac{4}{3}|212| + \frac{2}{3}|242| + \frac{2}{3}|252| + \frac{4}{3}|311| + \frac{2}{3}|341| + \frac{2}{3}|351| + \frac{2}{3}|422| + \frac{2}{3}|522| + \frac{2}{3}|431| + \frac{2}{3}|531|\right),$$

puis les termes en  $t(1-t)^3$ , soit :

$$4t(1-t)^3(2|121| + 2|211| + |241| + |251| + |421| + |521|),$$

pour le degré 4, puis le terme en  $t^3$ , soit :

$$t^3(8|332|)$$

<sup>7</sup> et l'éditeur de texte va heureusement nous aider à effectuer ces opérations.

puis les termes en  $t^2(1-t)$ , soit :

$$3t^2(1-t)\left(\frac{8}{3}|232| + \frac{8}{3}|322| + \frac{8}{3}|331|\right),$$

et les termes en  $t(1-t)^2$ , soit :

$$3t(1-t)^2\left(\frac{8}{3}|222| + \frac{8}{3}|321| + \frac{8}{3}|231|\right),$$

et le terme final en  $(1-t)^3$ , soit :

$$(1-t)^3(8|221|),$$

pour le degré 3.

Pour  $t = 0$ , on trouve  $8|221|$  soit  $8|\overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_9} \overrightarrow{A_1C_{13}}|$  qui est bien la valeur attendue. Pour  $t = 1$ , on trouve  $8|332|$  soit  $8|\overrightarrow{A_4C_{10}} \overrightarrow{A_4C_{12}} \overrightarrow{C_{13}A_4}|$  qui est aussi la valeur attendue.

Des calculs ci-dessus, on déduit la forme générique suivante :

$$\mathcal{J}(1, v, 0, t) = \sum_{l=2,3} B_l^5(t)N_{400l}^5 + \sum_{l=1,3} B_l^4(t)N_{400l}^4 + \sum_{l=0,3} B_l^3(t)N_{300l}^3,$$

et il suffit de voir comment les coefficients (indités avec <sup>5</sup>, <sup>4</sup> et <sup>3</sup>) se combinent pour définir les coefficients  $N_{400l}$  effectifs. Les coefficients partiels sont déduits des expressions ci-dessus, on a ainsi :

$$\begin{aligned} N_{4002}^5 &= \frac{4}{5}|111| + \frac{2}{5}|141| + \frac{2}{5}|151| + \frac{2}{5}|411| + \frac{1}{5}|441| + \frac{1}{5}|451| + \frac{2}{5}|511| + \frac{1}{5}|541| + \frac{1}{5}|551|, \\ N_{4003}^5 &= \frac{4}{5}|112| + \frac{2}{5}|142| + \frac{2}{5}|152| + \frac{2}{5}|412| + \frac{1}{5}|442| + \frac{1}{5}|452| + \frac{2}{5}|512| + \frac{1}{5}|542| + \frac{1}{5}|552|, \\ N_{4001}^4 &= 2|121| + 2|211| + |241| + |251| + |421| + |521|, \\ N_{4002}^4 &= \frac{4}{3}|122| + \frac{4}{3}|131| + \frac{4}{3}|212| + \frac{2}{3}|242| + \frac{2}{3}|252| + \frac{4}{3}|311| + \frac{2}{3}|341| + \frac{2}{3}|351| + \frac{2}{3}|422| + \frac{2}{3}|522| + \frac{2}{3}|431| + \frac{2}{3}|531|, \\ N_{4003}^4 &= 2|132| + 2|312| + |342| + |352| + |432| + |532|, \\ N_{3000}^3 &= 8|221|, \\ N_{3001}^3 &= \frac{8}{3}|222| + \frac{8}{3}|321| + \frac{8}{3}|231|, \\ N_{3002}^3 &= \frac{8}{3}|232| + \frac{8}{3}|322| + \frac{8}{3}|331|, \\ N_{3003}^3 &= 8|332|. \end{aligned}$$

Pour établir la forme des coefficients effectifs, on utilise la technique d'élévation de degré. On passe du degré 4 des  $N_{ijkl}^4$  au degré 5 en construisant les coefficients notés  $M_{ijkl}$  :

$$\begin{aligned} M_{4001} &= \frac{4}{5}N_{4001}^4 \\ M_{4002} &= \frac{2N_{4001}^4 + 3N_{4002}^4}{5} \\ M_{4003} &= \frac{3N_{4002}^4 + 2N_{4003}^4}{5} \\ M_{4004} &= \frac{4}{5}N_{4003}^4. \end{aligned}$$

Ensuite on part des coefficients  $N_{ijkl}^3$  que l'on élève au degré 4, coefficients notés  $Q_{ijkl}$  :

$$Q_{4000} = N_{3000}^3$$

$$Q_{4001} = \frac{N_{3000}^3 + 3N_{3001}^3}{4}$$

$$Q_{4002} = \frac{2N_{3001}^3 + 2N_{3002}^3}{4}$$

$$Q_{4003} = \frac{3N_{3002}^3 + N_{3003}^3}{4}$$

$$Q_{4004} = N_{3003}^3,$$

puis on passe au degré 5 pour définir les coefficients notés  $R_{ijkl}$  :

$$R_{4000} = Q_{4000} = N_{3000}^3$$

$$R_{4001} = \frac{Q_{4000} + 4Q_{4001}}{5} = \frac{2N_{3000}^3 + 3N_{3001}^3}{5}$$

$$R_{4002} = \frac{2Q_{4001} + 3Q_{4002}}{5} = \frac{2N_{3000}^3 + 12N_{3001}^3 + 6N_{3002}^3}{20}$$

$$R_{4003} = \frac{3Q_{4002} + 2Q_{4003}}{5} = \frac{6N_{3001}^3 + 12N_{3002}^3 + 2N_{3003}^3}{20}$$

$$R_{4004} = \frac{4Q_{4003} + Q_{4004}}{5} = \frac{3N_{3002}^3 + 2N_{3003}^3}{5}$$

$$R_{4005} = Q_{4004} = N_{3003}^3.$$

Et donc, en sommant les coefficients partiels de même indice, on a les définitions suivantes :

$$N_{4000} = N_{3000}^3$$

$$N_{4001} = \frac{4}{5}N_{4001}^4 + \frac{2N_{3000}^3 + 3N_{3001}^3}{5} = \frac{2N_{3000}^3 + 4N_{4001}^4 + 3N_{3001}^3}{5}$$

$$N_{4002} = \frac{2N_{4001}^4 + 3N_{4002}^4}{5} + \frac{2N_{3000}^3 + 12N_{3001}^3 + 6N_{3002}^3}{20} + N_{4002}^5$$

$$N_{4003} = \frac{3N_{4002}^4 + 2N_{4003}^4}{5} + \frac{6N_{3001}^3 + 12N_{3002}^3 + 2N_{3003}^3}{20} + N_{4003}^5$$

$$N_{4004} = \frac{4}{5}N_{4003}^4 + \frac{3N_{3002}^3 + 2N_{3003}^3}{5} = \frac{3N_{3002}^3 + 4N_{4003}^4 + 2N_{3003}^3}{5}$$

$$N_{4005} = N_{3003}^3.$$

Pour  $N_{4000}$  et  $N_{4005}$ , c'est trivialement le résultat habituel tel que déjà calculé plus haut (le tétraèdre coin). Pour les autres coefficients, on va expliciter leur forme.

Analysons  $N_{4001}$ , on a :

$$5N_{4001} = 2N_{3000}^3 + 4N_{4001}^4 + 3N_{3001}^3,$$

soit

$$5N_{4001} = 16|221| + 8|121| + 8|211| + 4|241| + 4|251| + 4|421| + 4|521| + 8|222| + 8|321| + 8|231|,$$

avant de poursuivre, on note que le module de ce coefficient vaut 1 pour un élément droit de coté 1. On exprime le coefficient sous une forme mécanique :

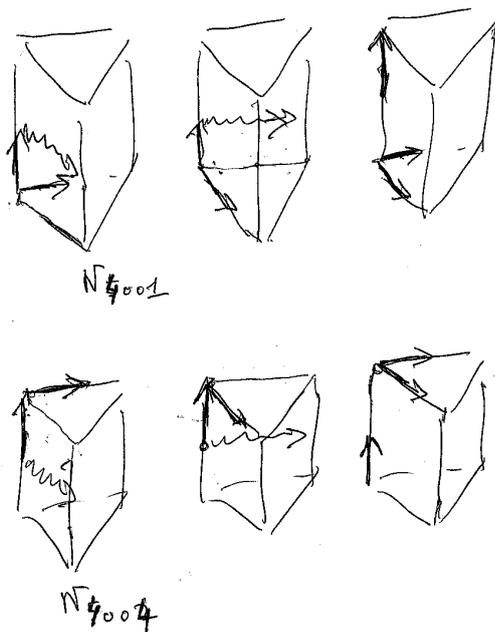
$$5N_{4001} = 16|221| + 8(|121| + |211|) + 4(|241| + |251| + |421| + |521|) + 8(|321| + |231|) + 8|222|,$$

d'où on déduit (sans même faire le calcul explicitement) le coefficient symétrique :

$$5N_{4004} = 16|332| + 8(|132| + |312|) + 4(|342| + |352| + |432| + |532|) + 8(|232| + |322|) + 8|331|.$$

La logique géométrique conduit à écrire le coefficient de la façon suivante :

$$5N_{4001} = 16|221| + 4(2|121| + |421| + |521| + 2|321|) + 4(2|211| + |241| + |251| + 2|231|) + 8|222|,$$

FIG. 9 – Les vecteurs impliqués dans les coefficients  $N_{4001}$  et  $N_{4004}$ .

et, plus précisément, en répartissant le premier terme :

$$5 N_{4001} = 4(2|121|+|421|+|521|+2|321|+2|221|) + 4(2|211|+|241|+|251|+2|231|+2|221|) + 8|222|,$$

soit encore :

$$5 N_{4001} = 4(|2(1)+(4)+(5)+2(3)+2(2) \quad 21|) + 4(|2 \quad 2(1)+(4)+(5)+2(3)+2(2) \quad 1|) + 8|222|,$$

et en posant  $\vec{U} = 2(1) + (4) + (5) + 2(3) + 2(2)$  et  $\vec{V} = 2(1) + (4) + (5) + 2(3) + 2(2)$ , il vient :

$$5 N_{4001} = 4(|\vec{U} \quad 21|) + 4(|2\vec{V} \quad 1|) + 8|222|,$$

qui, exprimé en fonction des  $A_i$  et des  $C_i$ , s'écrit au final :

$$N_{4001} = \frac{4}{5}(|\vec{U} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + |\overrightarrow{A_1 C_7} \quad \vec{V} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}|) + \frac{8}{5}|\overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}|,$$

avec  $\vec{U} = 2\overrightarrow{A_1 C_7} + 2\overrightarrow{C_{13} C_{14}} - \overrightarrow{A_1 A_2} - \overrightarrow{A_4 A_5} + 2\overrightarrow{A_4 C_{10}}$ , c'est-à-dire la forme classique  $2\overrightarrow{C_{13} C_{14}} + (\overrightarrow{A_1 C_7} - \overrightarrow{C_7 A_2}) + (\overrightarrow{A_4 C_{10}} - \overrightarrow{C_{10} A_5})$ . Le vecteur  $\vec{V}$  est identique pour l'autre direction soit  $\vec{V} = 2\overrightarrow{C_{13} C_{15}} + (\overrightarrow{A_1 C_9} - \overrightarrow{C_9 A_3}) + (\overrightarrow{A_4 C_{12}} - \overrightarrow{C_{12} A_6})$ . On obtient alors  $N_{4004}$  immédiatement, soit :

$$N_{4004} = \frac{4}{5}(|\vec{U} \quad \overrightarrow{A_4 C_{12}} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}| + |\overrightarrow{A_4 C_{10}} \quad \vec{V} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}|) + \frac{8}{5}|\overrightarrow{A_4 C_{10}} \quad \overrightarrow{A_4 C_{12}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}|,$$

avec  $\vec{U} = 2\overrightarrow{C_{13} C_{14}} + (\overrightarrow{C_7 A_2} - \overrightarrow{A_1 C_7}) + (\overrightarrow{C_{10} A_5} - \overrightarrow{A_4 C_{10}})$  et le vecteur  $\vec{V}$  identique pour l'autre direction soit  $\vec{V} = 2\overrightarrow{C_{13} C_{15}} + (\overrightarrow{C_9 A_3} - \overrightarrow{A_1 C_9}) + (\overrightarrow{C_{12} A_6} - \overrightarrow{A_4 C_{12}})$ . Ces deux coefficients se composent donc de trois contributions, celles liées au rôle du centre et celle du coin opposé.

Avant de poursuivre, nous allons vérifier que ce coefficient est identique à celui trouvé pour l'élément complet lorsque l'on remplace les données manquantes par leurs valeurs, Rappelons que l'on avait comme coefficient :

$$N_{4001} = \frac{16}{5}|\overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{C_{13} C_{18}} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}| + \frac{8}{5}|\overrightarrow{A_1 C_7} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{C_{13} A_4}| + \frac{16}{5}|\overrightarrow{C_{13} C_{16}} \quad \overrightarrow{A_1 C_9} \quad \overrightarrow{A_1 C_{13}}|.$$

On remplace donc  $C_{16}$  et  $C_{18}$  par leurs expressions. On verra plus tard que :

$$4C_{16} = -(A_1 + A_2 + A_4 + A_5) + 2(C_7 + C_{10} + C_{13} + C_{14})$$

$$4C_{18} = -(A_1 + A_3 + A_4 + A_6) + 2(C_9 + C_{12} + C_{13} + C_{15}).$$

On calcule alors  $\overrightarrow{C_{13}C_{16}}$  et  $\overrightarrow{C_{13}C_{18}}$ . On a :

$$4\overrightarrow{C_{13}C_{16}} = -(A_1 + A_2 + A_4 + A_5) + 2(C_7 + C_{10} - C_{13} + C_{14})$$

$$\text{donc } 4\overrightarrow{C_{13}C_{16}} = 2\overrightarrow{C_{13}C_{14}} + \overrightarrow{A_1C_7} + \overrightarrow{A_2C_7} + \overrightarrow{A_4C_{10}} + \overrightarrow{A_5C_{10}},$$

$$4\overrightarrow{C_{13}C_{18}} = -(A_1 + A_3 + A_4 + A_6) + 2(C_9 + C_{12} - C_{13} + C_{15})$$

$$\text{donc } 4\overrightarrow{C_{13}C_{18}} = 2\overrightarrow{C_{13}C_{15}} + \overrightarrow{A_1C_9} + \overrightarrow{A_3C_9} + \overrightarrow{A_4C_{12}} + \overrightarrow{A_6C_{12}},$$

alors, en reportant, on a :

$$\begin{aligned} N_{4001}^{complet} &= \frac{4}{5} |\overrightarrow{A_1C_7} \quad 2\overrightarrow{C_{13}C_{15}} + \overrightarrow{A_1C_9} + \overrightarrow{A_3C_9} + \overrightarrow{A_4C_{12}} + \overrightarrow{A_6C_{12}} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}| \\ &\quad + \frac{8}{5} |\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4}| \\ &\quad + \frac{4}{5} |2\overrightarrow{C_{13}C_{14}} + \overrightarrow{A_1C_7} + \overrightarrow{A_2C_7} + \overrightarrow{A_4C_{10}} + \overrightarrow{A_5C_{10}} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}|, \end{aligned}$$

à comparer avec :

$$N_{4001}^{incomplet} = \frac{4}{5} (|\overrightarrow{U} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}| + |\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{V} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}|) + \frac{8}{5} |\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4}|,$$

et le résultat est établi, en effet, on trouve

$$\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{C_{13}C_{14}} + \overrightarrow{A_1C_7} + \overrightarrow{A_2C_7} + \overrightarrow{A_4C_{10}} + \overrightarrow{A_5C_{10}}$$

qui est bien le vecteur attendu, car ceci s'écrit également :

$$\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{C_{13}C_{14}} + (\overrightarrow{A_1C_7} - \overrightarrow{C_7A_2}) + (\overrightarrow{A_4C_{10}} - \overrightarrow{C_{10}A_5}),$$

et, de même, on retrouve le vecteur  $\overrightarrow{V}$ .

Il reste à décortiquer les coefficients  $N_{4002}$  et  $N_{4003}$ . On a :

$$20N_{4002} = 8N_{4001}^4 + 12N_{4002}^4 + 2N_{3000}^3 + 12N_{3001}^3 + 6N_{3002}^3 + 20N_{4002}^5,$$

soit :

$$10N_{4002} = 4N_{4001}^4 + 6N_{4002}^4 + N_{3000}^3 + 6N_{3001}^3 + 3N_{3002}^3 + 10N_{4002}^5,$$

ce qui donne 34 termes (!) que nous allons regrouper logiquement. La liste, *in extenso*, est la suivante :

$$\begin{aligned} &8|121| + 8|211| + 4|241| + 4|251| + 4|421| + 4|521| \\ &8|122| + 8|131| + 8|212| + 4|242| + 4|252| + 8|311| + 4|341| + 4|351| + 4|422| + 4|522| + 4|431| + 4|531| \\ &\quad 8|221| \\ &\quad 16|222| + 16|321| + 16|231| \\ &\quad 8|232| + 8|322| + 8|331| \\ &8|111| + 4|141| + 4|151| + 4|411| + 2|441| + 2|451| + 4|511| + 2|541| + 2|551|, \end{aligned}$$

et, au facteur 2 près :

$$\begin{aligned} &4|121| + 4|211| + 2|241| + 2|251| + 2|421| + 2|521| \\ &4|122| + 4|131| + 4|212| + 2|242| + 2|252| + 4|311| + 2|341| + 2|351| + 2|422| + 2|522| + 2|431| + 2|531| \\ &\quad 4|221| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8|222| + 8|321| + 8|231| \\
& 4|232| + 4|322| + 4|331| \\
& 4|111| + 2|141| + 2|151| + 2|411| + |441| + |451| + 2|511| + |541| + |551|.
\end{aligned}$$

On va maintenant regrouper logiquement les termes selon leur signification, soit :

$$\begin{aligned}
& \text{pour les termes en } |2..2| : 2(2|212| + |242| + |252| + 2|232| + 2|222|) \\
& \text{pour les termes en } |..22| : 2(2|122| + |422| + |522| + 2|222| + 2|322|) \\
& \text{pour le terme en } |..21| : 4|321| \\
& \text{pour le terme en } |..31| : 4|231|
\end{aligned}$$

et il reste uniquement les 25 termes suivants :

$$\begin{aligned}
& 4|121| + 4|211| + 2|241| + 2|251| + 2|421| + 2|521| \\
& 4|131| + 4|311| + 2|341| + 2|351| + 2|431| + 2|531| \\
& 4|221| + 4|321| + 4|231| + 4|331| \\
& 4|111| + 2|141| + 2|151| + 2|411| + |441| + |451| + 2|511| + |541| + |551|.
\end{aligned}$$

Trouver l'expression la plus significative, géométriquement parlant, du coefficient peut sembler être un casse-tête chinois, en fait , c'est plus simple qu'il n'y paraît car on sait qu'il faut chercher des relations avec des vecteurs comme  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ .

Rappelons en effet que l'on a introduit :

$$\vec{U} = 2(1) + (4) + (5) + 2(2) + 2(3) \text{ et } \vec{V} = 2(1) + (4) + (5) + 2(2) + 2(3)$$

et qu'il s'agit de faire apparaître ces deux vecteurs dans les sommes ci-dessus. Pour les deux premières expressions, on trouve tout simplement :

$$2|2\vec{V}2| \text{ et } 2|\vec{U}22|,$$

on va alors montrer (vérifier) que les 25 termes ci-dessus ne sont autre, à un facteur près, que  $|UV1|$ . On calcule donc ce déterminant, il vient :

$$|2(1) + (4) + (5) + 2(2) + 2(3) \quad 2(1) + (4) + (5) + 2(2) + 2(3) \quad 1|,$$

que l'on ouvre. Il vient :

$$\begin{aligned}
|2(1) + (4) + (5) + 2(2) + 2(3) \quad 2(1) \quad 1| &= 2|2(1) + (4) + (5) + 2(2) + 2(3) \quad 1 \quad 1|, \\
|2(1) + (4) + (5) + 2(2) + 2(3) \quad (4) + (5) \quad 1|, \\
|2(1) + (4) + (5) + 2(2) + 2(3) \quad 2(2) \quad 1| &= 2|2(1) + (4) + (5) + 2(2) + 2(3) \quad 2 \quad 1|, \\
|2(1) + (4) + (5) + 2(2) + 2(3) \quad 2(3) \quad 1| &= 2|2(1) + (4) + (5) + 2(2) + 2(3) \quad 3 \quad 1|,
\end{aligned}$$

et la vérification est immédiate, le facteur étant 1. En résumé on trouve comme coefficient :

$$2|\vec{U}22| + 2|2\vec{V}2| + 4|321| + 4|231| + |UV1|,$$

soit :

$$10N_{4002} = 4|\vec{U}22| + 4|2\vec{V}2| + 8|321| + 8|231| + 2|UV1|,$$

que l'on exprime en fonction des  $A_i$  et des  $C_i$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
N_{4002} &= \frac{1}{5}(4|\overrightarrow{A_4C_{10}} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}| + 4|\overrightarrow{A_1C_7} \quad \overrightarrow{A_4C_{12}} \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}| \\
&\quad + |U \quad V \quad \overrightarrow{A_1C_{13}}| \\
&\quad + 2|\vec{U} \quad \overrightarrow{A_1C_9} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4}| + 2|\overrightarrow{A_1C_7} \quad \vec{V} \quad \overrightarrow{C_{13}A_4}|),
\end{aligned}$$

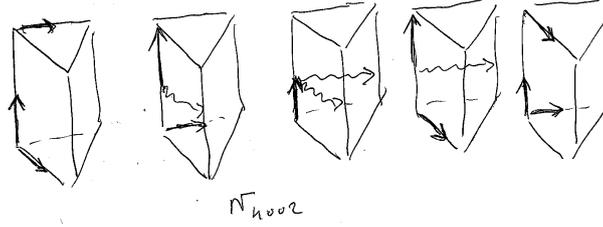


FIG. 10 – Les vecteurs impliqués dans le coefficient  $N_{4002}$ .

avec, rappelons le :

$$\vec{U} = \vec{U}_{200} = 2\overrightarrow{C_{13}C_{14}} + (\overrightarrow{A_1C_7} - \overrightarrow{C_7A_2}) + (\overrightarrow{A_4C_{10}} - \overrightarrow{C_{10}A_5})$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{200} = 2\overrightarrow{C_{13}C_{15}} + (\overrightarrow{A_1C_9} - \overrightarrow{C_9A_3}) + (\overrightarrow{A_4C_{12}} - \overrightarrow{C_{12}A_6}).$$

La notation  $\vec{U}_{200}$  fait référence au fait que ce vecteur contient des termes comme  $(\overrightarrow{A_1C_7} - \overrightarrow{C_7A_2})$  alors que pour analyser l'arête  $A_2A_5$  on trouvera l'inverse.

Le coefficient  $N_{4003}$  se déduit du précédent par symétrie.

Devant la technicité des calculs nous ne détaillons pas les coefficients liés aux faces ni même les coefficients internes.

### 6.2.3 Expression générale du jacobien

On repart des dérivées que l'on exprime de manière générique. Ainsi :

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = 2w(1-t)\overrightarrow{P_{1010}P_{0110}} + 2wt\overrightarrow{P_{1012}P_{0112}} + 2t(1-t)\overrightarrow{Q_{1001}Q_{0101}}$$

$$2u(1-t)\overrightarrow{P_{2000}P_{1100}} + 2v(1-t)\overrightarrow{P_{1100}P_{0200}} + 2ut\overrightarrow{P_{2002}P_{1102}} + 2vt\overrightarrow{P_{1102}P_{0202}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0200}P_{2000}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0202}P_{2002}},$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial v} &= 2w(1-t)\overrightarrow{P_{1010}P_{0110}} + 2wt\overrightarrow{P_{1012}P_{0112}} + 2t(1-t)\overrightarrow{P_{2001}P_{0201}} \\ &+ 2 \sum_{i+j+k=1}^{k=0} B_{ijk}^1(u, v, w) B_0^1(t) \Delta_{i+1, jk0}^{100} + 2 \sum_{i+j+k=1}^{k=0} B_{ijk}^1(u, v, w) B_1^1(t) \Delta_{i+1, jk2}^{100} \\ &+ t(1-t)\overrightarrow{P_{0200}P_{2000}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0202}P_{2002}}, \end{aligned}$$

de même :

$$\frac{\partial \theta}{\partial w} = 2v(1-t)\overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} + 2vt\overrightarrow{P_{1102}P_{0112}} + 2t(1-t)\overrightarrow{Q_{1001}Q_{0011}}$$

$$2u(1-t)\overrightarrow{P_{2000}P_{1010}} + 2w(1-t)\overrightarrow{P_{1010}P_{0020}} + 2ut\overrightarrow{P_{2002}P_{1012}} + 2wt\overrightarrow{P_{1012}P_{0022}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0020}P_{2000}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0022}P_{2002}},$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial w} &= 2v(1-t)\overrightarrow{P_{1100}P_{0110}} + 2vt\overrightarrow{P_{1102}P_{0112}} + 2t(1-t)\overrightarrow{P_{2001}P_{0021}} \\ &+ 2 \sum_{i+j+k=1}^{j=0} B_{ijk}^1(u, v, w) B_0^1(t) \Delta_{i+1, jk0}^{010} + 2 \sum_{i+j+k=1}^{j=0} B_{ijk}^1(u, v, w) B_1^1(t) \Delta_{i+1, jk2}^{010} \\ &+ t(1-t)\overrightarrow{P_{0020}P_{2000}} + t(1-t)\overrightarrow{P_{0022}P_{2002}}, \end{aligned}$$

tandis que :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \sum_{i+j+k=2}^{i, j, k \leq 1} B_{ijk}^2(u, v, w) \overrightarrow{P_{ijk0}P_{ijk,2}} + \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w) (1-2t) \overrightarrow{Q_{ijk0}Q_{ijk1}}$$

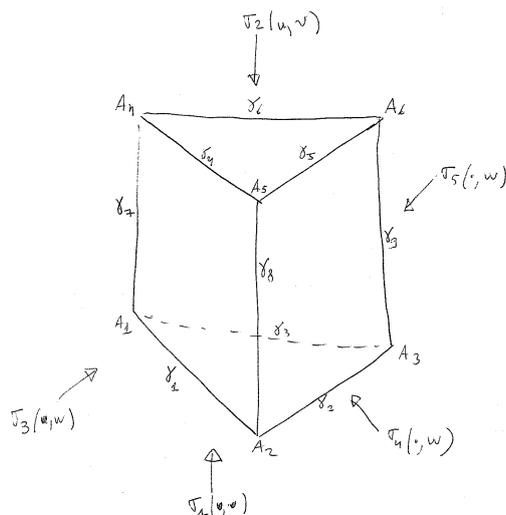


FIG. 11 – Numérotation des faces et des arêtes.

$$+ \sum_{\substack{i,j,k \neq 1 \\ i+j+k=2}} B_{ijk}^2(u, v, w) \overrightarrow{P_{ijk0}P_{ijk2}} + \sum_{i+j+k=1} B_{ijk}^1(u, v, w)(1-2t) \overrightarrow{Q_{ijk2}Q_{ijk1}}.$$

Il y a 196 termes, dont certains sont des sommes, à manipuler et à regrouper, on admettra sans difficulté que l'on évitera ce travail en trouvant une manière plus simple d'évaluer cet élément.

### 6.3 Construction effective de cet élément

Cet élément est entièrement défini par la seule donnée de ses 9 arêtes. Celles-ci permettent de construire les 5 faces qui, à leur tour, permettent de définir l'élément lui-même.

On va montrer que dégénérer un hexaèdre à 20 nœuds ne convient pas, que construire une interpolation directe ne convient pas non plus mais que construire les 3 nœuds manquants afin de définir un élément complet (comme pour le cas du quadrilatère de degré 2, voir [5]) est la solution que, d'ailleurs, on peut retrouver par simple identification.

#### 6.3.1 Interpolation transfinie dégénérée

Pour obtenir une construction par interpolation transfinie, on peut penser partir de l'hexaèdre à 20 nœuds, qui est lui même une interpolation transfinie, et essayer de le dégénérer. Rappelons que cet hexaèdre est défini par :

$$\begin{aligned} \theta(u, v, w) = \frac{1}{2} [ & (1-w)\sigma_1(u, v) + (1-v)\sigma_2(u, w) + (1-u)\sigma_3(v, w) \\ & + w\sigma_4(u, v) + v\sigma_5(u, w) + u\sigma_6(v, w) \\ & - ((1-u)(1-v)(1-w)A_1 + u(1-v)(1-w)A_2 \\ & + uv(1-w)A_3 + (1-u)v(1-w)A_4 + (1-u)(1-v)wA_5 \\ & + u(1-v)wA_6 + uvwA_7 + (1-u)vwA_8) ]. \end{aligned} \tag{15}$$

Chaque face est construite sur ses 4 arêtes,  $\gamma_i(\cdot)$ , par interpolation transfinie, par exemple pour la première face :

$$\begin{aligned} \sigma_1(u, v) = & (1-v)\gamma_1(u) + u\gamma_2(v) + v\gamma_3(u) + (1-u)\gamma_4(v) \\ & - \{(1-u)(1-v)A_1 + u(1-v)A_2 + uvA_3 + (1-u)vA_4\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Dégénérer cet élément revient à imposer :

$$A_3 = A_4 \text{ et } A_7 = A_8 \text{ puis } \gamma_3(u) = A_4 \text{ et } \gamma_7(u) = A_8 \text{ et enfin } \gamma_{11}(w) = \gamma_{12}(w).$$

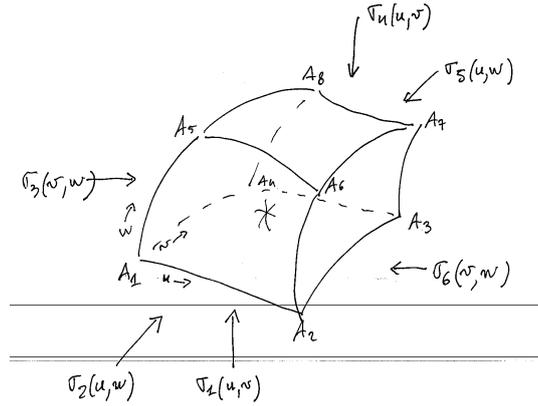


FIG. 12 – Définition de l'élément hexaédrique à partir de ses 6 faces par interpolation transfinie.

Explicitons alors les six faces de la formule générale. On a, pour la première face, i.e.,  $w = 0$  :

$$\begin{aligned} \sigma_1(u, v) &= (1 - v)\gamma_1(u) + u\gamma_2(v) + v\gamma_3(u) + (1 - u)\gamma_4(v) \\ &- \{(1 - u)(1 - v)A_1 + u(1 - v)A_2 + uvA_3 + (1 - u)vA_4\}, \end{aligned}$$

qui devient simplement :

$$\sigma_1(u, v) = (1 - v)\gamma_1(u) + u\gamma_2(v) + (1 - u)\gamma_4(v) - (1 - u)(1 - v)A_1 - u(1 - v)A_2.$$

De manière similaire, la face quatre, i.e.,  $w = 1$ , s'écrit :

$$\sigma_4(u, v) = (1 - v)\gamma_5(u) + u\gamma_6(v) + (1 - u)\gamma_8(v) - (1 - u)(1 - v)A_5 - u(1 - v)A_6.$$

La face deux, i.e.,  $v = 0$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_2(u, w) &= (1 - w)\gamma_1(u) + u\gamma_{10}(w) + w\gamma_5(u) + (1 - u)\gamma_9(w) \\ &- \{(1 - u)(1 - w)A_1 + u(1 - w)A_2 + uwA_6 + (1 - u)wA_5\}. \end{aligned}$$

La face cinq, i.e.,  $v = 1$ , est similaire, avant dégénérescence :

$$\begin{aligned} \sigma_5(u, w) &= (1 - w)\gamma_3(u) + u\gamma_{11}(w) + w\gamma_7(u) + (1 - u)\gamma_{12}(w) \\ &- \{(1 - u)(1 - w)A_4 + u(1 - w)A_3 + uwA_7 + (1 - u)wA_8\}, \end{aligned}$$

puis, après dégénérescence :

$$\begin{aligned} \sigma_5(u, w) &= (1 - w)A_4 + u\gamma_{12}(w) + wA_8 + (1 - u)\gamma_{12}(w) \\ &- \{(1 - u)(1 - w)A_4 + u(1 - w)A_4 + uwA_8 + (1 - u)wA_8\}, \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$\sigma_5(u, w) = \gamma_{12}(w).$$

Enfin, la face trois, i.e.,  $u = 0$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_3(v, w) &= (1 - w)\gamma_4(v) + v\gamma_{12}(w) + w\gamma_8(v) + (1 - v)\gamma_9(w) \\ &- \{(1 - v)(1 - w)A_1 + v(1 - w)A_4 + vwA_8 + (1 - v)wA_5\}, \end{aligned}$$

et la face six, i.e.,  $u = 1$ , a la même forme :

$$\begin{aligned} \sigma_6(v, w) &= (1 - w)\gamma_2(v) + v\gamma_{11}(w) + w\gamma_6(v) + (1 - v)\gamma_{10}(w) \\ &- \{(1 - v)(1 - w)A_2 + v(1 - w)A_3 + vwA_7 + (1 - v)wA_6\}, \end{aligned}$$

soit, au final :

$$\begin{aligned} \sigma_6(v, w) &= (1 - w)\gamma_2(v) + v\gamma_{12}(w) + w\gamma_6(v) + (1 - v)\gamma_{10}(w) \\ &- \{(1 - v)(1 - w)A_2 + v(1 - w)A_4 + vwA_8 + (1 - v)wA_6\}. \end{aligned}$$

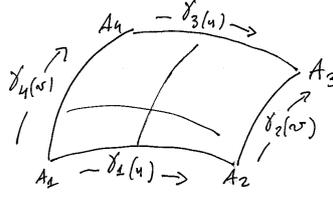


FIG. 13 – Définition d'une face de l'élément hexaédrique, ici la première, à partir de ses 4 arêtes par interpolation transfinie.

Il suffit maintenant de reporter ces expressions dans la formule générale. Il vient :

$$\begin{aligned} \theta(u, v, w) = & \frac{1}{2} [(1-w)\sigma_1(u, v) + (1-v)\sigma_2(u, w) + (1-u)\sigma_3(v, w) \\ & + w\sigma_4(u, v) + v\gamma_{12}(w) + u\sigma_6(v, w) \\ & - ((1-u)(1-v)(1-w)A_1 + u(1-v)(1-w)A_2 \\ & + v(1-w)A_4 + (1-u)(1-v)wA_5 \\ & + u(1-v)wA_6 + vwA_8)], \end{aligned}$$

que l'on renumérote comme sur la Figure 11, on a alors :

$$\begin{aligned} \theta(u, v, w) = & \frac{1}{2} [(1-w)\sigma_1(u, v) + (1-v)\sigma_3(u, w) + (1-u)\sigma_5(v, w) \\ & + w\sigma_2(u, v) + v\gamma_9(w) + u\sigma_4(v, w) \\ & - ((1-u)(1-v)(1-w)A_1 + u(1-v)(1-w)A_2 \\ & + v(1-w)A_3 + (1-u)(1-v)wA_4 \\ & + u(1-v)wA_5 + vwA_6)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Ensuite, on exprime les courbes en fonction de leurs expressions. Par exemple, on a :

$$\gamma_1(u) = (1-u)(1-2u)A_1 + 4u(1-u)A_7 + u(2u-1)A_2,$$

et des expressions similaires pour les autres arêtes.

Il est facile de vérifier que  $\theta(u, v, w)$  passe par les sommets, les arêtes et les faces en instanciant le triplet  $(u, v, w)$  voulu. Ainsi, du point de vue géométrique, cette méthode donne un résultat satisfaisant.

Par contre, on vérifie également que cette définition n'est pas identique à celle de l'élément fini. Par exemple, si on cherche le polynôme facteur de  $A_7$ , calcul le plus simple à mener, on ne retrouve pas  $p_7$ . Ceci était prévisible au sens où, du point de vue élément fini, la dégénérescence de l'hexaèdre conduit à **deux jacobiens strictement nuls**, ceux des deux sommets dégénérés. Cette observation rend légitimement suspicieuse toute méthode d'élément fini basée sur une quelconque dégénérescence.

### 6.3.2 Interpolation transfinie directe

On regarde ici une autre définition possible. Une face triangulaire est définie par, [2] (Relation (4.7), Chapitre 4) :

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) = & (1-u-v)\{\gamma_1(u) + \gamma_3(v)\} + u\{\gamma_1(u+v) + \gamma_2(v)\} + v\{\gamma_3(u+v) + \gamma_2(1-u)\} \\ & - \{(1-u-v)A_1 + uA_2 + vA_3\}. \end{aligned}$$

qui s'écrit également :

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) = & (1-u-v)\{\gamma_1(u) + \gamma_3(v) - A_1\} + u\{\gamma_1(u+v) + \gamma_2(v) - A_2\} \\ & + v\{\gamma_3(u+v) + \gamma_2(1-u) - A_3\}. \end{aligned}$$

Une face quadrilatérale est définie par interpolation transfinie classique :

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= (1-v)\gamma_1(u) + u\gamma_2(v) + v\gamma_3(u) + (1-u)\gamma_4(v) \\ &- \{(1-u)(1-v)A_1 + u(1-v)A_2 + uvA_3 + (1-u)vA_4\}. \end{aligned}$$

Le pentaèdre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \theta(u, v, w) &= \frac{1}{2} [(1-w)\sigma_1(u, v) + (1-u-v)\{\sigma_3(u, w) + \sigma_5(v, w)\} + u\{\sigma_3(u+v, w) + \sigma_4(v, w)\} \\ &\quad + w\sigma_2(u, v) + v\{\sigma_5(u+v, w) + \sigma_4(1-u, w)\} \\ &\quad - \{(1-u-v)(1-w)A_1 + u(1-w)A_2 + v(1-w)A_3 \\ &\quad + (1-u-v)wA_4 + uwA_5 + vwA_6\}]. \end{aligned}$$

Dans cette expression, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_1(u, v) &= (1-u-v)\{\gamma_1(u) + \gamma_3(v) - A_1\} + u\{\gamma_1(u+v) + \gamma_2(v) - A_2\} \\ &\quad + v\{\gamma_3(u+v) + \gamma_2(1-u) - A_3\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2(u, v) &= (1-u-v)\{\gamma_4(u) + \gamma_6(v) - A_4\} + u\{\gamma_4(u+v) + \gamma_5(v) - A_5\} \\ &\quad + v\{\gamma_6(u+v) + \gamma_5(1-u) - A_6\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3(u, w) &= (1-w)\gamma_1(u) + u\gamma_8(w) + w\gamma_4(u) + (1-u)\gamma_7(w) \\ &- \{(1-u)(1-w)A_1 + u(1-w)A_2 + uwA_5 + (1-u)wA_4\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3(u+v, w) &= (1-w)\gamma_1(u+v) + (u+v)\gamma_8(w) + w\gamma_4(u+v) + (1-u-v)\gamma_7(w) \\ &- \{(1-u-v)(1-w)A_1 + (u+v)(1-w)A_2 + (u+v)wA_5 + (1-u-v)wA_4\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_4(v, w) &= (1-w)\gamma_2(v) + v\gamma_9(w) + w\gamma_5(v) + (1-v)\gamma_8(w) \\ &- \{(1-v)(1-w)A_2 + v(1-w)A_3 + vwA_6 + (1-v)wA_5\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_4(1-u, w) &= (1-w)\gamma_2(1-u) + (1-u)\gamma_9(w) + w\gamma_5(1-u) + u\gamma_8(w) \\ &- \{u(1-w)A_2 + (1-u)(1-w)A_3 + (1-u)wA_6 + uwA_5\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_5(v, w) &= (1-w)\gamma_3(v) + v\gamma_9(w) + w\gamma_6(v) + (1-v)\gamma_7(w) \\ &- \{(1-v)(1-w)A_1 + v(1-w)A_3 + vwA_6 + (1-v)wA_4\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_5(u+v, w) &= (1-w)\gamma_3(u+v) + (u+v)\gamma_9(w) + w\gamma_6(u+v) + (1-u-v)\gamma_7(w) \\ &- \{(1-u-v)(1-w)A_1 + (u+v)(1-w)A_3 + (u+v)wA_6 + (1-u-v)wA_4\}. \end{aligned}$$

Ensuite, on exprime les courbes en fonction de leurs expressions. Par exemple, on a :

$$\gamma_1(u) = (1-u)(1-2u)A_1 + 4u(1-u)A_7 + u(2u-1)A_2,$$

et des expressions similaires pour les autres arêtes.

Il est facile de vérifier que  $\theta(u, v, w)$  passe par les sommets, les arêtes et les faces en instanciant le triplet  $(u, v, w)$  voulu.

Par contre, on vérifie également que cette définition n'est pas identique à celle de l'élément fini. Par exemple, si on cherche le polynôme facteur de  $A_7$ , calcul le plus simple à mener, on ne retrouve pas  $p_7$ .

En conclusion, nous n'avons pas réussi à montrer ce que nous supposions *a priori*.

### 6.3.3 Par élimination

Dans ce type de définition, on regarde ce que l'on a fait pour le quadrilatère à 9 nœuds afin de définir le quadrilatère à 8 nœuds, cf. [5]. Dans ce cas, on a calculé le point, noté  $A_9$ , image par la transformation réduite, du couple  $(0, 0)$  puis on a construit un élément complet ayant ce point comme neuvième nœud ce qui nous a permis de calculer le point de contrôle  $C_9$ . On va suivre la même idée en calculant, pour l'élément réduit, trois points, notés  $A_{16}$ ,  $A_{17}$  et  $A_{18}$  qui nous serviront de nœuds pour l'élément complet et permettront de calculer les 3 points de contrôle  $C_{16}$ ,  $C_{17}$  et  $C_{18}$ .

Prenant le cas de  $A_{16}$  qui correspond au triplet  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ , on a :

$$A_{16} = -\frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_4 + A_5) + \frac{1}{2}(A_7 + A_{10} + A_{13} + A_{14})$$

De la même façon, on définit :

$$A_{17} = -\frac{1}{4}(A_2 + A_3 + A_5 + A_6) + \frac{1}{2}(A_8 + A_{15} + A_{11} + A_{14})$$

et :

$$A_{18} = -\frac{1}{4}(A_1 + A_3 + A_4 + A_6) + \frac{1}{2}(A_9 + A_{15} + A_{12} + A_{13})$$

À partir de ces expressions, on peut chercher les différents polynômes en regroupant les contributions. Par exemple, pour le coefficient en  $A_7$ , on trouve le polynôme, noté  $q_7$ , suivant :

$$q_7 = p_7 + \frac{p_{16}}{2},$$

et, on trouve ainsi :

$$4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}(1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z}) + 8(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}\hat{z}(1 - \hat{z}),$$

soit :

$$4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}(1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z} + 2\hat{z}) = 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}(1 - \hat{z}),$$

qui est le résultat cherché. À titre de vérification supplémentaire, on va calculer  $q_1$ . Le coefficient en  $A_1$  vient de  $p_1$  directement par  $A_1$  et de  $p_{16}$  avec le poids  $-\frac{1}{4}$  et enfin de  $p_{18}$  avec le même poids. Par suite, on regarde la combinaison

$$q_1 = p_1 - \frac{p_{16}}{4} - \frac{p_{18}}{4},$$

et un simple calcul montre que l'on retrouve bien le résultat attendu. Le dernier cas, un polynôme associé à un nœud d'une arête commune à deux faces quadrilatérales se traite de manière identique. On a ici une combinaison de trois termes, par exemple pour valider  $q_{13}$  on regarde la combinaison :

$$q_{13} = p_{13} + \frac{p_{16}}{2} + \frac{p_{18}}{2},$$

qui conduit au résultat cherché.

Notre conclusion est sans surprise, l'élément réduit se construit à partir de l'élément complet en imposant ces positions de points pour les nœuds manquants. Notons que, ces nœuds étant fixés, on trouve facilement les points de contrôle manquants.

### 6.3.4 Une solution équivalente par identification directe

On va ici traiter le même problème mais à l'envers, on note  $q_i$  les 15 polynômes de l'élément réduit. Construire ces  $q_i$  revient à répartir les  $p_i$  (de l'élément complet) convenablement. Il est facile de voir que nous trouvons seulement trois cas, il s'agit donc de trouver des coefficients, s'ils existent, tels que :

$$\begin{aligned} q_7 &= p_7 + \alpha_7 p_{16} \\ q_{13} &= p_{13} + \alpha_{13} p_{16} + \beta_{13} p_{18} \\ q_1 &= p_1 + \alpha_1 p_{16} + \beta_1 p_{18}, \end{aligned}$$

pour prendre un seul exemple de chacun des trois cas (arête "quad-tri", arête "quad-quad" et sommet).

Un simple calcul donne ces coefficients,  $\alpha_7 = \alpha_{13} = \beta_{13} = \frac{1}{2}$  et  $\alpha_1 = \beta_1 = -\frac{1}{4}$ . Par suite, si on impose :

$$A_{16} = \frac{1}{2}(A_7 + A_{10} + A_{13} + A_{14}) - \frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_4 + A_5),$$

et des relations analogues pour  $A_{17}$  et  $A_{18}$ , on arrive à éliminer les trois derniers nœuds et on passe du pentaèdre complet au pentaèdre réduit.

Une fois ces trois nœuds définis, on calcule les points de contrôle manquants en posant le système de trois équations à trois inconnues correspondant. On retrouve donc exactement le processus de construction par élimination vu ci-dessus.

## 6.4 En pratique

Pour valider un élément pentaédrique de degré 2 à 15 nœuds, on calcule les 3 nœuds manquants puis les points de contrôle et les 6 jacobiens coins. S'ils sont strictement positifs, on se ramène au cas de l'élément à 18 nœuds et on calcule alors les 84 coefficients restants qui doivent être positifs ou nuls, bon courage encore. Utiliser la formule en Bézier incomplet et calculer ses dérivées est aussi une solution qui, toutefois, est vraiment techniquement fastidieuse comme on l'a vu.

## 7 Vers une définition de la qualité d'un élément

**Distorsion du jacobien.** On définit  $Q_{\mathcal{J}}(K)$  par :

$$Q_{\mathcal{J}}(K) = \frac{\min_K \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})}{\max_K \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})}.$$

Ce critère permet de quantifier l'écart entre un élément R2 et l'élément R1 correspondant (construits sur ses seuls sommets). En pratique, on ne sait pas calculer efficacement ce critère, certains auteurs utilisent simplement les jacobiens des nœuds. Cependant, on peut utiliser les extrema des "points" de contrôle du jacobien (les  $N_{ijk}$ ) et définir  $Q_{\mathcal{J}}(K)$  par :

$$Q_{\mathcal{J}}(K) = \frac{\min_{ijk} N_{ijk}}{\max_{ijk} N_{ijk}}.$$

**Vers un critère de qualité purement géométrique.** On a ici deux difficultés à résoudre puisque l'élément n'est pas simplicial et, de plus, est courbe.

L'idée est de quantifier la qualité avec plusieurs objectifs, la continuité d'un élément droit à un élément courbe, la continuité d'un élément pentaédrique à un élément simplicial (cas d'un maillage mixte) et la faculté de bien caractériser et différencier les éléments entre eux.

La mesure classique pour les simplexes,  $Q = \alpha \frac{h}{\rho}$  où  $h$  est le diamètre,  $\rho$  est le rayon inscrit et  $\alpha$  un coefficient de normalisation ne peut être utilisé ici car on ne sait pas définir<sup>8</sup>  $\rho$ . Par conséquent, on va partir d'une définition (en forme) de la forme rapport des longueurs (d'arêtes ou de diagonales) avec le volume. Nous proposons donc la forme générale suivante :

$$Q_F = \alpha \frac{h S_{max}}{V_{min}},$$

avec, en R1 :

- $h$ , dit le diamètre de l'élément, évalué comme la plus grande distance entre deux nœuds,
- $S_{max}$  la plus grande surface des triangles formés par les faces triangulaires et les différents découpages des faces quadrilatérales du bord de l'élément,
- $V_{min}$  le volume du plus petit tétraèdre des six découpages en 3 de l'élément.

et, avec, en R2 :

- $h$ , dit le diamètre de l'élément, évalué comme la plus grande distance entre deux nœuds,
- $S_{max}$  la plus grande surface des triangles formés par les différents découpages des faces triangulaires et des sous-faces quadrilatérales du bord de l'élément,
- $V_{min}$  le volume du plus petit tétraèdre des découpages en 5 des sous-éléments (R1) du découpage de l'élément (R2) en considérant les points de Bézier.

## 8 Conclusion

On a discuté de la validité des éléments pentaédrique de degré 1 et 2. Bien que construits simplement via un produit tensoriel, ces éléments se révèlent assez délicats à analyser même au degré 1, seule une formulation via des formes de Bézier permet en pratique de conclure avec, toutefois, une condition suffisante seulement sauf pour un R1 à faces (quadrilatérales) planes ou on a une condition nécessaire et suffisante. Pour le R2 complet à 18 nœuds, on a

<sup>8</sup>On pourrait considérer le maximum du rayon de tout cercle inscrit mais, en pratique, c'est peu réaliste.

90 coefficients à calculer et à évaluer. Pour le R2 incomplet, on propose de se ramener au cas précédent, l'analyse directe de la forme incomplète se révélant fastidieuse. Par ailleurs, une méthode alternative existe qui consiste à contrôler tous les déterminants construits sur tous les vecteurs de chaque direction (avec une finesse pour l'élément incomplet quant à la définition des vecteurs *a priori* non naturels comme les fameux  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  introduits lors de la discussion).

## Références

- [1] P. BÉZIER, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, 4, Hermès, Paris, 1986.
- [2] P.J. FREY AND P.L. GEORGE, *Mesh Generation*, 2<sup>nd</sup> édition, ISTE and Wiley, 2008.
- [3] P.L. GEORGE, H. BOROUCAKI ET P. LAUG, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 1 : Triangle P2, *RR INRIA* 7519, 2011.
- [4] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2, *RR INRIA* 7909, 2012.
- [5] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2, version 2, *RR INRIA* 7964, 2012.
- [6] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Sur les éléments finis hexaédriques de degré 1 et 2, *RR INRIA* xxxx, à paraître, 2012.
- [7] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 3 : Tétraèdre P2, *RR INRIA* 7626, 2011.
- [8] P.G. CIARLET, *The Finite Element Method*, North Holland, 1978.
- [9] P.G. CIARLET, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, in Handbook of Numerical Analysis, vol II, Finite Element methods (Part 1), P.G. Ciarlet and J.L. Lions Eds, North Holland, 17-352, 1991.

## Annexe

Dans cette annexe, on donne, en pseudo-code, deux algorithmes de calcul des coefficients de l'élément à 18 nœuds. Dans le premier, on énumère les différents triplets en  $i, j, k$  et  $l$  qui interviennent pour le calcul du coefficient  $N_{IJKL}$  puis on effectue le calcul proprement dit, dans le second, on calcule directement de manière nettement plus fine.

### Énumération puis calculs.

1.1 - Trouver les triplets en I,J,K :

-----

Input : I, J et K

1.1.1 - Trouver les cas en i:

-----

indice = 0

Faire pour i\_1 = 0,1

    indice = indice + 1

    tabi\_1(indice) = i\_1

Fin faire

nbri\_1 = indice

indice = 0

Faire pour i\_2 = 0,1

    indice = indice + 1

    tabi\_2(indice) = i\_2

Fin faire

nbri\_2 = indice

indice = 0

Faire pour i\_3 = 0,2

    indice = indice + 1

```

    tabi_2(indice) = i_3
Fin faire
nbri_3 = indice
1.1.2 - Trouver les cas en j:
-----
indice = 0
Faire pour j_1 = 0,1
    indice = indice + 1
    tabj_1(indice) = j_1
Fin faire
nbrj_1 = indice
indice = 0
Faire pour j_2 = 0,1
    indice = indice + 1
    tabj_2(indice) = j_2
Fin faire
nbrj_2 = indice
indice = 0
Faire pour j_3 = 0,2
    indice = indice + 1
    tabj_3(indice) = j_3
Fin faire
nbrj_3 = indice
1.1.3 - Trouver les cas en k:
-----
indice = 0
Faire pour k_1 = 0,1
    indice = indice + 1
    tabk_1(indice) = k_1
Fin faire
nbrk_1 = indice
indice = 0
Faire pour k_2 = 0,1
    indice = indice + 1
    tabk_2(indice) = k_2
Fin faire
nbrk_2 = indice
indice = 0
Faire pour k_3 = 0,2
    indice = indice + 1
    tabk_3(indice) = k_3
Fin faire
nbrk_3 = indice

1.2 - Trouver les triplets en L :
-----
Input : L
indice = 0
Faire pour l_1 = 0,2
    Faire pour l_2 = 0,2
        Faire pour l_3 = 0,1
            S = l_1 + l_2 + l_3
            Si S = L alors
                indice = indice + 1
                tabi(1,indice) = l_1
                tabi(2,indice) = l_2
                tabi(3,indice) = l_3

```

```

    Fin si
  Fin faire
  Fin faire
Fin faire
nbrindice_1 = indice

```

Ensuite, on construit les coefficient  $N_{IJKL}$  au facteur 8 près.

Input: nbri\_1, nbri\_2, nbri\_3, nbrj\_1, ..., nbrk\_3, nbrindice\_1 et les  $P_{\{ijkl\}}$

nbre = 0

$N_{\{IJKL\}} = 0$  pour  $I+J+K=4$  et  $L=0,5$

Faire pour ii\_1=1,nbri\_1

  i\_1 = tabi\_1(ii\_1)

  Faire pour ii\_2=1,nbri\_2

    i\_2 = tabi\_2(ii\_2)

    Faire pour ii\_3=1,nbri\_3

      i\_3 = tabi\_3(ii\_3)

      I = i\_1 + i\_2 + i\_3

  Faire pour jj\_1=1,nbrj\_1

    j\_1 = tabj\_1(jj\_1)

    Faire pour jj\_2=1,nbrj\_2

      j\_2 = tabj\_2(jj\_2)

      Faire pour jj\_3=1,nbrj\_3

        j\_3 = tabj\_3(jj\_3)

        J = j\_1 + j\_2 + j\_3

  Faire pour kk\_1=1,nbrk\_1

    k\_1 = tabk\_1(kk\_1)

    Faire pour kk\_2=1,nbrk\_2

      k\_2 = tabk\_2(kk\_2)

      Faire pour kk\_3=1,nbrk\_3

        k\_3 = tabk\_3(kk\_3)

        K = k\_1 + k\_2 + k\_3

  Faire pour l=1,nbrindice\_1

    l\_1 = tabl(1,l)

    l\_2 = tabl(2,l)

    l\_3 = tabl(3,l)

    L = l\_1 + l\_2 + l\_3

  Si ( i\_1 + j\_1 + k\_1 = 1 ) faire

    Si ( i\_2 + j\_2 + k\_2 = 1 ) faire

      Si ( i\_3 + j\_3 + k\_3 = 2 ) faire

        coef = ( C2(i\_3 j\_2 k\_3) C2(l\_1) C2(l\_2) )

        coef = coef / ( C4(IJK) C5(L) )

  DET = | P\_{ i\_1 +1, j\_1, k\_1, l\_1 } P\_{ i\_1, j\_1 +1, k\_1, l\_1 }  
  P\_{ i\_2 +1, j\_2, k\_2, l\_2 } P\_{ i\_2, j\_2, k\_2 +1, l\_2 }  
  P\_{ i\_3, j\_3, k\_3, l\_3 } P\_{ i\_3, j\_3, k\_3, l\_3 +1 } |

$N_{\{IJKL\}} = N_{\{IJKL\}} + coef * DET$

    nbre = nbre + 1

  Fin si

Fin si

```

                Fin si
            Fin faire
        Fin faire
    Fin faire
Fin faire

```

On vérifie que *nbre* vaut 972.

En conclusion, un programme relativement simple permet les calculs voulus. Notons que trouver les coefficients pour un degré, *d*, autre que 2 se fait exactement de la même façon en adaptant ce qui précède.

### Calculs directs.

```

Input: les P_{ijkl}

nbre = 0
N_{IJKL} = 0 pour I+J+K=4 et L=0,5

Faire pour i_1=0,1
  Faire pour j_1=0,1-i_1
    Faire pour k_1=0,1-i_1-j_1
      Faire pour i_2=0,1
        Faire pour j_2=0,1-i_2
          Faire pour k_2=0,1-i_2-j_2
            Faire pour i_3=0,2
              Faire pour j_3=0,2-i_3
                Faire pour k_3=0,2-i_3-j_3
                  I = i_1 + i_2 + i_3
                  J = j_1 + j_2 + j_3
                  K = k_1 + k_2 + k_3
                  Faire pour l_1=0,2
                    Faire pour l_2=0,2
                      Faire pour l_3=0,1
                        L = l_1 + l_2 + l_3

                        coef = ( C2(i_3 j_2 k_3) C2(l_1) C2(l_2) )
                        coef = coef / ( C4(IJK) C5(L) )

DET = | P_{ i_1 +1, j_1, k_1, l_1} P_{ i_1, j_1 +1, k_1, l_1}
        P_{ i_2 +1, j_2, k_2, l_2} P_{ i_2, j_2, k_2 +1, l_2}
        P_{ i_3, j_3, k_3, l_3} P_{ i_3, j_3, k_3, l_3 +1} |

N_{IJKL} = N_{IJKL} + coef * DET
nbre = nbre + 1

                Fin faire
            Fin faire
        Fin faire
    Fin faire
Fin faire

```

Fin faire  
Fin faire  
Fin faire  
Fin faire  
Fin faire  
Fin faire  
Fin faire

Pour conclure, il est plus facile de calculer tous les coefficients que tel ou tel.



**RESEARCH CENTRE  
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt  
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher  
Inria  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex  
[inria.fr](http://inria.fr)

ISSN 0249-6399