



**HAL**  
open science

# REPRESENTATION ET ALGORITHMES PARCIMONIEUX POUR LA TOMOGRAPHIE PIV

Ioana Barbu, Cédric Herzet, Etienne Mémin

► **To cite this version:**

Ioana Barbu, Cédric Herzet, Etienne Mémin. REPRESENTATION ET ALGORITHMES PARCIMONIEUX POUR LA TOMOGRAPHIE PIV. 14ème Congrès Français de Visualisation et de Traitement d'Images en Mécanique des Fluides, Nov 2011, Lille, France. hal-00683424

**HAL Id: hal-00683424**

**<https://inria.hal.science/hal-00683424>**

Submitted on 28 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# REPRESENTATION ET ALGORITHMES PARCIMONIEUX POUR LA TOMOGRAPHIE PIV

Ioana BARBU <sup>a,\*</sup>, Cédric HERZET, Etienne MEMIN

<sup>a</sup> Fluminance, INRIA Centre Rennes - Bretagne Atlantique, Rennes

\*ioana.barbu@inria.fr

---

## Résumé

Cet article se place dans le contexte de l'estimation tridimensionnelle (3D) du mouvement de fluides turbulents. Nous examinons, plus particulièrement, le problème de l'estimation de la position 3D d'un ensemble de particules à partir d'un set d'images générées par un système expérimental de Tomographie PIV (Elsinga et al. [2006]). Ce type de problème étant par essence mal posé, il s'avère nécessaire d'imposer des contraintes additionnelles sur la solution recherchée. Dans ce papier, nous investiguons l'utilisation de contraintes encourageant la parcimonie de la solution. Nous étudions, en particulier, l'utilisation d'une famille d'algorithmes de faible complexité, communément appelés "algorithmes de poursuites" dans la littérature (Mallat et Zhang [1993]), pour la résolution de ce problème. Les résultats illustrent des performances en reconstruction similaires ou meilleures à l'état de l'art pour une complexité réduite d'un facteur de 10 jusqu'à 100.

**Mots Clés :** Tomographie PIV/ complexité/ représentations parcimonieuses/reconstruction 3D

---

## 1. Introduction

La Tomographie PIV est une technique expérimentale d'analyse tridimensionnelle d'écoulement des fluides proposée par (Elsinga et al. [2006]). Cette technique repose sur l'ensemencement du fluide par des particules légères et sur l'étude du déplacement de ces dernières à partir d'images prises par un ensemble de caméras.

Une étape cruciale de ce type d'analyse consiste en l'estimation de la position spatiale des particules à chaque instant. Malheureusement, le nombre d'observations disponibles pour la reconstruction est très limité, ce qui nous amène à résoudre un système sous-déterminé. Cependant, le signal 3D représentant la position des particules dans le volume cumule des particularités notables. En effet, ce signal est **parcimonieux** dans le domaine spatiale (i.e., on retrouve généralement considérablement moins de particules que de l'espace vide) et **non-négative** (i.e., l'énergie récupérée par les particules est toujours une quantité positive).

Ces informations a priori sur le signal sont exploitées dans la communauté TomoPIV. Les procédés classiques de l'état de l'art sont les méthodes algébriques de reconstruction (Gordon et al. [1970]), parmi lesquelles nous identifions comme les plus populaires ART et MART. Ce-dernier cherche une solution qui maximise la mesure de l'entropie de Boltzmann-Shannon et lui impose **une contrainte de non-négativité**. Plus récemment, (Petra et al. [2009]) ont posé les fondements théoriques de la **représentation parcimonieuse** pour un système de TomoPIV et ont montré de manière empirique que l'application des algorithmes de reconstruction parcimonieuse dans ce contexte donne des meilleurs résultats que les méthodes appartenant à l'état de l'art. Ces deux familles de procédures mènent à une qualité de reconstruction acceptable, elles présentent toutefois certains inconvénients : les méthodes algébriques produisent des solutions trop denses alors que les algorithmes de recherche de solutions parcimonieuses souffrent d'une complexité élevée sans garantir une solution positive.

Nos travaux portent sur la reconstruction en temps polynomial d'un signal éparse à partir d'un nombre limité d'observations. Afin d'obtenir une solution précise qui respecte ces critères, nous nous intéressons à une classe d'algorithmes pour la reconstruction parcimonieuse qui

constitue la famille des **algorithmes glouton**. Appliqués à notre système, ils génèrent des solutions aux performances comparables à l'état de l'art et se révèlent plus rapides d'un facteur à 10 à 100.

## 2. Modélisation

Nous nous intéressons au modèle mathématique reliant les observations (*i.e.*, les images 2D) au signal recherché (*i.e.*, la densité de particules dans l'espace 3D). Le modèle discrétisé dérivé ci-dessous et communément adopté dans l'analyse TomoPIV est inspiré par le modèle algébrique de reconstruction d'images (Censor et Zenios [1997]).

Soit  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  un cuboïde dans l'espace tridimensionnel. Nous voulons récupérer la distribution de son intensité volumique, noté  $I(\mathbf{z})$ ,  $\forall \mathbf{z} \in \mathcal{V}$  à partir d'un vecteur de mesures  $\mathbf{y}$ . Dans le contexte de la TomoPIV,  $\mathbf{y}$  est constitué par les pixels collectés grâce à un système multi-caméras synchrone. Selon le paradigme usuel de projection, le  $i^{\text{ème}}$  élément du vecteur  $\mathbf{y}$  est mesuré selon

$$y_i = \int_{\Omega_i} I(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (1)$$

où  $\Omega_i$  représente le cône de vue provenant du centre optique  $O_c$  et passant par les coins extrêmes du  $i^{\text{ème}}$  pixel (cf. Figure 1). Nous faisons la remarque que toute distribution physique d'intensité correspond à un signal d'énergie finie, *i.e.*,  $I(\mathbf{z}) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{V})$ . Pour la suite de l'étude, nous supposons que  $I(\mathbf{z})$  appartient à un sous-espace de dimension finie de  $\mathcal{L}^2(\mathcal{V})$ . Soit  $\{b_j(\mathbf{z})\}_{j=1}^m$  une base orthogonale de ce sous-espace.  $I(\mathbf{z})$  peut se réécrire comme suit :

$$I(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^m x_j b_j(\mathbf{z}) \quad (2)$$

$$\text{où } x_j = \int_{\mathcal{V}} I(\mathbf{z}) b_j(\mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

Il existe différents choix pour la famille de fonctions de base dans la littérature (Censor et Zenios [1997]). Nous présumons ci-dessus que les  $b_j(\mathbf{z})$  sont définies comme des fonctions-porte. Afin que cette décision retrouve sa pertinence, nous partitionnons le cuboïde dans une grille cartésienne formée par des éléments de volume cubiques (voxels),  $\zeta_i \subset \mathbb{R}^3$ , tel que :

$$\bigcup_{i=1}^m \zeta_i = \mathcal{V}, \quad \bigcap_{i=1}^m \zeta_i = \emptyset \quad (3)$$

La définition de  $b_j(\mathbf{z})$  comme pulse rectangulaire peut ainsi s'exprimer de la manière suivante:

$$b_j(\mathbf{z}) \triangleq \begin{cases} 1/\text{vol}(\zeta_j), & \mathbf{z} \in \zeta_j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

où  $\text{vol}(\zeta_i) \triangleq \int_{\zeta_i} 1 d\mathbf{z}$  représente le volume d'un voxel.

En nous rapportant dans l'équation (2) afin d'intégrer la  $j^{\text{ème}}$  fonction de base selon le  $i^{\text{ème}}$  cône de vue, nous obtenons les coefficients  $d_{ij}$  tel que :

$$d_{ij} \triangleq \int_{\Omega_i} b_j(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \frac{1}{\text{vol}(\zeta_j)} \int_{\Omega_i \cap \zeta_j} 1 d\mathbf{z}. \quad (5)$$

L'intégrale qui constitue le terme droit de (5) décrit l'intersection du  $i^{\text{ème}}$  cône de vue  $\Omega_i$  avec le  $j^{\text{ème}}$  voxel  $\zeta_j$ . Ensuite, couplant (2) et (5), notre modèle se résume à un système d'équations linéaires :

$$y_i = \sum_{j=1}^m x_j d_{ij}. \quad (6)$$

On exprime (6) sous forme matricielle pour finalement obtenir :

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x} \quad (7)$$

où  $\mathbf{y}$  représente les observations,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est un dictionnaire composé par les éléments définis en (5) et  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur constitué des coefficients de projections inconnus  $x_j$ . Nous nous rapportons à l'annexe A pour une discussion sur l'implémentation de (5).

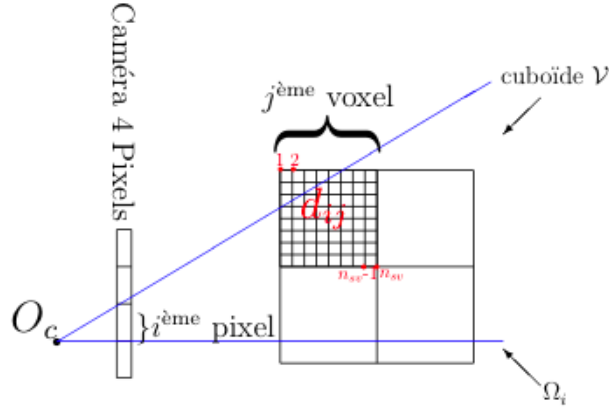


Fig. 1: Schéma 2D d'un cuboïde de 4 voxels présent dans le champs de vue d'une caméra de 4 pixels ; le  $j^{\text{ème}}$  voxel de  $\mathcal{V}$  est divisé dans  $9 \times 9$  sous-voxels ; le  $i^{\text{ème}}$  pixel intersecte les sousvoxels compris dans le cône de vue du  $j^{\text{ème}}$  voxel.

**Remarque :** Le système (7) décrit de manière déterministe le modèle d'observation de l'espace 3D. Si en adoptant cette approche nous reproduisons de manière fidèle l'acquisition du signal physique, nous ne prenons pas en compte les erreurs induites par la discrétisation de l'espace continu. Soient  $\mathbf{w}$  un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$ . Le modèle probabiliste d'observation devient :

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{w}. \quad (8)$$

### 3. Critères et paradigmes pour la reconstruction

Dans cette section, nous rappelons les différentes approches présentes dans la littérature pour estimer la valeur du vecteur de coefficients inconnus de projection  $\mathbf{x}$  à partir du vecteur de pixels  $\mathbf{y}$ . Comme nous l'avons précisé dans la première section, le système (7) présente des particularités qui ont influencé le choix des paradigmes d'estimation employés dans la communauté TomoPIV. En effet, le système à résoudre est souvent sous-déterminé ( $n < m$ ) et le vecteur  $\mathbf{x}$  à reconstruire est non-négatif et parcimonieux. La non-négativité et la parcimonie sur le signal recherché peuvent donc être exploités afin de résoudre l'ambiguïté propre aux systèmes sous-déterminés.

La première classe d'algorithmes, dont on cite la procédure *MART (Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique)*, représente une approche classique dans la littérature TomoPIV qui cherche une solution positive pour le vecteur  $\mathbf{x}$ . Formellement, MART optimise le critère suivant :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_{j=1}^m x_j \log x_j \right\} \text{ soumis à } \begin{cases} \mathbf{x} \geq 0 \\ \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases} \quad (9)$$

La première contrainte force la non-négativité de  $\mathbf{x}$ , alors que la seconde assure sa compatibilité avec les observations contenues dans  $\mathbf{y}$ . MART cherche une solution à ce problème grâce à un schéma itératif basé sur une expression de mise à jour analytique; la convergence de l'algorithme est assurée si: *i)* il existe au moins un point admissible (un point qui satisfasse les contraintes); *ii)*  $d_{ij} \geq 0$  and  $y_i > 0 \forall i, j$ .

Une approche plus récente pour la reconstruction dans le contexte de TomoPIV est fondée sur les représentations parcimonieuses. L'idée est ainsi d'exploiter la parcimonie du vecteur recherché  $\mathbf{x}$  afin d'enlever l'ambiguïté de la solution. Plus précisément, le problème d'optimisation peut s'exprimer comme suit :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ soumis à } \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (10)$$

où  $\|\mathbf{x}\|_0$  représente la norme  $l_0$  (le nombre d'éléments non-nuls du vecteur  $\mathbf{x}$ ). En effet, résoudre (10) revient à trouver le vecteur ayant le nombre minimum d'éléments non-nuls et satisfaisant le modèle d'observation (7).

Malheureusement, le problème (10) est NP-dur. En pratique, on se ramène à l'utilisation de méthodes heuristiques afin d'accéder à ses solutions. La construction d'algorithmes de représentation parcimonieuse est en plein essor dans la littérature de spécialité. Une approche courante consiste à remplacer la norme  $l_0$  non-convexe et discontinue par une autre fonction, plus facile à manipuler. Dans le contexte de TomoPIV, plusieurs auteurs ont déjà exploré cette idée. Petra et al. [2009] ont considéré la norme  $l_1$  comme une approximation de la norme  $l_0$  et ont proposé une implémentation du problème convexe fondée sur l'algorithme itératif de Bregman (Yin et al. [2008]). En outre, dans Petra et al. [2008], les mêmes auteurs ont étudié l'approximation suivante :  $\|\mathbf{x}\|_0 \cong \sum_i (1 - e^{-\alpha x_i})$ ,  $\alpha > 0$ . De manière évidente, ce substitut mène à une bonne approximation de la norme  $l_0$  quand  $\alpha$  tend vers l'infini. Les auteurs ont ensuite proposé un algorithme itératif qui cherche une solution du problème ainsi défini par un schéma qui rappelle la programmation dynamique.

La documentation émergente tenant de la communauté TomoPIV met en évidence une direction incontestable pour la recherche dans ce domaine. Le recours aux alternatives de régularisation citées, et ensuite aux procédures adaptées aux représentations parcimonieuses, garantit la prise en compte des informations a priori connues sur le signal. Cependant, nous constatons des limitations concernant la convergence vers une solution, assez lente, et sur le niveau d'ensemencement, relativement faible. Notre investigation porte sur l'utilisation des algorithmes **tractables** pour les représentations parcimonieuses qui nous permettent d'obtenir des performances comparables à l'état de l'art en terme de probabilité de reconstruction correcte pour une complexité moindre.

#### 4. Algorithmes glouton de faible complexité pour la TomoPIV

Nous considérons le problème de reconstruction pour la TomoPIV dans un contexte de représentation parcimonieuse (*i.e.*, le signal 3D recherché est décrit comme une combinaison d'un petit nombre d'atomes choisis à partir d'un dictionnaire sous-déterminé). Notre objectif est de trouver de manière expérimentale la famille d'algorithmes de représentations parcimonieuses offre le meilleur compromis entre précision et complexité.

Trouver la solution exacte du problème (10) est NP-dur. C'est pourquoi des multiples algorithmes sous-optimaux, mais tractable, ont été conçus dans la littérature afin de répondre au problème de représentation parcimonieuse. Nous identifions 3 familles principales :

- *les algorithmes basés sur un relâchement de la norme  $l_0$* . Cette classe de procédures exploite l'approximation de la norme  $l_0$  par la norme  $l_1$ , transformant le problème initial, non-convexe, de manière à pouvoir être résolu efficacement par des méthodes d'optimisation classiques. Nous mentionons l'algorithme de basis pursuit (BP et ses implémentations diverses, dont on mentionne LGB) (Chen et al. [1998]), Focal Underdetermined System Solver (FOCUSS) (Gorodnitsky et Rao [1997]) et Global Matching Filter (GMF) (Fuchs [2001]).

- *les algorithmes gloutons*, qui construisent de manière itérative le vecteur parcimonieux  $\mathbf{x}$  en prenant une succession de décisions localement optimales. Nous faisons référence au Matching Pursuit (MP) (Mallat et Zhang [1993]), Orthogonal MP (OMP) (Pati et al. [1993]), stagewise OMP (StOMP) (Donoho et Tsaig [2006]) ou Subspace Pursuit (SP) (Dai et Milenkovic [2008]).
- *les algorithmes bayésiens*, dont le principe consiste à exprimer le problème de représentation parcimonieuse comme la solution d'un problème d'inférence bayésien afin d'appliquer des outils statistiques pour sa résolution. Les références étant nombreuses, nous nous focalisons sur *les algorithmes gloutons bayésiens*, tel que le Bayesian MP (BMP), Bayesian OMP (BOMP, KBOMP) – décrits en (Herzet et Drémeau [2010]).

La première famille de procédures a déjà été exploitée dans la littérature TomoPIV (voir section 3) avec des résultats convaincants par rapport à la précision de l'approximation vs la parcimonie de la solution. Nous focalisons notre analyse sur les deux derniers paradigmes. Dans (Herzet et Drémeau [2010]), les auteurs ont montré que la solution de (11) est équivalente à celle du problème standard (10), tel que  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*$ . Ce résultat nous motive à présenter une description compacte des deux familles de procédures.

Les algorithmes gloutons et leurs extensions bayésiennes représentent des procédures itératives qui mettent à jour de manière séquentielle une estimée du support et des amplitudes des coefficients de vecteur parcimonieux à reconstruire. Les différences existantes entre les algorithmes présents dans la littérature proviennent justement de la nature dont ces deux dernières opérations sont implémentées. Soient  $\hat{\mathbf{s}}^{(n)}$  et  $\hat{\mathbf{x}}^{(n)}$  les estimées du support de décomposition parcimonieuse, respectivement du vecteur des coefficients générés à l'itération  $n$  par un algorithme glouton. L'étape de mise à jour du vecteur de coefficients consiste à retrouver la meilleure estimée  $\hat{\mathbf{x}}^{(n)}$  en tenant compte de l'estimée courante du support de la décomposition parcimonieuse,  $\hat{\mathbf{s}}^{(n)}$ . Puisque dans la plupart des algorithmes répertoriés le nouvel estimé contribue à la décroissance de la norme de l'erreur résiduelle (que l'on note  $\mathbf{r}$ , pour les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{s}$  donnés), l'évaluation de ce dernier peut se formaliser comme ci-dessus :

$$\hat{\mathbf{x}}^{(n)} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{s}^{(n)})\|_2^2 \quad (11)$$

Selon les algorithmes, cette étape est complexe car elle nécessite le calcul d'une pseudo-inverse (*i.e.*, OMP). Des alternatives ont été proposées pour la recherche d'une solution de (12) dans lesquelles l'erreur résiduelle est optimisée sous une seule composante du vecteur  $\mathbf{x}$  (*i.e.*, MP). Nous avons préalablement défini le support du vecteur de décomposition parcimonieuse comme le vecteur formé par les indices des colonnes du dictionnaire impliquées dans la génération du vecteur  $\mathbf{y}$ . Soit  $\mathbf{x}(\mathbf{s})$  le vecteur de coefficients mis à jour tenant compte du vecteur  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{r}(\mathbf{s}) \triangleq \mathbf{r}(\mathbf{x}(\mathbf{s}), \mathbf{s})$  l'erreur résiduelle correspondante. L'étape de mise à jour du vecteur support peut ainsi s'écrire comme suit :

$$\hat{\mathbf{s}}^{(n)} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{(n-1)}} \|\mathbf{r}(\mathbf{s})\|_2^2 \quad (12)$$

où  $\mathcal{S}^{(n-1)}$  représente l'ensemble des atomes candidats pour la mise à jour du support.

Selon la construction de l'ensemble  $\mathcal{S}^{(n)}$ , nous identifions trois familles de procédures : les algorithmes *forward*, *backward*, et *forward-backward*. La première met à jour le support par l'ajout des nouveaux atomes. Si les algorithmes MP et OMP cités auparavant choisissent **un seul** atome par itération, des variantes modifiées de type stagewise ont été proposées, qui permettent la sélection de *plusieurs* atomes à la fois (*e.g.*, StOMP). A l'encontre de ce paradigme, la famille *backward* (revisitée récemment dans Couvreur et Bresler [2000])

propose de démarrer avec une estimée du support comprenant tous les atomes, pour ensuite enlever de manière itérative les moins appropriés. Peu adaptée aux dictionnaires redondants, elle présente un faible intérêt pour la TomoPIV. La dernière classe, celle des algorithmes hybrides *forward-backward*, permet la sélection et la désélection de nouveaux atomes. L'implémentation des deux sous-étapes de façon alternée, généralement sous un paradigme de tests d'hypothèses, permet ainsi de rendre la correction des erreurs possible : une fois que l'on a sélectionné (resp. désélectionné) un atome faux (resp. correct), il sera encore possible de l'enlever (resp. rajouter). Nous citons l'algorithme SP parmi les procédures récentes les plus efficaces de l'état de l'art. L'observation selon laquelle les *algorithmes gloutons bayésiens* se retrouvent dans la classe des procédures hybrides s'impose. En effet, de part de leur architecture, ces derniers implémentent les deux sous-étapes de façon naturelle, sans passer par des heuristiques additionnelles de désélection d'atomes.

## 5. Résultats des simulations

Dans cette section, nous étudions les performances des algorithmes de faible complexité pour un système de TomoPIV. Plus précisément, nous comparons la méthode algébrique MART avec des algorithmes issus des trois familles de procédures pour la reconstruction d'un vecteur parcimonieux (cf. section 4) selon deux critères : le pourcentage d'énergie récupérée par les particules reconstruites et le temps de calcul moyen nécessaire à l'estimation d'une particule. Nous divisons un cuboïde de taille  $90 \times 22.5 \times 90 \text{ mm}$  en une grille cartésienne de  $15 \times 4 \times 15$  voxels, dans laquelle nous plaçons, de manière aléatoire, un nombre croissant de particules allant de 10 à 300. Nous faisons une procédure de réduction de dimensionnalité qui consiste à éliminer du vecteur d'observation les pixels qui n'interagissent avec aucun voxel, suite à laquelle nous obtenons un dictionnaire de dimension  $444 \times 900$ . La valeur de l'ensemencement varie entre 0.09 et 0.34 *ppv* (*particles per voxel*). Pour chacune de ces valeurs, nous effectuons 500 expériences, moyennées par la suite. Nous configurons la position du cuboïde  $\mathcal{V}$  de manière à ce qu'il satisfasse la contrainte optimale de visibilité (Tarabanis et Tsai [1992]). Trois caméras de  $16 \times 16$  pixels mesurent le volume, dont les axes optiques font un angle avec la perpendiculaire sur la surface du volume de  $-30^\circ, 0^\circ, 30^\circ$ . La distance focale choisie est de 2.1 *mm*. Nous définissons l'origine du repère du monde dans le centre du cuboïde. Les centres optiques des caméras exprimés dans ce repère seront reculés selon les vecteurs  $[0 - 150 0]^t, [-80 - 136 0]^t, [80 - 136 0]^t$ . Les observations sont générées conformément au modèle (7). La projection est réalisée en approximant chaque voxel par  $3 \times 3 \times 3$  sous-voxels.

Nous remarquons que l'on a un gain en temps de calcul d'un facteur moyen de 10 à 100 entre MART et les algorithmes de poursuite (GMF, LGB) et les algorithmes gloutons (OMP, BOMP, KBOMP, BSP). On remarque cependant que, pendant que OMP et son homologue bayésien améliore de peu les performances en temps réalisées BP, les procédures KBOMP et BSP se distinguent par une complexité très faible. Concernant les performances des algorithmes en terme du pourcentage de l'énergie récupérée, nous remarquons des pertes de jusqu'à 10% pour les algorithmes gloutons, lorsque l'ensemencement est assez faible, qui peuvent augmenter jusqu'à 30% à 40% dès que l'on agrandi le nombre de particules dans le volume. Ceci traduit le compromis réalisé par les algorithmes gloutons par rapport aux procédures de poursuite en terme de complexité. L'énergie récupérée par MART est constamment en dessous de l'énergie récupérée par les algorithmes de représentation parcimonieuse.

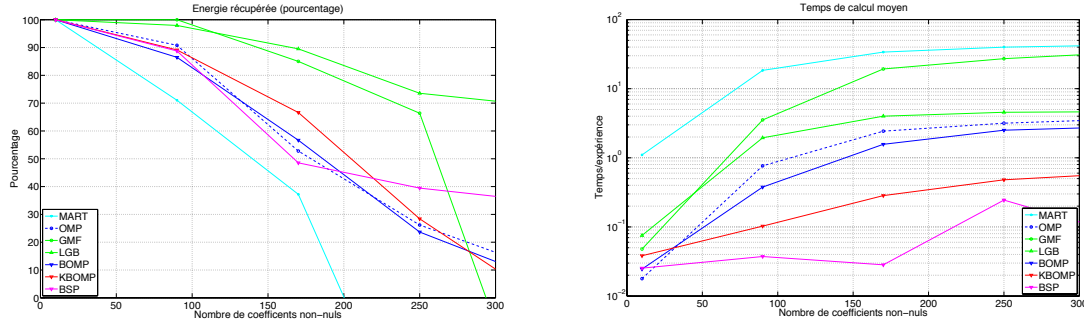


Fig. 2: Performances en reconstruction obtenues par différents algorithmes et complexités correspondantes.

## 6. Conclusions

Nous avons testé les performances des algorithmes de représentation parcimonieuse dans un contexte de Tomographie-PIV. Nous retenons que, pour une plage de valeurs basses en concentration de particules, les algorithmes gloutons ont des performances comparables à celles des algorithmes de poursuite, avec une complexité très réduite. L'efficacité des algorithmes pour la représentation parcimonieuse est généralement supérieure à celle de MART en terme de temps de calcul et du pourcentage de l'énergie récupérée. Cependant, ces résultats ont été obtenus sur des signaux générés synthétiquement selon **une certaine configuration**. Testés dans divers scénarios, ils peuvent varier pour une résolution spatiale différente, ainsi que pour un nombre supérieur de caméras.

### A Implémentation de (5)

La mise en œuvre de (6) nécessite l'évaluation numérique de (5). Nous adoptons une approche sous-voxelique, inspirée par (Thomas et al. [2010]). Cette dernière porte sur la sous-division d'un voxel  $\zeta_j$  dans un nombre de sous-voxels cubiques  $\chi_{k,j} \subset \zeta_j$  avec  $k = 1, \dots, n_{sv}$  tel que :

$$\bigcup_{k=1}^{n_{sv}} \chi_{k,j} = \zeta_j, \quad \bigcap_{k=1}^{n_{sv}} \chi_{k,j} = \emptyset. \quad (\text{A.1})$$

Nous utilisons cette définition afin de réécrire (5) comme suit :

$$d_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\zeta_j)} \sum_{k=1}^{n_{sv}} \int_{\Omega_i \cap \chi_{k,j}} 1 dz. \quad (\text{A.2})$$

Nous faisons ensuite appel à l'approximation selon laquelle

$$\int_{\Omega_i \cap \chi_{k,j}} 1 dz \cong \frac{\text{vol}(\zeta_j)}{n_{sv}}, \quad (\text{A.3})$$

si la droite de vue joignant le centre de  $\chi_{k,j}$  au centre optique  $O_C$  intersecte le  $i^{\text{ème}}$  pixel et  $\int_{\Omega_i \cap \chi_{k,j}} 1 dz = 0$  sinon. Notons que cette approximation revient à dire que le sous-voxel  $\chi_{k,j}$  est soit totalement exclus, soit totalement inclus dans le cône de lumière  $\Omega_i$ . Soit  $n_{ij}$  le nombre de sous-voxels satisfaisant (A.3), nous obtenons finalement :

$$d_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{sv}}. \quad (\text{A.4})$$

## Références

Censor Y.A., Zenios S. A., [1997] *Parallel Optimization*, Oxford University Press.

Chen S., Donoho D. L., Saunders M. A., [1998] *Atomic Decomposition by Basis Pursuit*, SIAM Journal on Scientific Computing, 20(1):33–61.



Couvreur C., Bresler Y., [2000] *On the Optimality of the Backward Greedy Algorithm for the Subset Selection Problem*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 21, pages 797-808.

Dai W., Milenkovic O., [2008] *Subspace Pursuit for Compressive Sensing: Closing the Gap Between Performance and Complexity*, CoRR, abs/0803.0811.

Donoho D. L., Tsaig Y., [2006] *Sparse Solution of Underdetermined Linear Equations*, Stagewise Orthogonal Matching Pursuit, Technical report.

Elsinga G., Scarano F., Wieneke B., van Oudheusden B., [2006] *Tomographic particle image velocimetry*, Experiments in Fluids, 41(6):933–947.

J.-J. Fuchs, [2001] *On the application of the global matched filter to DOA estimation with uniform circular arrays*, IEEE Trans. Signal Process, 49(4):702–709.

Gordon R., Bender R., Herman G. T., [1970] *Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photographie*, pages 471–481, Number 29.

Gorodnitsky I. F., Rao B. D., [1997] *Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: a re-weighted minimum norm algorithm*, Signal Processing, IEEE, 45(3):600–616 (March).

Herzet C., Drémeau A., [2010] *Bayesian Pursuit Algorithms*, In Proc. European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Aalborg, Denmark (August 2010).

Mallat S., Zhang Z., [1993] *Matching Pursuit With Time-Frequency Dictionaries*. IEEE Transactions on Signal Processing, 41:3397–3415.

Pati Y. C., Rezaiifar R., Krishnaprasad P. S., [1993] *Orthogonal Matching Pursuit: Recursive Function Approximation with Applications to Wavelet Decomposition*, In Proc. of the 27 th Annual Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, pages 40–44.

Petra S., Schnörr C., [2009] *TomoPIV meets Compressed Sensing*, Pure Math. Appl., 20(1-2):49 – 76.

Petra S., Schröder A., Schnörr C., [2009] *3D Tomography from Few Projections in Experimental Fluid Mechanics*. In Nitsche, W. and Dobriloff, C., editor, Imaging Measurement Methods for Flow Analysis, volume 106 of Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, pages 63–72, Springer.

Petra S., Schröder A., Wieneke B., Schnörr C., [2008] *On Sparsity Maximization in Tomographic Particle Image Reconstruction*. In Proceedings of the 30th DAGM symposium on Pattern Recognition, pages 294–303, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.

Tarabanis K., Tsai R. Y., [1992] *Computing Viewpoints that Satisfy Optical Constraints*. In Wolff, Lawrence B. and Shafer, Steven A. and Healey, Glenn, editor, Radiometry, pages 399– 406. Jones and Bartlett Publishers, Inc.

Thomas L., Tremblais B., David L., [2010] *Influence des paramètres de reconstruction sur la qualité des résultats de tomo-PIV*. In Congrès Francophone de Techniques Laser, CTFL, Vandoeuvre-lès-Nancy (14-17 septembre).

Yin W., Osher S., Goldfarb D., Darbon J., [2008] *Bregman Iterative Algorithms for  $l_1$ - Minimization with Applications to Compressed Sensing*. SIAM J. Imaging Sci, 1:143–168.