Graphes d'accessibilité dynamiques

John Whitbeck, Marcelo Dias de Amorim, Vania Conan, Jean-Loup Guillaume

▶ **To cite this version:**

John Whitbeck, Marcelo Dias de Amorim, Vania Conan, Jean-Loup Guillaume. Graphes d'accessibilité dynamiques. 14èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications (AlgoTel), 2012, La Grande Motte, France. hal-00690271

HAL Id: hal-00690271

https://inria.hal.science/hal-00690271

Submitted on 23 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Graphes d'accessibilité dynamiques

J. Whitbeck[1,2] , M. Dias De Amorim[2] , V. Conan[1] et J.-L. Guillaume[2] †

[1] *THALES*
[2] *UPMC Sorbonne Universités*

Les graphes dynamiques sont de plus en plus utilisés dans de nombreux contextes et servent notamment à modéliser les réseaux opportunistes. Nous formalisons ici la notion de graphe d'accessibilité qui permet simplement de rendre compte des possibilités d'envoi de messages dans des réseaux avec une durée de traversée d'arête et un délai maximal de remise fixé. Ce formalisme nous permet de proposer un algorithme efficace de calcul des graphes d'accessibilité que nous validons sur deux jeux de données rééls.

Keywords: graphes dynamiques, réseaux opportunistes, ensembles couvrants

1 Introduction

Dans les graphes dynamiques [KKK00, XFJ03], les sommets et les arêtes (ou arcs dans le cas dirigé) apparaissent et disparaissent au cours du temps. Ces graphes dynamiques ont emergé ces dernières années comme un modèle central pour l'étude d'une grande variété de graphes de terrain et leur étude a notamment engendré une mise à disposition croissante de traces issues de mesures réelles [SKL+10, TLB+11].

De nombreux concepts classiques en théorie des graphes tels que le degré, les chemins, les distances n'ont pas de contrepartie naturelle pour les graphes dynamiques. Certains théorèmes prouvés sur les graphes statiques ne le sont plus dans le cas des graphes dynamiques [KKK00] et certains problèmes simples tels que la recherche de composantes connexes deviennent NP-complets dans les graphes dynamiques. L'approche consistant à suivre l'évolution de propriétés classiques à différents instants de l'évolution [CE07] peut être pertinente dans certains contextes mais elle ne permet pas de capturer les corrélations temporelles entre des instants consécutifs [Hol05]. Récemment, un certain nombre de concepts définis pour les graphes dynamiques ont été introduits, tels que les *chemins temporels* [XFJ03], le *diamètre temporel* [CMMD07], ou le *temps d'accessibilité* [Hol05].

Dans cet article nous formalisons le concept de graphe d'accessibilité qui permet de connaître à un instant et depuis un sommet donné quels sont les autres sommets accessibles en plusieurs sauts, avec un temps de traversé unitaire fixé, dans un délai borné. Nous utilisons cette structure simple pour concevoir un algorithme permettant de calculer efficacement des familles entières de graphes d'accessibilité dans la section 3. Nous mettons en évidence la *connexité temporelle*, l'*asymétrie temporelle*, et les *ensembles dominants temporels* sur deux traces de connectivité dans la section 4, avant de conclure dans la section 5.

2 Des graphes dynamiques aux graphes d'accessibilité

2.1 Graphes dynamiques

Nous utiliserons dans la suite les définitions et notations de Casteigts *et al.* qui ont proposé récemment un cadre unifié pour les graphes dynamiques [CFQS11]

Définition 1 (Graphe dynamique)**.** *Soit V un ensemble de sommets, et $E \subseteq V \times V$ l'ensemble des arcs possibles entre les sommets de V. Des événements peuvent se produire sur une période $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{T}$, où $\mathbb{T}$ est le domaine temporel, avec $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{R}+$) pour les systèmes à temps discret (resp. continu). Dans le cas*

†J.-L. Guillaume est soutenu par les projets DynGraph ANR-10-JCJC-0202 et DiRe du programme Émergence de la ville de Paris.

général, un graphe dynamique est un tuple $\mathcal{G} = (V, E, \mathcal{T}, \rho, \zeta)$ *où la fonction de présence* $\rho : E \times \mathcal{T} \to \{0,1\}$ *indique la présence ou l'absence d'un arc à un instant donné ; et la fonction de latence* $\zeta : E \times \mathcal{T} \to \mathbb{T}$*,indique le temps nécessaire à la traversée d'un arc commencé à un instant donné (la latence peut varier dans le temps).*

Nous supposerons dans la suite que la fonction ζ est *constante*, c'est-à-dire que $\forall (e,t) \in E \times \mathcal{T}, \zeta(e,t) = \tau$ où $\tau \geq 0$ est le temps de traversée uniforme.

Nous notons $\mathcal{G}(t) \subseteq E$ l'ensemble des arcs de $\mathcal{G}$ à l'instant t et donc $e \in \mathcal{G}(t) \Leftrightarrow \rho(e,t) = 1$. Finalement, étant donné un arc $e = (u,v) \in E$, on définit $from(e) = u$ et $to(e) = v$.

Définition 2 (Chemin temporel)**.** *Un* chemin temporel *dans* $\mathcal{G}$ *est une suite ordonnée de couples* $\mathcal{J} = \{(e_1,t_1),(e_2,t_2),\ldots,(e_k,t_k)\}$ *telle que* $\forall i < k$ *: (i)* $to(e_i) = from(e_{i+1})$ *; (ii)* $\forall t_i \leq t < t_i + \tau, \rho(e_i,t) = 1$ *; et (iii)* $t_{i+1} \geq t_i + \tau$*. De plus,* $departure(\mathcal{J})$ *et* $arrival(\mathcal{J})$ *correspondent respectivement à l'instant de départ* t_1 *et l'instant d'arrivée* $t_k + \tau$*. Finalement* $\delta_{\mathcal{J}} = arrival(\mathcal{J}) - departure(\mathcal{J})$ *est la* durée *du chemin temporel.*

Par exemple, dans un réseau sans-fil opportuniste, un chemin temporel représente typiquement une suite de sauts qu'un message va effectuer. Dans les jeux de données réels ayant une *résolution maximale* (par exemple une seconde ou une milliseconde), une hypothèse courante est de considérer que graphe dynamique mesuré ne change pas entre deux instants de mesure.

Définition 3 (Graphe dynamique régulier)**.** *Un graphe dynamique* $\mathcal{G}$ *est dit* η*-régulier s'il existe* $\eta > 0$ *tel que* $\forall k \in \mathbb{N}, k\eta < t_1 \leq t_2 < (k+1)\eta \implies \mathcal{G}(t_1) = \mathcal{G}(t_2) \subseteq \mathcal{G}(k\eta)$*. On appelle* η *la* résolution *de* $\mathcal{G}$*.*

2.2 Graphes d'accessibilité

Définition 4 (Graphe d'accessibilité)**.** *Pour* $\delta \in \mathbb{R}+$*, soit* $\mathcal{R}_\delta$ *le graphe d'accessibilité avec délai maximal* δ *obtenu à partir de* $\mathcal{G}$*, avec un temps de traversée unitaire* τ*. Formellement,* $\forall t$*,* $(u,v) \in \mathcal{R}_\delta(t)$ *si et seulement si* $u \neq v$ *et il existe un chemin temporel* $\mathcal{J}$ *dans* $\mathcal{G}$ *à l'instant* t *de* u *à* v *tel que* $departure(\mathcal{J}) \geq t$ *et* $arrival(\mathcal{J}) \leq t + \delta$*. Notons que si* $\delta < \tau$ *alors* $\mathcal{R}_\delta$ *est vide car même les chemins temporels de longueur 1 n'ont pas le temps d'arriver avant le délai maximum.*

La figure 1 illustre les graphes d'accessibilité obtenus à partir de $\mathcal{G}$ ($\tau = 1$) à l'instant 0 pour $\delta \in \{1,2,3\}$. Dans cet exemple, $\mathcal{G}$ est régulier ($\eta = 1$). Quand $\delta = 1$, les seuls chemins temporels possibles dans $\mathcal{G}$ à l'instant $t = 0$ sont $a \rightsquigarrow b$ et $b \rightsquigarrow a$. Quand $\delta = 2$, plusieurs autres chemins temporels apparaissent du fait que b et c peuvent attendre une unité de temps que l'arête (b,c) apparaisse ($b \rightsquigarrow c$ et $c \rightsquigarrow b$), et un chemin temporel à deux sauts $a \rightsquigarrow c$ via b devient possible. En raison de l'ordre d'apparition des arêtes (a,b) et (b,c), le chemin temporel inverse $c \rightsquigarrow a$ n'existe pas.

Si un graphe dynamique est η-régulier où τ est de la forme $\tau = k\eta$ avec $k \in \mathbb{N}$, il est facile de vérifier que tous ses graphes d'accessibilité sont également η-réguliers. Dû aux contraintes de longueur, dans la suite de ce papier nous nous cantonnerons au cas $\eta = \tau$, même si les définitions et résultats peuvent être étendus au cas général ($\tau = k\eta, k \in \mathbb{N}$).

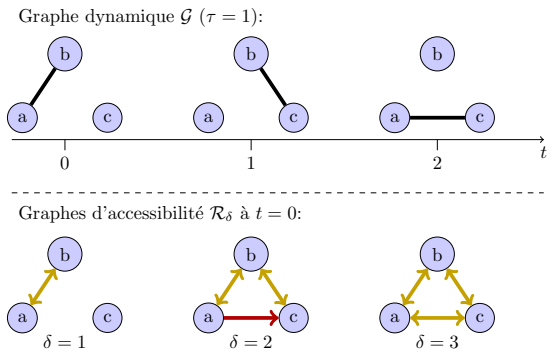
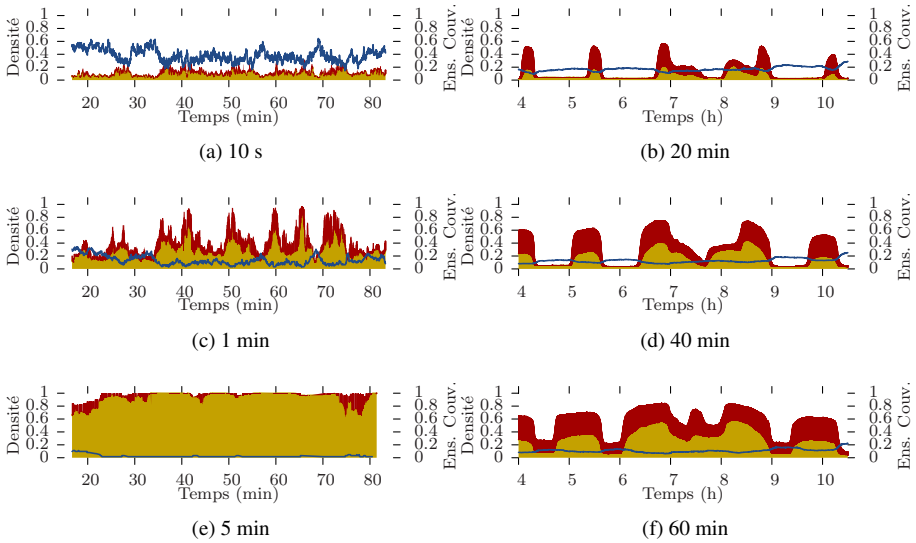


FIGURE 1: Exemple de construction des graphes d'accessibilité pour différentes valeurs de δ. La topologie du graphe dynamique $\mathcal{G}$ change aux instants 0,1 et 2 mais reste stable avant, après et entre ces instants.

Définition 5 (Composition)**.** *Soit* $\mathcal{G}$ *un graphe dynamique* τ*-régulier avec un temps de traversée unitaire* τ *et* $\mathcal{R}_\delta$ *et* $\mathcal{R}_\mu$ *deux de ses graphes d'accessibilité. On définit* $\mathcal{R}_\delta \oplus \mathcal{R}_\mu$*, le graphe d'accessibilité* τ*-régulier tel que pour chaque instant* $t = k\tau, k \in \mathbb{N}$ *:*

$$(u,v) \in (\mathcal{R}_\delta \oplus \mathcal{R}_\mu)(t) \Leftrightarrow \begin{cases} (u,v) \in \mathcal{R}_\delta(t), \textit{ ou} \\ (u,v) \in \mathcal{R}_\mu(t+\delta), \textit{ ou} \\ \exists w \in V, (u,w) \in \mathcal{R}_\delta(t) \textit{ et } (w,v) \in \mathcal{R}_\mu(t+\delta) \end{cases}$$



(a) 10 s (b) 20 min

(c) 1 min (d) 40 min

(e) 5 min (f) 60 min

FIGURE 2: Densité des graphes d'accessibilité (histogramme jaune et rouge) et taille normalisée des ensembles couvrants (courbe bleue) au cours du temps pour plusieurs valeurs de δ. Jeux de données Rollernet pour δ valant 10 secondes, 1 minute et 5 minutes (gauche) et Stanford pour δ valant 20 minutes, 40 minutes et 1 heure (droite).

Théorème 1 (Additivité)**.** *Soit $\mathcal{G}$ un graphe dynamique τ-régulier avec un temps de traversée unitaire τ et $\mathcal{R}_\delta$ et $\mathcal{R}_\mu$ deux de ses graphes d'accessibilité. Si $\exists(d,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, tel que $\delta = d\tau$ et $\mu = m\tau$, alors $\forall k \in \mathbb{N}, (\mathcal{R}_\delta \oplus \mathcal{R}_\mu)(k\tau) = \mathcal{R}_{\delta+\mu}(k\tau)$.*

3 Calcul efficace des graphes d'accessibilité

Pour simplifier les notations, on considère à présent $\tau = 1$ et que tous nos graphes dynamiques sont 1-réguliers. Soit $\bar{\mathcal{R}} = \{\mathcal{R}_d\}_{d\in\mathbb{N}}$ un ensemble de graphes d'accessibilité dérivés d'un graphe dynamique $\mathcal{G}$. Sans rentrer dans les détails, la propriété d'additivité permet de calculer n'importe quel graphe d'accessibilité $\mathcal{R}_d$ en $\log(d)$ étapes.

Les graphes dynamiques sont stockés sous la forme de flux d'évènements $[t,(a,b),e]$ qui indiquent qu'à l'instant t l'arc (a,b) apparaît si $e = UP$ ou disparaît si $e = DOWN$. Notons $\mathcal{F}_\mathcal{G}$ le flux d'évènements associés à un graphe dynamique $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}_\mathcal{G}([t_1,t_2[)$ l'ensemble des évènements qui s'y produisent entre t_1 (inclus) et t_2 (exclu). Pour nos graphes dynamiques 1-régulier on pourra sans ambiguïté noter $\mathcal{F}_\mathcal{G}(k) = \mathcal{F}_\mathcal{G}([k,k+1[)$.

Comme l'opération de composition n'utilise que des informations à proximité de l'instant t considéré, il va être possible d'écrire $\mathcal{F}_{\mathcal{R}_\delta\oplus\mathcal{R}_m}$ au fur et à mesure que l'on lit les flux $\mathcal{F}_{\mathcal{R}_d}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{R}_m}$ (ce dernier étant en avance de d). En effet, à l'instant $t = k$ on connaît les états de $\mathcal{R}_d(k)$, $\mathcal{R}_m(k+d)$, et $\mathcal{R}_{d+m}(k)$. A partir des évènements dans $\mathcal{F}_{\mathcal{R}_d}(k)$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{R}_m}(k+d)$, on peut calculer $\mathcal{R}_d(k+1)$, $\mathcal{R}_m(k+d+1)$, et $\mathcal{R}_{d+m}(k+1)$. Les changements effectués sur $\mathcal{R}_{d+m}$ entre k et $k+1$ sont écrit sur le flux de sortie $\mathcal{F}_{\mathcal{R}_\delta\oplus\mathcal{R}_m}(k)$.

4 Application à des traces réelles

Les mesures de proximité entre personnes sont effectuées en distribuant de petit appareils qui diffusent périodiquement un beacon à leur voisinage. On en déduit un graphe dynamique de connectivité dans lequel une arête existe entre deux nœuds si pendant cette période les beacons envoyé par l'un ont été reçus par l'autre. Dans l'expérience *Rollernet*, des capteurs Bluetooth, distribués à 62 participants d'une randonnée roller autour de Paris, effectuent des scans de voisinage toutes les 15 secondes [TLB+11]. Dans le scénario *Stanford*, des capteurs ZigBee distribués à 789 élèves d'un lycée américain pendant une journée complète de cours dans le cadre d'une étude épidémiologique envoient des beacons toutes les 20 secondes [SKL+10].

Nous nous intéressons ici à deux concepts spécifiques aux graphes d'accessibilité : l'accessibilité et l'asymétrie. La figure 2 montre en fonction du temps, pour différentes valeurs de δ, la fraction des paires de nœuds pour lesquels il existe un chemin dans les deux sens (en jaune) ou dans un seul sens (en rouge). Lorsque ces fractions sont faibles, cela veut dire qu'il n'y a quasiment pas de chemins temporels alors que s'il est complètement jaune il existe toujours un chemin temporel entre n'importe quelle paire de nœuds. De plus, à partir du graphe d'accessibilité, on peut calculer à chaque instant un ensemble couvrant tel qu'il existe un chemin depuis les nœuds de cet ensemble vers tous les autres nœuds du graphe, voir figure 2.

Dans le scénario *Rollernet*, on passe d'un graphe d'accessibilité complètement déconnecté ($\delta = 10s$, Fig. 2a), à un qui fait ressortir l'effet accordéon avec une alternance de phases très connectées et déconnectées qui correspondent à l'accélération et la décélération de la randonnée ($\delta = 1min$, Fig. 2c), et enfin à un graphe totalement connecté (Fig. 2e). La taille de l'ensemble couvrant est d'abord très bruitée, ce qui traduit la nature très dynamique du réseau, puis diminue jusqu'à 1 lorsque l'on s'autorise des chemins plus longs.

Le scénario *Stanford* est structuré autour des salles de classe ayant une très bonne connectivité temporelle, mais il y a peu de communications entre classes qui, lorsqu'elles existent, sont fortement asymétriques (Fig. 2d). La taille de l'ensemble couvrant est petit et stable dans le temps. En effet, il y moins de changements brusques de connectivé que dans Rollernet et une personne par classe suffit à bien couvrir le graphe d'accessibilité. L'analyse du graphe d'accessibilité permet d'affirmer qu'un réseau purement opportuniste ne permettrait pas de diffuser efficacement un message à partir d'un nœud, même pour pour des durées longues (1 heure, Fig. 2f), alors qu'un réseau hybride infrastructure/opportuniste pourrait efficacement s'appuyer sur un petit ensemble couvrant.

5 Conclusion et travaux futurs

Nous avons présenté le concept de graphe d'accessibilité que nous avons formalisé afin de pouvoir en tirer un algorithme efficace. Nous avons montré le potentiel de ce concept sur deux jeux de données ce qui nous a permis de mieux comprendre les graphes dynamiques associés.

Les graphes d'accessibilité ouvrent de nombreuses perspectives. Sur le plan pratique, ils permettent d'estimer rapidement les possibilités de communications. Par exemple, la densité du graphe d'accessibilité fournit la borne supérieure du taux de livraison maximal dans un réseau opportuniste. Sur le plan théorique, de nombreuses questions restent ouvertes. Comment modéliser ces graphes d'accessibilité ? Quelles sont les corrélations entre arcs symétriques et asymétriques depuis un nœud ? Comment évoluent les distributions des degrés et des temps de contact/intercontacts avec le délai et le temps de traversée ?

Références

[CE07] A. Clauset and N. Eagle. Persistence and Periodicity in a Dynamic Proximity Network. In *Proc. DIMACS Workshop on Computational Methods for Dynamic Interaction Network*, 2007.

[CFQS11] Arnaud Casteigts, Paola Flocchini, Walter Quattrociocchi, and Nicola Santoro. Time-varying graphs and dynamic networks. In *Ad-hoc, Mobile, and Wireless Networks*, volume 6811 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 346–359. Springer Berlin / Heidelberg, 2011.

[CMMD07] Augustin Chaintreau, Abderrahmen Mtibaa, Laurent Massoulie, and Christophe Diot. The diameter of opportunistic mobile networks. In *Proc. ACM CoNEXT*, 2007.

[Hol05] Petter Holme. Network reachability of real-world contact sequences. *Phys. Rev. E*, 71, Apr 2005.

[KKK00] David Kempe, Jon Kleinberg, and Amit Kumar. Connectivity and inference problems for temporal networks. In *Proc. STOC*, 2000.

[SKL+10] Marcel Salathé, Maria Kazandjieva, Jung Woo Lee, Philip Levis, Marcus W. Feldman, and James H. Jones. A high-resolution human contact network for infectious disease transmission. *PNAS*, 107(51) :22020–22025, 2010.

[TLB+11] Pierre-Ugo Tournoux, Jérémie Leguay, Farid Benbadis, John Whitbeck, Vania Conan, and Marcelo Amorim. Density Aware Routing in Highly Dynamic DTNs : the RollerNet Case. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 10(12) :1755–1768, 2011.

[XFJ03] Bui B. Xuan, A. Ferreira, and A. Jarry. Computing shortest, fastest, and foremost journeys in dynamic networks. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 14(2) :267–285, 2003.