HAL open science

Trajectoires rugueuses

Antoine Lejay

To cite this version:

Antoine Lejay. Trajectoires rugueuses. Matapli, 2012, 98, pp.119-134. hal-00701211

HAL Id: hal-00701211

https://inria.hal.science/hal-00701211v1

Submitted on 24 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Trajectoires rugueuses

Antoine LEJAY * † ‡ §

DATE — 17 mai 2012

RÉSUMÉ — Cet article donne un très bref survol des principales idées de la théorie des trajectoires rugueuses qui permet d'intégrer des formes différentielles le long de trajectoires irrégulières, et de considérer des équations différentielles contrôlées par des trajectoires irrégulières, typiquement des trajectoires de processus stochastiques.

MOTS CLEFS — Trajectoires rugueuses (*rough paths*) ; équations différentielles, séries de Chen.

1. Introduction

La théorie des trajectoires rugueuses (TR) ou *rough paths* a été initiée à la fin des années 1990 par T. Lyons (Oxford University) [9, 12, 17, 19, 20, 22]. Elle suite à des travaux sur la simulation numérique des solutions des équations différentielles stochastiques (EDS) [11], mais dépasse très largement ce cadre. Elle est nourrie par de nombreux domaines avec lesquels elle reste en connexion : vision algébrique des équations différentielles, méthodes numériques, géométrie différentielle, processus stochastiques, théorie du contrôle, ...

Considérons un chemin x à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, continu mais irrégulier, par exemple α-Hölder continu ou à p-variation finie. La théorie des TR permet de définir l'intégrale

$$y_t = \int_{x_{|[0,t]}} f = \int_0^t f(x_s)\mathrm{d}x_s \tag{1}$$

pour une forme différentielle f et partant la solution de l'équation différentielle contrôlée

$$z_t = a + \sum_{i=1}^d \int_0^t g_i(z_s)\mathrm{d}x_s^i = a + \int_0^t g(z_s)\mathrm{d}x_s,\ z_t \in \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

pour une famille de champs de vecteurs g assez réguliers de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^m$. Les applications $x \mapsto y$ et $x \mapsto z$ sont continues dans les espaces fonctionnels appropriés. Si x est

*Université de Lorraine, IECN, UMR 7502, Vandœuvre-lès-Nancy, F-54500, France
†CNRS, IECN, UMR 7502, Vandœuvre-lès-Nancy, F-54500, France
‡Inria, Villers-lès-Nancy, F-54600, France
§Contact : `Antoine.Lejay@iecn.u-nancy.fr`

un chemin régulier, alors y n'est autre que l'intégrale de f le long de x, et z est solution de l'EDO $\dot{z}_t = g(z_t)\dot{x}_t$ avec $z_0 = a$. Autrement dit, il s'agit d'une extension « naturelle » des intégrales usuelles et des EDO contrôlées. Cette propriété est particulièrement intéressante en terme de simulation et d'analyse.

Les équations de type (2) sont courantes en modélisation stochastique, où x joue le rôle de bruit. Un cas particulier mais ubiquitaire est celui des EDS où x est une trajectoire (aléatoire) du *mouvement brownien*. Nous savons qu'elle est α-Hölder continue dès que $\alpha < 1/2$, mais n'est presque sûrement jamais plus régulière que cela.

Bien entendu, à moins que x ne soit de classe $\mathscr{C}^1$, la difficulté est de définir le sens à donner à « $\mathrm{d}x_s$ » dans (2). Dans le cas du mouvement brownien, la réponse classique est alors de définir $\int_0^t f(x_s)\mathrm{d}x_s$ et $\int_0^t g(z_s)\mathrm{d}x_s$ en tant qu'intégrales stochastiques au sens d'Itô ou de Stratonovich, c'est-à-dire comme limites *en probabilité* de sommes de Riemann. Il n'est *a priori* pas possible de considérer une définition trajectorielle de (1) ou (2).

La réponse apportée par T. Lyons est de considérer une intégrale qui ne soit pas dirigée par x mais par une extension $\mathbf{x}$ de x à valeurs dans un espace non-commutatif. Ce chemin, appelé *trajectoire rugueuse*, dévoile de l'information « cachée » qui correspond à l'équivalent des intégrales du chemin contre lui-même. À un même chemin x peuvent être associées plusieurs choix de $\mathbf{x}$, qui donneront des intégrales différentes.

Une fois que l'on a réussi à construire $\mathbf{x}$, on dispose de tous les résultats de la théorie des TR. Par exemple, cela permet de considérer très facilement des EDS conduites par d'autres processus que le brownien ou les semi-martingales, donc hors du cadre des intégrales stochastiques au sens d'Itô ou de Stratonovich. Et cela sans avoir besoin de construire une théorie *ad hoc* pour chaque classe de processus. Il est ainsi possible de se focaliser uniquement sur la construction des TR. Même dans le cadre brownien, cette théorie reste avantageuse pour certaines applications — grandes déviations ou simulation numérique — du fait de la propriété de continuité.

Cet article se veut donc une très brève introduction à la théorie des trajectoires rugueuses. Il ne peut être exhaustif, sa bibliographie est incomplète, et nous ne traiterons pas du cas de la construction des TR. Le lecteur intéressé pourra ensuite consulter

- L'article originel de T. Lyons [20], le livre [22] et les notes de cours de l'école d'été des probabilités de Saint-Flour [21] ;
- L'article de synthèse [19] qui expose les idées présentées dans [20–22].
- L'article de M. Gubinelli [12], qui présente les TR sous un angle algébrique ;
- L'article de A.M. Davie [6] qui donne une construction alternative à la solution d'équations différentielles rugueuses, ainsi que l'article [1] d'I. Bailleul qui est centré sur les propriétés de flot ;
- Le livre de P. Friz et N. Victoir [9], qui s'appuie sur une approche par régularisation des chemins et les idées de [6] ;

- L'article de D. Feyel et A. de la Pradelle qui repose sur l'utilisation de la formule de Green-Riemann [8] ;
- L'article de synthèse [17] ainsi qui reprend les idées de [8] mélangées avec celles de [20], et dont le présent article s'inspire.

2. Le problème de la continuité pour les intégrales de formes différentielles

Soit $f(x) := \sum_{i=1}^{d} f_i(x)\mathrm{d}x^i$ est forme différentielle $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Considérons $x \in \mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d)$ un chemin régulier. L'intégrale de f le long de $x_{|[0,T]}$ est $\int_{x_{|[0,T]}} f := \int_0^T f_i(x_s)\mathrm{d}x_s^i$.

Une approche naturelle pour définir $\int_{x_{|[0,T]}} f$ lorsque x est un chemin α-Hölder continu serait d'utiliser une suite d'approximations x^n régulières de x et d'identifier cette intégrale avec la limite de $\int_{x^n_{|[0,T]}} f$, si celle-ci existe.

Si $d = 1$, nous pouvons définir $\int_{x_{|[0,T]}} f$ comme $\widehat{f}(x_T) - \widehat{f}(x_0)$ pour une primitive $\widehat{f}$ de f. Grâce à cette formule, la notion d'intégrale $\int_{x_{|[0,T]}} f$ se définit facilement quelque soit la régularité de x et $x \mapsto \int_{x_{|[0,T]}} f$ est continue par rapport à la norme uniforme.

Cette approche est cependant spécifique à la dimension $d = 1$. Lrsque $d > 1$, $x \in \mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d) \mapsto \int_{x_{|[0,T]}} f$ n'est pas continue en général par rapport à la norme uniforme.

La démonstration de la non-continuité de $x \mapsto \int_{x_{|[0,T]}} f$ dans la cas où $d \geq 2$ nous donnera aussi l'occasion d'en comprendre la raison. Pour simplifier, prenons $d = 2$.

Soit x est de classe $\mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R}^2)$ et φ de classe $\mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R})$. Construisons deux suites de fonctions approchant x au sens de la norme uniforme dans $\mathscr{C}([0,T];\mathbb{R})$. L'une est la suite constante $x^n := x$. Pour l'autre, si $t_i^n := Ti/2^n$, définissons un chemin y^n dans $\mathscr{C}^1_{\mathrm{p}}([0,2T];\mathbb{R}^2)$ par

$$y^n := B_0 \cdot x_{[t_0^n, t_1^n]} \cdot B_1 \cdots B_{2^n-1} \cdot x_{[t_{2^n-1}^n, t_{2^n}^n]}, \tag{3}$$

où $\cdot$ désigne la concaténation entre les chemins, et pour $s \in [0, T/2^n]$,

$$B_i(s) := x_{t_i^n} + \frac{1}{\pi}\operatorname{sgn}(\varphi_{t_{i+1}^n} - \varphi_{t_i^n})\sqrt{|\varphi_{t_{i+1}^n} - \varphi_{t_i^n}|}\begin{bmatrix}\cos(2^{n+1}\pi s/T) - 1\\ -\sin(2^{n+1}\pi s/T)\end{bmatrix}.$$

Comme montré à la figure 1, nous ne faisons qu'ajouter des boucles au chemin x, qui sont d'aire (signée) $\varphi_{t_{i+1}^n} - \varphi_{t_i^n}$.

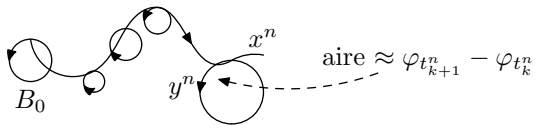

FIGURE 1 – Construction des approximations x^n et y^n de x.

Par la formule de Green-Riemann, pour $F := \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1$,

$$\int_{B_i} f = \iint_{\text{Surface}(B_i)} F(z)\mathrm{d}z \approx F(x_{t_i^n})(\varphi_{t^n_{i+1}} - \varphi_{t_i^n}).$$

Nous ne justifierons pas plus cette dernière approximation mais les termes de restes sont en $o(2^{-n})$ de sorte que leur somme disparaît lorsque $n \to \infty$.
D'un autre côté, par les propriétés de l'intégrale,

$$\int_{y^n_{|[0,2T]}} f = \int_{x_{|[0,2T]}} f + \sum_{i=0}^{2^n-1} \int_{B_i} f \approx \int_{x_{|[0,2T]}} f + \sum_{i=0}^{2^n-1} F(x_{t_i^n})(\varphi_{t^n_{i+1}} - \varphi_{t_i^n}).$$

Il est alors possible de justifier que

$$y^n \text{ converge uniformément vers } x$$
$$\text{et} \int_{y^n_{|[0,2T]}} f \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{x_{|[0,T]}} f + \int_0^T F(x_s)\mathrm{d}\varphi_s.$$

Ce contre-exemple, qui est très général, montre que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R})$, on peut construire une suite y^n qui converge uniformément vers x mais telle que la limite de $\int_{y^n_{|[0,2T]}} f$ fait apparaître l'intégrale de f le long de x, et une intégrale impliquant F, x et φ.
Tirons-en cependant des enseignements positifs :

- La suite y^n est bornée dans l'espace $\mathscr{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$ des fonctions α-Hölder continue dès que $\alpha < 1/2$, à cause des boucles B_i qui ont des diamètres de l'ordre de $\sqrt{2^{-n}}$. Grâce au théorème d'Ascoli, y^n converge vers x dans l'espace des fonctions β-Hölder continues pour $\beta < 1/2$.
- Grâce à l'expression limite $\int_{y^n_{|[0,2T]}} f$, nous pouvons définir une intégrale non par rapport à x mais par rapport à (x,φ) et identifier cette fonction dans $\mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R}^3)$ à une suite d'approximations y^n dans $\mathscr{C}^1_{\mathrm{p}}([0,T];\mathbb{R}^2)$ de sorte que $\int_{x_{|[0,T]}} f + \int_0^T F(x_s)\mathrm{d}\varphi_s$ soit considéré comme la limite de $\int_{y^n_{|[0,2T]}} f$.

- Et puisque que y^n converge dans un espace de fonctions β-Hölder continues, nous pouvons espérer relâcher la condition de régularité de x, à condition de spécifier φ pour que les intégrales soient définies de façon univoque.

La théorie des TR donne une réponse positive à ce dernier point : en étendant la notion de chemin, d'une façon qui prenne en compte une information relative à l'aire de la courbe (nous verrons le sens à donner à cela dans le cas de chemins irréguliers), il est possible de définir des intégrale de f le long de chemins irréguliers, c'est-à-dire α-Hölder continues qui soient identifiables avec des limites d'intégrales le long de chemins réguliers.

3. Équations linéaires dans le groupe d'Heisenberg

Nous avons vu dans l'exemple précédent que la connaissance du seul chemin ne suffit pas à assurer la continuité, mais que l'on peut espérer des résultats positifs en étendant la notion de chemin. Continuons sur cette voie en regardant maintenant le cas d'équations différentielles linéaires.

Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie du groupe d'Heisenberg, c'est-à-dire

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour trois matrices A, B et C de $\mathfrak{h}$, nous avons $ABC = 0$.

Considérons maintenant x et y deux chemins dans $\mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R})$ et considérons l'équation différentielle linéaire contrôlée

$$\mathrm{d}u_t = u_t A \mathrm{d}x_t + u_t B \mathrm{d}y_t \tag{4}$$

pour u un vecteur ligne de $\mathbb{R}^3$. Lorsque $B = 0$, alors il est bien connu que

$$u_t = u_0 \exp(A x_{0,t}) \text{ avec } x_{s,t} := x_t - x_s.$$

Si A et B commutent, c'est-à-dire si $[A,B] := AB - BA$ est nul, on démontre facilement que

$$u_t = u_0 \exp(A x_{0,t} + B y_{0,t}).$$

Considérons maintenant le cas où $[A,B] \neq 0$. Il est naturel de chercher une solution sous la forme

$$u_t = u_s \exp(A x_{s,t} + B y_{s,t} + C(s,t)), \ \forall 0 \leq s \leq t, \tag{5}$$

où la matrice $C(s,t)$ contiendra de l'information liée au défaut de commutation de A et B.

Pour A et B dans $\mathfrak{h}$, en utilisant le fait que $\exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2$, il est facile de montrer que pour $\varepsilon > 0$,

$$\exp(\varepsilon A)\exp(\varepsilon B) = \exp\left(\varepsilon A + \varepsilon B + \frac{\varepsilon^2}{2}[A,B]\right). \tag{6}$$

Nous avons utilisé ε à des fins pratiques pour bien montrer l'ordre de grandeur des termes.

Comme (5) est vraie pour tout $0 \leq s \leq t$, il s'ensuit que nécessairement

$$\begin{aligned}\exp(Ax_{s,t} + By_{s,t} + C(s,t)) \\ = \exp(Ax_{s,r} + By_{s,r} + C(s,r))\exp(Ax_{r,t} + By_{r,t} + C(r,t)),\end{aligned}$$

et donc à l'aide de (6),

$$C(s,t) = C(s,r) + C(r,t) + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{s,r} & y_{r,t} \\ y_{s,r} & y_{r,t} \end{vmatrix}[A,B]. \tag{7}$$

Nous reconnaissons dans le facteur devant $[A,B]$ l'aire du triangle compris entre (x_s, y_s), (x_r, y_r) et (x_t, y_t). Nous savons que $[A,B]\mathscr{A}(s,t)$ vérifie l'équation (7) lorsque

$$\mathscr{A}(s,t) := \frac{1}{2}\int_s^t (x_r - x_s)\mathrm{d}y_r - \frac{1}{2}\int_s^t (y_r - y_s)\mathrm{d}x_r.$$

Par ailleurs, $|\mathscr{A}(s,t)| \leq C(t-s)^2$. Cela veut donc dire que

$$u_t = u_s \exp(Ax_{s,t} + By_{s,t} + [A,B]\mathscr{A}(s,t)),\ \forall 0 \leq s \leq t. \tag{8}$$

Il est donc aisé de démontrer qu'avec ce choix, u est bien solution de (4), et que cette équation admet une unique solution.

Nous retrouvons ici le problème de la continuité, car $(x,y) \mapsto \mathscr{A}$ n'est pas continue par rapport à la norme uniforme. Le contre-exemple donné au § 2 permet de construire une suite (x^n, y^n) qui converge uniformément vers (x,y) mais telle que l'aire correspondante $\mathscr{A}^n(s,t)$ converge vers $\mathscr{A}(s,t) + \varphi_t - \varphi_s$ pour une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R})$.

Remarque 1. Bien entendu, ce programme peut se réaliser dans le cas plus général. La formule (4) n'est qu'une forme simplifiée grâce à la structure de $\mathfrak{h}$ de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin [2]. La représentation (8) se généralise en la formule de Magnus qui donne une représentation des solutions d'équations différentielles linéaires contrôlées comme exponentielles de matrices. Celles-ci sont données par des séries impliquant les crochets de Lie $[\cdot,\cdot]$ emboîtés, et les intégrales itérées des chemins. Cette même mécanique, qui permet de considérer un objet analytique, tel une solution d'équation différentielle stochastique, de façon algébrique s'applique aussi dans le cas d'équations non-linéaire [3].

4. Séries de Chen et trajectoires rugueuses

En utilisant le fait que f est indéfiniment dérivable, écrivons formellement

$$\int_{x_{|[s,t]}} f = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\(i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,d\}^n}} \partial^{n-1}_{x_{i_1},\dots,x_{i_{n-1}}} f_{i_n}(x_s) J_{i_1,\dots,i_n}(s,t;x)$$

avec

$$J_{i_1,\dots,i_n}(s,t;x) := \int_s^t \int_s^{t_n} \cdots \int_s^{t_2} \mathrm{d}x^{i_1}_{t_1} \cdots \mathrm{d}x^{i_n}_{t_n} = \int_s^t J_{i_1,\dots,i_{n-1}}(s,r;x)\mathrm{d}x^{i_n}_r,$$

c'est-à-dire les intégrale itérées de x contre lui-même sur les simplexes $\{s \le t_1 < t_2 < \cdots \le t_{n-1} \le t\}$.

De même, pour une famille $g_1,\dots,g_d$ de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$, la solution de (2) vérifie formellement

$$\varphi(z_t) = \varphi(a) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\(i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,d\}^n}} g_{i_1}(\cdots(g_{i_n}(\varphi(a)))\cdots) J_{i_1,\dots,i_n}(0,t;x) \tag{9}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$.

En suivant la théorie des séries de Chen [4], nous voyons donc qu'il est pratique de considérer la série formelle

$$\Phi(s,t;x) := 1 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\(i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,d\}^n}} X^{i_1}\cdots X^{i_n} J_{i_1,\dots,i_n}(s,t;x),$$

où les $X^1,\dots,X^d$ sont des indéterminées *non-commutative*. Ici, nous ne nous soucions pas des problèmes de convergence. Cette approche présente l'avantage de transformer ce problème de nature analytique et géométrique en un problème de type algébrique. En effet, $\Phi(\cdot;x)$ « encode » le chemin. En particulier, la concaténation des chemins se traduit par

$$\Phi(s,t;x) = \Phi(s,r;x)\Phi(r,t;x)$$

où le produit est à comprendre en tant que produit entre séries. Par ailleurs, si $y_t := x_{T-t}$, alors $\Phi(0,T;y) = \Phi(0,T;x)^{-1}$ où $\Phi^{-1}(0,T;x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(\Phi(0,T;x)-1)^k$ est l'inverse de la série $\Phi(0,T;x)$. Enfin, une autre propriété algébrique importante est que pour un entier $k \ge 1$, $\Phi(s,t;x)^k$ peut s'étendre grâce à la « propriété de mélange » (*shuffle*) comme une série dont les coefficients sont donnés par des combinaisons linéaires des $J_{i_1,\dots,i_d}(s,t;x)$. En particulier, il est possible de considérer formellement $\log\Phi(s,t;x) = \sum_{k\ge1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Phi(s,t;x)^k$ et de l'écrire comme une série avec des coefficients donnés par les $J_{t_1,\dots,i_n}(s,t;x)$. Nous pouvons alors transformer (9) pour calculer z_t en intégrant une équation différentielle ordinaire dont le coefficient se déduit de cette série.

Les séries de Chen permettent de manipuler des intégrales et des équations différentielles contrôlées de façon algébrique.

Une autre façon de manipuler de telles séries est de considérer la base canonique $e_1, \dots, e_d$ de $\mathbb{R}^d$ et de poser cette fois-ci

$$\Phi(s,t;x) := 1 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ (i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,d\}^n}} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} J_{i_1,\dots,i_n}(s,t;x), \tag{10}$$

c'est-à-dire que $\Phi(s,t;x)$ est une série à valeur dans l'espace tensoriel [1] $T(\mathbb{R}^d) := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^d \oplus (\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d) \oplus \cdots$. Sur cet espace, qui muni de l'addition et du produit tensoriel $\otimes$ est une algèbre, nous utilisons une norme telle que $||a \otimes b|| \leq ||a|| \cdot ||b||$ pour tout $a \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$ et $b \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes \ell}$.

Que se passe-t'il lorsque x est juste un chemin qui est α-Hölder continu, et non de classe $\mathscr{C}^1$? Il devient *a priori* impossible de définir à partir de x les intégrales itérées comme des intégrales usuelles et donc de définir une série de Chen pour x.

Il existe cependant une possibilité simple dans le cas de chemins dans $\mathscr{C}^\alpha$ avec $\alpha > 1/2$. Il s'agit d'utiliser les *intégrales d'Young*, dont nous verrons la construction plus bas.

Théorème 1 (L.C. Young [28]). *Soient x et y deux chemins respectivement dans $\mathscr{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\beta([0,T];\mathbb{R})$ avec $0 < \alpha, \beta \leq 1$ et $\alpha + \beta > 1$. Alors $\int_0^t y_s \mathrm{d}x_s$ existe comme limite de sommes de Riemann, $t \mapsto \int_0^t y_s \mathrm{d}x_s$ est α-Hölder continue sur $[0,T]$ et*

$$\left| \int_s^t y_s \mathrm{d}x_s - y_s(x_t - x_s) \right| \leq C||x||_\alpha ||y||_\beta |t-s|^{\alpha+\beta}, \ \forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

pour une constante universelle C qui ne dépend que de α et β, lorsque $||\cdot||_\alpha$ est la norme α-Hölder sur $\mathscr{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R})$.

Ainsi, si $x \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$, les intégrales itérées de x^i contre x^j existent et

$$J_{i,j}(s,t;x) = \int_s^t \int_s^{t_2} \mathrm{d}x^i_{t_1} \mathrm{d}x^j_{t_2} = \int_s^t (x^i_r - x^i_s) \mathrm{d}x^j_r$$

et donc

$$\left| \int_s^t \int_s^{t_2} \mathrm{d}x^i_{t_1} \mathrm{d}x^j_{t_2} \right| \leq C||x||^2_\alpha (t-s)^{2\alpha}.$$

Comme $t \mapsto \int_0^t (x^i_r - x^i_0) \mathrm{d}x^j_r$ est elle-même α-Hölder continue, il est possible de définir les intégrales itérées à tout ordre qui vérifient $|J_{i_1,\dots,i_n}(s,t;x)| \leq K_n (t-s)^{n\alpha}$.

1. Rappelons que le produit tensoriel $A \otimes B$ entre deux espaces vectoriels A et B revient à munir le produit $A \times B$ d'une structure qui le transforme en un espace vectoriel.

Dans le cas où $\alpha < 1/2$, l'idée centrale de la théorie des trajectoires rugueuses est de considérer que l'on connaît un équivalent de la série de Chen pour un chemin irrégulier, c'est-à-dire un objet vérifiant des propriétés analytiques et algébriques similaires.

En fait, nous n'avons besoin que de considérer des chemins $\mathbf{x}$ à valeurs dans l'espace tensoriel $T_k(\mathbb{R}^d)$ obtenu en tronquant dans $T(\mathbb{R}^d)$ tous les éléments qui sont produits de strictement plus de k éléments de $\mathbb{R}^d$. L'indice k doit être choisi de sorte qu'il soit possible de compléter $\mathbf{x}$ en une série de Chen et dépend donc de la régularité de x. À partir de maintenant, nous supposerons que nous disposons d'un tel objet, dont l'existence n'est cependant pas un problème trivial (*cf* le début du § 6).

Tout comme une série de Chen est inversible, un élément a de $T_k(\mathbb{R}^d)$ tel que $\pi_{\mathbb{R}}(a) = 1$ l'est aussi, où π_{X} est la projection sur le sous-espace vectoriel X de $T_k(\mathbb{R}^d)$. Notons par a^{-1} cet inverse qui vérifie donc $a^{-1} \otimes a = 1$ dans $T_k(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2 (T. Lyons [20]). *Soit $\mathbf{x}$ un chemin à valeurs dans $T_k(\mathbb{R}^d)$ pour lequel il existe des constantes $K_1, \ldots, K_k$ telles que pour $\ell \leq k$ et tout $0 \leq s \leq t \leq T$,*

$$||\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes \ell}}(\mathbf{x}_{s,t})|| \leq K_\ell |t-s|^{\ell\alpha} \text{ avec } \mathbf{x}_{s,t} := \mathbf{x}_s^{-1} \otimes \mathbf{x}_t. \tag{11}$$

Lorsque $k \geq \lfloor 1/\alpha \rfloor$, il est possible de prolonger $\mathbf{x}$ en un élément $\mathbf{y}$ de $T(\mathbb{R}^d)$ vérifiant (11) *pour tout ℓ, où $\mathbf{y}_s^{-1}$ est l'inverse de $\mathbf{y}_s$ dans $T(\mathbb{R}^d)$.*

Definition 1. Un chemin vérifiant les propriétés du théorème 2 s'appelle une *trajectoire rugueuse* (*rough path*). Ici, nous parlerons d'une α-TR d'ordre k et noterons $\mathscr{T}_{\alpha,k}(\mathbb{R}^d)$ l'espace correspondant.

Remarque 2. Nous utiliserons comme norme sur l'espace $\mathscr{T}_{\alpha,k}(\mathbb{R}^d)$ des α-TR d'ordre k la norme Hölder définie par

$$||\mathbf{x}||_\alpha := \max_{t\in[0,T]} ||\mathbf{x}_t|| + \max_{\ell=0,\ldots,k} \sup_{0\leq s<t\leq T} \left\{ \frac{||\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes\ell}}(\mathbf{x}_{s,t})||}{|t-s|^{\ell\alpha}} \right\}. \tag{12}$$

Attention, cette définition implique $\mathbf{x}_{s,t}$ et non $\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_s$ car $\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_s) \neq \mathbf{x}_{s,t}$ pour $k > 1$. Ainsi $\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}}(x)$ n'est pas $k\alpha$-Hölder continue en général pour $k > 1$.

Remarque 3. Afin de fixer les idées, posons $k = 2$. Dans ce cas, $\mathbf{x}$ se décompose en $\mathbf{x}_t = 1 + \sum_{i=1}^d \mathbf{x}_t^{1,i} e_i + \sum_{i,j=1}^d \mathbf{x}_t^{2,i,j} e_i \otimes e_j$ où $\{e_i\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas,

$$\mathbf{x}_{s,r} \otimes \mathbf{x}_{r,t} = 1 + \sum_{i=1}^d (\mathbf{x}_{s,r}^{1,i} + \mathbf{x}_{r,t}^{1,i}) e_i + \sum_{i,j=1}^d (\mathbf{x}_{s,r}^{2,i} + \mathbf{x}_{r,t}^{2,i} + \mathbf{x}_{s,r}^{1,i} \otimes \mathbf{x}_{r,t}^{1,j}) e_i \otimes e_j$$

et

$$\mathbf{x}_{s,t}^{-1} = 1 - \sum_{i=1}^{d} \mathbf{x}_{s,t}^{1,i} e_i - \sum_{i=1}^{d} \mathbf{x}_{s,t}^{2,i,j} e_i \otimes e_j + \sum_{i=1}^{d} \mathbf{x}_{s,t}^{1,i} \otimes \mathbf{x}_{s,t}^{1,j} e_i \otimes e_j.$$

Remarque 4. La composante $\mathbf{x}^1 = \pi_{\mathbb{R}^d}(\mathbf{x})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ vérifie $\mathbf{x}_{s,t}^1 = \mathbf{x}_t^1 - \mathbf{x}_s^1$, de sorte que $\mathbf{x}^1 \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$. Nous dirons alors que $\mathbf{x}$ est *au dessus* de $\mathbf{x}^1$.

Remarque 5. La définition de $\mathbf{x}_{s,t}$ implique que

$$\mathbf{x}_{s,t} = \mathbf{x}_{s,r} \otimes \mathbf{x}_{r,t} \text{ dans } T_2(\mathbb{R}^d) \text{ pour } 0 \leq s \leq r \leq t \leq T. \tag{13}$$

Par construction, $\mathbf{y}$ satisfait (13) dans $T(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, $\otimes$ correspond à la concaténation des chemins. Par contre, $\mathbf{x}_{s,r} \otimes \mathbf{x}_{r,t} \neq \mathbf{x}_{r,t} \otimes \mathbf{x}_{s,r}$ car $\otimes$ n'est pas commutative.

Pour les composantes dans $\mathbb{R}^d$, l'opération $\otimes$ correspond à l'addition de vecteurs dans l'espace euclidien, et reste commutative.

Remarque 6. Un chemin $x = \sum_{i=1}^d e_i x^i \in \mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d)$ peut être transformé en une α-TR d'ordre 2 par

$$\mathbf{x}_{s,t}^1 = x_t - x_s \in \mathbb{R}^d \text{ et } \mathbf{x}_{s,t}^2 = \int_s^t (x_r - x_s) \otimes \mathrm{d}x_r \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d.$$

Notons que $\mathbf{x}_{s,t} = 1 + \mathbf{x}_{s,t}^1 + \mathbf{x}_{s,t}^2$ correspond à la série $\Phi(s,t;x)$ donnée par (10) en ne gardant que les termes dans $T_2(\mathbb{R}^d)$. L'extension donnée par le théorème 2 correspond à la série $\Phi(s,t;x)$. Un tel chemin s'appelle de façon oxymorique une *trajectoire rugueuse régulière* (*smooth rough path*).

Le cas le plus commun est celui où $k = 2$, c'est-à-dire que nous considérons uniquement des chemins qui sont α-Hölder continus avec $\alpha \in]1/3, 1/2]$. Le cas $k = 1$ fait l'objet d'un traitement plus simple, puisque les intégrales d'Young peuvent être directement utilisées sans faire appel aux intégrales itérées pour démontrer l'existence d'intégrales le long de formes différentielles f qui sont γ-Hölder continues avec $\alpha(\gamma+2) > 1$ (ce qui s'ensuit immédiatement du théorème 1) et de solutions d'équations différentielles contrôlées par de tels chemins [16].

En général, nous construisons une trajectoire rugueuse à partir d'un chemin à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. L'exemple typique est par exemple une trajectoire d'un processus stochastique tel le mouvement brownien. Il est important de souligner ici que dès que $\alpha < 1/2$, il existe une *infinité de trajectoires rugueuses* $\mathbf{x}$ *qui se projettent sur un même chemin* x, qui donnent naissance à des intégrales différentes.

Par exemple, si $\mathbf{x} \in \mathscr{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d)$ se projette sur $x \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$ avec $\alpha < 1/2$ et ψ est un chemin à valeurs dans $\mathscr{C}^{2\alpha}([0,T];\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$, alors $\mathbf{x} + \psi$ est aussi une α-TR d'ordre 2.

Une sous-classe des trajectoires rugueuses est celle des *trajectoires rugueuses géométriques*, que l'on peut atteindre comme limite de trajectoires rugueuses construites naturellement à partir de chemins réguliers selon le procédé de la remarque 6 [10, 18].

Une α-TR géométrique $\mathbf{x}$ d'ordre 2 qui se projette sur $x \in \mathscr{C}^{\alpha}([0,T];\mathbb{R}^d)$ peut donc s'identifier à une famille d'approximations régulières $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d)$. Si $\psi \in \mathscr{C}^{2\alpha}([0,T];\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ est telle que ψ_t anti-symétrique pour tout t (en identifiant $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ à l'espace des matrices $d \times d$), alors $\mathbf{x} + \psi$ est aussi une trajectoire rugueuse géométrique, mais correspond à une autre famille d'approximations $\{y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de x. Le contre-exemple donné à la continuité des formes différentielles au § 2 nous montre comment construire une telle famille en identifiant ψ avec $\left[\begin{smallmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

5. Intégrales et équations différentielles rugueuse

Les constructions précédentes laissent à penser que nous avons besoin de l'équivalent de toute la série de Chen et ne pouvons que considérer des intégrales le long de formes différentielles indéfiniment dérivables.

Une telle régularité n'est pas nécessaire. Il est néanmoins important que la régularité soit suffisante pour pouvoir appliquer l'argument technique principal, que nous appellerons le « lemme de la couturière » [7].

Lemme 1. *Soient $T > 0$ et $\{\mathbf{y}_{s,t}\}_{0\le s\le t\le T}$ une famille d'éléments dans $T_k(\mathbb{R}^d)$ et $k \ge \lfloor 1/\alpha \rfloor$ telle que $\|\mathbf{y}\|_\alpha$ est finie*[2] *et qu'il existe deux constantes C et $\theta > 1$ pour laquelle*

$$\max_{0\le \ell\le k} \{\|\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes \ell}}(\mathbf{y}_{s,t} - \mathbf{y}_{s,r} \otimes \mathbf{y}_{r,t})\|\} \le C|t-s|^{\theta},\ \forall 0 \le s \le r \le t \le T. \tag{14}$$

Une telle famille s'appelle une presque trajectoire rugueuse *(almost rough path)*[3]*. Alors il existe une constante L ne dépendant que de θ et T ainsi qu'une α-TR $\mathbf{x}$ d'ordre k telle que*

$$\max_{0\le \ell\le k} \{\|\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes \ell}}(\mathbf{y}_{s,t} - \mathbf{x}_{s,t})\|\} \le CL|t-s|^{\theta},\ \forall 0 \le s \le t \le T. \tag{15}$$

Par ailleurs, si $\mathbf{z}$ est une α-TR d'ordre k vérifiant (15)*, alors $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.*

Ce lemme est très important, car il permet de remplacer une approximation d'une trajectoire rugueuse par une trajectoire rugueuse. C'est donc l'outil fondamental pour construire des intégrales en considérant tout d'abord des approximations vérifiant (14). Un résultat similaire permet de considérer l'écart entre deux TR à partir de l'écart entre deux presque trajectoires rugueuses.

Pour mieux comprendre ce lemme, considérons le cas des intégrales d'Young vu au théorème 1. Si x et y sont deux chemins respectivement dans $\mathscr{C}^{\alpha}([0,T];\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^{\beta}([0,T];\mathbb{R})$

2. Nous utilisons ici la norme définie par (12) qui s'étend naturellement aux familles à deux indices.
3. Si $\mathbf{y}$ vérifie (14) avec $C = 0$, alors $\mathbf{y}$ est une trajectoire rugueuse.

avec $\alpha+\beta>1$, l'intégrale d'Young est un moyen de définir la famille d'intégrales $Y_{s,t}=\int_s^t y_s \mathrm{d}x_s$ pour $0\leq s\leq t$.
Une approximation, naturelle de cette intégrale, est

$$K_{s,t}:=y_s x_{s,t} \text{ avec } x_{s,t}=x_t-x_s.$$

Constatons que pour tout $0\leq s\leq r\leq t\leq T$, $|K_{s,t}|\leq|t-s|^\alpha$ et

$$|K_{s,t}-K_{s,r}-K_{r,t}|=|y_{s,r}|\cdot|x_{r,t}|\leq\|x\|_\alpha\|y\|_\beta|t-s|^\theta,\ \theta:=\alpha+\beta>1.$$

De cette façon, $\{K_{s,t}\}_{0\leq s\leq t\leq T}$ est une presque trajectoire rugueuse d'ordre 1. On peut donc lui associer un chemin $Y\in\mathscr{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R})$ défini comme $Y_{s,t}:=\int_s^t y_r\mathrm{d}x_r$ et qui vérifie $Y_{s,t}=Y_{s,r}+Y_{r,t}$ pour tout $0\leq s\leq r\leq t\leq T$, c'est-à-dire la propriété de Chasles pour les intégrales.
La démonstration du lemme 1 se fait en étudiant la convergence de $y_{t_0^n,t_1^n}\otimes\cdots\otimes y_{t_{n-1}^n,t_n^n}$ le long d'une famille de partitions $\{t_i^n\}_{i=0,\dots,n}$ de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0. Cela démontre que $Y_{0,T}$ est bien limite des sommes de Riemann $\sum_{i=0}^{n-1}y_{t_i^n}x_{t_i^n,t_{i+1}^n}$. De (15), nous tirons un résultat important : comme $\left|\int_s^t y_r\mathrm{d}x_r-y_s x_{s,t}\right|\leq C|t-s|^{\alpha+\beta}$ pour une constante C, nous en déduisons que $t\mapsto\int_0^t y_r\mathrm{d}x_r$ est aussi α-Hölder continue et a donc la même régularité que x.
Pour définir $\int_0^t f(x_s)\mathrm{d}x_s$, la théorie des trajectoires rugueuses généralise cette approche en utilisant un cadre non-commutatif. Remarquons tout d'abord que si l'on souhaite appliquer l'approche des intégrales d'Young à ce cas avec $x\in\mathscr{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$ et $y_t:=f(x_t)$ pour $f\in\mathscr{C}^\gamma(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$, alors la contrainte sur la somme des exposants de Hölder de x et y impose que $\alpha(2+\gamma)>1$ au donc qu'au mieux, $\alpha>1/2$.

> *La théorie des trajectoires rugueuses s'applique donc pour des chemins dans $\mathscr{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$, ou des limites de chemins convergents dans $\mathscr{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$, avec $\alpha<1/2$ et $d>1$.*

Considérons d'abord que $f=(f_1,\dots,f_d)$ est régulière et que $x\in\mathscr{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d)$. Alors en temps court, un développement de Taylor donne que

$$\sum_{i=1}^d\int_s^t f_i(x_r)\mathrm{d}x_r^i=\sum_{i=1}^d f_i(x_s)x_{s,t}^i+\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_s)\int_s^t\int_s^{t_2}\mathrm{d}x_{t_1}^j\mathrm{d}x_{t_2}^i+\cdots \tag{16}$$

où les « $\cdots$ » contiennent des termes de type $(t-s)^\varkappa$ avec $\varkappa\geq 3$.
Si nous disposons d'une α-TR $\mathbf{x}$ d'ordre 2 avec $\alpha\in]1/3,1/2]$, l'idée est alors de poser par analogie avec (16), en utilisant une écriture compacte

$$\mathbf{y}_{s,t}:=1+f(x_s)\mathbf{x}_{s,t}^1+\nabla f(x_s)\mathbf{x}_{s,t}^2\in T_1(\mathbb{R}^m),$$

avec $\mathbf{x}^i_{s,t} := \pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes i}}(\mathbf{x}_{s,t})$ et $\nabla f(x_s)\mathbf{x}^2_{s,t} := \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} f^j(x_s)\mathbf{x}^{2,i,j}_{s,t}$. Ici, le terme 1 est présent pour des raisons algébriques mais vit dans $\mathbb{R}$ alors que les autres termes vivent dans $\mathbb{R}^m$. Lorsque ∇f est γ-Hölder continue avec $\alpha(2+\gamma) > 1$, $\mathbf{y}$ est une presque trajectoire rugueuse. Le lemme 1 donne une trajectoire rugueuse que nous définirons comme $\int_s^t f(x_r)\mathrm{d}\mathbf{x}_r$, c'est-à-dire l'intégrale de f le long de $\mathbf{x}$. Pour $\mathbf{x} \in \mathscr{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{x}^\varphi = \mathbf{x} + \varphi$ avec $\varphi \in \mathscr{C}^{2\alpha}([0,T];(\mathbb{R}^d)^{\otimes 2})$, alors

$$\int_0^t f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi_s = \int_0^t f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s + \int_0^t \nabla f(x_s)\mathrm{d}\varphi_s.$$

Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, il peut être utile de définir les intégrales itérées des composantes de $\int f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s$ contre elles-mêmes. Pour cela, nous utiliserons

$$\widehat{\mathbf{y}}_{s,t} := 1 + f(x_s)\mathbf{x}^1_{s,t} + \nabla f(x_s)\mathbf{x}^2_{s,t} + f(x_s)\otimes f(x_s)\mathbf{x}^2_{s,t} \in T_2(\mathbb{R}^m). \tag{17}$$

Ici, $f(x_s)\otimes f(x_s)\mathbf{x}^2_{s,t}$ vit dans $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m$.

Théorème 3. *Soit $f = (f_1,\dots,f_d)$ une famille de fonctions dans $\mathscr{C}^{1+\gamma}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$ et $\mathbf{x} \in \mathscr{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d)$ avec $\alpha \in]1/3,1/2]$ et $\alpha(2+\gamma) > 1$. Alors $\widehat{\mathbf{y}}$ définie par* (17) *est une presque trajectoire rugueuse dans $T_2(\mathbb{R}^m)$. Par définition, la α-TR associée via le lemme 1 est $\int f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s$. De plus, $\mathbf{x} \mapsto \int f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s$ est continue de $(\mathscr{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\beta)$ dans $(\mathscr{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\beta)$ pour tout $\beta < \alpha$.*

En particulier, si $\mathbf{x}$ est une α-TR d'ordre 2 géométrique, on peut construire une suite $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de chemins réguliers transformés en des α-TR régulières $\mathbf{x}^n \in \mathscr{T}_{2,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ comme dans la remarque 6 et telles que $\mathbf{x}^n$ converge dans $(\mathscr{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\beta)$ vers $\mathbf{x}$ pour tout $\beta < \alpha$. Alors la famille d'intégrales usuelles $\int f(x^n_s)\mathrm{d}x^n_s$ converge vers $\pi_{\mathbb{R}^m}\left(\int f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s\right)$ dans $\mathscr{C}^\beta([0,T];\mathbb{R}^m)$ pour tout $\beta < \alpha$.
Soit maintenant une application $f : \mathbb{R}^m \to L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^m)$, où $L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^m)$ est l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^m$. Considérons l'équation différentielle rugueuse (EDR)

$$y_t = a + \int_0^t f(y_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s, \tag{18}$$

à condition de donner un sens à cet objet. Il en existe en réalité deux définitions, celle donnée par T. Lyons et celle donnée par A.M. Davie.

Definition 2 (Solution au sens de A.M. Davie [6])**.** Pour $\alpha \in (1/3,1/2]$, nous dirons que $y \in \mathscr{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^m)$ est solution de (18) s'il existe une constante $C \geq 0$ et une constante $\theta > 1$ telles que

$$|y_t - y_s - f(y_s)\mathbf{x}^1_{s,t} - f\nabla f(y_s)\mathbf{x}^2_{s,t}| \leq C|t-s|^\theta,\ \forall 0 \leq s \leq t \leq T, \tag{19}$$

avec $(f\nabla f)^{i,j}(x) := \sum_{k=1}^d f^k_i(x)\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)$.

Cette notion de solution provient, comme pour l'intégrale, d'un développement de Taylor à l'ordre 2. Pour démontrer l'existence d'une telle solution, considérons le schéma d'Euler

$$y^n_{t^n_{i+1}} := y^n_{t^n_i} + f(y^n_{t^n_i})\mathbf{x}^1_{t^n_i,t^n_{i+1}} + f\nabla f(y^n_{t^n_i})\mathbf{x}^2_{t^n_i,t^n_{i+1}}$$

pour une famille de partitions $\{t^n_i\}^n_{i=0}$ de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. La démonstration est très proche de celle du lemme 1 et consiste à démontrer que (19) est vérifiée uniformément en n pour $(s,t) = (t^n_i, t^n_j)$, $i < j$, mais en considérant $j - i$ de plus en plus grand. Nous pouvons ensuite utiliser le théorème d'Ascoli pour montrer qu'une interpolation linéaire de y^n converge vers une solution au sens de A.M. Davie. À partir de cette solution y, il est possible de construire $\mathbf{z} \in \mathscr{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^m)$ telle que $\pi_{T_2(\mathbb{R}^d)}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$, $\pi_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{z}) = y$ et qui encode donc les « intégrales itérées » entre x et y.

L'autre notion de solution, originellement proposée par T. Lyons, est plus complexe.

Definition 3 (Solution au sens de T. Lyons [20])**.** Une TR $\mathbf{z} \in \mathscr{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^m)$ est solution de (18) si $\pi_{T_2(\mathbb{R}^d)}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$ et lorsque f est transformée canoniquement en forme différentielle,

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} x_0 \\ a \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ f(\pi_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{z}_s)) \end{bmatrix} \mathrm{d}\mathbf{z}_s.$$

La raison de cette définition est la suivante : considérons que x et $\dot{y}_t = f(y_t)\dot{x}_t$. Alors le développement de Taylor (16) fait intervenir l'intégrale itérée de y contre x. À la différence de la notion de solution au sens de A.M. Davie, l'équivalent de cette intégrale itérée doit donc être construite comme partie intégrante de cette solution. Construire une α-TR à valeurs dans $T_2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^m)$ permet de le faire. Contrairement à la notion de solution au sens de A.M. Davie, on peut ainsi appliquer un principe de Picard.

Théorème 4 ([6,20])**.** *Soit $\alpha \in (1/3, 1/2]$ et $\mathbf{x}$ une α-TR d'ordre 2 à valeurs dans $T_2(\mathbb{R}^d)$. Soit $f_1, \ldots, f_d$ une famille de champs de vecteurs à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, bornés et dont les gradients ∇f_i sont bornés et γ-Hölder continus avec $\alpha(2+\gamma) > 1$. Alors il existe $\mathbf{y} \in \mathscr{T}_{2,\alpha}(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^m)$ solution, non nécessairement unique, de l'EDR* (18)*. Si de plus chaque f_i admet une dérivée seconde qui est bornée et γ-Hölder continue avec $\alpha(2+\gamma) > 1$, alors $\mathbf{y}$ est unique et $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ est continue de $(\mathscr{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\beta)$ dans $(\mathscr{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\beta)$. pour tout $\beta < \alpha$.*

En poussant l'analyse, on peut démontrer que l'application d'Itô est localement Lipschitz continue, et avec plus de régularité, qu'elle est différentiable par rapport au point de départ, ... et démontrer des propriétés de flots. On peut aussi relâcher les propriétés de croissance sur le champ de vecteur, mais en gardant une croissance au plus linéaire [9,15].

Dans le cas du mouvement brownien, nous pouvons démontrer que les intégrales correspondent bien aux intégrales d'Itô ou de Stratonovich selon l'extension que nous prenons du mouvement brownien (voir [18] par exemple).

Nous nous sommes restreints ici au cas $\alpha \in]1/3, 1/2]$. Pour $\alpha < 1/3$, il est alors nécessaire de considérer des trajectoires rugueuses dans $\mathscr{T}_{\alpha,\lfloor 1/\alpha \rfloor}(\mathbb{R}^d)$ et bien entendu, plus de régularité sur f. La complexité des calculs augmente avec $\lfloor 1/\alpha \rfloor$.

6. Applications

Nous n'avons pas traité ici du problème de l'existence de trajectoires rugueuses construites au dessus d'un chemin particulier. Une approche possible pour de nombreux processus stochastiques consiste à démontrer la convergence d'approximations régulière du processus (voir [9] pour quelques exemples). Hors du cadre stochastique, un théorème dû à T. Lyons and N. Victoir montre que l'on peut toujours étendre un chemin en une trajectoire rugueuse [23]. De façon plus constructive, une approche alternative proposée par J. Unterberger est donnée par le *Fourier normal ordering* qui repose sur des idées utilisées en théorie des champs [25, 27].

Ainsi, nous pouvons construire l'équivalent d'intégrales stochastiques et d'équations différentielles stochastiques hors du cadre du mouvement brownien ou des semi-martingales. Cette théorie peut donc s'utiliser pour de nombreux processus mais n'est pas limitée à ce seul cadre ni à cette seule application.

Mais même dans le cadre brownien, cette théorie a des applications grâce à la continuité de l'application d'Itô. Des théorème de type grandes déviations se démontrent en se concentrant sur les TR [14]. Cette théorie, motivée initialement par des considérations numériques [11], a permis de développer de nouvelles approches numériques pour la simulation, notamment les méthodes dites de « cubature » [24], ou par quantification [26].

L'utilisation de certains concepts de cette théorie aux équations aux dérivées partielles stochastiques est fécond, comme le démontre les récents travaux de M. Hairer sur l'équation KPZ [13].

Pour finir, notons que cette théorie prend son inspiration dans de nombreux domaines, et reste fortement connectés à ceux-ci, en analyse, algèbre, probabilités, géométrie différentielle (notamment sous-riemanienne [9]), théorie du contrôle, ... Pour un exemple, des idées issues de la théorie quantique des champs et de la renormalisation ont permis de construire des TR au dessus de trajectoires d'un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst inférieur à 1/4 [25], ce qu'il n'est pas possible de faire avec approximation linéaire [5]. L'article [27] présente une introduction agréable à ce champ d'idées.

Bien que récente, la théorie des trajectoires rugueuses est maintenant arrivée à un stade de maturité et irrigue maintenant d'autres domaines.

Remerciements. L'auteur tient à remercier ici tous ceux qui l'ont aidé dans l'exploration de cette théorie, en premier lieu T. Lyons, mais aussi N. Victoir, L. Coutin, S. Tindel, M. Gubinelli, J. Unterberger, ... ainsi que les très nombreuses personnes avec lesquelles il a échangé au cours de visites, conférences et séminaires.

Références

[1] I. Bailleul, *Flows driven by rough paths* (2012), available at `arXiv:1203.0888`.

[2] F. Baudoin, *An Introduction to the Geometry of Stochastic Flows*, Imperial College Press, 2004.

[3] S. Blanes, F. Cases, J.A. Oteo, and J. Ros, *The Magnus expansion and some of its applications*, Physics Reports **470** (2009), 151-238.

[4] K.-T. Chen, *Integration of paths—a faithful representation of paths by non-commutative formal power series*, Trans. Amer. Math. Soc. **89** (1958), 395–407.

[5] L. Coutin and Z. Qian, *Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions*, Probab. Theory Related Fields **122** (2002), no. 1, 108–140.

[6] A.M. Davie, *Differential Equations Driven by Rough Signals : an Approach via Discrete Approximation*, Appl. Math. Res. Express. AMRX **2** (2007), Art. ID abm009, 40.

[7] D. Feyel, A. de La Pradelle, and G. Mokobodzki, *A non-commutative sewing lemma*, Electron. Commun. Probab. **13** (2008), 24–34.

[8] D. Feyel and A. de La Pradelle, *Curvilinear integrals along enriched paths*, Electron. J. Probab. **11** (2006), no. 34, 860–892.

[9] P. Friz and N. Victoir, *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths. Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2010.

[10] ———, *A note on the notion of geometric rough paths*, Probab. Theory Related Fields **136** (2006), no. 3, 395–416.

[11] J. G. and Lyons Gaines T. J., *Variable step size control in the numerical solution of stochastic differential equations*, SIAM J. Appl. Math. **57** (1997), no. 5, 1455–1484.

[12] M. Gubinelli, *Controlling rough paths*, J. Func. Anal. **216** (2004), 86–140.

[13] M. Hairer, *Solving the KPZ equation* (2011), available at `arXiv:1109.6811`.

[14] M. Ledoux, Z. Qian, and T. Zhang, *Large deviations and support theorem for diffusion processes via rough paths*, Stochastic Process. Appl. **102** (2002), no. 2, 265–283.

[15] A. Lejay, *Global solutions to rough differential equations with unbounded vector fields*, Séminaire de Probabilités XLIV, Lecture Notes in Math., vol. 2046, Springer, 2012, pp. 215–246.

[16] ———, *Controlled differential equations as Young integrals : a simple approach*, J. Differential Equations **249** (2010), 1777-1798.

[17] ———, *Yet another introduction to rough paths*, Séminaire de probabilités XLII, Lecture Notes in Math., vol. 1979, Springer, 2009, pp. 1–101.

[18] A. Lejay and N. Victoir, *On (p,q)-rough paths*, J. Differential Equations **225** (2006), no. 1, 103–133.

[19] A. Lejay, *An introduction to rough paths*, Séminaire de probabilités XXXVII, Lecture Notes in Math., vol. 1832, Springer, 2003, pp. 1–59.

[20] T.J. Lyons, *Differential equations driven by rough signals*, Rev. Mat. Iberoamericana **14** (1998), no. 2, 215–310.

[21] T. Lyons, M. Caruana, and T. Lévy, *Differential Equations Driven by Rough Paths*, École d'été des probabilités de Saint-Flour XXXIV — 2004, Lecture Notes in Math., vol. 1908, Springer, 2007.

[22] T. Lyons and Z. Qian, *System Control and Rough Paths*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2002.

[23] T. Lyons and N. Victoir, *An extension theorem to rough paths*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **24** (2007), no. 5, 835–847.

[24] ———, *Cubature on Wiener space*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **460** (2004), no. 2041, 169–198.

[25] J. Magnen and J. Unterberger, *From constructive field theory to fractional stochastic calculus. (I) An introduction: rough path theory and perturbative heuristics*, Ann. Henri Poincaré **12** (2011), no. 6, 1199–1226.

[26] G. Pagès and A. Sellami, *Convergence of multi-dimensional quantized SDE's*, Séminaire de Probabilités XLIII, Lecture Notes in Math., vol. 2006, Springer, 2011, pp. 269–307.

[27] J. Unterberger, *Aspects de la théorie des chemins rugueux*, Gazette des mathématiciens **131** (2012), 16–33.

[28] L.C. Young, *An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration*, Acta Math. **67** (1936), 251–282.