



HAL
open science

Etude de convergence a-priori d'une méthode Galerkin Discontinue en maillage hybride et non-conforme pour résoudre les équations de Maxwell instationnaires

Clement Durochat, Claire Scheid

► To cite this version:

Clement Durochat, Claire Scheid. Etude de convergence a-priori d'une méthode Galerkin Discontinue en maillage hybride et non-conforme pour résoudre les équations de Maxwell instationnaires. [Rapport de recherche] RR-7933, INRIA. 2012. hal-00688374

HAL Id: hal-00688374

<https://inria.hal.science/hal-00688374>

Submitted on 17 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Étude de convergence a-priori d'une méthode Galerkin Discontinue en maillage hybride et non-conforme pour résoudre les équations de Maxwell instationnaires

Clément Durochat, Claire Scheid

**RESEARCH
REPORT**

N° 7933

Avril 2012

Project-Teams Nachos



Étude de convergence a-priori d'une méthode Galerkin Discontinue en maillage hybride et non-conforme pour résoudre les équations de Maxwell instationnaires

Clément Durochat*, Claire Scheid†

Équipes-Projets Nachos

Rapport de recherche n° 7933 — Avril 2012 — 38 pages

Résumé : Nous nous intéressons ici à une méthode Galerkin Discontinue en Domaine Temporel (GDDT) pour la résolution numérique du système des équations de Maxwell instationnaires. Cette méthode est formulée sur des maillages hybrides et non-conformes combinant une triangulation non-structurée pour la discrétisation des objets de formes irrégulières avec une quadrangulation structurée (composée d'éléments orthogonaux de grandes tailles) pour le reste du domaine de calcul. Au sein de chaque élément, le champ électromagnétique est approximé pour une interpolation nodale d'ordre arbitrairement élevé, on utilise un flux centré pour les intégrales de surfaces et un schéma saute-mouton d'ordre 2 pour l'intégration en temps des équations semi-discrétisées associées. Le principal but est d'améliorer la flexibilité et l'efficacité de la méthode GDDT. Nous formulons les schémas de discrétisation en 3D, nous exposons la preuve détaillée de l'analyse mathématique de convergence a-priori en 3D. Enfin, la performance et la convergence numérique sont démontrées pour différents cas tests en 2D.

Mots-clés : Méthode Galerkin Discontinue, équations de Maxwell instationnaires, analyse de convergence a-priori, maillages non-conformes, méthodes hybrides, maillages multi-éléments

* Clement.Durochat@inria.fr

† Claire.SCHEID@unice.fr

**RESEARCH CENTRE
SOPHIA ANTIPOLIS – MÉDITERRANÉE**

2004 route des Lucioles - BP 93
06902 Sophia Antipolis Cedex

A priori convergence analysis of a Non-Conforming Discontinuous Galerkin Time-Domain method on hybrid meshes for solving the Maxwell equations

Abstract: We are interested in a multi-element Discontinuous Galerkin Time Domain (DGTD) method for the numerical resolution of the system of unsteady Maxwell equations. This method is formulated on hybrid and non-conforming meshes combining an unstructured triangulation for the discretization of the irregularly shaped objects with a structured (with orthogonal and large size elements) quadrangulation for the rest of the computational domain. Within each element, the electromagnetic field components are approximated by a high order nodal polynomial, using a centered flux for the surface integrals and a second order Leap-Frog scheme for the time integration of the associated semi-discrete equations. The main objective is to enhance the flexibility and the efficiency of DGTD methods. We formulate the 3D discretization scheme, we expose the complete proof of the a-priori convergence mathematical analysis in 3D. Finally, the numerical performance and convergence is demonstrated for test problems in 2D.

Key-words: Discontinuous Galerkin method, unsteady Maxwell equations, a-priori convergence analysis, non-conforming meshes, hybrid methods, multi-element meshes

Table des matières

Introduction	4
1 Le problème de Maxwell continu	5
2 Discrétisation du problème en espace et en temps	6
2.1 Discrétisation en espace par une méthode GDDT- $\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$	6
2.1.1 Formulation faible	6
2.1.2 Equations semi-discrétisées pour les cellules tétraédriques	9
2.1.3 Equations semi-discrétisées pour les cellules hexaédriques	11
2.2 Discrétisation en temps par un schéma saute-mouton d'ordre 2	12
3 Etude de convergence théorique	13
3.1 Propositions, lemmes, hypothèses et notations	14
3.2 Convergence du problème semi-discret	19
3.3 Convergence du problème totalement discret	28
4 Etude numérique 2D	30
4.1 Mode (1,1) dans une cavité métallique carrée	31
4.1.1 Test de performance	31
4.1.2 Test de convergence numérique	32
4.2 Diffraction d'une onde plane par un cercle métallique	34
5 Conclusion	37
Bibliographie	37

Introduction

De nos jours, différentes stratégies de modélisation existent pour la simulation numérique de la propagation des ondes électromagnétiques. Malgré de grandes avancées dans les méthodes numériques, capables de traiter avec précision et de manière flexible des géométries complexes par des maillages non-structurés (et éventuellement non-conformes), la méthode DFDT (Différences Finies en Domaine Temporel) [24, 27] est toujours l'approche prédominante pour la modélisation de problèmes d'électromagnétisme numérique réalistes en domaine temporel, grâce en particulier à la facilité d'implémentation et aux faibles temps de calcul. Dans la méthode DFDT, le domaine de calcul entier est discrétisé par un maillage structuré (Cartésien), simplifiant ainsi le processus de discrétisation mais représentant aussi la principale limitation de cette méthode lorsque des objets à géométrie complexe entrent en jeu. Les méthodes d'éléments finis nodales classiques sont connues pour générer des modes parasites faussant les simulations numériques. Les éléments finis d'arêtes [16, 17] ont été développés notamment pour s'affranchir de ces problèmes mais sont pénalisés par la complexité de mise en oeuvre et les coûts des calculs. Les méthodes de volumes finis en maillages non-structurés [20] sont plus flexibles vis-à-vis de la prise en compte des hétérogénéités du milieu de propagation et de formes géométriques irrégulières, mais sont néanmoins de précision limitée. Par ailleurs, ces dix dernières années ont vu un intérêt croissant pour des méthodes appelées GDDT (Galerkin Discontinue en Domaine Temporel). Grâce à l'utilisation d'espaces éléments finis discontinus, les méthodes GDDT peuvent facilement être traitées avec des éléments de différents types et formes, de plus aucune continuité n'est imposée aux interfaces entre les éléments et le degré du polynôme d'interpolation peut aussi varier localement, permettant ainsi d'offrir une grande flexibilité dans la conception des maillages (qui peuvent être irréguliers, non-conformes, etc.). Les méthodes GDDT ont été développées sur des maillages quadrangulaires (cas 2D) ou hexaédriques (cas 3D) [2, 15], aussi bien que sur des maillages triangulaires ou tétraédriques [6, 7, 9, 12]. Ces méthodes ont aujourd'hui atteint une certaine maturité (leur permettant de s'adapter à des contextes de modélisations de plus en plus complexes, comme [4, 13, 18, 23] entre autres) et ont réussi à s'intégrer dans plusieurs communautés scientifiques et technologiques. Nous pouvons aussi relever que cette méthode a été pour la première fois choisie pour un logiciel commercial comme alternative en domaine temporel d'un outil bien connu de simulation d'ondes électromagnétiques [22]. Dans tous les travaux mentionnés précédemment sur les méthodes GDDT, le premier ordre (ou formulation mixte) des équations de Maxwell stationnaires est considéré. À travers chaque élément le champ électromagnétique est approximé par un polynôme d'interpolation nodal d'ordre arbitraire.

Par la suite, plusieurs essais ont été réalisés pour développer et combiner des méthodes en domaine temporel sur des maillages structurés avec des formulations GDDT sur des maillages non-structurés. Une stratégie de bas ordre allant dans ce sens est présentée dans [8] sous la forme d'une combinaison de DFDT avec VFDT (Volumes Finis en Domaine Temporel, qui peut être vue comme le plus bas ordre de la méthode GDDT). Une hybridation de DFDT avec GDDT est décrite dans [10] pour des problèmes 2D. Le principal objectif est de modéliser avec précision les détails géométriques d'objets courbes, tout en maintenant la simplicité et la rapidité de DFDT pour le reste du domaine de calcul. Ces stratégies reposent sur un schéma couplé simple, une couche intermédiaire d'éléments quadrangulaires est introduite entre la grille Cartésienne (de la méthode DFDT) et le maillage triangulaire (de la méthode GDDT). À l'intérieur de cette couche, DFDT est alors considéré comme un cas particulier (plus précisément d'ordre 0) de GDDT et vice versa. Un flux centré est choisi pour la méthode GDDT et les deux méthodes utilisent un schéma saute-mouton d'ordre 2 pour la discrétisation en temps. Dans un esprit similaire, des méthodes hybrides EFDT (Éléments Finis en Domaine Temporel)-DFDT ont été proposées comme par exemple dans [11, 25, 26]. Une hybridation d'ordre élevé a récemment été étudiée dans [3] qui combine une méthode d'éléments finis spectraux sur un maillage quadrangulaire avec une méthode GDDT sur un maillage triangulaire. Le couplage des deux méthodes est obtenu en utilisant un flux numérique décentré sur la frontière interne (c'est-à-dire entre les maillages triangulaires et quadrangulaires). Dans les deux méthodes, un schéma Runge-Kutta d'ordre 4 est choisi pour l'intégration en temps. La précision de cette méthode hybride EFDT-GDDT est clairement démontrée pour des problèmes en 2D mais il ne figure pas de comparaison avec des

maillages complètement triangulaires. Enfin, une autre approche, moins générale, est proposée dans [21]. Il s'agit d'un schéma combinant une méthode VFDT avec la technique d'intégration finie ; un seul type de maillage est utilisé (Cartésien) et cette hybridation vise à améliorer les propriétés de dispersion le long d'une direction.

Nous sommes concernés ici par la possibilité d'avoir un seul schéma de discrétisation, i.e. une méthode Galerkin Discontinue, pour améliorer l'efficacité de la simulation en utilisant des maillages hybrides et non-conformes. Ces derniers sont composés d'éléments hexaédriques (quadrangulaires en 2D) orthogonaux pour la discrétisation des zones régulières (partie structurée) et d'éléments tétraédriques (triangulaires en 2D) pour la discrétisation d'objets de formes irrégulières (partie non-structurée) du domaine de calcul. Ce rapport est organisé de la façon suivante : la section 1 présente le problème aux conditions limites et initiales à résoudre ; la section 2 expose la formulation GDDT- $\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ sur des maillages multi-éléments en 3D. Dans la section 3 nous présentons la preuve complète de l'analyse de convergence théorique de la méthode DGTD- $\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ en 3D, aboutissant à un estimateur d'erreur a-priori prenant en compte la nature hybride du maillage. Enfin, la section 4 est destinée à montrer la performance numérique de la méthode pour deux scénarios de propagation en 2D.

1 Le problème de Maxwell continu

Soit Ω un ouvert, borné et régulier de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$. Le système des équations de Maxwell tridimensionnelles est donné par :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E} - \text{rot}(\mathbf{H}) &= -z_0 \sigma \mathbf{E}, \\ \mu \partial_t \mathbf{H} + \text{rot}(\mathbf{E}) &= 0, \end{cases} \quad (1)$$

où $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \equiv (E_x(\mathbf{x}, t), E_y(\mathbf{x}, t), E_z(\mathbf{x}, t))^T$ et $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \equiv (H_x(\mathbf{x}, t), H_y(\mathbf{x}, t), H_z(\mathbf{x}, t))^T$ désignent respectivement les champs électrique et magnétique (avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$) ; $\varepsilon \equiv \varepsilon(\mathbf{x})$, $\mu \equiv \mu(\mathbf{x})$ et $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{x})$ sont respectivement les permittivité électrique, perméabilité magnétique et conductivité électrique. Les équations (1) ont été redimensionnées et ε et μ définissent des quantités relatives ($z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ est l'impédance du vide). Notre objectif est de résoudre le système (1) sur Ω de frontière $\partial\Omega = \partial\Omega^a \cup \partial\Omega^m$, en le complétant par les conditions aux limites suivantes (pour les conditions initiales, se reporter en début de section 3), où \mathbf{n} désigne la normale sortante à $\partial\Omega$:

- sur $\partial\Omega^m$: $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$, qui est appelée condition aux limites métallique ;
- sur $\partial\Omega^a$: $\mathfrak{F}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathfrak{F}(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}})$ où $\mathfrak{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{n} \times \mathbf{X} - z \mathbf{n} \times (\mathbf{Y} \times \mathbf{n})$, avec $z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ et $(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}})$ un champ incident donné. Cette condition est dite absorbante, ou plus précisément condition de Silver-Müller qui est une approximation du premier ordre de la condition aux limites absorbante exacte. Le bord $\partial\Omega^a$, sur laquelle cette condition est appliquée, représente une troncature artificielle du domaine de calcul.

Ce problème admet alors une unique solution dans un certain espace fonctionnel, précisé dans la section 3.

On réécrit le système (1) sous une forme condensée, appelée aussi forme pseudo-conservative :

$$Q(\partial_t \mathbf{W}) + \nabla \cdot F(\mathbf{W}) = \mathbf{J}, \quad (2)$$

où :

$$Q = \begin{bmatrix} \varepsilon \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mu \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -z_0 \sigma \mathbf{E} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et :

$$\nabla \cdot F(\mathbf{W}) = \partial_{x_1}(F_1(\mathbf{W})) + \partial_{x_2}(F_2(\mathbf{W})) + \partial_{x_3}(F_3(\mathbf{W})) \in \mathbb{R}^6,$$

avec :

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{W}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & N_1 \\ -N_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{W} = (0, H_3, -H_2, 0, -E_3, E_2)^T \in \mathbb{R}^6, \\ F_2(\mathbf{W}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & N_2 \\ -N_2 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{W} = (-H_3, 0, H_1, E_3, 0, -E_1)^T \in \mathbb{R}^6, \\ F_3(\mathbf{W}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & N_3 \\ -N_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{W} = (H_2, -H_1, 0, -E_2, E_1, 0)^T \in \mathbb{R}^6, \end{aligned}$$

et N_1, N_2, N_3 sont les matrices (anti-symétriques) données par :

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enfin, on suppose $\sigma = 0$.

2 Discrétisation du problème en espace et en temps

2.1 Discrétisation en espace par une méthode GDDT- $\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$

2.1.1 Formulation faible

Le domaine Ω est supposé discrétisé par $\Omega_h = \bigcup_{i=1}^N c_i = \mathcal{T}_h \cup \mathcal{Q}_h$, où les c_i désignent des cellules qui sont des tétraèdres ($\in \mathcal{T}_h$) ou des hexaèdres ($\in \mathcal{Q}_h$) en 3D (des triangles ou des quadrangles en 2D). Dans le cas 2D, le maillage obtenu peut être conforme, ou non-conforme (cf [6, 7]) i.e. comportant des noeuds flottants sur une face commune à deux éléments de différents types. D'autre part en 3D, pour obtenir un maillage hybride conforme, il faut faire appel à des éléments intermédiaires (car les faces des tétraèdres sont des triangles alors que celles des hexaèdres sont des quadrangles), prismes ou pyramides, ce qui complique notablement le processus de construction du maillage. Dans le cadre d'une méthode de discrétisation Galerkin Discontinue, il n'est pas nécessaire d'imposer une telle conformité. Dans la présente étude, nous considérons des maillages hybrides et non-conformes, tout en nous limitant à un certain type de non-conformité schématisé sur la FIG. 1. Autrement dit, on se limitera au cas où, sur une face hybride, l'ensemble des faces triangulaires (issues des tétraèdres) coïncide avec la face quadrangulaire de l'hexaèdre voisin.

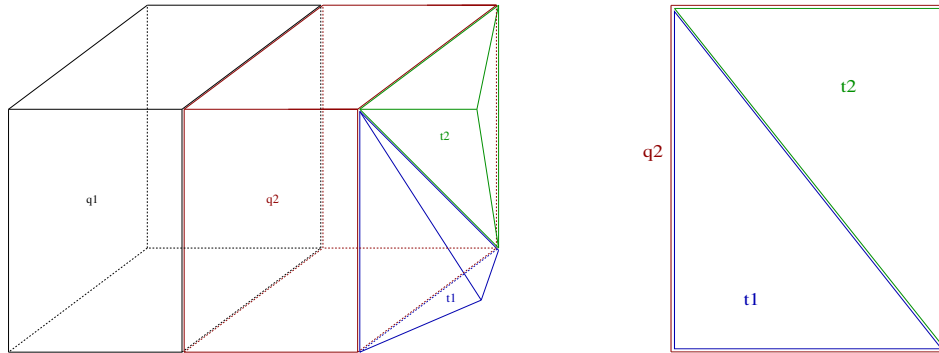


FIG. 1 – Gauche : Type non-conformité considérée en 3D, entre un hexaèdre (q2) et deux tétraèdres (t1 et t2) - Droite : Vue 2D d'une face hybride non-conforme entre l'hexaèdre q2 et les deux tétraèdres t1 et t2

Pour la présentation des schémas de discrétisation, nous allons considérer uniquement des frontières métalliques (i.e. $\partial\Omega^a = \emptyset$). On note $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6)^T \in \mathbb{R}^6$ une fonction test vectorielle. En appliquant le produit scalaire (euclidien, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$) par $\vec{\psi}$ au système (2) et en intégrant sur c_i , nous obtenons :

$$\int_{c_i} \langle Q(\partial_t \mathbf{W}), \vec{\psi} \rangle d\mathbf{x} + \int_{c_i} \langle \nabla \cdot F(\mathbf{W}), \vec{\psi} \rangle d\mathbf{x} = 0. \quad (3)$$

Soit $\mathbb{P}_p[c_i]$ l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus p sur $c_i \in \mathcal{T}_h$ (par exemple, les polynômes \mathbb{P}_2 en 2D sont de la forme $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2$), muni de la base locale $\phi_i = (\phi_{i1}, \phi_{i2}, \dots, \phi_{id_i})^T$ avec d_i le nombre de degrés de liberté pour le tétraèdre c_i . Soit $\mathbb{Q}_k[c_i]$ l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus k par rapport chaque variable séparément sur $c_i \in \mathcal{Q}_h$ (par exemple, les polynômes \mathbb{Q}_2 en 2D sont de la forme $\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_1 x_2 + \gamma_4 x_1^2 + \gamma_5 x_2^2 + \gamma_6 x_1^2 x_2 + \gamma_7 x_1 x_2^2$), muni de la base locale $\vartheta_i = (\vartheta_{i1}, \vartheta_{i2}, \dots, \vartheta_{ib_i})^T$ avec b_i le nombre de degrés de liberté pour l'hexaèdre c_i . Les degrés de liberté locaux sont notés $\mathbf{W}_{il} \in \mathbb{R}^6$ et $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^6$ définira la restriction de la solution approchée à la cellule c_i (i.e. $\mathbf{W}_i = \mathbf{W}_h|_{c_i}$). Ainsi, nous avons :

$$\bullet \text{ Si } c_i \in \mathcal{T}_h : \mathbf{W}_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{d_i} \mathbf{W}_{il} \phi_{il}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{d_i} \mathbf{E}_{il} \phi_{il}(\mathbf{x}) \\ \sum_{l=1}^{d_i} \mathbf{H}_{il} \phi_{il}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \text{ et } \mathbb{P}_p[c_i] = \text{Vect}(\phi_{i1}, \dots, \phi_{id_i}). \quad (4)$$

$$\bullet \text{ Si } c_i \in \mathcal{Q}_h : \mathbf{W}_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{b_i} \mathbf{W}_{il} \vartheta_{il}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{b_i} \mathbf{E}_{il} \vartheta_{il}(\mathbf{x}) \\ \sum_{l=1}^{b_i} \mathbf{H}_{il} \vartheta_{il}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \text{ et } \mathbb{Q}_k[c_i] = \text{Vect}(\vartheta_{i1}, \dots, \vartheta_{ib_i}). \quad (5)$$

Nous cherchons alors une solution approchée \mathbf{W}_h dans l'espace d'approximation global V_h^6 , défini par :

$$V_h = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} \forall c_i \in \mathcal{T}_h, v_h|_{c_i} \in \mathbb{P}_p[c_i] \\ \forall c_i \in \mathcal{Q}_h, v_h|_{c_i} \in \mathbb{Q}_k[c_i] \end{array} \right. \right\}. \quad (6)$$

Maintenant, notons $a_{ij} = c_i \cap c_j$ la face commune entre c_i et c_j et $\mathcal{V}_i = \{j | c_i \cap c_j \neq \emptyset\}$ l'ensemble des éléments voisins de c_i . On introduit également la notation $\check{\mathbf{n}}_{ij}$ qui est le vecteur normal unitaire à a_{ij} sortant dirigé de c_i vers c_j et $\check{\mathbf{n}}_{ij} = (\check{n}_{ij}^1, \check{n}_{ij}^2, \check{n}_{ij}^3)^T \in \mathbb{R}^3$. Puisqu'aucune forme de continuité n'est assurée d'un élément à un autre pour le champ de vecteurs \mathbf{W}_h , un traitement particulier doit être introduit pour l'évaluation des intégrales de bord sur la face a_{ij} . Dans le contexte des méthodes volumes finis, on parle de flux numérique. Nous utilisons ici un flux numérique basé sur un schéma centré :

$$\mathbf{W}_h|_{a_{ij}} = \frac{\mathbf{W}_i|_{a_{ij}} + \mathbf{W}_j|_{a_{ij}}}{2}.$$

Pour le traitement numérique des conditions aux limites i.e. pour les interfaces a_{ij} localisées sur la discrétisation de $\partial\Omega^m$, nous considérons c_j une cellule fictive et nous établissons :

$$\text{Sur } a_{ij} \in \partial\Omega^m : \mathbf{W}_j = \begin{bmatrix} -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{W}_i, \text{ i.e. : } \begin{pmatrix} \mathbf{E}_j \\ \mathbf{H}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{E}_i \\ \mathbf{H}_i \end{pmatrix}; \text{ donc : } \mathbf{W}_h|_{a_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{H}_j|_{a_{ij}} \end{pmatrix}.$$

Nous distinguerons par la suite deux cas différents :

- Cas (A) : $c_i \in \mathcal{T}_h$. c_i est un tétraèdre et les cellules voisines à c_i sont des tétraèdres ou des hexaèdres. Une face de l'élément fini c_i , est alors soit une face frontière métallique de tétraèdre ($\in \mathcal{T}_m^i$), soit une face interne commune à deux tétraèdres ($\in \mathcal{T}_d^i$), soit une face interne commune à un tétraèdre et un hexaèdre, dite hybride ($\in \mathcal{H}_d^i$). Autrement dit, pour $j \in \mathcal{V}_i$ on a $c_j \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{Q}_h$, et donc $a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i \cup \mathcal{T}_d^i \cup \mathcal{T}_m^i$. En injectant \mathbf{W}_i dans (3), en utilisant une double intégration par partie ainsi que les différentes particularités de la méthode Galerkin Discontinue (flux numérique, conditions aux limites, etc.), nous obtenons la formulation faible spécifique aux cellules tétraédriques suivante :

$$2Q_i \int_{c_i} \langle \partial_t \mathbf{W}_i, \tilde{\psi} \rangle d\mathbf{x} + \int_{c_i} \left(\left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i, \tilde{\psi} \right\rangle - \sum_{k=1}^3 \langle \partial_{x_k} \tilde{\psi}, \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \rangle \right) d\mathbf{x} + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{T}_d^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j, \tilde{\psi} \rangle d\sigma + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{T}_m^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{S}_{im} \mathbf{W}_i, \tilde{\psi} \rangle d\sigma + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j, \tilde{\psi} \rangle d\sigma = 0, \quad (7)$$

avec :

- $Q_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_i I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \mu_i I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$, où ε_i et μ_i sont des valeurs constantes sur c_i ,
- $\mathcal{N}^k = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & N_k \\ -N_k & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$,
- $\mathcal{M}_{ij} = \sum_{k=1}^3 \check{n}_{ij}^k \mathcal{N}^k = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \check{N}_{ij} \\ -\check{N}_{ij} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$, où $\check{N}_{ij} = \sum_{k=1}^3 \check{n}_{ij}^k N_k = \begin{bmatrix} 0 & \check{n}_{ij}^3 & -\check{n}_{ij}^2 \\ -\check{n}_{ij}^3 & 0 & \check{n}_{ij}^1 \\ \check{n}_{ij}^2 & -\check{n}_{ij}^1 & 0 \end{bmatrix}$,
- $\mathcal{S}_{im} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \check{N}_{im} \\ \check{N}_{im} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$.

Remarques :

- Dans chaque terme $\mathbf{W}_i \in \mathbb{P}_p[c_i]$ (resp. $\mathbf{W}_j \in \mathbb{P}_p[c_j]$), excepté dans la somme sur \mathcal{H}_d^i où $\mathbf{W}_j \in \mathbb{Q}_k[c_j]$.
- $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$, on a $\check{N}_{ij} \mathbf{X} = \mathbf{X} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}$. De plus, $\check{\mathbf{n}}_{ij} = -\check{\mathbf{n}}_{ji}$ et donc $\check{N}_{ij} = -\check{N}_{ji}$.
- Les matrices N_k et \check{N}_{ij} sont de taille 3×3 et sont anti-symétriques ; les matrices \mathcal{N}^k et \mathcal{M}_{ij} sont de taille 6×6 et sont symétriques ; et \mathcal{S}_{im} est une matrice 6×6 anti-symétrique.
- Cas (B) : $c_i \in \mathcal{Q}_h$. c_i est un hexaèdre et les cellules voisines sont des hexaèdres ou des tétraèdres. Une face de l'élément fini c_i , est alors soit une face frontière métallique d'hexaèdre ($\in \mathcal{Q}_m^i$), soit une face interne commune à deux hexaèdres ($\in \mathcal{Q}_d^i$), soit une face interne commune à un hexaèdre et un tétraèdre, dite hybride ($\in \mathcal{H}_d^i$). Autrement dit, pour $j \in \mathcal{V}_i$ on a $c_j \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{Q}_h$, et donc $a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i \cup \mathcal{Q}_d^i \cup \mathcal{Q}_m^i$. En injectant \mathbf{W}_i dans (3), en utilisant une double intégration par partie et les différentes particularités de la méthode Galerkin Discontinue, nous obtenons la formulation faible spécifique aux cellules hexaédriques suivante :

$$2Q_i \int_{c_i} \langle \partial_t \mathbf{W}_i, \tilde{\psi} \rangle d\mathbf{x} + \int_{c_i} \left(\left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i, \tilde{\psi} \right\rangle - \sum_{k=1}^3 \langle \partial_{x_k} \tilde{\psi}, \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \rangle \right) d\mathbf{x} + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_d^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j, \tilde{\psi} \rangle d\sigma + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_m^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{S}_{im} \mathbf{W}_i, \tilde{\psi} \rangle d\sigma + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j, \tilde{\psi} \rangle d\sigma = 0. \quad (8)$$

Remarque : ici, dans chaque terme $\mathbf{W}_i \in \mathbb{Q}_k[c_i]$ (resp. $\mathbf{W}_j \in \mathbb{Q}_k[c_j]$), excepté dans la somme sur \mathcal{H}_d^i où $\mathbf{W}_j \in \mathbb{P}_p[c_j]$.

Enfin, on associe à ces deux formulations faibles des conditions initiales, qui seront décrites dans la section 3.

2.1.2 Equations semi-discrétisées pour les cellules tétraédriques

A partir de maintenant, on suppose d_i identique pour tous les tétraèdres c_i . On introduit les notations suivantes :

$$\Phi_i = \int_{c_i} \phi_i \phi_i^T d\mathbf{x}, \quad \Phi_i^{x_k} = \int_{c_i} (\phi_i (\partial_{x_k} \phi_i)^T - (\partial_{x_k} \phi_i) \phi_i^T) d\mathbf{x}, \quad \Phi_{ij} = \int_{a_{ij}} \phi_i \phi_j^T d\sigma \text{ et } \Upsilon_{ij} = \int_{a_{ij}} \phi_i \theta_j^T d\sigma,$$

où :

- ϕ_i est un vecteur colonne de \mathbb{R}^{d_i} et ϕ_i^T (resp. θ_j^T) est un vecteur ligne de \mathbb{R}^{d_i} (resp. de \mathbb{R}^{d_j}).
- θ_j^T est un vecteur ligne de \mathbb{R}^{b_j} .
- Φ_i est une matrice $d_i \times d_i$ symétrique définie positive et $\Phi_i^{x_k}$ une matrice $d_i \times d_i$ anti-symétrique.
- Φ_{ij} est une matrice $d_i \times d_i$ ($d_j = d_i$) symétrique positive.
- Υ_{ij} est une matrice rectangulaire de taille $d_i \times b_j$. L'ordre des indices (i puis j) est à respecter.

Posons $\bar{\mathbf{E}}_i$ et $\bar{\mathbf{H}}_i$ qui désignent les vecteurs de \mathbb{R}^{3d_i} des degrés de liberté locaux \mathbf{E}_{il} et \mathbf{H}_{il} (qui sont chacun des vecteurs de \mathbb{R}^3) pour $l = 1, \dots, d_i$, associés au tétraèdre c_i (notation spécifique aux tétraèdres). Posons $\tilde{\mathbf{E}}_j$ et $\tilde{\mathbf{H}}_j$ qui désignent les vecteurs de \mathbb{R}^{3b_j} des degrés de liberté locaux \mathbf{E}_{jl} et \mathbf{H}_{jl} pour $l = 1, \dots, b_j$, associés à l'hexaèdre c_j (notation spécifique aux hexaèdres) :

$$\bar{\mathbf{E}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{id_i} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{id_i} \end{pmatrix}; \text{ et } \tilde{\mathbf{E}}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{j1} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{jb_j} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{j1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{jb_j} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

On introduit enfin les $6d_i$ fonctions de base vectorielles $\vec{\varphi}_{i1}, \dots, \vec{\varphi}_{i(6d_i)}$ qui sont des vecteurs de \mathbb{R}^6 , composés des fonctions de base scalaires $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{id_i}$ de $\mathbb{P}_p[c_i]$ (pour d_i fonctions de base scalaires, on a $6d_i$ fonctions de base vectorielles associées) et de la forme :

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_{i1} &= \begin{pmatrix} \varphi_{i1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_{i2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{i1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\varphi}_{i6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_{i1} \end{pmatrix}, \\ \vec{\varphi}_{i7} &= \begin{pmatrix} \varphi_{i2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_{i8} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{i2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\varphi}_{i12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_{i2} \end{pmatrix}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \vec{\varphi}_{i(6d_i-5)} &= \begin{pmatrix} \varphi_{id_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_{i(6d_i-4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{id_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\varphi}_{i(6d_i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_{id_i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir les $6d_i$ équations semi-discrétisées, on effectue plusieurs remplacements dans la formulation faible (7). Dans les intégrales sur c_i et sur a_{ij} pour $a_{ij} \in \mathcal{I}_d^i$ et $a_{ij} \in \mathcal{I}_m^i$, on remplace \mathbf{W}_i (resp. \mathbf{W}_j) par son expression (cf (4)) dans la base ϕ_i (resp. ϕ_j) de $\mathbb{P}_p[c_i]$ (resp. $\mathbb{P}_p[c_j]$); en revanche pour le terme de somme sur \mathcal{H}_d^i on remplace \mathbf{W}_j par son expression (cf (5)) dans la base θ_j de $\mathbb{Q}_k[c_j]$. Enfin, on remplace $\tilde{\psi}$ par $\tilde{\phi}_{il}$ pour $l = 1, \dots, 6d_i$. Proposons ainsi une expression du système de $6d_i$ équations associé à la formulation hybride dans le cas (A) :

$$\forall c_i \in \mathcal{I}_h : \begin{cases} 2\mathcal{X}_{\varepsilon,i} \frac{d\bar{\mathbf{E}}_i}{dt} + \sum_{k=1}^3 \mathcal{X}_i^{x_k} \bar{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{I}_d^i} \mathcal{X}_{ij} \bar{\mathbf{H}}_j + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{I}_m^i} \mathcal{X}_{im} \bar{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \mathcal{A}_{ij} \tilde{\mathbf{H}}_j = 0, \\ 2\mathcal{X}_{\mu,i} \frac{d\bar{\mathbf{H}}_i}{dt} - \sum_{k=1}^3 \mathcal{X}_i^{x_k} \bar{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{I}_d^i} \mathcal{X}_{ij} \bar{\mathbf{E}}_j + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{I}_m^i} \mathcal{X}_{im} \bar{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \mathcal{A}_{ij} \tilde{\mathbf{E}}_j = 0, \end{cases} \quad (10)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_{\varepsilon,i} = \begin{bmatrix} (\Phi_i)_{11}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & (\Phi_i)_{12}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Phi_i)_{1d_i}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) \\ (\Phi_i)_{21}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & (\Phi_i)_{22}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Phi_i)_{2d_i}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Phi_i)_{d_i 1}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & (\Phi_i)_{d_i 2}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Phi_i)_{d_i d_i}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{X}_{\mu,i} = \begin{bmatrix} (\Phi_i)_{11}(\mu_i I_{3 \times 3}) & (\Phi_i)_{12}(\mu_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Phi_i)_{1d_i}(\mu_i I_{3 \times 3}) \\ (\Phi_i)_{21}(\mu_i I_{3 \times 3}) & (\Phi_i)_{22}(\mu_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Phi_i)_{2d_i}(\mu_i I_{3 \times 3}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Phi_i)_{d_i 1}(\mu_i I_{3 \times 3}) & (\Phi_i)_{d_i 2}(\mu_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Phi_i)_{d_i d_i}(\mu_i I_{3 \times 3}) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{X}_i^{x_k} = \begin{bmatrix} (\Phi_i^{x_k})_{11} N_k & (\Phi_i^{x_k})_{12} N_k & \cdots & (\Phi_i^{x_k})_{1d_i} N_k \\ (\Phi_i^{x_k})_{21} N_k & (\Phi_i^{x_k})_{22} N_k & \cdots & (\Phi_i^{x_k})_{2d_i} N_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Phi_i^{x_k})_{d_i 1} N_k & (\Phi_i^{x_k})_{d_i 2} N_k & \cdots & (\Phi_i^{x_k})_{d_i d_i} N_k \end{bmatrix}, \\ \mathcal{X}_{ij} = \begin{bmatrix} (\Phi_{ij})_{11} \check{N}_{ij} & (\Phi_{ij})_{12} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Phi_{ij})_{1d_i} \check{N}_{ij} \\ (\Phi_{ij})_{21} \check{N}_{ij} & (\Phi_{ij})_{22} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Phi_{ij})_{2d_i} \check{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Phi_{ij})_{d_i 1} \check{N}_{ij} & (\Phi_{ij})_{d_i 2} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Phi_{ij})_{d_i d_i} \check{N}_{ij} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{X}_{im} = \begin{bmatrix} (\Phi_{ij})_{11} \check{N}_{im} & (\Phi_{ij})_{12} \check{N}_{im} & \cdots & (\Phi_{ij})_{1d_i} \check{N}_{im} \\ (\Phi_{ij})_{21} \check{N}_{im} & (\Phi_{ij})_{22} \check{N}_{im} & \cdots & (\Phi_{ij})_{2d_i} \check{N}_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Phi_{ij})_{d_i 1} \check{N}_{im} & (\Phi_{ij})_{d_i 2} \check{N}_{im} & \cdots & (\Phi_{ij})_{d_i d_i} \check{N}_{im} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{ij} = \begin{bmatrix} (\Upsilon_{ij})_{11} \check{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{12} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{1b_j} \check{N}_{ij} \\ (\Upsilon_{ij})_{21} \check{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{22} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{2b_j} \check{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Upsilon_{ij})_{d_i 1} \check{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{d_i 2} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{d_i b_j} \check{N}_{ij} \end{bmatrix}. \end{array} \right.$$

$\mathcal{X}_{\varepsilon,i}$ et $\mathcal{X}_{\mu,i}$ sont des matrices symétriques définies positives, $\mathcal{X}_i^{x_k}$ est une matrice symétrique, \mathcal{X}_{ij} et \mathcal{X}_{im} sont des matrices anti-symétriques. Toutes sont de taille $3d_i \times 3d_i$ sauf \mathcal{A}_{ij} qui est une matrice rectangulaire (correspondant aux interfaces hybrides) de taille $3d_i \times 3b_j$ ($\tilde{\mathbf{H}}_j$ et $\tilde{\mathbf{E}}_j$ étant des vecteurs de \mathbb{R}^{3b_j} , $\mathcal{A}_{ij} \tilde{\mathbf{H}}_j$ et $\mathcal{A}_{ij} \tilde{\mathbf{E}}_j$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^{3d_i} ce qui correspond bien au nombre d'équations du système).

2.1.3 Equations semi-discrétisées pour les cellules hexaédriques

Nous faisons ici la même hypothèse que sur les tétraèdres, on suppose b_i identique pour tous les hexaèdres c_i . On introduit les notations suivantes :

$$\Theta_i = \int_{c_i} \theta_i \theta_i^T d\mathbf{x}, \quad \Theta_i^{x_k} = \int_{c_i} \left(\theta_i (\partial_{x_k} \theta_i)^T - (\partial_{x_k} \theta_i) \theta_i^T \right) d\mathbf{x}, \quad \Theta_{ij} = \int_{a_{ij}} \theta_i \theta_j^T d\sigma,$$

et on rappelle que :

$$\Upsilon_{ji}^T = \int_{a_{ij}} \theta_i \phi_j^T d\sigma,$$

où :

- θ_i est un vecteur colonne de \mathbb{R}^{b_i} et θ_i^T (resp. θ_j^T) est un vecteur ligne de \mathbb{R}^{b_i} (resp. de \mathbb{R}^{b_j}); ϕ_j^T est un vecteur ligne de \mathbb{R}^{d_j} .
- Θ_i est une matrice symétrique définie positive, $\Theta_i^{x_k}$ une matrice anti-symétrique et Θ_{ij} une matrice symétrique positive, toutes trois de taille $b_i \times b_i$ ($b_j = b_i$).
- Υ_{ji}^T est une matrice rectangulaire de taille $b_i \times d_j$. L'ordre des indices (j puis i) est à respecter.

Nous rappelons les notations $\tilde{\mathbf{E}}_i$ et $\tilde{\mathbf{H}}_i$ de vecteurs de degrés de liberté locaux spécifiques aux hexaèdres; et $\bar{\mathbf{E}}_j$ et $\bar{\mathbf{H}}_j$ pour ceux spécifiques aux tétraèdres. On introduit aussi les $6b_i$ fonctions de base vectorielles $\vec{\vartheta}_{i1}, \dots, \vec{\vartheta}_{i(6b_i)}$ qui sont des vecteurs de \mathbb{R}^6 , composés des fonctions de base scalaires $\vartheta_{i1}, \dots, \vartheta_{ib_i}$ de $\mathbb{Q}_k[c_i]$ (pour b_i fonctions de base scalaires, on a $6b_i$ fonctions de base vectorielles associées) et de la forme :

$$\begin{aligned} \vec{\vartheta}_{i1} &= (\vartheta_{i1}, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \quad \dots, \quad \vec{\vartheta}_{i6} &= (0, 0, 0, 0, 0, \vartheta_{i1})^T, \\ &\vdots & & \vdots \\ \vec{\vartheta}_{i(6b_i-5)} &= (\vartheta_{ib_i}, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \quad \dots, \quad \vec{\vartheta}_{i(6b_i)} &= (0, 0, 0, 0, 0, \vartheta_{ib_i})^T. \end{aligned}$$

Pour obtenir le système de $6b_i$ équations semi-discrétisées, on effectue plusieurs remplacements dans la formulation faible (8). Dans les intégrales sur c_i et sur a_{ij} pour $a_{ij} \in \mathcal{Q}_d^i$ et $a_{ij} \in \mathcal{Q}_m^i$, on remplace \mathbf{W}_i (resp. \mathbf{W}_j) par son expression (cf (5)) dans la base θ_i (resp. θ_j) de $\mathbb{Q}_k[c_i]$ (resp. $\mathbb{Q}_k[c_j]$); en revanche pour le terme de somme sur \mathcal{H}_d^i on remplace \mathbf{W}_j par son expression (cf (4)) dans la base ϕ_j de $\mathbb{P}_p[c_j]$. Enfin, on remplace $\vec{\psi}$ par $\vec{\vartheta}_{il}$ pour $l = 1, \dots, 6b_i$. Proposons ainsi une expression du système de $6b_i$ équations associé à la formulation hybride dans le cas (B) :

$$\forall c_i \in \mathcal{Q}_h : \begin{cases} 2\mathcal{W}_{\varepsilon,i} \frac{d\tilde{\mathbf{E}}_i}{dt} + \sum_{k=1}^3 \mathcal{W}_i^{x_k} \tilde{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_d^i} \mathcal{W}_{ij} \tilde{\mathbf{H}}_j + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_m^i} \mathcal{W}_{im} \tilde{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \mathcal{B}_{ij} \bar{\mathbf{H}}_j = 0, \\ 2\mathcal{W}_{\mu,i} \frac{d\tilde{\mathbf{H}}_i}{dt} - \sum_{k=1}^3 \mathcal{W}_i^{x_k} \tilde{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_d^i} \mathcal{W}_{ij} \tilde{\mathbf{E}}_j + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_m^i} \mathcal{W}_{im} \tilde{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \mathcal{B}_{ij} \bar{\mathbf{E}}_j = 0. \end{cases} \quad (11)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathcal{W}_{\varepsilon,i} = \begin{bmatrix} (\Theta_i)_{11}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & (\Theta_i)_{12}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Theta_i)_{1b_i}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) \\
 (\Theta_i)_{21}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & (\Theta_i)_{22}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Theta_i)_{2b_i}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 (\Theta_i)_{b_i 1}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & (\Theta_i)_{b_i 2}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Theta_i)_{b_i b_i}(\varepsilon_i I_{3 \times 3}) \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{W}_{\mu,i} = \begin{bmatrix} (\Theta_i)_{11}(\mu_i I_{3 \times 3}) & (\Theta_i)_{12}(\mu_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Theta_i)_{1b_i}(\mu_i I_{3 \times 3}) \\
 (\Theta_i)_{21}(\mu_i I_{3 \times 3}) & (\Theta_i)_{22}(\mu_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Theta_i)_{2b_i}(\mu_i I_{3 \times 3}) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 (\Theta_i)_{b_i 1}(\mu_i I_{3 \times 3}) & (\Theta_i)_{b_i 2}(\mu_i I_{3 \times 3}) & \cdots & (\Theta_i)_{b_i b_i}(\mu_i I_{3 \times 3}) \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{W}_i^{x^k} = \begin{bmatrix} (\Theta_i^{x^k})_{11} N_k & (\Theta_i^{x^k})_{12} N_k & \cdots & (\Theta_i^{x^k})_{1b_i} N_k \\
 (\Theta_i^{x^k})_{21} N_k & (\Theta_i^{x^k})_{22} N_k & \cdots & (\Theta_i^{x^k})_{2b_i} N_k \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 (\Theta_i^{x^k})_{b_i 1} N_k & (\Theta_i^{x^k})_{b_i 2} N_k & \cdots & (\Theta_i^{x^k})_{b_i b_i} N_k \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{W}_{ij} = \begin{bmatrix} (\Theta_{ij})_{11} \check{N}_{ij} & (\Theta_{ij})_{12} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Theta_{ij})_{1b_i} \check{N}_{ij} \\
 (\Theta_{ij})_{21} \check{N}_{ij} & (\Theta_{ij})_{22} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Theta_{ij})_{2b_i} \check{N}_{ij} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 (\Theta_{ij})_{b_i 1} \check{N}_{ij} & (\Theta_{ij})_{b_i 2} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Theta_{ij})_{b_i b_i} \check{N}_{ij} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{W}_{im} = \begin{bmatrix} (\Theta_{ij})_{11} \check{N}_{im} & (\Theta_{ij})_{12} \check{N}_{im} & \cdots & (\Theta_{ij})_{1b_i} \check{N}_{im} \\
 (\Theta_{ij})_{21} \check{N}_{im} & (\Theta_{ij})_{22} \check{N}_{im} & \cdots & (\Theta_{ij})_{2b_i} \check{N}_{im} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 (\Theta_{ij})_{b_i 1} \check{N}_{im} & (\Theta_{ij})_{b_i 2} \check{N}_{im} & \cdots & (\Theta_{ij})_{b_i b_i} \check{N}_{im} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{B}_{ij} = \begin{bmatrix} (\Upsilon_{ji}^T)_{11} \check{N}_{ij} & (\Upsilon_{ji}^T)_{12} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ji}^T)_{1d_j} \check{N}_{ij} \\
 (\Upsilon_{ji}^T)_{21} \check{N}_{ij} & (\Upsilon_{ji}^T)_{22} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ji}^T)_{2d_j} \check{N}_{ij} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 (\Upsilon_{ji}^T)_{b_i 1} \check{N}_{ij} & (\Upsilon_{ji}^T)_{b_i 2} \check{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ji}^T)_{b_i d_j} \check{N}_{ij} \end{bmatrix}.
 \end{array} \right.$$

$\mathcal{W}_{\varepsilon,i}$ et $\mathcal{W}_{\mu,i}$ sont des matrices symétriques définies positives, $\mathcal{W}_i^{x^k}$ est une matrice symétrique, \mathcal{W}_{ij} et \mathcal{W}_{im} sont des matrices anti-symétriques. Toutes sont de taille $3b_i \times 3b_i$ sauf \mathcal{B}_{ij} qui est une matrice rectangulaire (correspondant aux interfaces hybrides) de taille $3b_i \times 3d_j$. On peut enfin remarquer que $\mathcal{B}_{ji}^T = A_{ij}$.

2.2 Discrétisation en temps par un schéma saute-mouton d'ordre 2

Le choix de la discrétisation en temps est une étape clé pour l'efficacité globale d'une méthode numérique, nous allons utiliser ici des schémas explicites, dont le principal avantage est la facilité de mise en œuvre. Des systèmes (10) et (11) de la méthode GDDT- $\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ qui sont désormais des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) locaux, on en déduit les deux schémas saute-mouton (Leap-Frog) du second ordre, où le champ électrique et le champ magnétique sont évalués sur une grille en temps décalée. On note $\Delta t > 0$ le pas de temps global pour $t \in [0, t_f]$ (t_f le temps final) et t_n une discrétisation du temps avec $t_n = n\Delta t$, où $n = 0, \dots, n_f$ et donc $t_f = t_{n_f}$:

• Cas (A) :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} &= \bar{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} [\mathcal{X}_{\mu,i}]^{-1} \mathbf{A}_{\mathbf{E},i}^n, \\ \bar{\mathbf{E}}_i^{n+1} &= \bar{\mathbf{E}}_i^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathcal{X}_{\varepsilon,i}]^{-1} \mathbf{A}_{\mathbf{H},i}^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (12)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\mathbf{E},i}^n &= \sum_{k=1}^3 \mathcal{X}_i^{x_k} \bar{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{T}_d^i} \mathcal{X}_{ij} \bar{\mathbf{E}}_j^n - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{T}_m^i} \mathcal{X}_{im} \bar{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \mathcal{A}_{ij} \tilde{\mathbf{E}}_j^n, \\ \mathbf{A}_{\mathbf{H},i}^{n+\frac{1}{2}} &= -\sum_{k=1}^3 \mathcal{X}_i^{x_k} \bar{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{T}_d^i} \mathcal{X}_{ij} \bar{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{T}_m^i} \mathcal{X}_{im} \bar{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \mathcal{A}_{ij} \tilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

• Cas (B) :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} &= \tilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} [\mathcal{W}_{\mu,i}]^{-1} \mathbf{B}_{\mathbf{E},i}^n, \\ \tilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} &= \tilde{\mathbf{E}}_i^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathcal{W}_{\varepsilon,i}]^{-1} \mathbf{B}_{\mathbf{H},i}^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (13)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{\mathbf{E},i}^n &= \sum_{k=1}^3 \mathcal{W}_i^{x_k} \tilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_d^i} \mathcal{W}_{ij} \tilde{\mathbf{E}}_j^n - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_m^i} \mathcal{W}_{im} \tilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \mathcal{B}_{ij} \tilde{\mathbf{E}}_j^n, \\ \mathbf{B}_{\mathbf{H},i}^{n+\frac{1}{2}} &= -\sum_{k=1}^3 \mathcal{W}_i^{x_k} \tilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_d^i} \mathcal{W}_{ij} \tilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_m^i} \mathcal{W}_{im} \tilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \mathcal{B}_{ij} \tilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

La condition initiale du schéma (12) – (13) est en $\bar{\mathbf{H}}_i^{\frac{1}{2}}$ (resp. $\tilde{\mathbf{H}}_i^{\frac{1}{2}}$) et $\bar{\mathbf{E}}_i^0$ (resp. $\tilde{\mathbf{E}}_i^0$).

3 Etude de convergence théorique

Nous procédons maintenant à l'analyse mathématique de la méthode GDDT- $\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$. La stabilité de celle-ci étant prouvée dans [5] (amenant à une condition suffisante de type CFL), nous nous intéressons à présent à la convergence en h de ce schéma afin de dégager un estimateur d'erreur a-priori [9] (ou encore [19, 14]). Pour étudier cette convergence, commençons tout d'abord par bien resituer le problème (1). On rappelle que (1) (cf [9]) admet une unique solution (exacte) \mathbf{W} dans l'espace fonctionnel suivant :

$$\mathbf{W} \in \mathcal{C}^1([0, t_f], (L^2(\Omega))^6) \cap \mathcal{C}^0([0, t_f], (H(\text{rot}, \Omega))^6), \quad (14)$$

pour toute condition initiale $\mathbf{W}_0 \in (H(\text{rot}, \Omega))^6$ satisfaisant les conditions aux limites décrites dans la section 1. De plus, on associe ainsi aux formulations faibles (7) et (8) (d'inconnue $\mathbf{W}_h(t)$) la condition initiale : $\mathbf{W}_h(0) = P_h(\mathbf{W}_0)$ où $P_h : (L^2(\Omega))^6 \rightarrow V_h^6$ désigne le projecteur orthogonal sur V_h^6 selon le produit scalaire $(L^2(\Omega))^6$ (dans un abus de notation, nous utiliserons également P_h quand nécessaire pour la projection orthogonale sur V_h^3). Nous faisons maintenant plusieurs hypothèses et introduisons quelques notations.

3.1 Propositions, lemmes, hypothèses et notations

Dans ce qui suit, h_{c_i} désigne le diamètre de la cellule (tétraèdre ou hexaèdre) c_i . On considère une famille de grilles non-structurées $(\mathcal{C}_h)_h$ (hybrides et non-conformes), où h est le paramètre de maillage de chaque grille, défini par $h = \max_{c_i \in \mathcal{C}_h} h_{c_i}$. Les maillages \mathcal{C}_h sont supposés compatibles avec la frontière du domaine $\partial\Omega$, i.e. le volume discrétisé $\Omega_h = \bigcup_{c_i \in \mathcal{C}_h} c_i$ est égal à Ω .

On suppose que ces grilles non-structurées \mathcal{C}_h sont uniformément "shape regular" : il existe une constante $\eta > 0$ telle que :

$$\forall h, \forall c_i \in \mathcal{C}_h, h_{c_i}/\rho_{c_i} \leq \eta, \quad (15)$$

où ρ_{c_i} est le diamètre de la plus grande boule incluse dans l'élément fini c_i . On suppose également la suivante "inverse assumption" : il existe une constante $\gamma > 0$ (indépendante de h) telle que :

$$\forall h, \forall c_i \in \mathcal{C}_h, \forall j \in \mathcal{V}_i, h_{c_i}/h_{c_j} \leq \gamma. \quad (16)$$

Nous faisons de plus l'hypothèse que les coefficients électromagnétiques ε et μ sont uniformément bornés et constants par morceaux, on note Ω_j les sous-domaines de Ω où ε et μ sont constants.

On introduit ensuite l'espace de Sobolev morcelés $PH^{s+1}(\Omega) = \{v \mid \forall j, v|_{\Omega_j} \in H^{s+1}(\Omega_j)\}$ munis de la norme $\|v\|_{PH^{s+1}(\Omega)} = \left(\sum_j \|v|_{\Omega_j}\|_{s+1, \Omega_j}^2 \right)^{1/2}$, où $\|\cdot\|_{s+1, \Omega_j}$ désigne la norme H^{s+1} standard sur Ω_j .

Enfin, nous présentons les trois formes bilinéaires suivantes (que nous utiliserons dans toute cette analyse de convergence) :

$$\begin{aligned} m(\mathbf{T}, \mathbf{T}') &= 2 \int_{\Omega} \langle \mathcal{Q}\mathbf{T}, \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x}, \\ a(\mathbf{T}, \mathbf{T}') &= \int_{\Omega} \left(\left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k}^h \mathcal{N}^k \mathbf{T}, \mathbf{T}' \right\rangle - \sum_{k=1}^3 \langle \partial_{x_k}^h \mathbf{T}', \mathcal{N}^k \mathbf{T} \rangle \right) d\mathbf{x}, \\ b(\mathbf{T}, \mathbf{T}') &= \int_{\mathcal{F}_d} (\langle \{\mathbf{V}\}, [\mathbf{U}'] \rangle - \langle \{\mathbf{U}\}, [\mathbf{V}'] \rangle - \langle \{\mathbf{V}'\}, [\mathbf{U}] \rangle + \langle \{\mathbf{U}'\}, [\mathbf{V}] \rangle) d\sigma + \\ &\quad \int_{\mathcal{F}_m} (\langle \mathbf{U}, \mathbf{n} \times \mathbf{V}' \rangle + \langle \mathbf{V}, \mathbf{n} \times \mathbf{U}' \rangle) d\sigma, \end{aligned}$$

avec :

- $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ et $\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} \mathbf{U}' \\ \mathbf{V}' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ (et $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{U}'$ et \mathbf{V}' appartiennent chacun à \mathbb{R}^3).
- $[\mathbf{U}_h]_{ij} = (\mathbf{U}_j|_{a_{ij}} - \mathbf{U}_i|_{a_{ij}}) \times \mathbf{n}_{ij}$ et $\{\mathbf{U}_h\}_{ij} = \frac{\mathbf{U}_i|_{a_{ij}} + \mathbf{U}_j|_{a_{ij}}}{2}$ sont respectivement le saut et le flux de \mathbf{U}_h sur la face a_{ij} .
- \mathcal{F}_d désigne l'ensemble de toutes les faces internes et \mathcal{F}_m l'ensemble de toutes les faces métalliques du maillage.
- $(\partial_{x_k}^h \mathbf{T})|_{c_i} = \partial_{x_k}(\mathbf{T}|_{c_i})$ pour $k = 1, 2, 3$.
- Dans l'intégrale sur \mathcal{F}_m , sur chaque face a_{ij} , \mathbf{U} et \mathbf{V} sont $\mathbf{U}|_{c_i}$ et $\mathbf{V}|_{c_i}$.

Maintenant, en réalisant la somme de (7) sur chaque $c_i \in \mathcal{T}_h$ et de (8) sur chaque $c_i \in \mathcal{Q}_h$, on obtient que la solution discrète $\mathbf{W}_h \in V_h^6$ satisfait :

$$m(\partial_t \mathbf{W}_h, \mathbf{T}') + a(\mathbf{W}_h, \mathbf{T}') + b(\mathbf{W}_h, \mathbf{T}') = 0, \quad \forall \mathbf{T}' \in V_h^6. \quad (17)$$

On montre alors dans la Proposition 1 que la méthode GDDT- $\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ est consistante avec le système (1) :

Proposition 1. Soit \mathbf{W} la solution exacte de (1) (et satisfaisant (14)), on a :

$$m(\partial_t \mathbf{W}, \mathbf{T}') + a(\mathbf{W}, \mathbf{T}') + b(\mathbf{W}, \mathbf{T}') = 0, \quad \forall \mathbf{T}' \in V_h^6. \quad (18)$$

Démonstration. Dans un premier temps, regardons $m(\partial_t \mathbf{W}, \mathbf{T}')$:

$$m(\partial_t \mathbf{W}, \mathbf{T}') = 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle Q \partial_t \mathbf{W}, \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x}.$$

Deuxièmement, on s'intéresse à $b(\mathbf{W}, \mathbf{T}')$:

$$\begin{aligned} b(\mathbf{W}, \mathbf{T}') &= \int_{\mathcal{F}_d} (\langle \{\mathbf{H}\}, [\mathbf{U}'] \rangle - \langle \{\mathbf{E}\}, [\mathbf{V}'] \rangle - \langle \{\mathbf{V}'\}, [\mathbf{E}] \rangle + \langle \{\mathbf{U}'\}, [\mathbf{H}] \rangle) d\sigma + \\ &\quad \int_{\mathcal{F}_m} (\langle \mathbf{E}, \check{\mathbf{n}} \times \mathbf{V}' \rangle + \langle \mathbf{H}, \check{\mathbf{n}} \times \mathbf{U}' \rangle) d\sigma \\ &= \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_d} \int_{a_{ij}} (\langle \{\mathbf{H}\}_{ij}, [\mathbf{U}']_{ij} \rangle - \langle \{\mathbf{E}\}_{ij}, [\mathbf{V}']_{ij} \rangle - \\ &\quad \langle \{\mathbf{V}'\}_{ij}, [\mathbf{E}]_{ij} \rangle + \langle \{\mathbf{U}'\}_{ij}, [\mathbf{H}]_{ij} \rangle) d\sigma + \\ &\quad \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m} \int_{a_{ij}} (\langle \mathbf{E}|_{c_i}, \check{\mathbf{n}}_{ij} \times \mathbf{V}'_i \rangle + \langle \mathbf{H}|_{c_i}, \check{\mathbf{n}}_{ij} \times \mathbf{U}'_i \rangle) d\sigma. \end{aligned}$$

Du fait que les composantes \mathbf{E} et \mathbf{H} appartiennent à $H(\text{rot}, \Omega)$, leurs traces tangentielles sont continues. Autrement dit, sur $a_{ij} \in \mathcal{F}_d$, on a : $\mathbf{E}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij} = \mathbf{E}|_{c_j} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}$ et $\mathbf{H}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij} = \mathbf{H}|_{c_j} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}$ et donc :

- $[\mathbf{E}]_{ij} = [\mathbf{H}]_{ij} = 0.$
- $\{\mathbf{H}\}_{ij} \times \check{\mathbf{n}}_{ij} = \mathbf{H} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}$ et $\{\mathbf{E}\}_{ij} \times \check{\mathbf{n}}_{ij} = \mathbf{E} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}$

Par ailleurs, toujours dans l'intégrale pour $a_{ij} \in \mathcal{F}_d$, on remarque les égalités suivantes (propriétés du produit mixte) :

- $\langle \{\mathbf{H}\}_{ij}, [\mathbf{U}']_{ij} \rangle = \langle \{\mathbf{H}\}_{ij} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{U}'_i - \mathbf{U}'_j \rangle$
- $\langle \{\mathbf{E}\}_{ij}, [\mathbf{V}']_{ij} \rangle = \langle \{\mathbf{E}\}_{ij} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i - \mathbf{V}'_j \rangle$

Enfin, dans l'intégrale sur $a_{ij} \in \mathcal{F}_m$, on a :

- $\langle \mathbf{E}|_{c_i}, \check{\mathbf{n}}_{ij} \times \mathbf{V}'_i \rangle = \langle \mathbf{E}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i \rangle = \langle \mathbf{E} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i \rangle$
- $\langle \mathbf{H}|_{c_i}, \check{\mathbf{n}}_{ij} \times \mathbf{U}'_i \rangle = \langle \mathbf{H}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{U}'_i \rangle = \langle \mathbf{H} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{U}'_i \rangle$

Ainsi, nous arrivons à la forme de $b(\mathbf{W}, \mathbf{T}')$ suivante :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{W}, \mathbf{T}') &= \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_d} \int_{a_{ij}} (\langle \mathbf{H} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{U}'_i - \mathbf{U}'_j \rangle - \langle \mathbf{E} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i - \mathbf{V}'_j \rangle) d\sigma + \\ &\quad \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m} \int_{a_{ij}} (\langle \mathbf{E} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i \rangle + \langle \mathbf{H} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{U}'_i \rangle) d\sigma. \end{aligned}$$

Pour finir, on traite $a(\mathbf{W}, \mathbf{T}')$:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{W}, \mathbf{T}') &= \int_{\Omega} \left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}, \mathbf{T}' \right\rangle d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \left\langle \partial_{x_k} \mathbf{T}', \mathcal{N}^k \mathbf{W} \right\rangle d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}, \mathbf{T}' \right\rangle d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \sum_{k=1}^3 \left\langle \partial_{x_k} \mathbf{T}', \mathcal{N}^k \mathbf{W} \right\rangle d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par partie ci-dessous :

$$\int_{c_i} \sum_{k=1}^3 \left\langle \partial_{x_k} \mathbf{T}', \mathcal{N}^k \mathbf{W} \right\rangle d\mathbf{x} = - \int_{c_i} \left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}, \mathbf{T}' \right\rangle d\mathbf{x} + \int_{\partial c_i} \sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{T}', \check{\mathbf{n}}^k (\mathcal{N}^k \mathbf{W}) \rangle d\sigma,$$

on obtient, en posant \mathcal{F}_d^i l'ensemble de toutes les faces internes de la cellule c_i et \mathcal{F}_m^i l'ensemble de toutes ses faces métalliques :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{W}, \mathbf{T}') &= 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}, \mathbf{T}' \right\rangle d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^N \int_{\partial c_i} \sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{T}', \check{\mathbf{n}}^k (\mathcal{N}^k \mathbf{W}) \rangle d\sigma \\ &= 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle \nabla \cdot F(\mathbf{W}), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} \sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{T}', \check{\mathbf{n}}_{ij}^k (\mathcal{N}^k \mathbf{W}) \rangle d\sigma \\ &= 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle \nabla \cdot F(\mathbf{W}), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} \left\langle \sum_{k=1}^3 \check{\mathbf{n}}_{ij}^k \mathcal{N}^k \mathbf{W}, \mathbf{T}' \right\rangle d\sigma \\ &= 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle \nabla \cdot F(\mathbf{W}), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}, \mathbf{T}' \rangle d\sigma \\ &= 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle \nabla \cdot F(\mathbf{W}), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \\ &\quad \sum_{i=1}^N \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_d^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}, \mathbf{T}' \rangle d\sigma - \sum_{i=1}^N \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}, \mathbf{T}' \rangle d\sigma, \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{W}, \mathbf{T}') &= 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle \nabla \cdot F(\mathbf{W}), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \\
 &\quad \sum_{i=1}^N \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_d^i} \int_{a_{ij}} (\langle \mathbf{H}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{U}'_i \rangle - \langle \mathbf{E}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i \rangle) d\sigma - \\
 &\quad \sum_{i=1}^N \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m^i} \int_{a_{ij}} (\langle \mathbf{H}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{U}'_i \rangle - \langle \mathbf{E}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i \rangle) d\sigma.
 \end{aligned}$$

On réalise à présent la somme sur toutes les faces internes et sur toutes les faces métalliques, $a(\mathbf{W}, \mathbf{T}')$ devient alors :

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{W}, \mathbf{T}') &= 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle \nabla \cdot F(\mathbf{W}), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \\
 &\quad \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_d} \int_{a_{ij}} (\langle \mathbf{H}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{U}'_i \rangle - \langle \mathbf{E}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i \rangle + \\
 &\quad \quad \quad \langle \mathbf{H}|_{c_j} \times \check{\mathbf{n}}_{ji}, \mathbf{U}'_j \rangle - \langle \mathbf{E}|_{c_j} \times \check{\mathbf{n}}_{ji}, \mathbf{V}'_j \rangle) d\sigma - \\
 &\quad \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m} \int_{a_{ij}} (\langle \mathbf{H}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{U}'_i \rangle - \langle \mathbf{E}|_{c_i} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i \rangle) d\sigma \\
 &= 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle \nabla \cdot F(\mathbf{W}), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \\
 &\quad \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_d} \int_{a_{ij}} (\langle \mathbf{H} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{U}'_i - \mathbf{U}'_j \rangle - \langle \mathbf{E} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i - \mathbf{V}'_j \rangle) d\sigma - \\
 &\quad \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m} \int_{a_{ij}} (\langle \mathbf{H} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{U}'_i \rangle - \langle \mathbf{E} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i \rangle) d\sigma.
 \end{aligned}$$

On arrive donc à la somme des trois formes $m(\partial_t \mathbf{W}, \mathbf{T}')$, $a(\mathbf{W}, \mathbf{T}')$ et $b(\mathbf{W}, \mathbf{T}')$ suivante :

$$\begin{aligned}
 m(\partial_t \mathbf{W}, \mathbf{T}') + a(\mathbf{W}, \mathbf{T}') + b(\mathbf{W}, \mathbf{T}') &= 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle \mathcal{Q}(\partial_t \mathbf{W}), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} + 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle \nabla \cdot F(\mathbf{W}), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} + \\
 &\quad 2 \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m} \int_{a_{ij}} \langle \mathbf{E} \times \check{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{V}'_i \rangle d\sigma.
 \end{aligned}$$

Or, si on prend \mathbf{T}' la fonction test vectorielle dans (3) et que l'on somme pour chaque $c_i \in \Omega_h$, cela implique que :

$$2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle \mathcal{Q}(\partial_t \mathbf{W}), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} + 2 \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \langle \nabla \cdot F(\mathbf{W}), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} = 0,$$

et en appliquant pour finir la condition aux limites sur le bord métallique $\partial\Omega^m$, qui nous est donnée par : $\mathbf{E} \times \check{\mathbf{n}} = 0$, on obtient ainsi :

$$m(\partial_t \mathbf{W}, \mathbf{T}') + a(\mathbf{W}, \mathbf{T}') + b(\mathbf{W}, \mathbf{T}') = 0, \quad \forall \mathbf{T}' \in V_h^6 \text{ et pour } \mathbf{W} \text{ solution exacte.}$$

□

Dans la suite, nous nous servirons du lemme de stabilité suivant :

Lemme 1. Pour tout $\mathbf{T}' \in V_h^6$, on a :

$$a(\mathbf{T}', \mathbf{T}') + b(\mathbf{T}', \mathbf{T}') = 0. \quad (19)$$

Démonstration. On constate pour $a(\mathbf{T}', \mathbf{T}')$ que :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{T}', \mathbf{T}') &= \int_{\Omega} \left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k}^h \mathcal{N}_k \mathbf{T}', \mathbf{T}' \right\rangle d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \langle \partial_{x_k}^h \mathbf{T}', \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \langle \partial_{x_k}^h \mathcal{N}^k \mathbf{T}', \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \langle \partial_{x_k}^h \mathbf{T}', \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \langle \mathcal{N}^k (\partial_{x_k}^h \mathbf{T}'), \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \langle \partial_{x_k}^h \mathbf{T}', \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \langle \partial_{x_k}^h \mathbf{T}', (\mathcal{N}^k)^T \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \langle \partial_{x_k}^h \mathbf{T}', \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \langle \partial_{x_k}^h \mathbf{T}', \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \langle \partial_{x_k}^h \mathbf{T}', \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même pour $b(\mathbf{T}', \mathbf{T}')$:

$$\begin{aligned} b(\mathbf{T}', \mathbf{T}') &= \int_{\mathcal{F}_d} (\langle \{\mathbf{V}'\}, [\mathbf{U}'] \rangle - \langle \{\mathbf{U}'\}, [\mathbf{V}'] \rangle - \langle \{\mathbf{V}'\}, [\mathbf{U}'] \rangle + \langle \{\mathbf{U}'\}, [\mathbf{V}'] \rangle) d\sigma + \\ &\quad \int_{\mathcal{F}_m} (\langle \mathbf{U}', \mathbf{n} \times \mathbf{V}' \rangle + \langle \mathbf{V}', \mathbf{n} \times \mathbf{U}' \rangle) d\sigma \\ &= \int_{\mathcal{F}_m} (\langle \mathbf{U}', \mathbf{n} \times \mathbf{V}' \rangle - \langle \mathbf{U}', \mathbf{n} \times \mathbf{V}' \rangle) d\sigma = 0. \end{aligned}$$

On a donc :

$$a(\mathbf{T}', \mathbf{T}') + b(\mathbf{T}', \mathbf{T}') = 0, \quad \forall \mathbf{T}' \in V_h^6.$$

Remarque : on peut montrer de façon similaire que a et b sont anti-symétriques. □

Ceci implique, en remplaçant dans (17), \mathbf{T}' par $\mathbf{W}_h \in V_h^6$ la solution approchée :

$$m(\partial_t \mathbf{W}_h, \mathbf{W}_h) = 0.$$

On définit l'énergie semi-discrète par : $\mathfrak{E}_h(t) = \frac{1}{2} m(\mathbf{W}_h, \mathbf{W}_h)$. Elle est constante car $\frac{d}{dt} \mathfrak{E}_h(t) = m(\partial_t \mathbf{W}_h, \mathbf{W}_h) = 0$.

Nous terminons cette sous-section en rappelant deux résultats déjà connus dans les méthodes d'éléments finis, où $|\cdot|_{r,c_i}$ désigne la semi-norme standard H^r sur c_i et $\|\cdot\|_{0,\partial c_i}$ la norme standard L^2 sur ∂c_i :

Lemme 2. (cf [1]) Soit $\tau_i \in \mathcal{T}_h$ (resp. $q_i \in \mathcal{Q}_h$) et $u \in H^{s+1}(\tau_i)$ (resp. $u \in H^{s+1}(q_i)$) pour $s \geq 0$. Soit Π un opérateur linéaire de $H^{s+1}(\tau_i)$ (resp. $H^{s+1}(q_i)$) dans $\mathbb{P}_p[\tau_i]$ (resp. $\mathbb{Q}_k[q_i]$) tel que $\Pi(u) = u$, pour tout $u \in \mathbb{P}_p[\tau_i]$ (resp. $\mathbb{Q}_k[q_i]$). Alors, on a :

$$|\Pi(u) - u|_{r,\tau_i} \leq C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+1-r} \|u\|_{s+1,\tau_i}, \quad r = 0, 1, \quad (20)$$

$$\|\Pi(u) - u\|_{0,\partial\tau_i} \leq C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+1/2} \|u\|_{s+1,\tau_i}, \quad (21)$$

et respectivement :

$$|\Pi(u) - u|_{r,q_i} \leq C h_{q_i}^{\min\{s,k\}+1-r} \|u\|_{s+1,q_i}, \quad r = 0, 1, \quad (22)$$

$$\|\Pi(u) - u\|_{0,\partial q_i} \leq C h_{q_i}^{\min\{s,k\}+1/2} \|u\|_{s+1,q_i}, \quad (23)$$

où C est une constante strictement positive dépendant uniquement de p (resp. k), s et du paramètre de régularité du maillage η .

Lemme 3. (cf [1]) Pour tout $v \in \mathbb{P}_p[\tau_i]$ (resp. $v \in \mathbb{Q}_k[q_i]$) on a :

$$\|v\|_{0,\partial\tau_i} \leq \hat{C} h_{\tau_i}^{-1/2} \|v\|_{0,\tau_i}, \quad (24)$$

$$\|v\|_{1,\tau_i} \leq \hat{C} h_{\tau_i}^{-1} \|v\|_{0,\tau_i}, \quad (25)$$

et respectivement :

$$\|v\|_{0,\partial q_i} \leq \hat{C} h_{q_i}^{-1/2} \|v\|_{0,q_i}, \quad (26)$$

$$\|v\|_{1,q_i} \leq \hat{C} h_{q_i}^{-1} \|v\|_{0,q_i}, \quad (27)$$

où \hat{C} est une constante strictement positive dépendant uniquement de p (resp. k), s et du paramètre de régularité du maillage η .

3.2 Convergence du problème semi-discret

Théorème 1. Soit $(\mathcal{C}_h)_h$ une famille de maillages non-structurés (hybrides et non-conformes) satisfaisant (15) et (16). Soit ε et μ uniformément bornés et constants par morceaux. V_h est donné par (6).

Soit \mathbf{W} la solution exacte de (1) vérifiant (14) et appartenant de plus à $C^0([0,t_f], (PH^{s+1}(\Omega))^6)$ pour $s \geq 0$, soit $\mathbf{W}_h \in C^1([0,t_f], V_h^6)$ la solution semi-discrete satisfaisant (7)-(8) (et \mathbf{W} et \mathbf{W}_h satisfont les conditions initiales énoncées en début de cette section). Soit $\xi_h = \max \left\{ h_{\tau}^{\min\{s,p\}}, h_q^{\min\{s,k\}} \right\}$ avec $h_{\tau} = \max_{\tau_i \in \mathcal{T}_h} (h_{\tau_i})$ et $h_q = \max_{q_i \in \mathcal{Q}_h} (h_{q_i})$, alors il existe une contante $C > 0$ (utilisée de façon générique dans toute cette étude) indépendante de h telle que :

$$\max_{t \in [0,t_f]} (\|P_h(\mathbf{W}(t)) - \mathbf{W}_h(t)\|_{0,\Omega}) \leq C \xi_h t_f \|\mathbf{W}\|_{C^0([0,t_f], PH^{s+1}(\Omega))}. \quad (28)$$

Démonstration. Notons $\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}(t) - \mathbf{W}_h(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(t) - \mathbf{E}_h(t) \\ \mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{h}(t) \end{pmatrix}$ l'erreur au temps $t \in [0, t_f]$ et $\underline{\zeta}$ la valeur minimale de ε et μ . Notons également $\mathfrak{E}_{P_h}(t) = \frac{1}{2}m(P_h(\mathbf{w}(t)), P_h(\mathbf{w}(t)))$, ainsi :

$$\mathfrak{E}_{P_h}(t) = \int_{\Omega} \langle QP_h(\mathbf{w}(t)), P_h(\mathbf{w}(t)) \rangle d\mathbf{x} \geq \underline{\zeta} \int_{\Omega} \langle P_h(\mathbf{w}(t)), P_h(\mathbf{w}(t)) \rangle d\mathbf{x},$$

et :

$$\begin{aligned} \underline{\zeta} \int_{\Omega} \langle P_h(\mathbf{w}(t)), P_h(\mathbf{w}(t)) \rangle d\mathbf{x} &= \underline{\zeta} \int_{\Omega} \left(\langle P_h(\mathbf{e}(t)), P_h(\mathbf{e}(t)) \rangle + \langle P_h(\mathbf{h}(t)), P_h(\mathbf{h}(t)) \rangle \right) d\mathbf{x} \\ &= \underline{\zeta} \left(\|P_h(\mathbf{e}(t))\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h}(t))\|_{0,\Omega}^2 \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Donc :

$$\mathfrak{E}_{P_h}(t) \geq \underline{\zeta} \left(\|P_h(\mathbf{e}(t))\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h}(t))\|_{0,\Omega}^2 \right) \quad (30)$$

En tenant compte des conditions initiales discrètes on a $\mathfrak{E}_{P_h}(0) = 0$, et pour $t \in [0, t_f]$:

$$\mathfrak{E}_{P_h}(t) = \int_0^t \frac{d}{d\zeta} \mathfrak{E}_{P_h}(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{d\zeta} m(P_h(\mathbf{w}(\zeta)), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) d\zeta = \int_0^t m(\partial_{\zeta} P_h(\mathbf{w}(\zeta)), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) d\zeta,$$

du fait que $P_h(\mathbf{w}(t)) \in V_h^{\delta}$ on a aussi $a(P_h(\mathbf{w}(t)), P_h(\mathbf{w}(t))) + b(P_h(\mathbf{w}(t)), P_h(\mathbf{w}(t))) = 0$, et donc :

$$\mathfrak{E}_{P_h}(t) = \int_0^t \left(m(\partial_{\zeta} P_h(\mathbf{w}(\zeta)), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) + a(P_h(\mathbf{w}(\zeta)), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) + b(P_h(\mathbf{w}(\zeta)), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) \right) d\zeta. \quad (31)$$

D'autre part, si on soustrait (17) à (18) en prenant $\mathbf{T}' = P_h(\mathbf{w}(t))$, la bilinéarité de m , a et b nous donne :

$$m(\partial_t \mathbf{W}(t) - \partial_t \mathbf{W}_h(t), P_h(\mathbf{w}(t))) + a(\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}_h(t), P_h(\mathbf{w}(t))) + b(\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}_h(t), P_h(\mathbf{w}(t))) = 0. \quad (32)$$

On remarque dans (31) que $(P_h$ linéaire et $\mathbf{W}_h \in V_h^{\delta}) : P_h(\mathbf{w}(t)) = P_h(\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}_h(t)) = P_h(\mathbf{W}(t)) - \mathbf{W}_h(t)$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{P_h}(t) &= \int_0^t \left(m(\partial_{\zeta} P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \partial_{\zeta} \mathbf{W}_h(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) + \right. \\ &\quad \left. a(P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \mathbf{W}_h(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) + b(P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \mathbf{W}_h(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) \right) d\zeta \end{aligned} \quad (33)$$

En intégrant alors (32) sur $[0, t]$ et en soustrayant à (33), on obtient (en utilisant la bilinéarité de m , a et b) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{P_h}(t) &= \int_0^t \left(m(\partial_{\zeta} P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \partial_{\zeta} \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) + \right. \\ &\quad \left. a(P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) + b(P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) \right) d\zeta \end{aligned}$$

Donc (cf (30)) :

$$\begin{aligned} \underline{\zeta} \left(\|P_h(\mathbf{e}(t))\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h}(t))\|_{0,\Omega}^2 \right) &\leq \int_0^t \left(m(\partial_{\zeta} P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \partial_{\zeta} \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) + \right. \\ &\quad \left. a(P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) + \right. \\ &\quad \left. b(P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) \right) d\zeta \end{aligned}$$

De plus, P_h étant linéaire, indépendant du temps et défini de façon unique, on trouve :

$$\begin{aligned} m(\partial_\zeta P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \partial_\zeta \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) &= m(P_h(\partial_\zeta \mathbf{W}(\zeta)) - \partial_\zeta \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) \\ &= 2 \int_{\Omega} \left\langle Q [P_h(\partial_\zeta \mathbf{W}(\zeta)) - \partial_\zeta \mathbf{W}(\zeta)], P_h(\mathbf{w}(\zeta)) \right\rangle d\mathbf{x} \\ &= 2 \int_{\Omega} \left\langle P_h(\partial_\zeta \mathbf{W}(\zeta)) - \partial_\zeta \mathbf{W}(\zeta), Q^T P_h(\mathbf{w}(\zeta)) \right\rangle d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Or, P_h est le projecteur orthogonal de $(L^2(\Omega))^6$ dans le sous-espace vectoriel V_h^6 , du fait que $\partial_\zeta \mathbf{W}(\zeta) \in (L^2(\Omega))^6$, que $P_h(\partial_\zeta \mathbf{W}(\zeta)) \in V_h^6$ soit son projeté orthogonal et que $Q^T P_h(\mathbf{w}(\zeta)) \in V_h^6$ (ε et μ constants sur chaque c_i), on a par définition (théorème de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel) :

$$m(\partial_\zeta P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \partial_\zeta \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) = 0,$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{\zeta} (\|P_h(\mathbf{e}(t))\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h}(t))\|_{0,\Omega}^2) &\leq \int_0^t (a(P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta))) + \\ &\quad b(P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta)))) d\zeta. \end{aligned} \quad (34)$$

Nous nous intéressons à présent aux deux termes restant dans cette intégrale sur $[0, t]$. A partir de maintenant, nous omettons la variable temporelle afin d'alléger la notation et nous notons τ_i les tétraèdres et q_i les hexaèdres. Commençons par $a(P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta)))$:

$$\begin{aligned} a(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) &= \int_{\Omega} \left(\left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k}^h \mathcal{N}^k [P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}], P_h(\mathbf{w}) \right\rangle - \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^3 \left\langle \partial_{x_k}^h P_h(\mathbf{w}), \mathcal{N}^k [P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}] \right\rangle \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left(\left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k}^h \mathcal{N}^k [P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}], P_h(\mathbf{w}) \right\rangle - \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^3 \left\langle P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, \underbrace{(\mathcal{N}^k)^T \partial_{x_k}^h P_h(\mathbf{w})}_{\in V_h^6} \right\rangle \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k}^h \mathcal{N}^k [P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}], P_h(\mathbf{w}) \right\rangle d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{N_\tau} \int_{\tau_i} \left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k}^h \mathcal{N}^k [P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}], P_h(\mathbf{w}) \right\rangle d\mathbf{x} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{N_q} \int_{q_i} \left\langle \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k}^h \mathcal{N}^k [P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}], P_h(\mathbf{w}) \right\rangle d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\begin{aligned}
a(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) &\leq |a(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w}))| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_\tau} \left\| \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \mathcal{N}^k [P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}] \right\|_{0, \tau_i} \|P_h(\mathbf{w})\|_{0, \tau_i} + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N_q} \left\| \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \mathcal{N}^k [P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}] \right\|_{0, q_i} \|P_h(\mathbf{w})\|_{0, q_i}.
\end{aligned} \tag{35}$$

On pose $u(\mathbf{x}, t) \equiv P_h(\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^6$, d'où :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \mathcal{N}^k u \right\|_{0, \tau_i} &= \left\| \begin{pmatrix} \partial_{x_3} u_5 - \partial_{x_2} u_6 \\ \partial_{x_1} u_6 - \partial_{x_3} u_4 \\ \partial_{x_2} u_4 - \partial_{x_1} u_5 \\ \partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2 \\ \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3 \\ \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 \end{pmatrix} \right\|_{0, \tau_i} \\
&\leq \|\partial_{x_3} u_5\|_{0, \tau_i} + \|\partial_{x_2} u_6\|_{0, \tau_i} + \|\partial_{x_1} u_6\|_{0, \tau_i} + \|\partial_{x_3} u_4\|_{0, \tau_i} + \\
&\quad \|\partial_{x_2} u_4\|_{0, \tau_i} + \|\partial_{x_1} u_5\|_{0, \tau_i} + \|\partial_{x_2} u_3\|_{0, \tau_i} + \|\partial_{x_3} u_2\|_{0, \tau_i} + \\
&\quad \|\partial_{x_3} u_1\|_{0, \tau_i} + \|\partial_{x_1} u_3\|_{0, \tau_i} + \|\partial_{x_1} u_2\|_{0, \tau_i} + \|\partial_{x_2} u_1\|_{0, \tau_i},
\end{aligned}$$

or, pour chaque u_l ($l = 1, \dots, 6$), on a : $\|\partial_{x_k} u_l\|_{0, \tau_i} \leq \|\nabla u_l\|_{0, \tau_i}$ pour $k = 1, 2, 3$. De plus, la définition de la semi-norme $H^1(\tau_i)$ étant $|u_l|_{1, \tau_i} = \|\nabla u_l\|_{0, \tau_i}$, on obtient en utilisant l'inégalité (20) (avec $r = 1$) du Lemme 2 :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \mathcal{N}^k u \right\|_{0, \tau_i} &\leq 2 \sum_{l=1}^6 |u_l|_{1, \tau_i} = 2 \sum_{l=1}^6 |(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W})_l|_{1, \tau_i} \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^6 Ch_{\tau_i}^{\min\{s, p\}} \|(\mathbf{W})_j\|_{s+1, \tau_i} \\
&= 2Ch_{\tau_i}^{\min\{s, p\}} \left(\|E_x\|_{s+1, \tau_i} + \|E_y\|_{s+1, \tau_i} + \|E_z\|_{s+1, \tau_i} + \right. \\
&\quad \left. \|H_x\|_{s+1, \tau_i} + \|H_y\|_{s+1, \tau_i} + \|H_z\|_{s+1, \tau_i} \right) \\
&\leq 2Ch_{\tau_i}^{\min\{s, p\}} \left(3 \|\mathbf{E}\|_{s+1, \tau_i} + 3 \|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i} \right) \\
&\leq Ch_{\tau_i}^{\min\{s, p\}} \left(\|\mathbf{E}\|_{s+1, \tau_i} + \|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i} \right).
\end{aligned}$$

On applique maintenant l'inégalité : $|m+n| \leq \sqrt{2m^2 + 2n^2}$, $\forall m, n \in \mathbb{R}$ à $\|\mathbf{E}\|_{s+1, \tau_i}$ et $\|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i}$ (tous deux positifs) :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \mathcal{N}^k [P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}] \right\|_{0, \tau_i} &\leq Ch_{\tau_i}^{\min\{s, p\}} \left(\|\mathbf{E}\|_{s+1, \tau_i} + \|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i} \right) \\ &\leq Ch_{\tau_i}^{\min\{s, p\}} \left(2\|\mathbf{E}\|_{s+1, \tau_i}^2 + 2\|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Ch_{\tau_i}^{\min\{s, p\}} \left(\|\mathbf{E}\|_{s+1, \tau_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Egalement, on remarque que (cf (29)) que : $\|P_h(\mathbf{w})\|_{0, \tau_i} = \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0, \tau_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, en adoptant un raisonnement similaire sur q_i (on utilise notamment l'inégalité (22) du Lemme 2), l'inégalité (35) devient :

$$\begin{aligned} a(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) &\leq \sum_{i=1}^{N_\tau} Ch_{\tau_i}^{\min\{s, p\}} \left(\|\mathbf{E}\|_{s+1, \tau_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0, \tau_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{N_q} Ch_{q_i}^{\min\{s, k\}} \left(\|\mathbf{E}\|_{s+1, q_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1, q_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, q_i}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0, q_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Enfin, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_\tau} \left(\|\mathbf{E}\|_{s+1, \tau_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0, \tau_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{N_\tau} \left(\|\mathbf{E}\|_{s+1, \tau_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^{N_\tau} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0, \tau_i}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

la notation "·" désigne quand nécessaire (et dans cette démonstration) la multiplication (classique). En appliquant cette même inégalité à la somme sur les hexaèdres et ayant utilisé h_τ , h_q et ξ_h (se reporter au Théorème 1 pour leurs définitions), on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} a(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) &\leq Ch_\tau^{\min\{s, p\}} \left(\|\mathbf{E}\|_{PH^{s+1}(\mathcal{T}_h)}^2 + \|\mathbf{H}\|_{PH^{s+1}(\mathcal{T}_h)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \mathcal{T}_h}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0, \mathcal{T}_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad Ch_q^{\min\{s, k\}} \left(\|\mathbf{E}\|_{PH^{s+1}(\mathcal{Q}_h)}^2 + \|\mathbf{H}\|_{PH^{s+1}(\mathcal{Q}_h)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \mathcal{Q}_h}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0, \mathcal{Q}_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\xi_h \left(\|\mathbf{E}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{H}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0, \Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{36}$$

Maintenant, on regarde le terme $b(P_h(\mathbf{W}(\zeta)) - \mathbf{W}(\zeta), P_h(\mathbf{w}(\zeta)))$ dans (34) :

$$\begin{aligned}
b(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) &\leq |b(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w}))| \\
&\leq \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_d} \left(\left| \int_{a_{ij}} \langle \{P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}\}_{ij}, \llbracket P_h(\mathbf{e}) \rrbracket_{ij} \rangle d\sigma \right| + \right. \\
&\quad \left| \int_{a_{ij}} \langle \{P_h(\mathbf{E}) - \mathbf{E}\}_{ij}, \llbracket P_h(\mathbf{h}) \rrbracket_{ij} \rangle d\sigma \right| + \\
&\quad \left| \int_{a_{ij}} \langle \{P_h(\mathbf{h})\}_{ij}, \llbracket P_h(\mathbf{E}) - \mathbf{E} \rrbracket_{ij} \rangle d\sigma \right| + \\
&\quad \left. \left| \int_{a_{ij}} \langle \{P_h(\mathbf{e})\}_{ij}, \llbracket P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H} \rrbracket_{ij} \rangle d\sigma \right| \right) + \\
&\quad \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m} \left(\left| \int_{a_{ij}} \langle [P_h(\mathbf{E}) - \mathbf{E}]|_{c_i}, \check{\mathbf{n}}_{ij} \times P_h(\mathbf{h})|_{c_i} \rangle d\sigma \right| + \right. \\
&\quad \left. \left| \int_{a_{ij}} \langle [P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}]|_{c_i}, \check{\mathbf{n}}_{ij} \times P_h(\mathbf{e})|_{c_i} \rangle d\sigma \right| \right). \tag{37}
\end{aligned}$$

Dans la somme sur les faces internes (i.e. $a_{ij} \in \mathcal{F}_d$), a_{ij} peut être une face hybride, dans ce cas on considère (arbitrairement) le tétraèdre τ_i et l'hexaèdre q_j . On se sert à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi que des inégalités (21) et (23) du lemme (2), et (24) et (26) du lemme (3) :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{a_{ij}} \langle \{P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}\}_{ij}, \llbracket P_h(\mathbf{e}) \rrbracket_{ij} \rangle d\sigma \right| &\leq \left\| \frac{[P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}]|_{\tau_i} + [P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}]|_{q_j}}{2} \right\|_{0,a_{ij}} \cdot \\
&\quad \left\| (P_h(\mathbf{e})|_{q_j} - P_h(\mathbf{e})|_{\tau_i}) \times \check{\mathbf{n}}_{ij} \right\|_{0,a_{ij}} \\
&\leq \left(\left\| [P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}]|_{\tau_i} \right\|_{0,a_{ij}} + \left\| [P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}]|_{q_j} \right\|_{0,a_{ij}} \right) \cdot \\
&\quad \left(\left\| P_h(\mathbf{e})|_{\tau_i} \right\|_{0,a_{ij}} + \left\| P_h(\mathbf{e})|_{q_j} \right\|_{0,a_{ij}} \right) \\
&\leq \left(Ch_{\tau_i}^{\min\{s,p\} + \frac{1}{2}} \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} + Ch_{q_j}^{\min\{s,k\} + \frac{1}{2}} \|\mathbf{H}\|_{s+1,q_j} \right) \cdot \\
&\quad \left(Ch_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i} + Ch_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_j} \right) \\
&\leq C \cdot \max \left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\} + \frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\} + \frac{1}{2}} \right\} \cdot \max \left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\} \cdot \\
&\quad \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} + \|\mathbf{H}\|_{s+1,q_j} \right) \cdot \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i} + \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_j} \right).
\end{aligned}$$

Cherchons alors à majorer $\max \left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \right\} \cdot \max \left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\}$. Les puissances de h_{τ_i} et h_{q_j} étant différentes, nous avons quatres possibilités :

- $\max \left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \right\} \cdot \max \left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\} = h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}} h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}} = h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \leq h_{\tau}^{\min\{s,p\}} \leq \xi_h,$

- $\max \left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \right\} \cdot \max \left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\} = h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} = h_{q_j}^{\min\{s,k\}} \leq h_q^{\min\{s,k\}} \leq \xi_h,$

- En utilisant (16), avec $c_i = \tau_i$ et $c_j = q_j$ (et le paramètre de régularité γ), on a :

$$\begin{aligned} \max \left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \right\} \cdot \max \left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\} &= h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}} h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \leq h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}} \sqrt{\gamma} h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\gamma} h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \\ &\leq \sqrt{\gamma} h_{\tau}^{\min\{s,p\}} \\ &\leq \sqrt{\gamma} \xi_h, \end{aligned}$$

- En utilisant (16), avec $c_i = q_j$ et $c_j = \tau_i$, on a :

$$\begin{aligned} \max \left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \right\} \cdot \max \left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\} &= h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}} \leq h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \sqrt{\gamma} h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\gamma} h_{q_j}^{\min\{s,k\}} \\ &\leq \sqrt{\gamma} h_q^{\min\{s,k\}} \\ &\leq \sqrt{\gamma} \xi_h. \end{aligned}$$

Dans les quatres cas de figure on obtient donc :

$$\max \left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \right\} \cdot \max \left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\} \leq C \xi_h.$$

Ainsi, si a_{ij} est une face interne hybride (on note \mathcal{H}_d l'ensemble de toutes les faces hybrides du maillage) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{ij}} \left\langle \{P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}\}_{ij}, \llbracket P_h(\mathbf{e}) \rrbracket_{ij} \right\rangle d\sigma \right| &\leq C \xi_h \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i} + \|\mathbf{H}\|_{s+1, q_j} \right) \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \tau_i} + \|P_h(\mathbf{e})\|_{0, q_j} \right) \\ &\leq C \xi_h \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1, q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{e})\|_{0, q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si a_{ij} est une face interne commune à deux tétraèdres (on considère les tétraèdres τ_i et τ_j , et on note \mathcal{T}_d l'ensemble de toutes les faces communes à deux tétraèdres du maillage) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{ij}} \left\langle \{P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}\}_{ij}, \llbracket P_h(\mathbf{e}) \rrbracket_{ij} \right\rangle d\sigma \right| &\leq C h_{\tau}^{\min\{s,p\}} \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \tau_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \xi_h \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1, \tau_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{e})\|_{0, \tau_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si a_{ij} est une face interne commune à deux hexaèdres (on considère les hexaèdres q_i et q_j , et on note \mathcal{Q}_d l'ensemble de toutes les faces communes à deux hexaèdres du maillage) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{ij}} \left\langle \{P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}\}_{ij}, \llbracket P_h(\mathbf{e}) \rrbracket_{ij} \right\rangle d\sigma \right| &\leq C h_q^{\min\{s,k\}} \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,q_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_i}^2 + \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \xi_h \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,q_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_i}^2 + \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient les mêmes inégalités pour le terme $\left| \int_{a_{ij}} \left\langle \{P_h(\mathbf{e})\}_{ij}, \llbracket P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H} \rrbracket_{ij} \right\rangle d\sigma \right|$ (cf (37)), et des inégalités similaires (mais faisant intervenir les normes de \mathbf{E} et de $P_h(\mathbf{h})$) pour les termes $\left| \int_{a_{ij}} \left\langle \{P_h(\mathbf{E}) - \mathbf{E}\}_{ij}, \llbracket P_h(\mathbf{h}) \rrbracket_{ij} \right\rangle d\sigma \right|$ et $\left| \int_{a_{ij}} \left\langle \{P_h(\mathbf{h})\}_{ij}, \llbracket P_h(\mathbf{E}) - \mathbf{E} \rrbracket_{ij} \right\rangle d\sigma \right|$.

Par ailleurs, toujours dans (37), regardons la somme sur les faces métalliques (i.e. $a_{ij} \in \mathcal{F}_m$), si a_{ij} est la face d'un tétraèdre (on note \mathcal{T}_m l'ensemble de toutes les faces métalliques du maillage issues de tétraèdres) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{ij}} \left\langle [P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}]|_{\tau_i}, \check{\mathbf{n}}_{ij} \times P_h(\mathbf{e})|_{\tau_i} \right\rangle d\sigma \right| &\leq \left\| [P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}]|_{\tau_i} \right\|_{0,a_{ij}} \left\| P_h(\mathbf{e})|_{\tau_i} \right\|_{0,a_{ij}} \\ &\leq C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i} \leq C \xi_h \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i}. \end{aligned}$$

On a la même inégalité pour le terme $\left| \int_{a_{ij}} \left\langle [P_h(\mathbf{E}) - \mathbf{E}]|_{\tau_i}, \check{\mathbf{n}}_{ij} \times P_h(\mathbf{h})|_{\tau_i} \right\rangle d\sigma \right|$, et des inégalités similaires si $a_{ij} \in \mathcal{Q}_m$ (avec \mathcal{Q}_m l'ensemble de toutes les faces métalliques du maillage issues d'hexaèdres).

Ce qui nous amène la majoration suivante :

$$\begin{aligned} b(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) &\leq C \xi_h \left(\sum_{a_{ij} \in \mathcal{T}_d} \left(\left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_i}^2 + \|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{h})\|_{0,\tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,\tau_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \\ &\quad \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_d} \left(\left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,q_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_i}^2 + \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. \left(\|\mathbf{E}\|_{s+1,q_i}^2 + \|\mathbf{E}\|_{s+1,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{h})\|_{0,q_i}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \\ &\quad \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d} \left(\left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. \left(\|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_i}^2 + \|\mathbf{E}\|_{s+1,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{h})\|_{0,\tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,q_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \\ &\quad \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m} \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i} + \|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_i} \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,\tau_i} \right) + \\ &\quad \left. \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_m} \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,q_i} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_i} + \|\mathbf{E}\|_{s+1,q_i} \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,q_i} \right) \right). \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant l'inégalité : $\sum_l m_l n_l \leq \left(\sum_l m_l^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_l n_l^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall m_l, n_l \in \mathbb{R}^+$ (inégalité de Cauchy-Schwarz discrète), on arrive à la majoration de $b(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w}))$:

$$\begin{aligned} b(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) &\leq C\xi_h \left(\|\mathbf{H}\|_{PH^{s+1}(\Omega)} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{E}\|_{PH^{s+1}(\Omega)} \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,\Omega} \right) \\ &\leq C\xi_h \left(\|\mathbf{E}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{H}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi revenir à (34), en exploitant les majorations de $a(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w}))$ et $b(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w}))$ et en introduisant la notation suivante : $\|\mathbf{W}\|_{PH^{s+1}(\Omega)} = \left(\|\mathbf{E}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}^2 + \|\mathbf{H}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, on a alors :

$$\underline{\zeta} \left(\|P_h(\mathbf{e}(t))\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h}(t))\|_{0,\Omega}^2 \right) \leq \int_0^t C\xi_h \|\mathbf{W}(\zeta)\|_{PH^{s+1}(\Omega)} \left(\|P_h(\mathbf{e}(\zeta))\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h}(\zeta))\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\zeta. \quad (38)$$

Maintenant, on rappelle que : $\|\mathbf{W}\|_{C^0([0,t_f], PH^{s+1}(\Omega))} = \sup_{t \in [0,t_f]} \left(\|\mathbf{W}(t)\|_{PH^{s+1}(\Omega)} \right) = \max_{t \in [0,t_f]} \left(\|\mathbf{W}(t)\|_{PH^{s+1}(\Omega)} \right)$. On note $\Lambda(t) = \|P_h(\mathbf{e}(t))\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h}(t))\|_{0,\Omega}^2 = \|P_h(\mathbf{E}(t)) - \mathbf{E}_h(t)\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{H}(t)) - \mathbf{H}_h(t)\|_{0,\Omega}^2$ et on déduit de (38) :

$$\Lambda(t) \leq C\xi_h \int_0^t \|\mathbf{W}(\zeta)\|_{PH^{s+1}(\Omega)} \Lambda(\zeta)^{\frac{1}{2}} d\zeta \leq C\xi_h \int_0^{t_f} \|\mathbf{W}(\zeta)\|_{PH^{s+1}(\Omega)} \Lambda(\zeta)^{\frac{1}{2}} d\zeta, \quad \forall t \in [0, t_f].$$

Donc :

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0,t_f]} (\Lambda(t)) &\leq C\xi_h \int_0^{t_f} \|\mathbf{W}(\zeta)\|_{PH^{s+1}(\Omega)} \Lambda(\zeta)^{\frac{1}{2}} d\zeta \\ &\leq C\xi_h \int_0^{t_f} \|\mathbf{W}\|_{C^0([0,t_f], PH^{s+1}(\Omega))} \max_{\zeta \in [0,t_f]} \left(\Lambda(\zeta)^{\frac{1}{2}} \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Du fait que $\max_{t \in [0,t_f]} \left(\Lambda(t)^{\frac{1}{2}} \right) = \left[\max_{t \in [0,t_f]} (\Lambda(t)) \right]^{\frac{1}{2}}$, on a la majoration suivante :

$$\left[\max_{t \in [0,t_f]} \left(\|P_h(\mathbf{E}(t)) - \mathbf{E}_h(t)\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{H}(t)) - \mathbf{H}_h(t)\|_{0,\Omega}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \leq C\xi_h t_f \|\mathbf{W}\|_{C^0([0,t_f], PH^{s+1}(\Omega))},$$

et du fait que $\|P_h(\mathbf{W}(t)) - \mathbf{W}_h(t)\|_{0,\Omega} = \left(\|P_h(\mathbf{E}(t)) - \mathbf{E}_h(t)\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{H}(t)) - \mathbf{H}_h(t)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, on obtient enfin :

$$\max_{t \in [0,t_f]} \left(\|P_h(\mathbf{W}(t)) - \mathbf{W}_h(t)\|_{0,\Omega} \right) \leq C\xi_h t_f \|\mathbf{W}\|_{C^0([0,t_f], PH^{s+1}(\Omega))}.$$

□

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du Théorème 1, il existe une constante générique $C > 0$ indépendante de h telle que l'erreur $\mathbf{w} = \mathbf{W} - \mathbf{W}_h$ satisfait l'estimation a-priori suivante :*

$$\|\mathbf{w}\|_{C^0([0,t_f],L^2(\Omega))} \leq C\xi_h t_f \|\mathbf{W}\|_{C^0([0,t_f],PH^{s+1}(\Omega))}. \quad (39)$$

Démonstration. L'inégalité de Minkowski donne :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega} = \|\mathbf{W} - \mathbf{W}_h\|_{0,\Omega} &= \|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W}) + P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}_h\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W})\|_{0,\Omega} + \|P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}_h\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Or, en se servant une nouvelle fois des inégalités (20) – (22) (pour $r = 0$) du Lemme 2, et pour h_τ et h_q proches de 0, on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W})\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{i=1}^{N_\tau} \|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W})\|_{0,\tau_i}^2 + \sum_{i=1}^{N_q} \|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W})\|_{0,q_i}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_\tau} \left(Ch_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+1} \|\mathbf{W}\|_{s+1,\tau_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{N_q} \left(Ch_{q_i}^{\min\{s,k\}+1} \|\mathbf{W}\|_{s+1,q_i} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_\tau} \left(Ch_{\tau}^{\min\{s,p\}+1} \|\mathbf{W}\|_{s+1,\tau_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{N_q} \left(Ch_q^{\min\{s,k\}+1} \|\mathbf{W}\|_{s+1,q_i} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_\tau} \left(Ch_{\tau}^{\min\{s,p\}} \|\mathbf{W}\|_{s+1,\tau_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{N_q} \left(Ch_q^{\min\{s,k\}} \|\mathbf{W}\|_{s+1,q_i} \right)^2 \\ &\leq (C\xi_h)^2 \left(\sum_{i=1}^{N_\tau} \|\mathbf{W}\|_{s+1,\tau_i}^2 + \sum_{i=1}^{N_q} \|\mathbf{W}\|_{s+1,q_i}^2 \right) \\ &\leq (C\xi_h)^2 \|\mathbf{W}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

On obtient ainsi : $\|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W})\|_{0,\Omega} \leq C\xi_h \|\mathbf{W}\|_{PH^{s+1}(\Omega)} \leq Ct_f \xi_h \|\mathbf{W}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}$, ce qui nous amène la conclusion :

$$\|\mathbf{w}\|_{C^0([0,t_f],L^2(\Omega))} \leq C\xi_h t_f \|\mathbf{W}\|_{C^0([0,t_f],PH^{s+1}(\Omega))}.$$

□

En conclusion, on obtient une erreur pour le schéma semi-discret d'ordre $\mathcal{O}(\xi_h)$.

3.3 Convergence du problème totalement discret

Le schéma complètement discrétisé (12) – (13) peut être vu comme la discrétisation en temps d'un système d'équations différentielles ordinaires.

La formulation globale (17) donne :

$$m(\partial_t \mathbf{W}_h(t), \mathbf{T}') = - [a(\mathbf{W}_h(t), \mathbf{T}') + b(\mathbf{W}_h(t), \mathbf{T}')], \quad \forall \mathbf{T}' \in V_h^6.$$

Cette dernière équation peut être évaluée aux temps t_n et $t_{n+\frac{1}{2}}$ et on déduit que :

$$m \left(\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{E}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \\ \partial_t \mathbf{H}_h(t_n) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) = - \left[a \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) + b \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) \right]. \quad (40)$$

Le schéma totalement discret quant à lui peut se réécrire sous la forme suivante :

$$m \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) = m \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^n \\ \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) - \Delta t \left[a \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^n \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) + b \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^n \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) \right]. \quad (41)$$

Dans un premier temps, on étudie l'erreur de consistance du schéma. Pour cela, on définit $\widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1}$ et $\widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}}$ par :

$$m \left(\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} \\ \widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) = m \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n-\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) - \Delta t \left[a \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) + b \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) \right], \quad (42)$$

et $\left(\|\widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h(t_{n+1})\|_{0,\Omega}^2 + \|\widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ caractérise alors l'erreur de consistance, que l'on cherche à majorer en fonction de Δt . Dans (42), en soustrayant $m \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_{n+1}) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right)$ et en utilisant (40), on obtient :

$$m \left(\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h(t_{n+1}) \\ \widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) = m \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) - \mathbf{E}_h(t_{n+1}) \\ \mathbf{H}_h(t_{n-\frac{1}{2}}) - \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) + \Delta t m \left(\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{E}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \\ \partial_t \mathbf{H}_h(t_n) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right).$$

Ainsi, en faisant usage de deux développements de Taylor-Lagrange et en supposant $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^3([0, t_f], (L^2(\Omega))^6)$, on trouve :

$$\left(\|\widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h(t_{n+1})\|_{0,\Omega}^2 + \|\widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \Delta t^3 \|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^3([0, t_f], (L^2(\Omega))^6)}. \quad (43)$$

Maintenant, nous nous intéressons à l'erreur globale du schéma. Autrement dit, on cherche à évaluer :

$$\max_{n \in \{0, \dots, n_f\}} \left(\|\mathbf{E}(t_n) - \mathbf{E}_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{H}(t_{n-\frac{1}{2}}) - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On commence alors par étudier :

$$\|\mathbf{E}_h(t_n) - \mathbf{E}_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{H}_h(t_{n-\frac{1}{2}}) - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}\|_{0,\Omega}^2$$

.

On additionne $m \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_{n+1}) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right)$ à (42), on a :

$$\begin{aligned}
m \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_{n+1}) - \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) - \mathbf{H}_h(t_{n-\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) &= -\Delta t \left[a \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) + b \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) \right] + \\
& m \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_{n+1}) - \widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) - \widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right). \tag{44}
\end{aligned}$$

En posant $\boldsymbol{\epsilon}_h^n = \mathbf{E}_h(t_n) - \widehat{\mathbf{E}}_h^n$ et $\boldsymbol{\eta}_h^{n-\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_h(t_{n-\frac{1}{2}}) - \widehat{\mathbf{H}}_h^{n-\frac{1}{2}}$ et en soustrayant (41) à (44), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
m \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} \\ \boldsymbol{\eta}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) &= m \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_h^n \\ \boldsymbol{\eta}_h^{n-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) - \Delta t \left[a \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_h^n \\ \boldsymbol{\eta}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) + b \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_h^n \\ \boldsymbol{\eta}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right) \right] + \\
& m \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_{n+1}) - \widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) - \widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}' \right).
\end{aligned}$$

On définit ensuite l'énergie :

$$\mathfrak{N}^n = \sum_{i=1}^N \mathfrak{N}_i^n, \quad \text{avec } \mathfrak{N}_i^n = \|\boldsymbol{\epsilon}_i^n\|_{0,c_i}^2 + \int_{c_i} \left\langle \boldsymbol{\eta}_i^{n-\frac{1}{2}}, \boldsymbol{\eta}_i^{n+\frac{1}{2}} \right\rangle d\mathbf{x} \text{ où } \boldsymbol{\epsilon}_i = \boldsymbol{\epsilon}_h|_{c_i} \text{ et } \boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\eta}_h|_{c_i}.$$

De façon similaire à ce qui a été fait pour l'étude de stabilité dans [5] (et dans le même esprit que [14]), on peut montrer que sous une condition CFL du même type on a :

$$\left(\|\boldsymbol{\epsilon}_i^n\|_{0,\Omega}^2 + \|\boldsymbol{\eta}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \Delta t^2 \|\mathbf{W}\|_{C^3([0,t_f],L^2(\Omega))}. \tag{45}$$

Ainsi, l'erreur due au schéma en temps saute-mouton d'ordre 2 est en $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ et nous pouvons donc conclure par l'inégalité triangulaire et le Corollaire 1 que nous obtenons une erreur pour le schéma totalement discret d'ordre :

$$\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\xi_h).$$

4 Étude numérique 2D

Nous exhibons dans cette section, les résultats des expériences numériques en deux dimensions d'espace. Nous considérons le cas des ondes transverses magnétiques TM_z pour lesquelles :

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, t) \equiv (H_x(x_1, x_2, t), H_y(x_1, x_2, t), 0)^T \text{ et } \mathbf{E}(x_1, x_2, t) \equiv (0, 0, E_z(x_1, x_2, t))^T.$$

Autrement dit, on résout les équations de Maxwell 2D en mode TM_z qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E_z - \partial_{x_1} H_y + \partial_{x_2} H_x & = 0, \\ \mu \partial_t H_x + \partial_{x_2} E_z & = 0, \\ \mu \partial_t H_y - \partial_{x_1} E_z & = 0. \end{cases}$$

4.1 Mode (1, 1) dans une cavité métallique carrée

Nous étudions dans un premier temps le cas test de l'évolution d'un mode dans une cavité métallique carrée et unitaire. L'énergie de la solution est ici conservée et ce problème test présente également l'intérêt d'avoir une solution exacte (i.e. on peut calculer une erreur), donnée par :

$$\begin{cases} H_x(x_1, x_2, t) = -(\pi/\omega) \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \sin(\omega t), \\ H_y(x_1, x_2, t) = (\pi/\omega) \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(\omega t), \\ E_z(x_1, x_2, t) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\omega t), \end{cases}$$

où $\omega = 2\pi f$ désigne la pulsation (f la fréquence). Le temps de simulation est 2×10^{-7} s.

4.1.1 Test de performance

Premièrement, nous faisons les simulations sur deux maillages (FIG. 2) : un maillage triangulaire et un maillage hybride non-conforme. Ce dernier est obtenu en prenant un maillage hybride et conforme, et en raffinant trois fois (raffinement non-conforme) la partie triangulaire. Nous testons plusieurs ordres d'interpolation pour les deux maillages, et nous résumons les résultats dans le tableau TAB. 1.

En faisant des comparaisons, on observe que l'hybridation GDDT- $\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$ est plus précise et environ 4 fois plus efficace que l'interpolation GDDT- \mathbb{P}_1 . Par ailleurs, GDDT- $\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$ est ici environ 70 fois plus précise que GDDT- \mathbb{P}_1 , avec un plus petit temps de calcul. L'hybridation GDDT- $\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$ (resp. GDDT- $\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_4$) est aussi plus précise et plus rapide comparée à GDDT- \mathbb{P}_2 (resp. GDDT- \mathbb{P}_3).

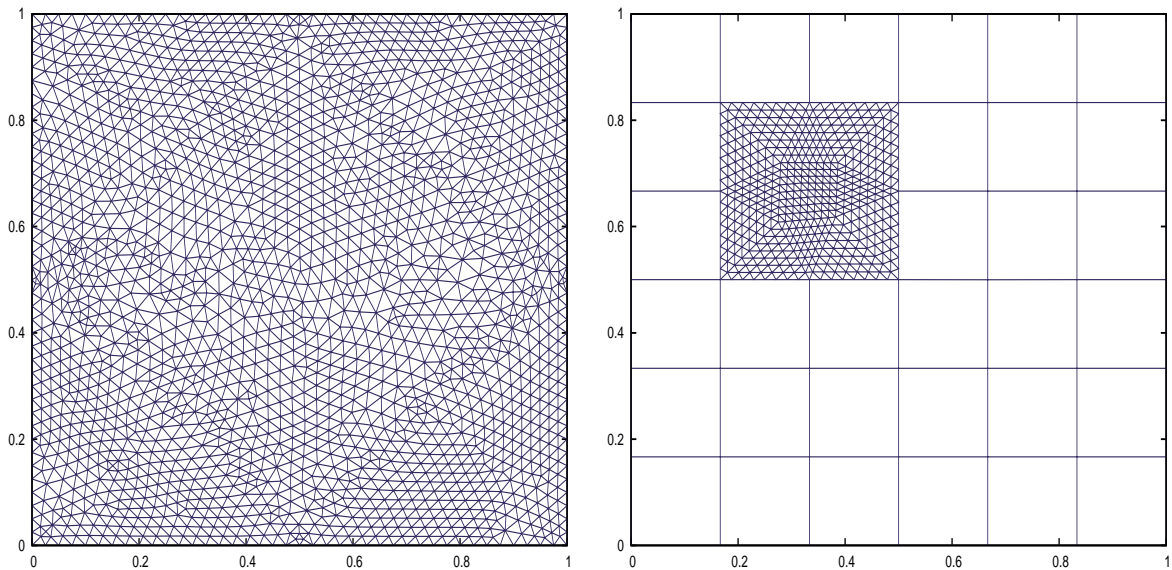


FIG. 2 – Gauche : maillage non-structuré totalement triangulaire - Droite : maillage hybride triangulaire / quadrangulaire (non-structuré / structuré) et non-conforme (les interfaces hybrides correspondent aux interfaces non-conformes).

TAB. 1 – Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et norme L^2 de l'erreur au temps final pour les deux maillages et pour chaque ordre d'interpolation.

Type de maillage	Ordre d'interpolation	Temps de calcul	# ddl	Erreur L^2 finale
Triangulaire	GDDT- P_1	45 s	11334	2.33×10^{-2}
	GDDT- P_2	206 s	22668	1.68×10^{-4}
	GDDT- P_3	530 s	37780	7.09×10^{-5}
	GDDT- P_4	1511 s	56670	2.94×10^{-5}
Hybride	GDDT- P_1Q_4	11 s	3488	4.03×10^{-3}
	GDDT- P_2Q_3	38 s	5888	3.39×10^{-4}
	GDDT- P_3Q_4	122 s	9760	9.96×10^{-5}
	GDDT- P_4Q_4	318 s	14240	5.07×10^{-5}

Ainsi, nous obtenons d'intéressants compromis entre temps de calcul et précision, pour ces quatre hybridations.

4.1.2 Test de convergence numérique

Nous allons alors étudier la convergence numérique en h de ces dernières. Nous faisons les tests sur quatre maillages hybrides et non-conformes basés respectivement sur 7×7 , 13×13 , 19×19 et 25×25 (FIG. 4) points, obtenus en prenant des maillages hybrides et conformes et en raffinant deux fois (raffinement non-conforme) la partie triangulaire. Pour chaque résolution, et pour chaque hybridation, on mesure la norme L^2 de l'erreur au temps final en fonction de la racine carrée du nombre total de degrés de liberté, et nous calculons les pentes (en échelle dite *loglog*) correspondantes (FIG. 3). On observe que l'ordre de convergence (les pentes sur le graphique) pour GDDT- P_2Q_3 , GDDT- P_3Q_4 et GDDT- P_4Q_4 est environ égal à 2.6, ce qui est mieux que prévu, car le schéma saute-mouton qu'on utilise limite l'ordre de convergence à 2. Pour le cas GDDT- P_1Q_4 , la pente est de 1.74, ce qui est également au-dessus de nos attentes car l'interpolation GDDT- P_1 sur la partie triangulaire limite l'ordre de convergence à 1. En conclusion, la convergence numérique en h est obtenue.

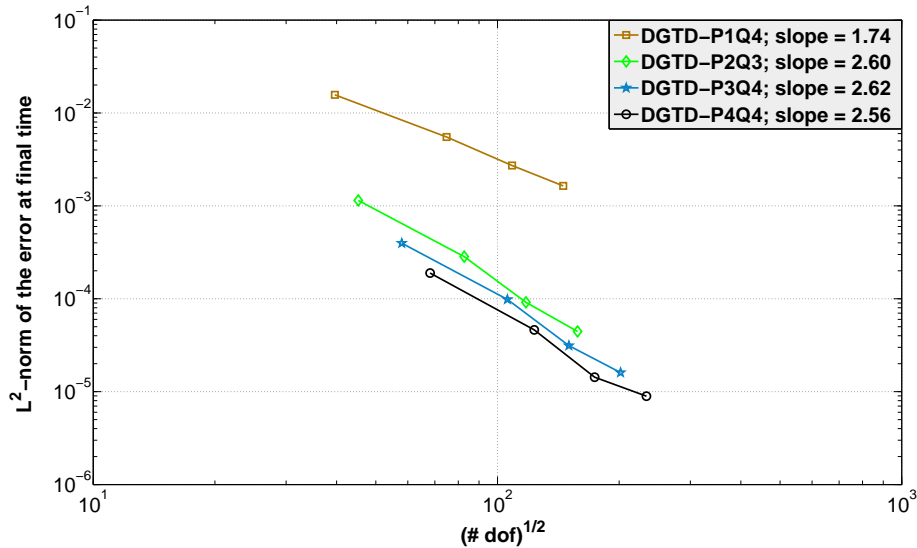


FIG. 3 – Erreur L^2 au temps final en fonction dans la racine carrée du nombre total de degrés de liberté.

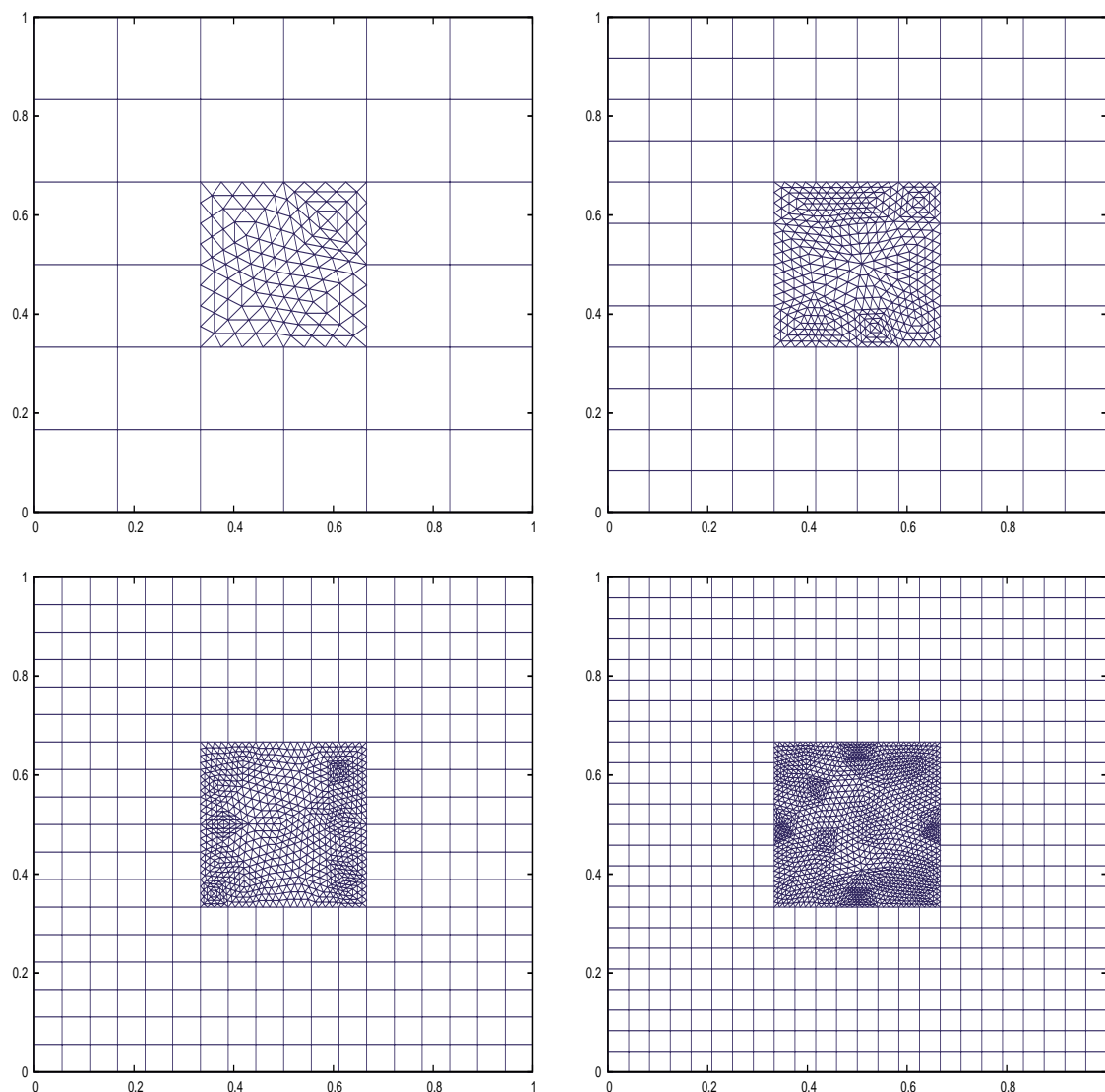


FIG. 4 – Maillages hybrides et non-conformes basés sur : En-haut à gauche : 7×7 points - En-haut à droite : 13×13 points - En-bas à gauche : 19×19 points - En-bas à droite : 25×25 points.

Par ailleurs, précisons que pour chaque hybridation $\text{GDDT-P}_p\text{Q}_k$, le pas de temps global que nous prenons est le minimum entre les pas de temps limites des méthodes GDDT-P_p (utilisée sur maillages totalement triangulaires) et GDDT-Q_k (utilisée sur maillages totalement quadrangulaires), ce qui nous donne une nouvelle validation de la condition suffisante de stabilité explicite et démontrée dans [5].

4.2 Diffraction d'une onde plane par un cercle métallique

Le second problème test considéré est la diffraction d'une onde plane par un cercle métallique. Le domaine de calcul est délimité par un carré sur lequel on impose la condition absorbante de Silver-Müller. Ici, le champ incident est donné par :

$$E_{z,\text{inc}}(x_1, x_2, t) = \cos(\omega t - kx_1); \quad H_{x,\text{inc}}(x_1, x_2, t) = 0; \quad H_{y,\text{inc}}(x_1, x_2, t) = \frac{-k}{\omega} \cos(\omega t - kx_1),$$

où le vecteur d'onde $\mathbf{k} = {}^t(k, 0)$ avec $k = \omega/c$ (c la vitesse de la lumière dans le vide et $\omega = 2\pi f$, f la fréquence). Deux maillages sont utilisés (Figure 5) : un maillage triangulaire avec 3276 éléments et un maillage hybride non-conforme composé de 2656 triangles et de 192 quadrangles. Nous exhibons les résultats pour une fréquence $f = 200$ MHz et un temps de simulation de 5×10^{-8} s.

Nous faisons une simulation avec l'ordre d'interpolation GDDT- \mathbb{P}_3 sur le maillage triangulaire, le nombre total de degrés de liberté est 32760 et le temps de calcul est de 20.3 s. Sur le maillage hybride, nous testons les hybridations GDDT- $\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$, GDDT- $\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$ et GDDT- $\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$; les nombres de degrés de liberté correspondants sont 11040, 12495 et 19008 pour des temps de calcul de 1.4 s, 2.6 s et 6.5 s, respectivement. Nous montrons de plus sur la FIG. 6 l'évolution en temps de la composante E_z en deux points du domaine de calcul, et nous voyons clairement que pour chaque cas, les courbes sont confondues. Enfin, une transformée de Fourier discrète étant calculée durant la dernière période de la simulation, nous présentons les lignes de contour (FIG. 7) de celle-ci pour les composantes H_x et H_y . Nous remarquons que les lignes de contour pour les quatres cas GDDT- $\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$, GDDT- $\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$, GDDT- $\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$ et GDDT- \mathbb{P}_3 ont sensiblement le même aspect. Ainsi pour chaque hybridation, nous avons un gain en temps de calcul important (par rapport à GDDT- \mathbb{P}_3) en gardant des valeurs de la solution proches de celles générées avec GDDT- \mathbb{P}_3 .

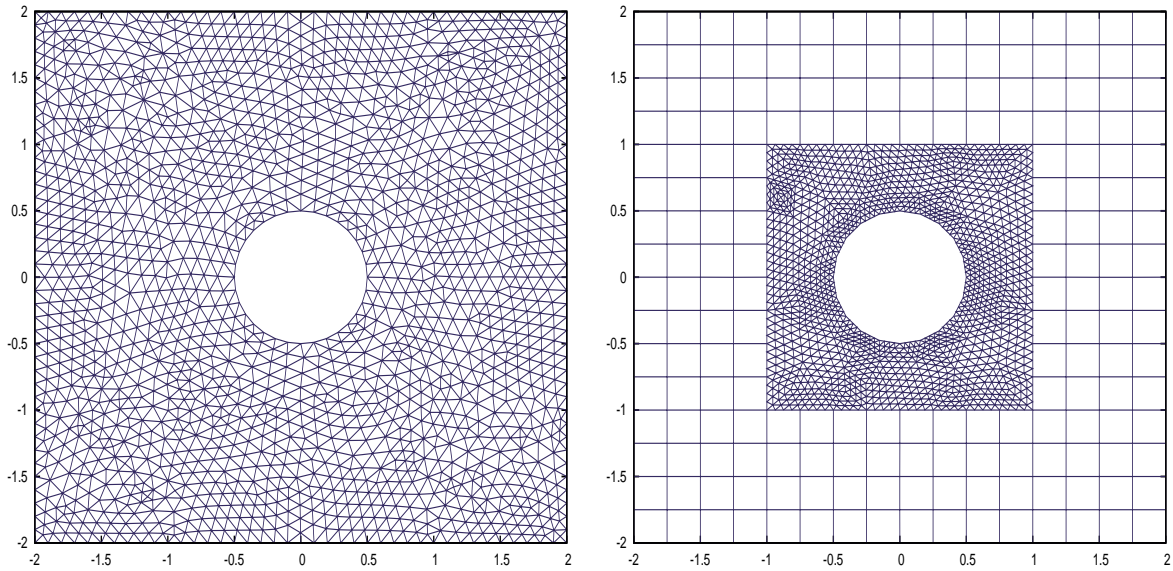


FIG. 5 – Gauche : maillage triangulaire - Droite : maillage hybride et non-conforme.

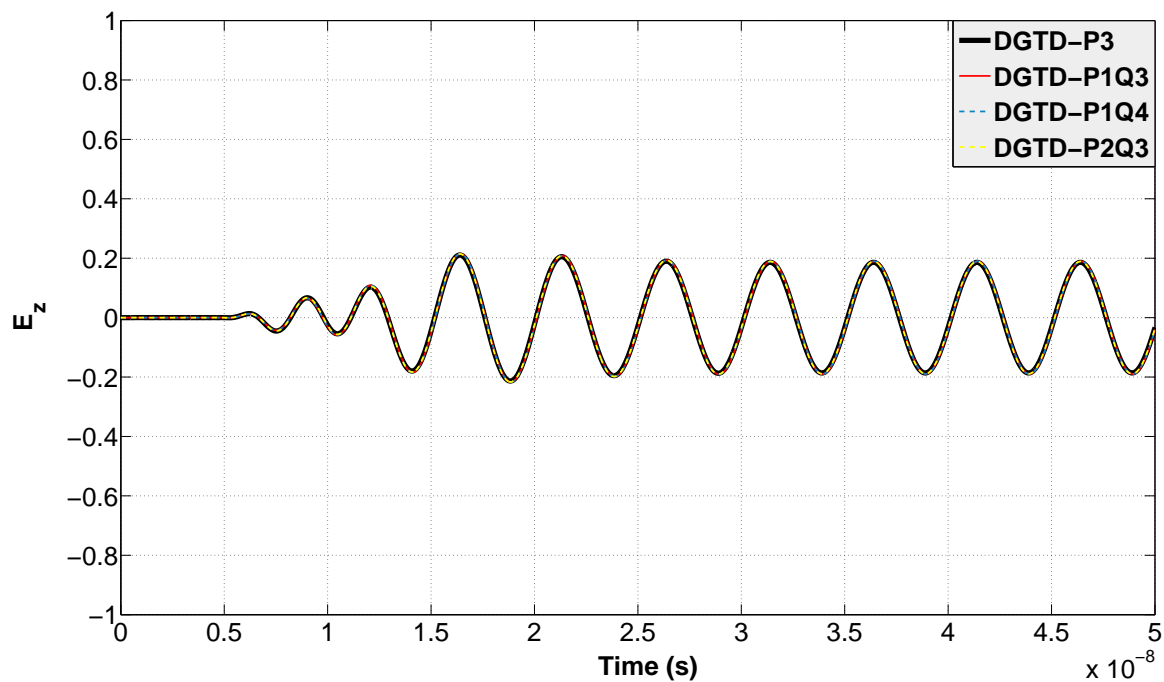
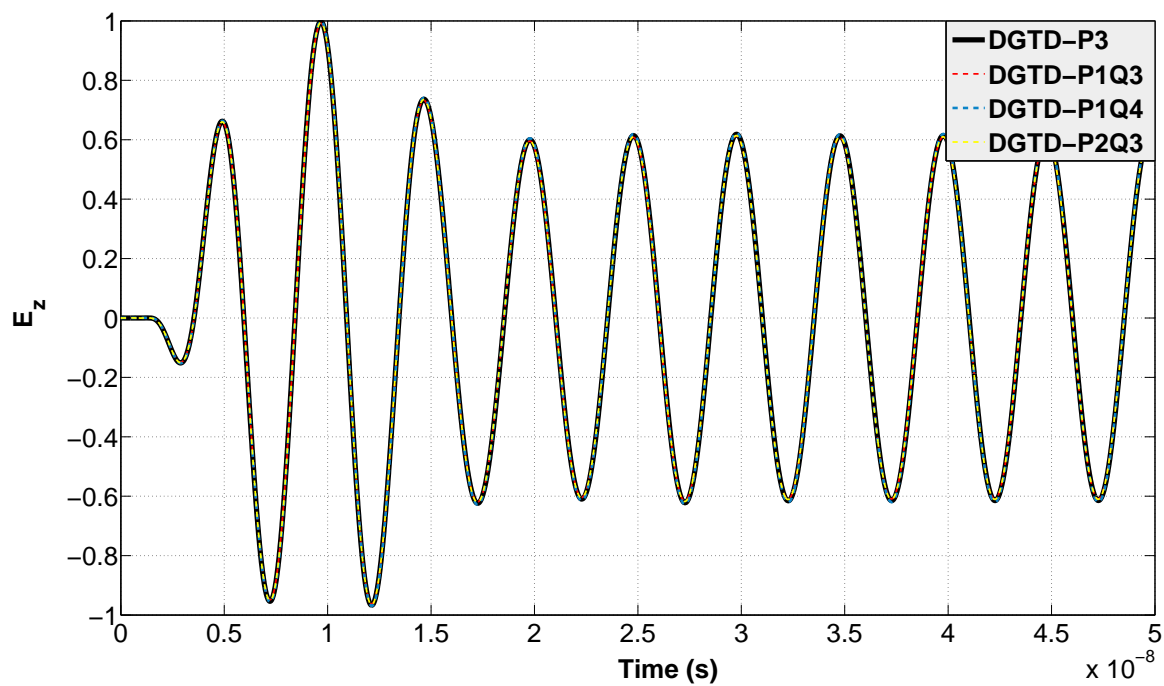


FIG. 6 – Evolution en temps de la composante E_z aux points : Haut : $(-1.6, 1.6)$ - Bas : $(0.5, -0.5)$.

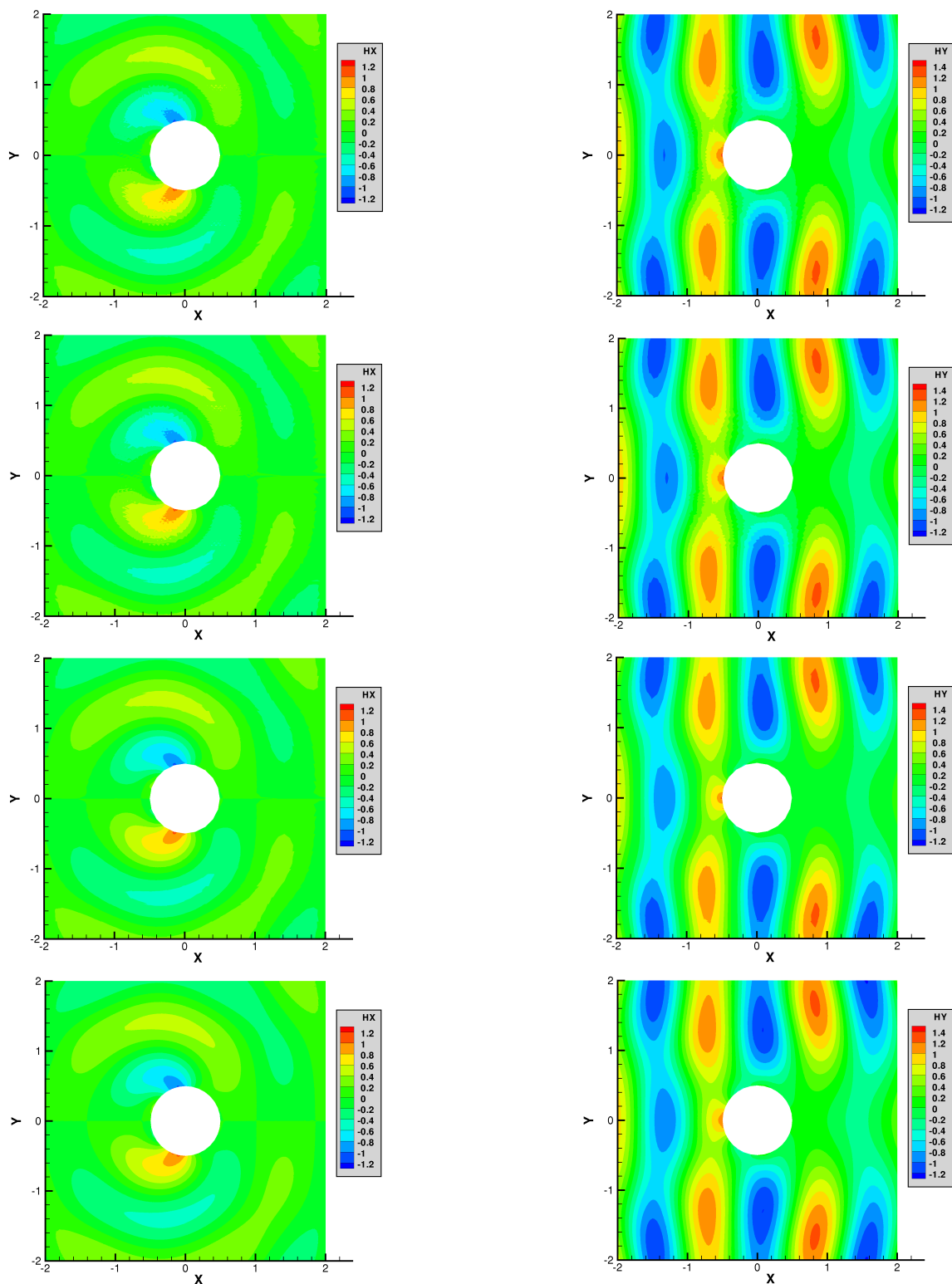


FIG. 7 – Lignes de contour de la transformée de Fourier discrète des composantes H_x et H_y pour les cas, respectivement de haut en bas : GDDT- P_1Q_3 , GDDT- P_1Q_4 , GDDT- P_2Q_3 et GDDT- P_3 .

5 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons présenté les résultats d'une investigation sur une méthode GDDT- $\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ en maillage multi-éléments pour résoudre les équations de Maxwell en domaine temporel. Nous sommes principalement concernés ici par l'analyse de convergence a-priori de ce schéma pour le cas 3D, en prenant compte de l'aspect hybride et non-conforme des maillages étudiés. Les problèmes tests 2D confirment cette convergence numériquement, et donnent des résultats prometteurs pour plusieurs hybridations.

Les prochains travaux viseront à apporter une évaluation détaillée de la méthode pour des problèmes plus réalistes, en 2D d'abord, et nous étendrons la méthode à de nombreux problèmes numériques en 3D. En outre, l'efficacité de calcul peut encore être améliorée tout en minimisant les erreurs de dispersion, grâce notamment à une stratégie de pas de temps local et à l'utilisation de fonctions de base orthogonales pour l'interpolation \mathbb{Q}_k sur les hexaèdres.

Remerciements

Ce travail est soutenu par la région Île-de-France et s'inscrit dans le cadre du projet MIEL 3D "Maillage volumique, automatique, industriel et générique" (projet coopératif de Recherche et Développement du pôle "System@tic Paris-Région").

Références

- [1] P. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland-Elsevier Science Publisher, Amsterdam, New York, Oxford, 1978.
- [2] G. Cohen, X. Ferrieres, and S. Pernet. A spatial high order hexahedral discontinuous Galerkin method to solve Maxwell's equations in time-domain. *J. Comput. Phys.*, 217(2) :340–363, 2006.
- [3] R.W. Davies, K. Morgan, and O. Hassan. A high order hybrid finite element method applied to the solution of electromagnetic wave scattering problems in the time domain. *Comput. Mech.*, 44 :321–331, 2009.
- [4] S. Dosopoulos and J. F. Lee. Interior penalty discontinuous Galerkin finite element method for the time-dependent first order Maxwell's equations. *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, 58(12) :4085–4090, 2010.
- [5] C. Durochat and S. Lanteri. Discontinuous Galerkin method on hybrid meshes triangular / quadrangular for the numerical resolution of the time domain Maxwell's equations. Technical Report 7253, INRIA, 2010.
- [6] H. Fahs. Development of a *hp*-like discontinuous Galerkin time-domain method on non-conforming simplicial meshes for electromagnetic wave propagation. *Int. J. Numer. Anal. Mod.*, 6 :193–216, 2009.
- [7] H. Fahs and S. Lanteri. A high-order non-conforming discontinuous Galerkin method for time-domain electromagnetics. *J. Comput. Appl. Math.*, 234 :1088–1096, 2010.
- [8] X. Ferrieres, J.-P. Parmantier, S. Bertuol, and A. R. Ruddle. Application of a hybrid finite difference/finite volume method to solve an automotive EMC problem. *IEEE Trans. on Elettromag. Compatibility*, 46(4) :624–634, 2004.
- [9] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel, and S. Piperno. Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes. *ESAIM : Math. Model. Numer. Anal.*, 39(6) :1149–1176, 2005.
- [10] S.G. Garcia, M.F. Pantoja, C.M. de Jong van Coevorden, A.R. Bretones, and R.G. Martin. A new hybrid DGTD/FDTD method in 2-D. *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.*, 18(12) :764–766, 2008.
- [11] T. Hallerod and T. Rylander. Electric and magnetic losses modeled by a stable hybrid with explicit-implicit time-stepping for Maxwell's equations. *J. Comput. Phys.*, 227 :4499–4511, 2008.

- [12] J.S. Hesthaven and T. Warburton. Nodal high-order methods on unstructured grids. I. Time-domain solution of Maxwell's equations. *J. Comput. Phys.*, 181(1) :186–221, 2002.
- [13] M. König, K. Busch, and J. Niegemann. The discontinuous Galerkin time-domain method for Maxwell's equations with anisotropic materials. *Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications*, 8(4) :303–309, 2010.
- [14] S. Lanteri and C. Scheid. Convergence of a Discontinuous Galerkin scheme for the mixed time domain Maxwell's equations in dispersive media. Technical Report 7634, INRIA, 2011.
- [15] E. Montseny, S. Pernet, X. Ferrieres, and G. Cohen. Dissipative terms and local time-stepping improvements in a spatial high order discontinuous Galerkin scheme for the time-domain Maxwell's equations. *J. Comput. Phys.*, 227(14) :6795–6820, 2008.
- [16] J.C. Nedelec. Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 35 :315–341, 1980.
- [17] J.C. Nedelec. A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 50 :57–81, 1986.
- [18] J. Niegemann, M. König, K. Stannigel, and K. Busch. Higher-order time-domain methods for the analysis of nano-phonic systems. *Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications*, 7(1) :2–11, 2009.
- [19] S. Pernet and X. Ferrieres. Hp a-priori error estimates for a non-dissipative spectral discontinuous Galerkin method to solve the Maxwell equations in the time domain. *Math. Comput.*, 76 :1801–1832, 2007.
- [20] S. Piperno, M. Remaki, and L. Fezoui. A nondiffusive finite volume scheme for the three-dimensional Maxwell's equations on unstructured meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(6) :2089–2108, 2002.
- [21] S. Schnepf, E. Gjonaj, and T. Weiland. A hybrid finite integration. *J. Comput. Phys.*, 229(11) :4075–4096, 2010.
- [22] H. Songoro, M. Vogel, and Z. Cendes. Keeping time with Maxwell's equations. *IEEE Microw. Mag.*, 11(2) :42–49, 2010.
- [23] K. Stannigel, M. König, J. Niegemann, and K. Busch. Discontinuous Galerkin time-domain computations of metallic nanostructures. *Optics Express*, 17(17) :14934–14947, 2009.
- [24] A. Taflov and S.C. Hagness. *Computational electrodynamics : the finite-difference time-domain method - 3rd ed.* Artech House Publishers, 2005.
- [25] N.V. Venkatarayalu, R. Lee, Y.B. Gan, and L.W. Li. A stable FDTD subgridding method based on finite element formulation with hanging variables. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 55(3) :907–915, 2007.
- [26] Z.Q. Xie, O. Hassan, and K. Morgan. A parallel implicit/explicit hybrid time domain method for computational electromagnetics. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 80 :1093–1109, 2009.
- [27] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, AP-16 :302–307, 1966.



**RESEARCH CENTRE
SOPHIA ANTIPOLIS – MÉDITERRANÉE**

2004 route des Lucioles - BP 93
06902 Sophia Antipolis Cedex

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-6399