



HAL
open science

Une méthode d'échantillonnage linéaire dans le domaine temporel : le cas des obstacles de type Robin-Fourier

Housseem Haddar, Armin Lechleiter, Simon Marmorat

► To cite this version:

Housseem Haddar, Armin Lechleiter, Simon Marmorat. Une méthode d'échantillonnage linéaire dans le domaine temporel : le cas des obstacles de type Robin-Fourier. [Rapport de recherche] RR-7835, 2011, pp.40. hal-00651301v2

HAL Id: hal-00651301

<https://inria.hal.science/hal-00651301v2>

Submitted on 13 Dec 2011 (v2), last revised 22 Oct 2012 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Une méthode d'échantillonnage linéaire dans le
domaine temporel : le cas des obstacles de type
Robin-Fourier*

Houssem Haddar — Armin Lechleiter — Simon Marmorat

N° 7835

Décembre 2011

Thème NUM

*R*apport
de recherche

Une méthode d'échantillonnage linéaire dans le domaine temporel : le cas des obstacles de type Robin-Fourier

Housseem Haddar^{*}, Armin Lechleiter[†], Simon Marmorat[‡]

Thème NUM — Systèmes numériques
Équipe-Projet DeFI

Rapport de recherche n° 7835 — Décembre 2011 — 40 pages

Résumé : L'objectif du travail présenté ici est l'analyse et la mise en place numérique d'une méthode d'échantillonnage linéaire (*linear sampling method*), permettant de résoudre le problème de diffraction inverse suivant : à partir de mesures dans le domaine temporel d'ondes diffractées causales, retrouver la forme et la position de l'obstacle diffractant. Nous avons pour objectif d'étendre le travail effectué dans [3] au cas où l'on soumet le bord de l'obstacle à une condition de type Robin-Fourier. Le cadre de travail est également étendu au cas où les ondes incidentes ont un spectre significatif borné. Sur le plan numérique, nous proposons une méthode permettant de reconstruire avec la même précision des obstacles avec des conditions mixtes, de type Dirichlet, Neumann ou Robin-Fourier.

Mots-clés : problème de diffraction direct et inverse, méthode d'échantillonnage, domaine temporel

^{*} INRIA Saclay Ile de France and Ecole Polytechnique (CMAP).

[†] Center for Industrial Mathematics, University of Bremen, Bremen, Germany.

[‡] INRIA Rocquencourt, équipe projet POEMS.

A linear sampling method in the time domain : the case of Robin-Fourier obstacles

Abstract: We present the analysis and the implementation of a linear sampling method to solve the following inverse scattering problem: from time domain measurements of scattered waves, find the shape and the position of the scatterer. Our first aim is to extend the analysis for Dirichlet obstacles described in [3] to the case of Robin-Fourier scatterers. Second, we extend the analysis of that reference to incident waves with limited bandwidth. Finally we introduce a method for the reconstruction of obstacles with mixed boundary conditions.

Key-words: direct and inverse scattering problem, linear sampling method, time domain

1 Introduction

Ce rapport présente l'étude et le développement numérique d'une méthode d'échantillonnage linéaire (*linear sampling method*), permettant de résoudre un problème de diffraction inverse. Le cadre est le suivant (voir figure 1) : sur une surface $\Gamma_i \subset \mathbb{R}^3$ sont disposés des points sources. Les ondes incidentes émises depuis Γ_i viennent éclairer un obstacle diffractant Ω_- . Le champ diffracté par Ω_- est alors enregistré sur une surface de réception Γ_m .

Le problème inverse que nous cherchons à résoudre est alors : à partir de la connaissance du champ diffracté mesuré sur Γ_m , pour plusieurs ondes incidentes émises depuis Γ_i , retrouver la forme et la position de Ω_- (reconstruire Ω_-).

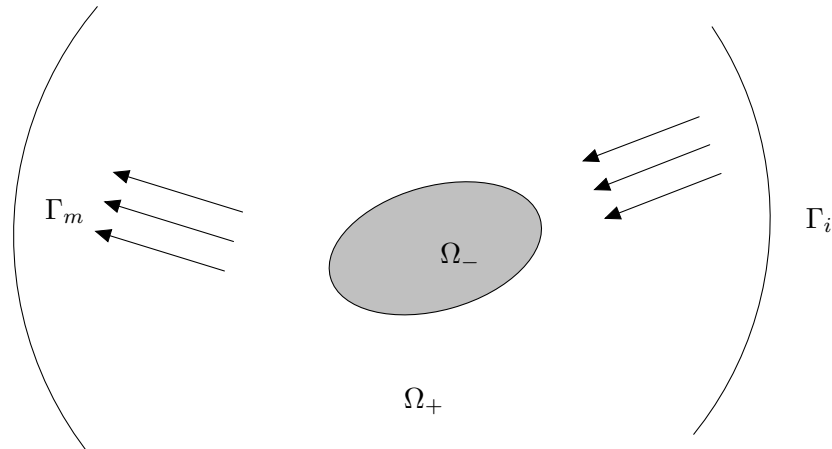


FIGURE 1 – Géométrie du problème de diffraction : l'obstacle Ω_- est éclairé par des ondes émises depuis Γ_i . Le champ diffracté par Ω_- est enregistré par des récepteurs disposés sur Γ_m .

Il existe de nombreuses méthodes pour traiter ce type de problème dans le domaine fréquentiel. Entre autres, nous citons la *linear sampling method* et la méthode de factorisation [10, 5]. Dans [3] est développée une *linear sampling method* dans le domaine temporel, présentant un algorithme de résolution du problème dans le cas où l'obstacle Ω_- est soumis à une condition de Dirichlet et au cas où les ondes incidentes contiennent uniformément toutes les fréquences.

Nous avons étendu ce travail au cas où Ω_- est soumis à une condition de type Robin-Fourier de la forme

$$\partial_\nu u - \alpha(x)\partial_t u = 0,$$

dans un cadre plus général que celui présenté dans [3], qui nous permet de modéliser de manière plus réaliste les ondes incidentes.

Si les méthodes d'échantillonnage linéaire s'avèrent être performantes dans le domaine fréquentiel, dans les applications, les données sont généralement obtenues dans le domaine temporel, ce qui nécessite d'effectuer une transformation de Fourier et de travailler à une fréquence *ad-hoc* (celle-ci dépendant notamment du dimensionnement du problème, inconnu *a priori*). Un des avantages de la méthode développée dans [3] vient du fait qu'elle ne nécessite pas d'effectuer de transformée de Fourier, et agit directement sur les données dans le domaine temporel. Ceci permet de passer outre la question de la fréquence centrale du problème, et permet de plus de travailler avec un plus petit nombre d'émetteurs et récepteurs qu'avec les méthodes d'échantillonnage linéaire dans le domaine fréquentiel.

Ce type d'algorithme présente de nombreuses applications. Nous pouvons par exemple citer l'imagerie sismique (détection de puits de pétrole, de nappes phréatiques) : on peut imaginer un ensemble d'émetteurs/récepteurs disposés à la surface du sol, avec $\Gamma_i = \Gamma_m$ par exemple, chaque émetteur faisant vibrer le sous-sol à tour de rôle, pendant que les récepteurs enregistrent le signal renvoyé par le sol. L'objectif est alors de cartographier le sous-sol.

Présentons maintenant la position du problème. Nous étudions l'onde diffractée par un obstacle soumis à une condition de type Robin. Nous nous donnons un ouvert $\Omega_+ \subset \mathbb{R}^3$, définissant le domaine extérieur d'un ouvert borné $\Omega_- = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_+}$, de frontière $\Gamma = \partial\Omega_+ = \partial\Omega_-$, ainsi qu'une fonction $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$. Nous supposons que Ω_+ est connexe (c'est-à-dire que l'obstacle Ω_- est "plein"), et que son bord Γ est lipschitzien. En notant δ la masse de Dirac en 0, il est connu (voir par exemple [17]) que

$$k(t, x) = \frac{\delta(t - |x|)}{4\pi|x|}$$

est une solution fondamentale de l'équation des ondes dans \mathbb{R}^3 . Ainsi, pour $(\tau, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Gamma_i$, $k(\cdot - \tau, \cdot - y)$ est solution du problème

$$\partial_{tt}f(t, x) - \Delta f(t, x) = \delta(t - \tau)\delta(x - y), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

Nous notons alors $u^t(\cdot; \tau, y)$ le champ total associé à une source ponctuelle $k(\cdot - \tau, \cdot - y)$, définie comme la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_{tt}u^t(t, x) - \Delta u^t(t, x) = \delta(t - \tau)\delta(x - y), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_+, \\ u^t(t, x) = 0, & t \leq 0, x \in \Omega_+, \\ \partial_\nu u^t(t, x) - \alpha(x)\partial_t u^t(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma, \end{cases}$$

où ν est le vecteur sortant unitaire normal à Γ et $\partial_\nu := \nu \cdot \nabla$ est l'opérateur de dérivée normale. Le champ diffracté $u(\cdot; \tau, y)$ par l'obstacle Ω_- est la différence entre le champ total et le champ incident. Ainsi $u(\cdot; \tau, y) = u^t(\cdot; \tau, y) - k(\cdot - \tau, \cdot - y)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_+, \\ u(t, x) = 0, & t \leq 0, x \in \Omega_+, \\ \partial_\nu u(t, x) - \alpha(x)\partial_t u(t, x) = -(\partial_\nu - \alpha(x)\partial_t)k(t - \tau, x - y), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma. \end{cases}$$

La linéarité de l'équation des ondes associée au principe de superposition montre qu'une superposition de points sources engendre une superposition des champs diffractés. Nous introduisons, formellement pour le moment, le potentiel retardé de simple couche sur Γ_i

$$(L_{\Gamma_i}\psi)(t, x) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_i} k(t - \tau, x - y)\psi(\tau, y)dyd\tau, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_i), \quad (1)$$

où ψ est une densité définie sur $\mathbb{R} \times \Gamma_i$, nulle pour $t < 0$. Le champ diffracté associé au champ incident $L_{\Gamma_i}\psi$ est alors

$$u_\psi(t, x) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_i} u(t, x; \tau, y) \psi(\tau, y) dy d\tau.$$

Nous étudions le potentiel de simple couche et d'autres opérateurs du même type dans la section 2.2.

La difficulté, dans ce contexte, est l'aspect "idéal" de ce type de champ incident, correspondant à une superposition de points sources, difficile à obtenir en pratique. En effet, dans les applications, les signaux temporels s'apparentent plutôt à des fonctions C^∞ à support compact qu'à des impulsions de Dirac, de la forme (1). Une situation plus réaliste est donc celle d'une source ponctuelle émettant un signal lisse : nous régularisons l'onde incidente, en effectuant une convolution en temps par une fonction χ régulière.

Soit donc $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ une fonction C^∞ à support compact non identiquement nulle. Nous éclairons l'objet diffractant avec une onde incidente de la forme

$$(L_{\Gamma_i}^\chi \psi)(t, x) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_i} k^\chi(t - \tau, x - y) \psi(\tau, y) dy d\tau, \quad (2)$$

où k^χ est la convolution en temps de la solution fondamentale de l'équation des ondes k par la fonction χ

$$k^\chi(t, x) := \int_{\mathbb{R}} k(t - \tau, x) \chi(\tau) d\tau = \frac{\chi(t - |x|)}{4\pi|x|}.$$

Il convient de bien noter l'analogie de la définition (2) avec (1), la différence étant que le noyau de convolution k^χ est plus régulier que k . La fonction k^χ vérifie

$$\partial_{tt} k^\chi(t, x) - \Delta k^\chi(t, x) = \chi(t) \delta(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

En raison du caractère C^∞ de χ , la transformée de Fourier $\widehat{\chi}$ de χ vérifie

$$\widehat{\chi}(\omega) \underset{\omega \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{\omega^p}\right), \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

ce qui fournit le caractère "localisé" en fréquence recherché.

Par ailleurs, la structure de convolution sous-jacente nous permet d'écrire, au moins formellement

$$L_{\Gamma_i}^\chi \psi = \chi * (L_{\Gamma_i} \psi).$$

De plus, notons que k^χ est une fonction causale : $k^\chi(t, x) = 0$ si $t < 0$. Ainsi, le champ diffracté u par l'obstacle Ω_- sous l'éclairage de $L_{\Gamma_i}^\chi \varphi$ est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_+, \\ u(t, x) = 0, & t \leq 0, x \in \Omega_+, \\ \partial_\nu u(t, x) - \alpha(x) \partial_t u(t, x) = g(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma, \end{cases} \quad (3)$$

où nous avons noté $g(t, x) := -(\partial_\nu - \alpha(x) \partial_t)(L_{\Gamma_i}^\chi \psi)(t, x)$.

Remarque 1. En utilisant des estimations d'énergie *a priori*, on peut montrer que sous des conditions adéquates sur g , par exemple $g \in C^1(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma))$, il existe une unique solution forte $u \in C^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega_+)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega_+))$ au problème (3). Dans le même ordre d'idée, on peut montrer que si $g \in H_\sigma^1(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma))$, alors (3) admet une unique solution $u \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega_+)) \cap H_\sigma^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega_+))$, comme le montrent le lemme 3 et la proposition 14, les espaces de Sobolev à poids exponentiels H_σ^p étant définis dans la section 2.1. Nous renvoyons à [7, 9] pour plus de détails.

Nous notons $u(\cdot; y)$ le champ diffracté associé à une source ponctuelle située en $y \in \Gamma_i$ émettant un signal lisse, c'est-à-dire la solution de (3) pour une donnée g correspondant à un champ incident $(t, x) \mapsto k^\chi(t, x - y)$.

Nous cherchons alors à résoudre le problème inverse suivant : connaissant les quantités

$$u(t, x; y), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in \Gamma_m, \quad \forall y \in \Gamma_i,$$

reconstruire l'obstacle Ω_- . Nous notons (P_{inv}) ce problème inverse.

Revenons à notre discussion sur le problème de diffraction (3). Nous supposons que la fonction d'impédance α vérifie

$$\alpha(x) \geq 0, \quad \text{pour presque tout } x \in \Gamma$$

Nous cherchons alors la solution du problème (3) sous la forme d'un potentiel retardé de simple couche sur Γ , c'est-à-dire que nous cherchons la solution u sous la forme

$$u(t, x) = (L_\Gamma \varphi)(t, x) := \int_\Gamma \frac{\varphi(t - |x - y|, y)}{4\pi|x - y|} d\sigma_y$$

pour $t > 0$ et $x \in \Omega_+$. Un tel champ u satisfait toujours l'équation des ondes homogènes sur $\mathbb{R} \times \Omega_+$ (voir la section 2.2). Ainsi u est solution de (3) si, et seulement si u vérifie la condition de Robin

$$\partial_\nu u - \alpha \partial_t u = g.$$

Comme nous le verrons dans la suite, ceci conduit à l'équation intégrale (14) en φ . L'analyse de cette équation intégrale explicite la dépendance linéaire entre la densité φ et la donnée g sur le bord Γ . Le champ diffracté u dépendant linéairement de φ , et la donnée au bord g dépendant linéairement de la densité ψ , nous serons alors en mesure d'étudier la dépendance linéaire entre la trace sur Γ_m du champ diffracté $u|_{\Gamma_m}$ et la densité ψ associée au champ incident :

$$u|_{\Gamma_m} = N\psi.$$

L'opérateur N est communément appelé opérateur de champ proche ou "near field operator" dans la littérature anglophone. L'analyse de N est fondamentale dans notre méthode de résolution du problème inverse. Notons que, par une nouvelle application du principe de superposition, nous avons

$$N\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_i} u(t - \tau, x; y) \psi(\tau, y) d\tau dy,$$

où, à nouveau, $u(\cdot; y)$ est le champ diffracté associé à une source ponctuelle située en $y \in \Gamma_i$, émettant le signal temporel χ .

Comme nous l'avons déjà signalé, il existe des méthodes performantes pour résoudre le problème (P_{inv}) dans le domaine fréquentiel, à fréquence fixée. Ainsi, le problème inverse dans le domaine temporel est sur-déterminé, puisque, moralement, nous disposons de données pour toutes les fréquences. Ceci dit, dans certaines applications, les données du problème inverse (l'opérateur de champ proche) sont effectivement obtenues directement dans le domaine temporel, et il est intéressant de montrer comment travailler directement avec celles-ci, sans phase de pré-traitement (transformation de Fourier par exemple).

L'idée générale des méthodes d'échantillonnage linéaire est de construire une image du milieu de propagation des ondes : à un point $z \in \mathbb{R}^3$, nous souhaitons associer une quantité $f(z) \in \mathbb{R}^+$, telle que, par exemple

$$\begin{cases} f(z) > 0 & \text{si } z \in \Omega_-, \\ f(z) = 0 & \text{si } z \notin \Omega_-. \end{cases}$$

Comme nous le verrons dans la section 3, la construction d'une telle quantité $f(z)$ est possible en utilisant certaines propriétés de N . L'idée est la suivante : pour $z \in \mathbb{R}^3$, nous considérons l'onde $\phi_z = k^\chi(\cdot, \cdot - z)$ émise par un point source situé en z émettant le signal temporel χ . Nous construisons une solution approchée g_z de l'équation $Ng = \phi_z$ telle que les lignes de niveau de $z \mapsto 1/\|g_z\|$ permettent de visualiser l'obstacle.

Nous montrons également qu'il est possible de construire une quantité $f(z)$ comme ci-dessus permettant de reconstruire des obstacles avec des conditions mixtes, parmi les conditions de Dirichlet $u = 0$, Neumann $\partial_\nu u = 0$ et Robin/Fourier $(\partial_\nu - \alpha \partial_t)u = 0$, et ce avec une précision comparable.

Ce rapport est organisé de la façon suivante :

- Dans la section 2, nous introduisons le cadre fonctionnel et les opérateurs retardés de simple et double couche, sur lesquels est basée notre analyse. Nous étudions en détail les problèmes de diffraction tels que (3), et nous donnons les propriétés du problème direct.
- Dans la section 3, nous introduisons l'opérateur de champ proche N et nous explicitons notre méthode de reconstruction de l'obstacle.
- Enfin, dans la section 4, nous donnons des exemples numériques de notre méthode. Nous présentons également la faculté de notre algorithme à reconstruire des obstacles avec conditions mixtes.

2 Le problème direct

Dans un premier temps, nous introduisons le cadre théorique (les espaces de Sobolev à poids, la transformée de Laplace et les potentiels de simple/double couche) qui nous permettra dans un deuxième temps d'étudier le problème de diffraction (3).

2.1 Le cadre fonctionnel

Nous introduisons le cadre fonctionnel nous permettant d'utiliser la transformée de Laplace, qui constitue un outil pertinent pour notre étude. Dans cette section, nous résumons rapidement la présentation complète faite dans [17, Section 39] de la notion de transformée de Laplace d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ où X est un espace de Hilbert. Soit donc X un espace de Hilbert, nous notons $D'(X)$ l'ensemble des distributions sur \mathbb{R} à valeurs dans X . Nous notons également $S'(X)$ l'ensemble des distributions tempérées, $S'(X)$ étant l'espace naturel pour définir la transformée de Fourier d'une distribution [15]. Finalement, nous pouvons introduire les ensembles de distributions "Laplace-transformables"

$$L'(X) = \{f \in D'(X) / \exists \sigma = \sigma(f) \in \mathbb{R} \text{ tel que } e^{-\sigma t} f \in S'(X)\}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nous notons $\mathbb{C}_\lambda = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im } z > \lambda\}$. Pour $f \in L'(X)$, la transformée de Laplace de f est définie par

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t) dt \in X, \quad \omega \in \mathbb{C}_{\sigma(f)}.$$

Nous noterons indifféremment par \widehat{f} ou $\mathcal{L}(f)$ la transformée de Laplace de f .

Définition 2. Pour $p \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$, nous introduisons l'espace de Sobolev à poids

$$H_\sigma^p(\mathbb{R}, X) := \left\{ f \in L'(X), \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} |\omega|^{2p} \|\widehat{f}(\omega)\|_X^2 d\omega < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H_\sigma^p(\mathbb{R}, X)} = \left(\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} |\omega|^{2p} \|\widehat{f}(\omega)\|_X^2 d\omega \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Quand p est entier, nous pouvons définir de manière équivalente ces espaces par

$$H_\sigma^p(\mathbb{R}, X) := \left\{ f \in L'(X), e^{-\sigma t} f^{(l)}(t) \in L^2(\mathbb{R}, X), \text{ pour } 0 \leq l \leq p \right\},$$

munis de la norme

$$\left(\sum_{l=0}^p \|e^{-\sigma t} f^{(l)}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}, X)}^2 \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Les normes définies par (4) et (5) sont alors équivalentes.

L'outil clé est le lemme suivant (voir [3]), qui permet d'exprimer dans le domaine temporel un résultat de régularité obtenu dans le domaine de Laplace.

Lemme 3 ([3]). Soient X, Y deux espaces de Hilbert. Notons $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés $X \rightarrow Y$. Soit $\widehat{A} : \mathbb{C}_{\sigma_0} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ une fonction analytique. Posons

$$a(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} e^{-i\omega t} \widehat{A}(\omega) d\omega, \quad \forall \sigma > \sigma_0 > 0$$

la transformation de Laplace inverse de \widehat{A} et soit

$$A : g \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} a(t)g(\cdot - t)dt$$

l'opérateur de convolution associé, défini pour $g \in C^\infty(\mathbb{R}, X)$. S'il existe $r \in \mathbb{R}$ et $C > 0$ tels que $\|\widehat{A}(\omega)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C|\omega|^r$, pour tout $\omega \in \mathbb{C}_{\sigma_0}$, alors A admet une extension linéaire continue de $H_\sigma^{p+r}(\mathbb{R}, X)$ dans $H_\sigma^p(\mathbb{R}, Y)$, pour tout $p \in \mathbb{R}$ et pour tout $\sigma > \sigma_0$.

Nous disposons également du résultat d'injection suivant :

Lemme 4. Si $p_1 < p_2$ et $\sigma \in \mathbb{R}$, alors

$$H_\sigma^{p_2}(\mathbb{R}, X) \hookrightarrow H_\sigma^{p_1}(\mathbb{R}, X)$$

avec injection dense.

2.2 Les potentiels de simple et double couche

Nous introduisons ici les potentiels retardés de simple et double couche, qui permettent d'étudier précisément les problèmes de diffraction. En effet, l'étude de problèmes avec donnée au bord tels que (3) peut se ramener à l'étude d'une équation intégrale. Pour ce faire, nous représentons l'inconnue u du problème aux limites comme le potentiel de simple couche sur Γ d'une densité φ . Intuitivement, ceci correspond simplement à considérer u comme l'onde générée par une superposition continue de points sources disposés sur Γ , pondérés par la densité φ . Le problème est alors de savoir quelle densité φ sur le bord fournit la solution u qui vérifie la condition au bord.

Les potentiels de simple et double couche interviennent naturellement quand il s'agit de représenter une solution de l'équation des ondes homogènes, à partir de la solution fondamentale

$$k(t, x) = \frac{\delta(t - |x|)}{4\pi|x|}$$

et de la formule de Green.

En effet, notons u une solution de l'équation des ondes homogènes dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, égale à u^+ sur $\mathbb{R} \times \Omega_+$ et à u^- sur $\mathbb{R} \times \Omega_-$, u^+ et u^- étant deux solutions de l'équation des ondes dans $\mathbb{R} \times \Omega_+$ et $\mathbb{R} \times \Omega_-$ respectivement. Alors u admet la représentation intégrale suivante [16]

$$u(t, x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\nu_y} \left(\frac{\varphi(t - |x - y|, y)}{|x - y|} \right) d\sigma_y + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\psi(t - |x - y|, y)}{|x - y|} d\sigma_y \quad (6)$$

pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, où

$$\varphi = u^+ - u^-, \quad \psi = \partial_\nu u^+ - \partial_\nu u^- \text{ sur } \mathbb{R} \times \Gamma,$$

ν_y étant le vecteur unitaire sortant normal à Γ passant par y , et ∂_ν désigne l'opérateur de dérivée normale sur Γ .

Réciproquement, chaque terme du membre de droite de (6) définit une solution de l'équation des ondes homogènes dans $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$. Pour une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ régulière (par exemple dans $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Gamma)$), nous définissons, le potentiel retardé de simple couche sur Γ par

$$(L_\Gamma \varphi)(t, x) := \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t - |x - y|, y)}{4\pi|x - y|} d\sigma_y \quad (7)$$

et le potentiel retardé de double couche sur Γ par

$$(D_\Gamma \varphi)(t, x) := \int_\Gamma \partial_{\nu_y} \left(\frac{\varphi(t - |x - y|, y)}{4\pi|x - y|} \right) d\sigma_y \quad (8)$$

pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$. Quand cela ne porte pas à confusion, nous omettons les indices désignant les surfaces caractérisant les potentiels retardés de simple/double couche.

Nous introduisons également les opérateurs frontières associés aux potentiels retardés de simple et double couche. Ces opérateurs nous permettront d'étudier le comportement des intégrales (7) et (8) quand $d(x, \Gamma) \rightarrow 0$. Nous introduisons les opérateurs S et K de la manière suivante

$$(S\varphi)(t, x) = \int_\Gamma \frac{\varphi(t - |x - y|, y)}{4\pi|x - y|} d\sigma_y \quad (9)$$

et

$$(K\varphi)(t, x) = \int_\Gamma \partial_{\nu_x} \left(\frac{\varphi(t - |x - y|, y)}{4\pi|x - y|} \right) d\sigma_y \quad (10)$$

pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma$, et pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \Gamma)$.

Les opérateurs introduits ci-dessus sont des opérateurs de convolution en temps. Ceci peut-être observé en utilisant la transformée de Laplace. En effet, si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \Gamma)$, nous avons pour $\omega \in \mathbb{C}_{\sigma(\varphi)}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ et $z \in \Gamma$

$$\widehat{L}\varphi(\omega, x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} \widehat{\varphi}(\omega, y) d\sigma_y =: \widehat{L}_\omega \widehat{\varphi}(\omega, x),$$

$$\widehat{D}\varphi(\omega, x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \partial_{\nu_y} \left(\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} \widehat{\varphi}(\omega, y) \right) d\sigma_y =: \widehat{D}_\omega \widehat{\varphi}(\omega, x),$$

$$\widehat{S}\varphi(\omega, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{e^{i\omega|z-y|}}{|z-y|} \widehat{\varphi}(\omega, y) d\sigma_y =: \widehat{S}_\omega \widehat{\varphi}(\omega, z),$$

$$\widehat{K}\varphi(\omega, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \partial_{\nu_x} \left(\frac{e^{i\omega|z-y|}}{|z-y|} \widehat{\varphi}(\omega, y) \right) d\sigma_y =: \widehat{K}_\omega \widehat{\varphi}(\omega, z).$$

Ceci définit, pour φ régulière, les opérateurs \widehat{L} , \widehat{D} , \widehat{S} , \widehat{K} , où nous omettons l'indice ω afin d'alléger les notations. Nous renvoyons à [6, 7] pour plus de détails. Nous donnons maintenant un résultat de régularité pour les opérateurs définis ci-dessus, en utilisant la densité de $C^\infty(\Gamma)$ dans $H^\alpha(\Gamma)$.

Proposition 5 ([11]). *Pour $\omega \in \mathbb{C}_0$, les extensions suivantes des opérateurs \widehat{L} , \widehat{D} , \widehat{S} et \widehat{K} sont bornées*

$$\begin{aligned} \widehat{L}_\omega &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma), \\ \widehat{D}_\omega &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma), \\ \widehat{S}_\omega &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ \widehat{K}_\omega &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

Nous avons alors les relations suivantes sur la frontière Γ

Proposition 6 ([11]). *Pour $\omega \in \mathbb{C}_0$ et $\zeta \in H^{1/2}(\Gamma)$,*

$$\begin{aligned} (\widehat{L}_\omega \zeta)^- &= (\widehat{L}\zeta)^+ = \widehat{S}_\omega \zeta, \\ \partial_\nu(\widehat{L}_\omega \zeta)^- &= \left(\frac{1}{2}I + \widehat{K}_\omega\right) \zeta, \\ \partial_\nu(\widehat{L}_\omega \zeta)^+ &= \left(-\frac{1}{2}I + \widehat{K}_\omega\right) \zeta, \end{aligned} \tag{11}$$

où $(\cdot)^-$ et $(\cdot)^+$ désignent les traces sur Γ selon Ω_- et Ω_+ respectivement.

Nous cherchons maintenant à donner des résultats de régularité pour les potentiels dans le domaine temporel. Pour ce faire, à partir de la proposition 5 qui donne la régularité en espace, nous aurons également besoin du lemme 3. Par ailleurs, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 7. *Il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de Ω_+ et de σ_0 telle que si $\omega \in \mathbb{C}$ vérifie $\text{Im } \omega \geq \sigma_0 > 0$, alors pour tout $u \in H^1(\Omega_+)$ vérifiant $\Delta u + \omega^2 u = 0$ dans Ω_+ , nous avons*

$$\|\partial_\nu u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C|\omega| \left(\|u\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\omega u\|_{L^2(\Omega_+)}\right).$$

Démonstration. Nous pouvons montrer [11, Lemme 4.3] qu'il existe $C > 0$ dépendant uniquement de Ω_+ telle que pour tout $u \in H^1(\Omega_+)$ et tel que $\Delta u \in L^2(\Omega_+)$, nous avons

$$\|\partial_\nu u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \left(\|u\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega_+)}\right).$$

Ici, u vérifie de plus l'équation de Helmholtz, ainsi il vient

$$\begin{aligned} \|\partial_\nu u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &\leq C \left(\|u\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega_+)}\right) \\ &\leq C \left(\|u\|_{H^1(\Omega_+)} + |\omega^2| \|u\|_{L^2(\Omega_+)}\right) \\ &\leq C|\omega| \left(\|u\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\omega u\|_{L^2(\Omega_+)}\right) \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\text{Im } \omega \geq \sigma_0 > 0$, et où la constante C dépend uniquement de la géométrie et de σ_0 . \square

Remarque 8. Le résultat précédent s'adapte à l'identique si l'on remplace Ω_+ par Ω_- partout. Il vient alors

Proposition 9. *Si $p \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, les opérateurs*

$$\begin{aligned} L &: H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma)) \rightarrow H_\sigma^{p-1}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)), \\ S &: H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma)) \rightarrow H_\sigma^{p-1}(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma)), \\ K &: H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma)) \rightarrow H_\sigma^{p-3}(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma)), \end{aligned}$$

sont bornés.

Démonstration. Concernant les opérateurs L et S nous renvoyons à [3, Thm 4]. Pour K , on utilise le lemme 3 : soit $\varphi \in H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$. En utilisant les relations (11), nous avons

$$\widehat{K}\widehat{\phi} = \frac{1}{2}(\partial_\nu(\widehat{L}\widehat{\phi})^- + \partial_\nu(\widehat{L}\widehat{\phi})^+) \text{ sur } \Gamma.$$

En utilisant alors le lemme 7 et la remarque 8, nous avons

$$\|\widehat{K}\widehat{\phi}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C|\omega|^2 \left(\|\widehat{L}\widehat{\phi}\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\widehat{L}\widehat{\phi}\|_{H^1(\Omega_-)}\right) \leq \tilde{C}|\omega|^3 \|\widehat{\phi}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)},$$

ce qui nous permet de conclure. \square

Nous avons alors les relations suivantes sur la frontière Γ , dans le domaine temporel

Proposition 10 ([6, 11]). *Si $p \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $\varphi \in H_\sigma^{p+3}(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$, alors nous avons*

$$\begin{aligned} (L\varphi)^- &= (L\varphi)^+ = S\varphi \text{ dans } H_\sigma^{p+2}(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma)), \\ \partial_\nu(L\varphi)^- &= \left(\frac{1}{2}I + K\right)\varphi \text{ dans } H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma)), \\ \partial_\nu(L\varphi)^+ &= \left(-\frac{1}{2}I + K\right)\varphi \text{ dans } H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma)), \end{aligned} \quad (12)$$

où $(\cdot)^-$ et $(\cdot)^+$ désignent les traces sur Γ selon Ω_- et Ω_+ respectivement.

Notons que les relations (12) sont simplement l'équivalent temporel des relations (11). Remarquons également que les relations (12), de même que la représentation (6) montrent que les potentiels de simple couche sont continus au travers de la frontière Γ , contrairement à leurs dérivées normales. Nous pouvons à présent étudier en détail le problème de diffraction (3).

2.3 Solution du problème de diffraction

Nous étudions le problème consistant à trouver u vérifiant

$$(P^+) \begin{cases} \partial_{tt}u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \Omega_+, \\ \partial_\nu u(t, x) - \alpha(x)\partial_t u(t, x) = g(t, x), & t \in \mathbb{R}, x \in \Gamma, \end{cases}$$

où ν est le vecteur normal unitaire extérieur à Γ et $g = -(\partial_\nu - \alpha\partial_t)L_{\Gamma_i}^\chi \psi$ telle que $g(t, x) = 0$ pour $t \leq 0$ (quitte à modifier l'origine des temps, en utilisant le fait que χ est à support compact), est une fonction donnée sur la frontière. Nous supposons que l'obstacle Ω_- est lipschitzien.

Nous recherchons la solution du problème (P^+) sous la forme d'un potentiel retardé de simple couche sur Γ (voir par exemple [12, 7]), c'est-à-dire sous la forme

$$u(t, x) = (L_\Gamma \varphi)(t, x) := \int_\Gamma \frac{\varphi(t - |x - y|, y)}{4\pi|x - y|} d\sigma_y \quad (13)$$

pour $t > 0$ et $x \in \Omega_+$, où L est l'opérateur de simple couche.

L'équation (13) permet d'étendre $x \mapsto u(t, x)$ sur Ω_- . En utilisant les relations de saut sur la frontière (12), et le fait qu'une fonction u de la forme (13) est solution de l'équation des ondes homogène pour tout φ , nous obtenons que, formellement, u définie par (13) est solution de (P^+) si et seulement si φ satisfait l'équation intégrale suivante

$$\left(-\frac{1}{2}I + K\right)\varphi - \alpha S\partial_t \varphi = g.$$

Plus précisément, dans cette section, nous démontrons le résultat suivant :

Lemme 11. *Soient $p \in \mathbb{R}$, $g \in H_\sigma^{p+4}(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$. Alors $\varphi \in H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$ vérifie*

$$M\varphi := \left(-\frac{1}{2}I + K\right)\varphi - \alpha S\partial_t \varphi = g \quad (14)$$

si et seulement si $u := L_\Gamma \varphi$ vérifie (P^+) . Dans ce cas, $u \in H_\sigma^{p+3}(\mathbb{R}, H^1(\Omega))$.

Remarque 12. Il convient de noter que, dans le lemme 11, si $t \mapsto g(t, \cdot)$ s'annule pour $t < T$, alors il en va de même pour φ solution de (14) et $u = L_\Gamma \varphi$.

L'analyse de l'équation (14) est difficile. En effet, l'opérateur M ne rentre pas dans le cadre des opérateurs Riesz-Fredholm, particulièrement adapté pour les équations intégrales. Pour remédier à cela, nous passons dans le domaine de Laplace pour nous ramener à une équation d'Helmholtz, que nous étudions à l'aide des équivalents fréquentiels des opérateurs de simple et double couche, introduits dans la section 2.2.

Remarque 13. Il est bien sûr possible de chercher la solution de (P^+) sous la forme d'un potentiel de double couche, ou comme une combinaison linéaire d'un potentiel de simple et double couche, en vertu de la représentation (6). Ces différents choix conduisent à des équations intégrales différentes de (14). Les différentes approches sont détaillées dans [7]. Nous avons choisi l'approche la plus simple, qui consiste à chercher u sous la forme d'un potentiel de simple couche.

Il est clair que u est solution de (P^+) si et seulement si (formellement) pour tout $\omega \in \mathbb{C}_\sigma$, $\hat{u}(\omega, \cdot)$ est solution du problème de Helmholtz

$$(P_\omega^+) \begin{cases} (\Delta + \omega^2)\hat{u}(\omega, x) = 0, & x \in \Omega_+, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu}(\omega, x) - i\omega\alpha(x)\hat{u}(\omega, x) = \hat{g}(\omega, x), & x \in \Gamma, \\ \hat{u}(\omega, \cdot) \in H^1(\Omega^+). \end{cases}$$

Dans ce contexte, de par leur structure de convolution, les relations (7) et (14) deviennent dans le domaine de Laplace respectivement

$$\hat{u}(\omega, x) = \int_\Gamma \frac{e^{-i\omega|x-y|}}{4\pi|x-y|} \hat{\varphi}(\omega, y) d\sigma_y = (L_\omega \hat{\varphi})(\omega, x) \quad (15)$$

pour $x \in \Omega_+$ et $\text{Im}(\omega) > \sigma_0$, et

$$\left(-\frac{1}{2}I + \hat{K}_\omega - i\omega\alpha\hat{S}_\omega \right) \hat{\varphi} = \hat{g}. \quad (16)$$

Notre objectif est d'étudier les équations (15) et (16) et d'obtenir des estimations sur leurs solutions, avec des constantes explicites en ω , pour pouvoir revenir dans le domaine temporel et résoudre les équations (7) et (14).

Tout d'abord, montrons que le problème (P_ω^+) est bien posé. Dans la suite de cette section, nous fixons $\omega \in \mathbb{C}_{\sigma_0}$.

Proposition 14. *Si $\hat{g}(\omega, \cdot) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, alors le problème (P_ω^+) admet une unique solution $\hat{u}(\omega, \cdot)$, satisfaisant de plus les estimations*

$$\|\hat{u}(\omega, \cdot)\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C|\omega| \|\hat{g}(\omega, \cdot)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

et

$$\|\hat{u}(\omega, \cdot)\|_{L^2(\Omega_+)} \leq C \|\hat{g}(\omega, \cdot)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)},$$

où C est une constante dépendant uniquement de σ_0 et de Ω_+ .

Démonstration. Notons $\sigma = \text{Im } \omega > 0$ et écrivons la formulation variationnelle associée au problème (P_ω^+) . \hat{u} est solution de (P_ω^+) si et seulement si pour tout $v \in H^1(\Omega_+)$

$$\int_{\Omega_+} [\nabla \hat{u} \cdot \overline{\nabla v} - \omega^2 \hat{u} \bar{v}] - i\omega \int_{\Gamma} \alpha \hat{u} \bar{v} = \langle \hat{g}, v \rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (17)$$

En multipliant cette dernière relation par $i\bar{\omega}$ et en passant à la partie réelle nous obtenons que u est solution de (P_ω^+) si et seulement si $\forall v \in H^1(\Omega_+)$

$$\int_{\Omega_+} \text{Re} (i\bar{\omega} \nabla \hat{u} \cdot \overline{\nabla v} - i\omega |\omega|^2 \hat{u} \bar{v}) + |\omega|^2 \int_{\Gamma} \alpha \text{Re} (\hat{u} \bar{v}) = \text{Re} (i\bar{\omega} \langle \hat{g}, v \rangle).$$

En prenant $v = \hat{u}$, la relation précédente devient

$$\sigma \int_{\Omega_+} [|\nabla \hat{u}|^2 + |\omega|^2 |\hat{u}|^2] + |\omega|^2 \int_{\Gamma} \alpha |\hat{u}|^2 = \text{Re} (i\bar{\omega} \langle \hat{g}, \hat{u} \rangle). \quad (18)$$

Ainsi, si l'on note $A(\hat{u}, v)$ la forme sesquilinéaire à gauche de (17), nous avons la relation de coercivité suivante (rappelons que nous supposons $\alpha \geq 0$ sur Γ)

$$\text{Re} (i\bar{\omega} A(\hat{u}, \hat{u})) \geq \sigma \min(1, \sigma^2) \|\hat{u}\|_{H^1(\Omega_+)}^2.$$

Le théorème de Lax-Milgram nous permet alors de conclure qu'il existe une unique solution $\hat{u}(\omega, \cdot) \in H^1(\Omega_+)$ de (17). La relation (18) nous permet alors de conclure que

$$\sigma \int_{\Omega_+} [|\nabla \hat{u}|^2 + |\omega \hat{u}|^2] \leq C |\omega| \|\hat{g}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Comme $\text{Im } \omega = \sigma \geq \sigma_0 > 0$, on en déduit l'estimation annoncée. \square

Nous constatons donc que si $\hat{g}(\omega, \cdot) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, un terme en $|\omega|$ intervient dans le contrôle de la norme de la solution \hat{u} par la donnée \hat{g} . Lorsque nous reviendrons dans le domaine temporel, ce phénomène se traduira par une perte de régularité en temps entre g et u d'après le lemme 3. Nous montrons dans ce qui suit que la situation s'améliore si l'on impose un peu plus de régularité en espace sur g , et si la fonction d'impédance α est minorée par une constante strictement positive.

Proposition 15. *Si $\hat{g}(\omega, \cdot) \in L^2(\Gamma)$ et si $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ pour presque tout $x \in \Gamma$, alors le problème (P_ω^+) admet une unique solution $\hat{u}(\omega, \cdot)$, satisfaisant de plus l'estimation*

$$\sigma \int_{\Omega_+} [|\nabla \hat{u}|^2 + |\omega \hat{u}|^2] + |\omega|^2 \int_{\Gamma} \left(\alpha - \frac{\alpha_0}{2} \right) |\hat{u}|^2 \leq \frac{1}{2\alpha_0} \|\hat{g}\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

En particulier, les estimations suivantes sont vérifiées

$$\|\hat{u}(\omega, \cdot)\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C \|\hat{g}(\omega, \cdot)\|_{L^2(\Gamma)}$$

et

$$\|\omega \hat{u}(\omega, \cdot)\|_{L^2(\Omega_+)} \leq C \|\hat{g}(\omega, \cdot)\|_{L^2(\Gamma)},$$

où C est une constante dépendant uniquement de σ_0 , de α_0 et de Ω_+ .

Démonstration. Nous repartons alors de la relation (18), en considérant cette fois le produit de dualité $\langle g, v \rangle$ dans $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. Nous obtenons

$$\sigma \int_{\Omega_+} \left[|\nabla \widehat{u}|^2 + |\omega \widehat{u}|^2 \right] + |\omega|^2 \int_{\Gamma} \alpha |\widehat{u}|^2 \leq |\omega| \|\widehat{g}\|_{L^2(\Gamma)} \|\widehat{u}\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (19)$$

Rappelons l'inégalité de Young dite "avec ε " : pour tout $a, b \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, nous avons

$$ab \leq \frac{a^2}{4\varepsilon} + \varepsilon b^2.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha_0 > 1/(4\varepsilon)$. En appliquant l'inégalité de Young avec ε au membre de droite de (19), nous obtenons

$$\sigma \int_{\Omega_+} \left[|\nabla \widehat{u}|^2 + |\omega \widehat{u}|^2 \right] + |\omega|^2 \int_{\Gamma} \alpha |\widehat{u}|^2 \leq \varepsilon \|\widehat{g}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} |\omega|^2 \|\widehat{u}\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Finalement, comme $\alpha(x) \geq \alpha_0 \geq 1/(4\varepsilon)$, nous en déduisons l'estimation annoncée en prenant $\varepsilon = 1/(2\alpha_0)$. \square

Nous notons $\widehat{u} \in H^1(\Omega_+)$ la solution de (P_ω^+) , et nous revenons à l'étude des équations intégrales (15) et (16).

Proposition 16. *L'opérateur $M_\omega := -\frac{1}{2}I + \widehat{K}_\omega - i\omega\alpha\widehat{S}_\omega : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ est inversible.*

Démonstration. L'injectivité de M_ω provient du caractère bien posé du problème (P_ω^+) : si $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ est tel que $M_\omega\varphi = 0$, alors $v = \widehat{L}_\omega\varphi$ est solution du problème P_ω^+ avec une donnée au bord $g = 0$, ce qui implique que $v = 0$ dans $H^1(\Omega_+)$ d'après la proposition 14. Les relations de saut (11) permettent alors de conclure que $\varphi = 0$.

En ce qui concerne la surjectivité, soit $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Soit $v \in H^1(\Omega_+)$ la solution du problème (P_ω^+) de donnée Robin g (en utilisant à nouveau la proposition 14). Il est connu que l'opérateur $\widehat{S}_\omega : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ est inversible (voir par exemple [1, equation (2.7)] ou [11]). Posons alors $\varphi = (\widehat{S}_\omega)^{-1}(v|_\Gamma) \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Nous avons alors $v = \widehat{L}_\omega\varphi$ dans $H^1(\Omega)$ et

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} - i\omega\alpha v = g$$

sur Γ , ce qui montre, en utilisant les relations de saut (12) que

$$\left(-\frac{1}{2}I + \widehat{K}_\omega - i\omega\alpha\widehat{S}_\omega \right) \varphi = g$$

dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Par ailleurs, par continuité de \widehat{S}_ω^{-1} et en utilisant les estimations de la proposition 14, il vient

$$\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)},$$

où $C > 0$ ne dépend que de la géométrie et de ω , fixé ici. \square

Remarque 17. Dans le cas où Γ est de classe $C^{2,\gamma}$ avec $\gamma > 0$, on peut montrer (voir par exemple [5, Thm 3.6]) que \widehat{S}_ω et \widehat{K}_ω sont bornés de $L^2(\Gamma)$ dans $H^1(\Gamma)$. On peut alors montrer que $\widehat{S}_\omega, \widehat{K}_\omega : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ sont compacts, ce qui implique que M_ω est un opérateur de Fredholm. L'injectivité de M_ω suffit alors (par propriété des opérateurs de Fredholm) à établir son inversibilité.

Dans tous les cas, notons $R_\omega : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$

$$R_\omega = \left(-\frac{1}{2}I + \widehat{K}_\omega - i\omega\alpha\widehat{S}_\omega \right)^{-1} = M_\omega^{-1} \quad (20)$$

et $\widehat{\varphi}(\omega, \cdot) = R_\omega\widehat{g}(\omega, \cdot)$. Nous pouvons à présent énoncer les résultats de régularité suivant.

La continuité de l'opérateur de simple couche sur la frontière Γ montre qu'en étendant la définition (15) de \widehat{u} sur Ω_- , $v = \widehat{u}|_{\Omega_-}$ est l'unique solution du problème de Helmholtz intérieur consistant à trouver $v \in H^1(\Omega_-)$ tel que

$$(P_\omega^-) \begin{cases} (\Delta + \omega^2)v = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ v = \widehat{u}^e \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

où, encore une fois, $\widehat{u}^e \in H^{1/2}(\Gamma)$ est la trace de $\widehat{u} \in H^1(\Omega_+)$.

Proposition 18. *Nous avons les estimations suivantes*

$$\|v\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C|\omega|^2 \|\widehat{u}^e\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

et

$$\|v\|_{L^2(\Omega_-)} \leq C|\omega| \|\widehat{u}^e\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

où $C > 0$ est une constante dépendant uniquement de σ_0 et de Ω_- .

Démonstration. L'opérateur de trace "canonique" $\text{tr}_\Gamma : H^1(\Omega_-) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ a pour noyau $H_0^1(\Omega_-)$, on peut donc construire un opérateur de relèvement linéaire, continu et bijectif $r : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_0^1(\Omega_-)^\perp$ tel que

$$\text{tr}(r(f)) = f, \quad \forall f \in H^{1/2}(\Gamma)$$

où

$$H_0^1(\Omega_-)^\perp = \{u \in H^1(\Omega) / (u, \phi)_{H^1(\Omega_-)} := \int_{\Omega_-} \nabla u \cdot \overline{\nabla \phi} + u\bar{\phi} = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega_-)\}.$$

Comme $\widehat{u} \in H^1(\Omega_+)$, la trace de \widehat{u} sur Γ appartient à $H^{1/2}(\Gamma)$. Ainsi il existe un relèvement $w = r(\widehat{u}|_\Gamma) \in H_0^1(\Omega_-)^\perp$ de $\widehat{u}|_\Gamma$ dans Ω_- tel que

$$\|w\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C \|\widehat{u}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad (21)$$

où C ne dépend que de Ω_- . En notant $z = v - w$, il est clair que v est solution de (P_ω^-) si et seulement si z est solution de

$$\begin{cases} (\Delta + \omega^2)z = -(\Delta + \omega^2)w \text{ dans } \Omega_-, \\ z = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (22)$$

En utilisant la même technique que précédemment et en utilisant le fait que $w \in H_0^1(\Omega_-)^\perp$, nous obtenons que $z \in H_0^1(\Omega_-)$ est solution du problème (22) si et seulement si

$$\int_{\Omega_-} \text{Re} (i\overline{w}\nabla z \cdot \overline{\nabla \psi} - i\omega|\omega|^2 z\overline{\psi}) = \int_{\Omega_-} \text{Re} ((i\overline{w} - i\omega|\omega|^2)w\overline{\psi}), \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega_-). \quad (23)$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, le problème (23) admet une unique solution $z \in H_0^1(\Omega_-)$, ce qui garantit donc l'existence d'une unique solution $v \in H^1(\Omega_-)$ au problème (P_w^-) . En prenant alors $\psi = z$ dans l'égalité précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sigma \int_{\Omega_-} [|\nabla z|^2 + |\omega z|^2] &\leq \int_{\Omega_-} (|\omega| + |\omega|^3)|w||z| \\ &\leq (|\omega| + |\omega|^3)\|w\|_{L^2(\Omega_-)}\|z\|_{L^2(\Omega_-)}. \end{aligned}$$

Soient maintenant ε tel que $0 < \varepsilon < \sigma_0$ et λ tel que $0 < \lambda < \sigma_0 - \varepsilon$. En appliquant à nouveau l'inégalité de Young avec λ et ε respectivement aux deux termes de l'inégalité ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} \sigma \int_{\Omega_-} [|\nabla z|^2 + |\omega z|^2] &\leq (|\omega| + |\omega|^3)\|w\|_{L^2(\Omega_-)}\|z\|_{L^2(\Omega_-)} \\ &\leq |\omega|\|w\|_{L^2(\Omega_-)}\|z\|_{L^2(\Omega_-)} + \frac{1}{4\varepsilon}|\omega|^4\|w\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \varepsilon|\omega|^2\|z\|_{L^2(\Omega_-)}^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{4\varepsilon}|\omega|^4 + \frac{1}{4\lambda}\right)\|w\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + (\varepsilon + \lambda)|\omega|^2\|z\|_{L^2(\Omega_-)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\sigma \int_{\Omega_-} |\nabla z|^2 + (\sigma - \varepsilon - \lambda) \int_{\Omega_-} |\omega z|^2 \leq \left(\frac{1}{4\varepsilon}|\omega|^4 + \frac{1}{4\lambda}\right)\|w\|_{L^2(\Omega_-)}^2.$$

En remarquant que ε et λ dépendent uniquement de σ_0 , et en utilisant que $\text{Im } \omega = \sigma \geq \sigma_0 > 0$, nous en déduisons que nous avons une estimation du type

$$\|z\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C|\omega|^2\|w\|_{H^1(\Omega_-)},$$

où C ne dépend que de σ_0 et de Ω_- . L'inégalité (21) fournit finalement

$$\|z\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C|\omega|^2\|\widehat{u}\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

ce qui donne l'estimation annoncée. \square

Remarque 19. – En utilisant [1, Lemme 1], il est en fait possible (en choisissant un autre relèvement de $\widehat{u}|_\Gamma$ dans $H^1(\Omega_-)$) d'économiser une demi-puissance de ω dans les estimations de la proposition 18. C'est-à-dire que les estimations suivantes, plus fines, sont vérifiées

$$\|v\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C|\omega|^{\frac{3}{2}}\|\widehat{u}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

et

$$\|v\|_{L^2(\Omega_-)} \leq C|\omega|^{1/2}\|\widehat{u}\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

où $C > 0$ est une constante dépendant uniquement de σ_0 et de Ω_- . Ceci permet donc de gagner une demi-puissance en ω dans les estimations ci-dessous. Cependant, pour ne pas trop compliquer les choses, nous nous contentons d'utiliser les estimations établies dans la proposition 18.

– La preuve ci-dessus s'adapte parfaitement si l'on considère le problème de Dirichlet extérieur

$$\begin{cases} (\Delta + \omega^2)v = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ v = \widehat{u}^e & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

à la place du problème de Dirichlet intérieur (P_w^-) et les estimations de la proposition demeurent, en remplaçant bien sur Ω_- par Ω_+ .

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer un résultat de régularité sur $\widehat{\varphi}$, solution de (16).

Proposition 20.

– Si $\widehat{g}(\omega, \cdot) \in H^{-1/2}(\Gamma)$ alors nous avons l'estimation

$$\|\widehat{\varphi}(\omega, \cdot)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C|\omega|^4 \|\widehat{g}(\omega, \cdot)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)},$$

où C ne dépend que de σ_0 et de Ω_+ .

– Si $\widehat{g}(\omega, \cdot) \in L^2(\Gamma)$ et si $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ pour presque tout $x \in \Gamma$ alors nous avons l'estimation

$$\|\widehat{\varphi}(\omega, \cdot)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C|\omega|^3 \|\widehat{g}(\omega, \cdot)\|_{L^2(\Gamma)},$$

où C ne dépend que de σ_0 , de α_0 et de Ω_+ .

Démonstration. En vertu de (11), nous avons $\widehat{\varphi} = \partial_n v - \partial_n \widehat{u}^e$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. Ainsi en utilisant le lemme 7 il vient

$$\|\widehat{\varphi}(\omega, \cdot)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C|\omega| (\|v\|_{H^1(\Omega_-)} + \|\omega v\|_{L^2(\Omega_-)} + \|\widehat{u}\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\omega \widehat{u}\|_{L^2(\Omega_-)}).$$

En combinant les estimations des propositions 14, 15, 18, le résultat s'en suit. \square

Nous notons R l'opérateur de convolution associé aux opérateurs fréquentiels R_ω définis par (20), la notion d'opérateur de convolution étant définie dans le lemme 3. Formellement, R est l'inverse de l'opérateur M défini par (14) :

$$R = \left(-\frac{1}{2}I + K - \alpha \partial_t S \right)^{-1},$$

où $\partial_t S$ est l'opérateur défini par $\partial_t \varphi = S \partial_t \varphi$.

Proposition 21. *L'opérateur R admet une extension continue et inversible de $H_\sigma^{p+4}(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$ dans $H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$ et de $H_\sigma^{p+3}(\mathbb{R}, L^2(\Gamma))$ dans $H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 3 à l'opérateur R , en utilisant les estimations de la proposition 20. \square

2.4 Conclusion

Grâce au travail réalisé dans cette section, nous sommes maintenant en mesure de résoudre les problèmes de diffraction tels que (P^+) . Nous avons montré comment, à partir d'une donnée g sur le bord Γ de l'obstacle, construire une densité $\varphi = Rg$ (solution de l'équation intégrale (14)), qui appliquée à l'opérateur de simple couche sur Γ , fournit le champ diffracté $u = L_\Gamma \varphi = L_\Gamma Rg$.

Précisément, nous avons montré qu'étant donnée $g \in H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$ (la trace Robin sur Γ d'un champ incident émis depuis Γ_i), le champ diffracté par l'obstacle u solution de (P^+) vérifie $u \in H_\sigma^{p-1}(\mathbb{R}, H^1(\Omega))$. De plus, celui-ci dépend continument de g . En terme d'opérateur, nous avons montré que l'opérateur

$$L_\Gamma R : H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma)) \rightarrow H_\sigma^{p-1}(\mathbb{R}, H^1(\Gamma_m))$$

est borné.

3 Le problème inverse

Rappelons le problème inverse (P_{inv}) que nous souhaitons résoudre : connaissant les quantités

$$u(t, x; y), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in \Gamma_m, \quad \forall y \in \Gamma_i,$$

reconstruire l'obstacle Ω_- .

Dans cette section, nous étudions ce problème inverse à proprement parler. Ainsi, nous donnons dans la première section deux résultats techniques qui nous seront utiles dans les sections suivantes. Dans un deuxième temps, nous étudions les propriétés du champ incident, vu comme un opérateur de la surface d'émission Γ_i jusqu'à l'obstacle Ω_- . Ceci nous permettra d'étudier les propriétés de l'opérateur de champ proche N . Enfin, dans la troisième section, nous donnons un résultat clé pour la reconstruction de l'obstacle Ω_- à partir de la connaissance des mesures des champs diffractés.

Nous supposons que les surfaces d'émission et de réception Γ_i et Γ_m sont de classe C^1 , et sont chacune incluses dans des surfaces fermées.

3.1 Résultats préliminaires

Dans cette partie, nous présentons deux résultats généraux dont nous aurons besoin dans la suite. On trouve une présentation générale ainsi qu'une démonstration du résultat suivant dans [8, Thm 17.2.6] ainsi que dans [4, Section 5.1].

Théorème 22 (Principe de prolongement unique).

1) Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^n et $u \in H^2(\Omega)$ une solution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + \omega^2 u = 0$$

dans Ω . S'il existe un ouvert non vide $U \subset \Omega$ tel que $u|_U = 0$ alors $u = 0$ dans Ω .

2) Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^n , $\gamma \subset \partial\Omega$ de classe C^1 et de mesure non nulle, et $u \in H^2(\Omega)$ une solution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + \omega^2 u = 0$$

dans Ω . Si $u = 0$ sur γ et si $\partial_\nu u = 0$ sur γ , alors $u = 0$ dans Ω .

Ce résultat peut-être vu comme une généralisation du principe de prolongement bien connu pour les fonctions analytiques ou harmoniques. Le principe de prolongement unique prend différentes formes. Notamment, le résultat 1) implique 2).

Par ailleurs, nous rappelons que pour $\omega \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\Phi_\omega : (x, y) \mapsto \frac{e^{i\omega|x-y|}}{4\pi|x-y|},$$

pour $x \neq y$, est une solution fondamentale de l'équation de Helmholtz $\Delta u + \omega^2 u = 0$ dans Ω_+ . Alors nous avons le résultat suivant

Proposition 23 ([10]). Soit $z \in \Gamma$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω_+ telle que $z_n \rightarrow z$. Alors nous avons

$$\|\Phi_\omega(\cdot, z_n)\|_{H^1(\Omega_+)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

3.2 Analyse des champs incidents

Nous étudions la relation entre le champ incident émis depuis la surface d'émission Γ_i et la donnée frontière g sur l'obstacle, caractérisant l'onde diffractée étudiée dans la section 2.3. Nous considérons des champ incidents émis depuis Γ_i sous la forme d'un potentiel de simple couche régularisé en temps $L_{\Gamma_i}^\chi$, défini par

$$(L_{\Gamma_i}^\chi \psi)(t, x) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_i} k^\chi(t - \tau, x - y) \psi(\tau, y) dy d\tau,$$

pour $\psi \in H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_i))$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$. Par ailleurs, l'opérateur de trace Robin T est défini par

$$Tu = (\partial_\nu u - \alpha \partial_t u)|_\Gamma,$$

où u est une solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. Nous considérons $L_{\Gamma_i}^\chi$ comme un opérateur à valeurs dans $H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^1(\Omega))$. Nous énonçons une série de résultats sur ces deux opérateurs.

Proposition 24. *Si $p, s > 0$, alors $L_{\Gamma_i}^\chi$ est injectif et borné de $H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$ dans $H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^1(\Omega))$. De plus, $\text{tr}_\Gamma L_{\Gamma_i}^\chi$ est à image dense dans $H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^1(\Gamma))$.*

Démonstration. Rappelons que $L_{\Gamma_i}^\chi \psi = \chi * (L_{\Gamma_i} \psi)$, $\forall \psi \in H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$. Ainsi, si $L_{\Gamma_i}^\chi \psi = 0$, alors en prenant la transformée de Laplace, nous obtenons $\widehat{\chi} \widehat{L} \psi = 0$ sur \mathbb{C}_σ , dans $H^1(\Omega)$. Or $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$, donc $\widehat{\chi}$ est bien définie et est holomorphe sur \mathbb{C}_0 (voir par exemple [13, Chapter 19]). Par ailleurs, $\widehat{\chi}$ est non identiquement nulle (puisqu'il en est de même pour χ) et d'après le principe des zéros isolés, l'ensemble des zéros de $\widehat{\chi}$ est discret. Ainsi $\widehat{L} \psi = 0$ presque partout sur \mathbb{C}_σ . L'identité de Plancherel permet alors de conclure que $L_{\Gamma_i} \psi = 0$ et comme L_{Γ_i} est injectif (voir [3, Theorem 4], ou les relations de saut (12)), on en déduit que $\psi = 0$, ce qui prouve l'injectivité.

Le caractère borné de $L_{\Gamma_i}^\chi : H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i)) \rightarrow H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^1(\Omega))$ provient de la proposition 9 et du caractère C^∞ du noyau de convolution χ . En effet, $\widehat{\chi}$ est à décroissance rapide et l'application du lemme 3 montre le caractère borné de $L_{\Gamma_i}^\chi : H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i)) \rightarrow H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^1(\Omega))$ pour tout s, p .

Pour prouver que l'image de $\text{tr}_\Gamma L_{\Gamma_i}^\chi$ est dense dans $H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^1(\Gamma))$, nous prouvons que l'adjoint de $L_{\Gamma_i}^\chi$ est injectif de $H_{-\sigma}^{-s}(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$ dans $H_{-\sigma}^{-p}(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_i))$. En désignant par A^* l'adjoint d'un opérateur A , nous avons

$$\left(L_{\Gamma_i}^\chi \right)^* = (L_{\Gamma_i})^* (\chi^* \cdot)$$

où $\chi^*(t) = \chi(-t)$ et

$$(L_{\Gamma_i})^* v(t_0, x_0) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} k(t - t_0, x - x_0) v(t, x) d(t, x)$$

pour $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Gamma_i$.

En effet, nous avons par exemple si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\chi * f)(t)g(t)dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi(t - \tau)f(\tau)d\tau g(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \int_{\mathbb{R}} \chi(t - \tau)g(t)dtd\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(\chi^* * g)(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Le résultat s'en suit alors, selon le même raisonnement que pour montrer l'injectivité de $L_{\Gamma_i}^X$. \square

Pour $s \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, notons

$$X_\sigma^s = \{u \in H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^1(\Omega_+)) / \partial_{tt}u - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega_+\}. \quad (24)$$

Nous avons alors le résultat de densité suivant :

Lemme 25. *Si $\zeta \in X_\sigma^s$, alors il existe une suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$ telle que*

$$L_{\Gamma_i}^X \psi_n \rightarrow \zeta \text{ dans } H_\sigma^{s-2}(\mathbb{R}, H^1(\Omega_+)).$$

Démonstration. Nous savons que $\zeta \in X_\sigma^s$ admet une trace $\zeta|_\Gamma \in H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma))$. En vertu de la densité de l'image de $\text{tr}_\Gamma L_{\Gamma_i}^X : H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i)) \rightarrow H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma))$, il existe une suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$ telle que

$$\left(L_{\Gamma_i}^X \psi_n \right)|_\Gamma \rightarrow \zeta|_\Gamma \text{ dans } H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma)).$$

En vertu de la remarque 19, nous avons alors

$$L_{\Gamma_i}^X \psi_n \rightarrow \zeta \text{ dans } H_\sigma^{s-2}(\mathbb{R}, H^1(\Omega_+)).$$

\square

Dénotons maintenant par T l'opérateur défini sur X_σ^s par

$$Tu = (\partial_\nu u - \alpha(x)\partial_t u)|_\Gamma.$$

Nous avons le résultat suivant, de continuité de T sur l'espace X_σ^s défini par (24)

Proposition 26. *Pour $s \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, l'opérateur*

$$T : X_\sigma^s \rightarrow H_\sigma^{s-2}(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$$

est borné quand X_σ^s est muni de la norme canonique sur $H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^1(\Omega))$.

Démonstration. Il suffit, à nouveau, de passer dans le domaine de Laplace et d'appliquer les lemmes 7 et 3. En effet, pour $u \in X_\sigma^s$, nous avons pour $\omega \in \mathbb{C}_\sigma$

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}u(\omega, \cdot)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \|\partial_\nu \widehat{u} - i\alpha\omega \widehat{u}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \|\partial_\nu \widehat{u}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + C|\omega| \|\alpha u\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|\partial_\nu \widehat{u}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + C|\omega| \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 7, il vient alors

$$\begin{aligned} \|\widehat{Tu}(\omega, \cdot)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &\leq C|\omega|^2\|\widehat{u}\|_{H^1(\Omega)} + C|\omega|\|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)}\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq C|\omega|^2\|\widehat{u}(\omega, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer le lemme 3 pour conclure. \square

Proposition 27. *Si $p, s > 0$, alors $TL_{\Gamma_i}^X$ est injectif et à image dense de $H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$ dans $H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$.*

Démonstration. Prouvons tout d'abord l'injectivité. Supposons que

$$TL_{\Gamma_i}^X \psi = 0 \quad \text{dans } H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma)),$$

pour $\psi \in H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$. Pour $\omega \in \mathbb{C}_\sigma$, notons $v = \widehat{L_{\Gamma_i}^X \psi}(\omega, \cdot) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$. Alors v satisfait l'équation de Helmholtz homogène $\Delta v + \omega^2 v = 0$ dans Ω_- , avec une condition d'impédance homogène : $\partial_\nu v - i\omega\alpha(x)v = 0$ sur $\Gamma = \partial\Omega_-$. On montre alors que $v = 0$ dans $H^1(\Omega_-)$, car la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle est coercive (voir par exemple la preuve de la proposition 14). Le principe de prolongement unique (voir le théorème 22) montre alors que v est en réalité nulle sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_i$. La condition de saut de la dérivée normale du simple couche sur la frontière (voir (12)) montre alors que $\psi = 0$ dans $H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$.

Prouvons maintenant que l'image de $TL_{\Gamma_i}^X$ est dense. Soit $\zeta \in H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$. D'après le lemme 4, il existe une suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $H_\sigma^{s+5}(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$ telle que

$$\zeta_n \rightarrow \zeta \quad \text{dans } H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma)).$$

D'après la proposition 14, il existe $u_n \in H_\sigma^{s+4}(\mathbb{R}, H^1(\Omega_+))$ tel que

$$\begin{cases} \partial_{tt}u_n - \Delta u_n = 0, & \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega_+, \\ \partial_\nu u_n - \alpha(x)\partial_t u_n = \zeta_n, & \text{sur } \mathbb{R} \times \Gamma. \end{cases}$$

Maintenant, d'après la proposition 25, il existe une suite $(\psi_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ de $H_\sigma^p(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$ telle que $L_{\Gamma_i}^X \psi_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u_n$ dans $H_\sigma^{s+2}(\mathbb{R}, H^1(\Omega_+))$. Finalement, la continuité de T établie dans la proposition 26 nous permet d'établir que

$$TL_{\Gamma_i}^X \psi_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} Tu_n = \zeta_n \quad \text{dans } H^{-1/2}(\Gamma).$$

Le fait que

$$\zeta_n \rightarrow \zeta \quad \text{dans } H_\sigma^s(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$$

nous permet de conclure. \square

3.3 Reconstruction de l'obstacle

Notre méthode de résolution du problème inverse initial (P_{inv}) est basé sur la connaissance de l'opérateur de champ proche N . Dans cette section nous montrons que

$$N : H^s(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_i)) \rightarrow H^p(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))$$

se factorisant sous la forme $N = \text{tr}_{\Gamma_m} L_{\Gamma} R T L_{\Gamma_i}^X$ est borné, injectif et à image dense, et ce pour tout $s, p > 0$.

Nous cherchons à développer une méthode de Linear Sampling sur l'opérateur N . La méthode que nous développons repose sur le résultat suivant, central dans les méthodes type Linear Sampling, qui nous permet de caractériser l'image de N , à l'aide d'un point d'échantillonnage $z \in \mathbb{R}^3$. Considérons $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction C^∞ à support compact. Pour $z \in \mathbb{R}^3$ et $\tau \in \mathbb{R}$, définissons

$$\phi_{z,\tau}(t, x) := \frac{\gamma(t - \tau - |x - z|)}{4\pi|x - z|} = k^\chi(t - \tau, x - z) \quad (25)$$

ou

$$\phi_{z,\tau}(t, x) := \nu \cdot \nabla k^\chi(t - \tau, x - z) \quad (26)$$

pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z\}$.

Nous rappelons rapidement le principe de la régularisation de Tikhonov. Soient X et Y deux espaces de Banach, un opérateur linéaire $A : X \rightarrow Y$, $g \in Y$ et $\varepsilon > 0$. Nous définissons la ε -régularisée de Tikhonov de l'équation

$$Af = g$$

comme l'unique solution $f_\varepsilon \in X$ de

$$(\varepsilon I + A^*A) f = A^*g.$$

Nous avons alors le résultat de convergence suivant, qui pour $(z, \tau) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ garantit l'existence d'une pseudo-solution $g_{z,\tau}$ à l'équation test $Ng = \phi_{z,\tau}$. Nous pouvons alors caractériser le comportement de $z \mapsto g_{z,\tau}$ au voisinage de la frontière de l'obstacle Ω_- , ce qui, comme nous le verrons, fournit un critère pratique pour reconstruire l'obstacle Ω_- .

Théorème 28.

1. Pour $z \in \Omega_-$, $\tau \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $g_{z,\tau,\varepsilon} \in L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Ng_{z,\tau,\varepsilon} - \phi_{z,\tau}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \partial\Omega_-} \|g_{z,\tau,\varepsilon}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))} = \infty,$$

$$\text{et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|TL_{\Gamma_i}^X g_{z,\tau,\varepsilon}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))} < \infty.$$

2. Soit $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_-$ et $\tau \in \mathbb{R}$. Pour tout $g_{z,\tau,\varepsilon} \in L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Ng_{z,\tau,\varepsilon} - \phi_{z,\tau}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))} = 0,$$

nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|TL_{\Gamma_i}^X g_{z,\tau,\varepsilon}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))} = \infty.$$

La densité $g_{z,\tau,\varepsilon}$ peut être choisie comme la ε -régularisée de Tikhonov de l'équation $Ng = \phi_{z,\tau}$.

Démonstration. Rappelons que l'opérateur N se factorise sous la forme $N = \text{tr}_{\Gamma_m} L_{\Gamma} R T L_{\Gamma_i}^X$, où le potentiel de simple couche régularisé en temps $L_{\Gamma_i}^X$ est défini par

$$(L_{\Gamma_i}^X \psi)(t, x) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_i} k^\chi(t - \tau, x - y) \psi(\tau, y) dy d\tau$$

pour $\psi \in H^s(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_i))$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$, l'opérateur de trace Robin T est défini par

$$Tu = (\partial_\nu u - \alpha \partial_t u)|_\Gamma$$

et enfin R est l'opérateur

$$R = \left(-\frac{1}{2}I + K - \alpha \partial_t S \right)^{-1}.$$

1. Notons que

$$[(L_\Gamma R T)(\phi_{z,\tau}|_{\mathbb{R} \times \Omega_+})]_{|\mathbb{R} \times \Gamma_m} = \phi_{z,\tau}|_{\mathbb{R} \times \Gamma_m} \quad (27)$$

car $\phi_{z,\tau}$ est l'unique solution causale de l'équation des ondes ayant $T(\phi_{z,\tau}|_{\mathbb{R} \times \Gamma})$ comme donnée Robin sur $\mathbb{R} \times \Gamma$.

D'après la proposition 27, nous pouvons approximer $T\phi_{z,\tau} \in H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))$ par

$$\|TL_{\Gamma_i}^\chi g_{z,\tau,\epsilon} - T\phi_{z,\tau}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))} \leq \epsilon$$

avec $g_{z,\tau,\epsilon} \in L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$. Maintenant, la continuité de $L_\Gamma R : H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma)) \rightarrow L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))$ (grâce à la proposition 14 et au lemme 3) montre que

$$\|Ng_{z,\tau,\epsilon} - \phi_{z,\tau}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))} \leq C\|TL_{\Gamma_i}^\chi g_{z,\tau,\epsilon} - T\phi_{z,\tau}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))} \leq C\epsilon$$

pour un certain $C > 0$, ce qui montre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|Ng_{z,\tau,\epsilon} - \phi_{z,\tau}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))} = 0.$$

Montrons maintenant que

$$\lim_{z \rightarrow \partial D} \|g_{z,\tau,\epsilon}\| = \infty.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\Omega_-)^\mathbb{N}$ soit telle que $z_n \rightarrow z \in \partial\Omega_-$, et qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|L_{\Gamma_i}^\chi g_{z_n,\tau,\epsilon}\|_{H_\sigma^3(\mathbb{R}, H^1(\Omega_-))} \leq M. \quad (28)$$

Alors, nous avons

$$\|T\phi_{z_n,\tau}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))} \leq \|TL_{\Gamma_i}^\chi g_{z_n,\tau,\epsilon} - T\phi_{z_n,\tau}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))} + \|TL_{\Gamma_i}^\chi g_{z_n,\tau,\epsilon}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))},$$

c'est-à-dire

$$\|T\phi_{z_n,\tau}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))} \leq C(\epsilon + M) \quad (29)$$

en exploitant la continuité de T , prouvée dans la proposition 26. Dans le même temps, nous avons

$$\begin{aligned} \|T\phi_{z_n,\tau}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))}^2 &= \|\partial_\nu \phi_{z_n,\tau} - \alpha \partial_t \phi_{z_n,\tau}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))}^2 \\ &= \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} |w|^2 \|\widehat{\partial_\nu \phi_{z_n,\tau}} - i\alpha w \widehat{\phi_{z_n,\tau}}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 dw \\ &\geq \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \|\widehat{\phi_{z_n,\tau}}\|_{H^1(\Omega_+)}^2 dw, \end{aligned}$$

en vertu de (27) et de la proposition 14. Or $\phi_{z_n, \tau}$ est la convolution en temps de $\chi(\cdot - \tau)$ et de $k(\cdot, \cdot - z_n)$, donc

$$\|T\phi_{z_n, \tau}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))} \geq \int_{i\sigma - \infty}^{i\sigma + \infty} |e^{-i\tau\omega} \widehat{\chi}(\omega)| \|\Phi_\omega(\cdot - z_n)\|_{H^1(\Omega_+)} d\omega,$$

où $\Phi_\omega(x) = e^{i\omega|x|}/4\pi|x|$ est une solution fondamentale de l'opérateur de Helmholtz $\Delta + \omega^2$. Or, d'après la proposition 23, nous avons

$$\|\Phi_\omega(\cdot - z_n)\|_{H^1(\Omega_+)} \rightarrow \infty$$

quand $z_n \rightarrow z$.

Or χ est à support compact, donc $\widehat{\chi}$ s'annule sur un ensemble au plus discret de points. Le lemme de Fatou montre maintenant que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|T\phi_{z_n, \tau}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))} \geq \int_{i\sigma - \infty}^{i\sigma + \infty} |e^{-i\tau\omega} \widehat{\chi}(\omega)| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_\omega(\cdot - z_n)\|_{H^1(\Omega_+)} d\omega = \infty,$$

ce qui contredit (29). Ainsi

$$\|L_{\Gamma_i}^\chi g_{z_n, \tau, \epsilon}\|_{H_\sigma^3(\mathbb{R}, H^1(\Omega_-))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

La continuité de $L_{\Gamma_i}^\chi : L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i)) \rightarrow H_\sigma^3(\mathbb{R}, H^1(\Omega_-))$ implique que

$$\|g_{z_n, \tau, \epsilon}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

2. Considérons la ϵ -régularisée de Tikhonov $g_{z, \tau, \epsilon} \in L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$ de l'équation

$$Ng = \phi_{z, \tau}$$

c'est-à-dire l'unique solution de l'équation

$$(\epsilon I + N^*N)g = N^*\phi_{z, \tau}.$$

A partir de résultats classiques sur la régularisation de Tikhonov (voir par exemple [5]), nous savons que $g_{z, \tau, \epsilon}$ minimise la fonctionnelle

$$J_{z, \epsilon}(g) = \|Ng - \phi_{z, \tau}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))}^2 + \epsilon \|g\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))}^2.$$

Ainsi, $\forall g \in L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$, nous avons

$$\begin{aligned} \|Ng_{z, \tau, \epsilon} - \phi_{z, \tau}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))}^2 &\leq J_{z, \epsilon}(g_{z, \tau, \epsilon}) \\ &\leq J_{z, \epsilon}(g) = \|Ng - \phi_{z, \tau}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))}^2 + \epsilon \|g\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))}^2. \end{aligned}$$

La densité de l'image de N implique que le premier terme du membre de droite peut-être rendu aussi petit que souhaité. Ainsi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|Ng_{z, \tau, \epsilon} - \phi_{z, \tau}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))} = 0. \quad (30)$$

Il nous reste à montrer que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|TL_{\Gamma_i}^X g_{z,\tau,\epsilon}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))} = \infty.$$

Pour ce faire, nous montrons d'abord que

$$\|L_{\Gamma_i}^X g_{z,\tau,\epsilon}\|_{H_\sigma^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega_-))} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty,$$

ce qui nous permettra de conclure en utilisant la continuité de $L_{\Gamma_i}^X : L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i)) \rightarrow H_\sigma^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega_-))$. Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs tendant vers 0, et supposons qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\|L_{\Gamma_i}^X g_{z,\tau,\epsilon_n}\|_{H_\sigma^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega_-))} \leq M.$$

Alors à une extraction près, $v_n := L_{\Gamma_i}^X g_{z,\tau,\epsilon_n}$ converge faiblement dans $H_\sigma^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega_-))$ vers un certain $v \in H_\sigma^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega_-))$. Posons

$$w = L_\Gamma R T v \in L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega)).$$

Comme $v_n \rightharpoonup v$ dans $H_\sigma^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega_-))$, nous avons $N g_{z,\tau,\epsilon_n} \rightharpoonup w$ dans $L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))$. Ainsi, $w = \phi_{z,\tau}$ dans $L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))$, en vertu de (30). Ainsi, les transformées de Laplace coïncident : $\widehat{w} = \widehat{\phi}_{z,\tau}$ dans $H^{1/2}(\Gamma_i)$, pour tout $\omega \geq \sigma$. En utilisant maintenant le fait que le problème de Dirichlet extérieur pour l'équation d'Helmholtz admet une unique solution (voir proposition 14) et le principe de prolongement unique (voir le théorème 22), nous en déduisons que $\widehat{w} = \widehat{\phi}_{z,\tau}$ dans $H^1(\Omega) \setminus \{z\}$. Cependant, $\widehat{\phi}_{z,\tau}$ possède une singularité d'ordre 1 en z tandis que \widehat{w} est H^1 au voisinage de z , ce qui constitue une contradiction.

Ainsi, nous avons

$$\|L_{\Gamma_i}^X g_{z,\tau,\epsilon_n}\|_{H_\sigma^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega_-))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Nous en déduisons alors que

$$\|TL_{\Gamma_i}^X g_{z,\tau,\epsilon_n}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

par coercivité de T , prouvée dans la proposition 14. \square

Notre méthode de reconstruction consiste ainsi à calculer, pour $z \in \mathbb{R}^3$, $g_{z,\tau,\epsilon} \in L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma_i))$ tel que

$$\|N g_{z,\tau,\epsilon} - \phi_{z,\tau}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))} \leq \epsilon$$

et à tracer $z \mapsto g(z) := 1/\|g_{z,\tau,\epsilon}\|_{H_\sigma^1(\mathbb{R}, H^{-1/2}(\Gamma))}$. En vertu du théorème 28 et par un argument de continuité, quand ϵ est suffisamment petit, nous aurons, moralement, $g(z)$ très petit quand $z \notin \Omega_-$, et $g(z)$ "significatif" quand $z \in \Omega_-$. Ainsi, nous disposerons d'une image de l'obstacle Ω_- .

Par ailleurs, le théorème 28 assure que $g_{z,\tau,\epsilon}$ peut-être calculé comme étant la régularisée de Tikhonov de

$$N g = \phi_{z,\tau}$$

quand $z \notin \Omega_-$, mais ne nous indique rien quand au calcul effectif de $g_{z,\tau,\epsilon}$ quand $z \in \Omega_-$. Cependant, de manière empirique, nous prolongeons ce calcul quand $z \in \Omega_-$.

4 Application numérique

Dans cette section, nous décrivons la mise en place d'un algorithme permettant de résoudre le problème inverse. Pour simplifier, nous travaillons dans \mathbb{R}^2 , avec un schéma aux différences finies pour le problème direct. Ainsi, toutes les simulations que nous présenterons traiteront des obstacles polygonaux, ayant leurs côtés parallèles aux axes (Ox, Oy) . Dans un premier temps, nous décrivons l'implémentation numérique de notre algorithme d'inversion. Nous présentons ensuite quelques résultats numériques. L'algorithme de résolution du problème direct, qui fournit les données du problème inverse (une approximation discrète de l'opérateur de champ proche N), est présenté en annexe.

4.1 Le problème inverse : mise en place de l'algorithme, reconstruction de l'obstacle.

Discussion sur le choix du second membre En pratique, lorsque l'on cherche à reconstruire des obstacles de type Dirichlet, l'application du théorème 28 fournit des résultats satisfaisants. Cependant, lorsque nous cherchons à reconstruire des obstacles de type Robin, si le résultat de convergence donné par le théorème 28 est toujours valide, les résultats numériques ne sont pas satisfaisant. Une façon d'améliorer la reconstruction consiste à calculer la ϵ -régularisée de Tikhonov $g_{z,\nu,\epsilon}$ de

$$N_d g_{z,\tau,\nu} = \nu \cdot \nabla \phi_{z,\tau}, \quad (31)$$

où $\phi_{z,\tau}$ est défini par (25) selon

$$\phi_{z,\tau}(t, x) = \frac{\gamma(t - \tau - |x - z|)}{4\pi|x - z|}.$$

Nous appliquons le théorème 28 pour les fonctions $g_{z,\nu,\epsilon}$. En considérant alors

$$G^d(z) = \max_{\nu \in \mathbb{S}^{d-1}} \|g_{z,\nu,\epsilon}\| \quad (32)$$

et en traçant $z \mapsto 1/G^d(z)$, nous obtenons une seconde image du domaine de calcul. La question se pose alors du calcul effectif de ce max. Par linéarité, nous avons

$$G^d(z) = \max_{\nu \in \mathbb{S}^1} \|\nu \cdot (g_{z,\epsilon}^x, g_{z,\epsilon}^y)^T\|$$

où $g_{z,\epsilon}^x = g_{z,(1,0),\epsilon}$ et $g_{z,\epsilon}^y = g_{z,(0,1),\epsilon}$ sont les deux solutions de (31) associées aux polarisations ν orientées selon les axes du repère. Or, en notant $\nu = (\nu_1, \nu_2)^T$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\nu \cdot (g_{z,\epsilon}^x, g_{z,\epsilon}^y)^T\|^2 &= |\nu_1|^2 \|g_{z,\epsilon}^x\|^2 + |\nu_2|^2 \|g_{z,\epsilon}^y\|^2 + 2\nu_1\nu_2 (g_{z,\epsilon}^x, g_{z,\epsilon}^y) \\ &= (A_{z,\epsilon} \nu, \nu) \end{aligned}$$

où

$$A_{z,\epsilon} = \begin{pmatrix} \|g_{z,\epsilon}^x\|^2 & (g_{z,\epsilon}^x, g_{z,\epsilon}^y) \\ (g_{z,\epsilon}^x, g_{z,\epsilon}^y) & \|g_{z,\epsilon}^y\|^2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

est la matrice de Gram du couple $(g_{z,\epsilon}^x, g_{z,\epsilon}^y)$. Ainsi

$$G^d(z) = \sqrt{\lambda(z)}$$

où $\lambda(z)$ est la plus grande valeur propre de $A_{z,\epsilon}$ (qui est une matrice symétrique positive).

Mise en place de l'algorithme La résolution numérique du problème direct nous fournit la donnée

$$u(x_m, t_n; e_i), \quad 1 \leq m \leq N_m, 1 \leq n \leq N_T, 1 \leq i \leq N_i.$$

Nous construisons alors une approximation discrète N_d de l'opérateur de champ proche N

$$N_d : \mathbb{R}^{N_i \times N_T} \rightarrow \mathbb{R}^{N_m \times N_T}$$

de la façon suivante

$$(N_d \varphi)(j, n) := \sum_{0 \leq m \leq n} \sum_i u(r_j, t_{n-m}; e_i) \varphi(i, n) \quad (34)$$

Nous utilisons l'algorithme suivant :

1. Calculer les M plus grandes valeurs singulières de N_d $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq M}$, ainsi que les vecteurs singuliers correspondant $(\phi_i)_{1 \leq i \leq M}$, $(f_i)_{1 \leq i \leq M}$ (chacune des deux familles formant un système orthogonal), ce qui signifie que nous avons une représentation des opérateurs N_d et N_d^* sous la forme

$$N_d(g) = \sum_{i=1}^M \sigma_i(g, f_i) \phi_i,$$

$$N_d^*(g) = \sum_{i=1}^M \sigma_i(g, \phi_i) f_i.$$

2. Normaliser en norme L^2 les fonctions tests $\varphi_{z,\tau}$ et $\nabla \varphi_{z,\tau}$. Fixer un décalage en temps τ et évaluer les ϵ -régularisées de Tikhonov $g_{z,\tau}$, $g_{z,\epsilon}^x$ et $g_{z,\epsilon}^y$ des équations $N_d g = \phi_{z,\tau}$, $N_d g = (1, 0)^T \cdot \nabla \phi_{z,\tau}$ et $N_d g = (0, 1)^T \cdot \nabla \phi_{z,\tau}$ respectivement, selon

$$g_{z,\tau} = \sum_{i=1}^M \frac{\sigma_i(\varphi_{z,\tau}, \phi_i)}{\epsilon + \sigma_i^2} f_i$$

pour z parcourant une grille régulière maillant le domaine de calcul. Le calcul de $g_{z,\epsilon}^x$ et $g_{z,\epsilon}^y$ s'effectue selon la même formule, en ajustant le second membre.

3. Assembler la matrice de Gram $A_{z,\epsilon}$ de $g_{z,\epsilon}^x$ et $g_{z,\epsilon}^y$ selon (33) et calculer sa plus grande valeur propre $\lambda(z)$. Calculer $G_\epsilon^d(z) = \max_{\nu \in \mathbb{S}^{d-1}} \|g_{z,\nu,\epsilon}\| = \sqrt{\lambda(z)}$ et $G(z) = \|g_{z,\tau}\|$. Tracer $z \mapsto \max(\|G\|_\infty / G(z), \|G^d\|_\infty / G^d(z))$.

Il est possible de fixer la valeur de ϵ à l'aide du principe de Morozov [14, 18]. Cependant, cette opération est couteuse en temps de calcul, et doit être réalisée pour chaque point z . En pratique, le fait de calculer la décomposition en valeurs singulières de N_d à l'ordre M revient à réaliser une troncature du spectre de N_d , et nous pouvons alors prendre $\epsilon = 0$. Nous gagnons alors en temps de calcul, la contre partie étant que nous ne disposons pas de contrôle sur la norme de $g_{z,\tau}$.

Nous discutons la pertinence de l'indice $z \mapsto \max(\|G\|_\infty / G(z), \|G^d\|_\infty / G^d(z))$ après avoir exposé les résultats numériques. La normalisation par $\|G\|_\infty$ est nécessaire pour pouvoir comparer les deux quantités $G(z)$ et $G^d(z)$. Une telle discussion est par ailleurs effectuée dans [2]. En particulier, dans cette article, les auteurs s'intéressent à la valeur ν_{\max} de ν qui réalise le maximum dans (32). L'observation semble indiquer que quand z est proche de la frontière Γ , tout en étant à l'extérieur de Ω_- , ν_{\max} devient proche de la normale locale à Γ .

4.2 Résultats numériques

Dans les exemples numériques qui suivent, nous choisissons

$$\chi(t) = \frac{d}{dt} \sin(4t) e^{-1.6(t-3)^2}$$

comme impulsion temporelle pour les ondes incidentes, ce qui correspond à signal de fréquence 4 et à une longueur d'onde de $2\pi/4 \simeq 1.6$.

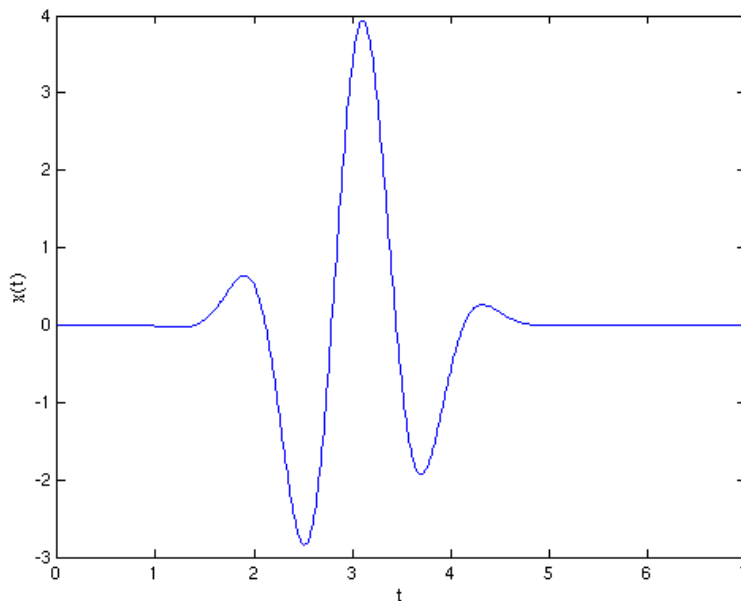


FIGURE 2 – L'impulsion $t \mapsto \chi(t)$ utilisée dans les simulations.

Nous cherchons à mettre en évidence la capacité de l'algorithme à détecter des obstacles avec des conditions de bords mixtes. Dans les exemples présentés ci-dessous, les étoiles bleues représentent les émetteurs/récepteurs, le domaine délimité par les pointillés noirs est la région d'échantillonnage, c'est-à-dire la région où nous cherchons à reconstruire l'obstacle Ω_- . Les traits noirs délimitent les composantes connexes de l'obstacle. Nous précisons qu'afin de tester la robustesse de l'algorithme, nous rajoutons un bruit de l'ordre de 1% aux données.

Dans l'exemple représenté dans la figure 3, l'obstacle Ω_- est constitué de 3 composantes connexes, chacune d'entre elles étant soumises à une condition au bord de nature différente (Dirichlet, Neumann et Robin). Nous utilisons 2000 valeurs singulières pour la reconstruction. Nous rappelons que la figure 3 est obtenue en prenant le max des deux figures 4(a) et 4(b). Comme nous le constatons, l'indice $z \mapsto 1/G(z)$ nous permet de repérer précisément les obstacles de type Dirichlet, tandis que l'indice $z \mapsto 1/G^d(z)$ nous permet de repérer les obstacles de type Neumann.

Dans l'exemple représenté figure 5, nous testons un obstacle avec condition mixte Neumann/Dirichlet. Nous utilisons 1000 valeurs singulières pour la reconstruction. Nous observons le même phénomène que pour la simulation précédente : l'indice $z \mapsto 1/G(z)$ nous permet de

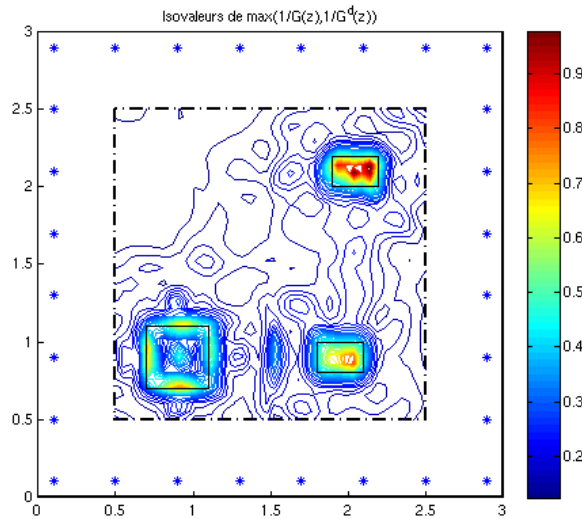


FIGURE 3 – En haut à droite, l’obstacle est de type Dirichlet, en bas à droite, l’obstacle est de type Robin avec une impédance constante $\alpha = 0.5$ et en bas à gauche l’obstacle est de type Neumann. La reconstruction est effectuée avec 2000 valeurs singulières.

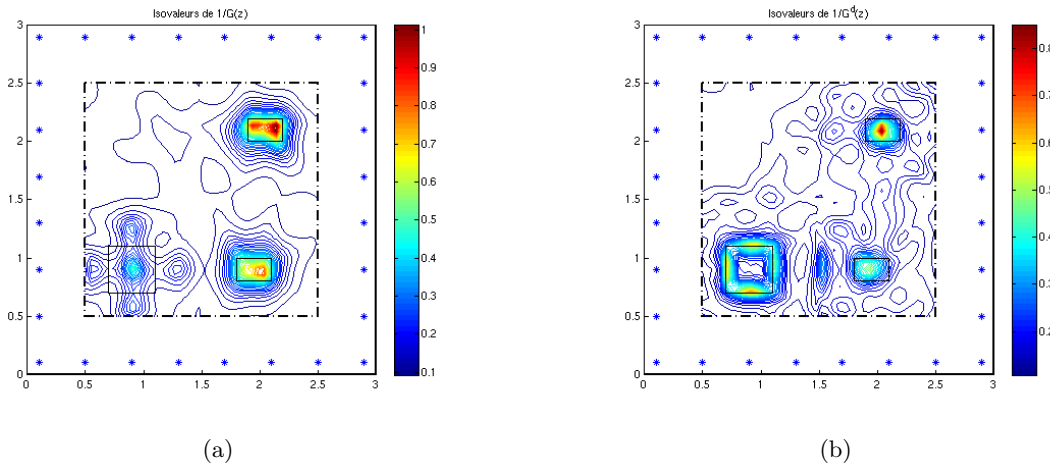


FIGURE 4 – 4(a) : les isovaleurs de $z \mapsto 1/G(z)$, 4(b) : les isovaleurs de $z \mapsto 1/G^d(z)$.

repérer précisément les obstacles de type Dirichlet (le rectangle en haut à droite), tandis que l’indice $z \mapsto 1/G^d(z)$ nous permet de repérer les obstacles de type Neumann (le L en bas à gauche).

Comme nous le constatons, la qualité de la reconstruction est satisfaisante, dans le cas d’obstacles avec des conditions mixtes. Notons cependant que notre algorithme d’inversion est couteux en temps de calcul. D’une part, dans les cas où l’obstacle est composé de plusieurs composantes connexes, le signal obtenu en entrée du problème inverse contient “beaucoup” d’information,

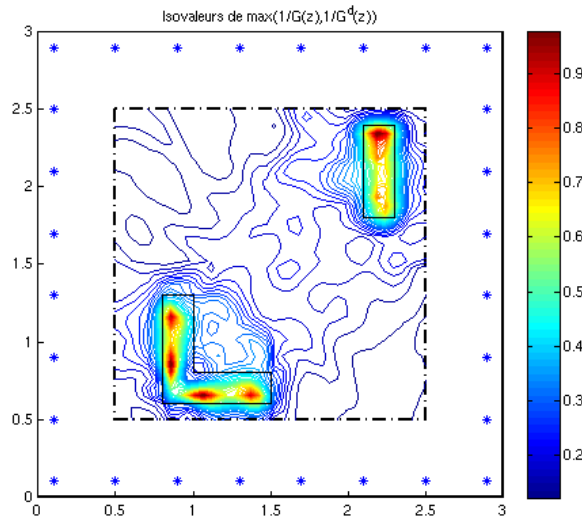


FIGURE 5 – L'obstacle a deux composantes connexes : le L est soumis à une condition de type Neumann et le rectangle à une condition de type Dirichlet.

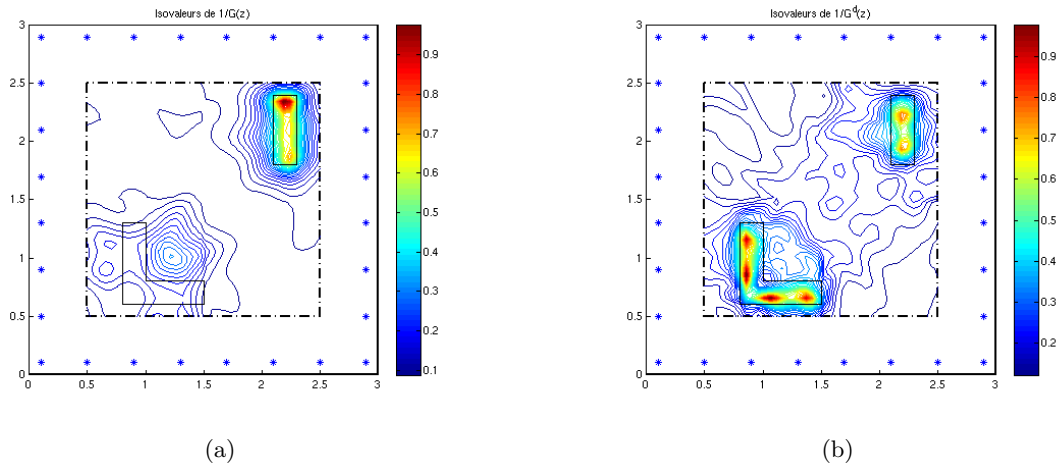


FIGURE 6 – 6(a) : les isovaleurs de $z \mapsto 1/G(z)$, 6(b) : les isovaleurs de $z \mapsto 1/G^d(z)$.

et il nous faut calculer un grand nombre de valeurs singulières pour obtenir une reconstruction satisfaisante de l'obstacle. D'autre part, lors du calcul des valeurs singulières de l'opérateur N_d , il nous faut évaluer un grand nombre de fois le produit matrice-vecteur $N_d\varphi$, selon (34). Cette opération est, *a priori*, N_T fois plus longue dans notre cas (en temporel) que dans le cas fréquentiel. Une façon d'améliorer la situation consiste à évaluer la convolution dans (34) à l'aide d'une transformée de Fourier rapide.

Dans l'exemple de la figure 7, nous mettons en évidence le fait que si la distance entre les différentes composantes connexes de l'obstacle est trop petite, la reconstruction est quelque peu

altérée.

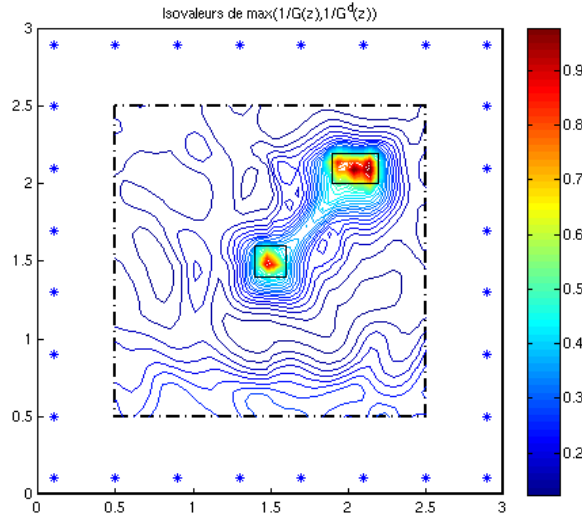


FIGURE 7 – L’obstacle a deux composantes connexes, de type Robin-Fourier : le rectangle en haut à droite possède une impédance $\alpha = 0.15$, le rectangle central une impédance $\alpha = 0.2$. La reconstruction est effectuée avec 2000 valeurs singulières.

Par ailleurs, si l’on constate que pour certaines valeurs de τ (dans nos exemples, $\tau < 2$ et $\tau > 8$), les reconstructions sont de mauvaise qualité, pour $2 < \tau < 8$, la qualité des reconstructions ne semblent pas varier (nous avons $\tau = 3.5$ dans les simulations ci-dessus).

Nous terminons cette section en donnant des exemples dans le cas d’une ouverture limitée, c’est-à-dire dans le cas où nous ne disposons d’informations que sur une partie du bord du domaine de calcul. Dans ce cas, il apparaît que les méthodes d’échantillonnage linéaire dans le domaine fréquentiel rencontrent des difficultés à reconstruire l’obstacle. Comme nous la constatons sur l’exemple de la figure 8, nous parvenons à des résultats corrects, dans le cas où les émetteurs/récepteurs sont disposés sur une partie du bord du domaine de calcul seulement (nous rappelons que les étoiles bleues représentent la position des émetteurs/récepteurs). Bien sur, la qualité de reconstruction de l’obstacle est meilleure sur la partie orientée vers le bord éclairant (direction sud-ouest ici). On constate aussi sur les figures 9(a) et 9(a) que si l’indice $1/G(z)$ permet de détecter la position de l’obstacle avec précision (il y a très peu de bruit sur l’image 9(a)), l’indice $1/G^d(z)$ permet de trouver avec précision la forme de l’obstacle.

Nous réalisons la même expérience avec un obstacle de type Neumann cette fois. Ici, seul l’indice $1/G^d(z)$ est pertinent, et l’indice $1/G(z)$ donne de mauvais résultats. Ceci est dû à la piètre qualité des données (éclairage partiel).

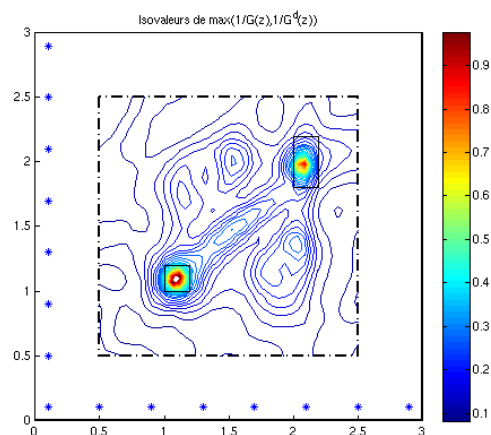


FIGURE 8 – L'obstacle a deux composantes connexes, de type Dirichlet. La reconstruction est effectuée avec 500 valeurs singulières.

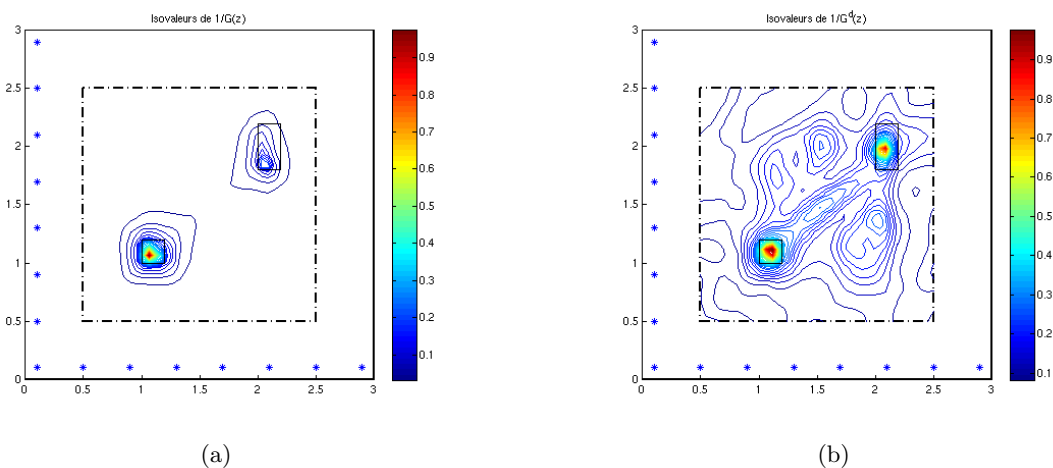


FIGURE 9 – 9(a) : les isovaleurs de $z \mapsto 1/G(z)$, 9(b) : les isovaleurs de $z \mapsto 1/G^d(z)$.

5 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons exposé une méthode d'échantillonnage linéaire pour les problèmes de diffraction dans le domaine temporel. Nous avons montré que nous sommes en mesure de reconstruire des obstacles de type Dirichlet, Neumann et Robin, ainsi que des obstacles avec conditions mixtes. En ce sens, nous avons généralisé le travail effectué dans [3]. Par ailleurs, nous avons également étendu ce travail au cas où les signaux temporels associés aux ondes incidentes sont à bande limitée.

Une des suites possibles de ce travail serait d'étendre cette méthode d'échantillonnage linéaire dans le domaine temporel aux problèmes de diffraction pour les ondes électromagnétiques, c'est-

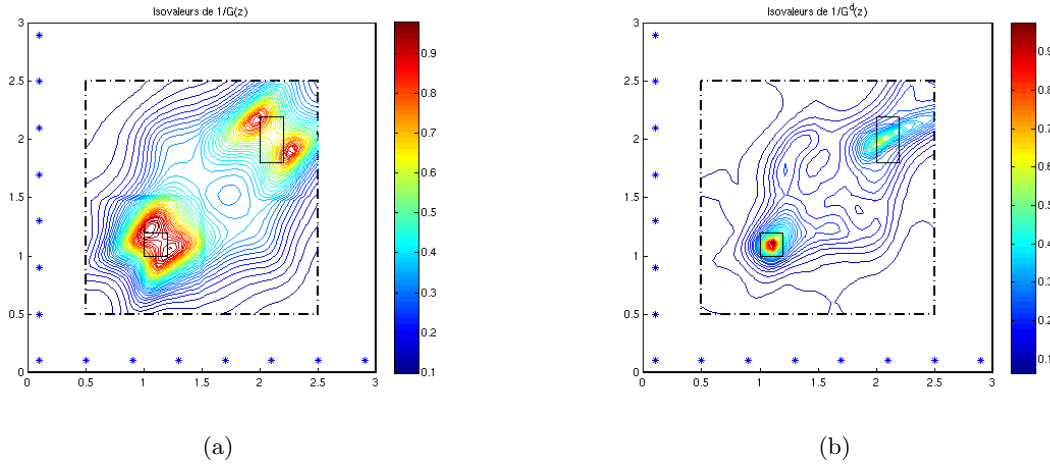


FIGURE 10 – L’obstacle a deux composantes connexes, de type Neumann. La reconstruction est effectuée avec 1000 valeurs singulières. 10(a) : les isovaleurs de $z \mapsto 1/G(z)$, 10(b) : les isovaleurs de $z \mapsto 1/G^d(z)$.

à-dire au cas des équations de Maxwell. Il pourrait également être intéressant de porter le travail numérique au cas de la 3D.

Pour ce qui est de la méthode elle-même, nous avons pu voir que l’indice $z \mapsto 1/G(z)$ nous permet de reconstruire les obstacles de type Dirichlet, tandis que $z \mapsto 1/G^d(z)$ est pertinent pour les obstacles de type Neumann, et pour les obstacles de type Dirichlet dans le cas d’un éclairage partiel du domaine de reconstruction. Si, dans les exemples numériques, nous parvenons à reconstruire des obstacles de type Robin-Fourier, nous ne parvenons pas à l’expliquer formellement. Rappelons que, pour retrouver les obstacles de type Neumann, nous introduisons l’indice

$$G^d(z) = \max_{\nu \in \mathbb{S}^1} \|\nu \cdot (g_{z,\epsilon}^x, g_{z,\epsilon}^y)^T\|$$

avec l’idée que, au voisinage de l’obstacle Γ , la valeur de ν qui réalise le maximum est fortement liée à la normale à Γ . Ce phénomène est mis en évidence dans [2]. Pour reconstruire des obstacles avec condition de Robin-Fourier, nous avons essayé plusieurs indices basés sur la même idée, par exemple

$$H(z) = \max_{\nu \in \mathbb{S}^2} \|\nu \cdot (g_{z,\tau,\epsilon}, g_{z,\epsilon}^x, g_{z,\epsilon}^y)\|$$

(après normalisation des 3 fonctions g , g^x et g^y) mais sans résultat concluant.

Finalement, l’indice $z \mapsto G(z)$ semble devoir être étudié avec méfiance : il n’ajoute rien à la qualité de reconstruction lorsque nous cherchons à reconstruire des obstacles de type Neumann, et s’il semble “muet” lorsque l’éclairage est total (voir l’exemple de la figure 4(a)), il montre des signes d’instabilités lorsque l’éclairage est partiel (voir figure 10(a)).

Annexes : Résolution du problème direct, acquisition des données.

Nous considérons le problème (P^+) pour le champ diffracté u par l'obstacle Ω_-

$$(P^+) \begin{cases} \partial_{tt}u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_+ \\ u(t, x) = 0, & t \leq 0, x \in \Omega_+ \\ \partial_\nu u(t, x) - \alpha(x)\partial_t u(t, x) = g(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma \end{cases}$$

Nous cherchons à obtenir une approximation de l'opérateur de champ proche N . Ceci revient à obtenir une approximation de u solution de (P^+) sur $\mathbb{R}^+ \times \Gamma_m$, pour toute onde incidente. En réalité, pour calculer le champ diffracté u , nous résolvons le problème pour le champ total u^t

$$(P^{\text{tot}}) \begin{cases} \partial_{tt}u^t(t, x) - \Delta u^t(t, x) = f(t - \tau)\delta(x - y), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_+ \\ u^t(t, x) = 0, & t \leq 0, x \in \Omega_+ \\ \partial_\nu u^t(t, x) - \alpha(x)\partial_t u^t(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma \end{cases}$$

afin d'obtenir une approximation de u^t sur $\mathbb{R}^+ \times \Gamma_m$, pour tout $y \in \Gamma_i$, f étant la source temporelle. Il suffit alors de poser $u = u^t - u^i$, où u^i est le champ incident (solution de (P^{tot}) si l'on ôte l'obstacle Ω_-), pour obtenir l'approximation de u désirée.

Pour la discrétisation du problème en temps, nous fixons un temps maximum $T > 0$ pour les simulations, ainsi qu'un entier N_T . Nous nous donnons une discrétisation uniforme $(t_n)_{1 \leq n \leq N_T}$ de $[0, T]$, avec $\Delta t = T/N_T$ comme pas de temps. En espace, nous travaillons sur un rectangle $\Omega = [0, a] \times [0, b]$, discrétisé par une grille uniforme $\Omega_h = \{(x_i, y_j), 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y\}$, de pas $h = (\Delta x, \Delta y)$, avec $\Delta x := a/N_x, \Delta y := b/N_y$. Par soucis de simplicité, nous supposons que Γ est maillé par Ω_h , c'est-à-dire que Ω_h contient une subdivision de Γ .

Nous discrétisons la surface d'émission des ondes Γ_i par un ensemble fini de points $\{e_i, 1 \leq i \leq N_i\} \subset \Gamma_i$ et la surface de mesure Γ_m par $\{r_m, 1 \leq m \leq N_m\} \subset \Gamma_m$ (e et r pour source et récepteur). Pour résoudre le problème (P^{tot}) numériquement, nous utilisons un schéma de type saute-mouton. Nous introduisons la vitesse et la pression

$$v := \partial_t u^t, \quad w := \nabla u^t = (w_1, w_2)^T$$

Nous allons calculer une approximation de v sur Ω_h , et nous allons utiliser deux nouvelles grilles sur lesquelles nous allons calculer respectivement w_1 et w_2 . Plus précisément, nous allons calculer w_1 sur

$$\Omega_h^1 = \{(x_i + \Delta x/2, y_j), 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y\}$$

et w_2 sur

$$\Omega_h^2 = \{(x_i, y_j + \Delta y/2), 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y\}$$

(voir figure 11). Comme nous le verrons dans la suite, ceci apporte de la précision au schéma, tout en gardant une certaine simplicité dans l'écriture.

-Le schéma de propagation Oublions temporairement le terme source dans (P^{tot}) . Nous avons $\partial_{tt}u^t - \Delta u^t = 0$, ce que nous pouvons réécrire

$$\partial_t v - \operatorname{div} w = 0 \tag{35}$$

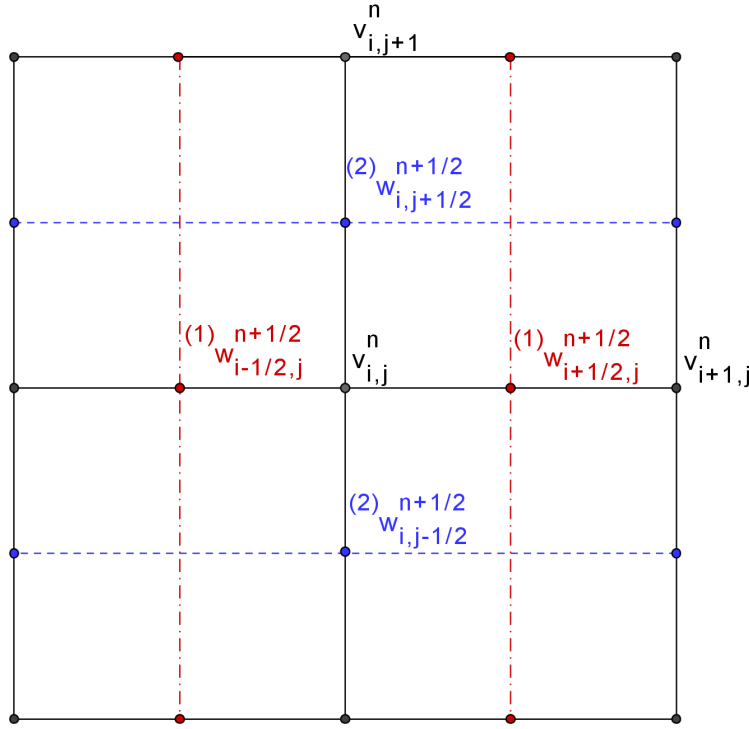


FIGURE 11 – Représentation des maillages en espace sur lesquels sont discrétisés v et w . Ω_h en noir, Ω_h^1 en rouge et Ω_h^2 en bleu.

Nous avons par ailleurs une condition de compatibilité entre v et w (commutation des dérivées en temps et en espace) $\partial_t w = \nabla \partial_t v$ ce que nous pouvons réécrire

$$\partial_t w = \nabla v \quad (36)$$

En notant

$$\begin{cases} v_{i,j}^n = v(t_n, (x_i, y_j)) \\ (1)w_{i+1/2,j}^{n+1/2} = w_1(t_n + \Delta t/2, (x_i + \Delta x/2, y_j)) \\ (2)w_{i,j+1/2}^{n+1/2} = w_2(t_n + \Delta t/2, (x_i, y_j + \Delta y/2)) \end{cases}$$

nous discrétisons les équations (35) et (36) selon le schéma

$$\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{(1)w_{i+1/2,j}^{n+1/2} - (1)w_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{(2)w_{i,j+1/2}^{n+1/2} - (2)w_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \quad (37)$$

$$\frac{(1)w_{i+1/2,j}^{n+1/2} - (1)w_{i+1/2,j}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i,j}^n}{\Delta x} \quad (38)$$

$$\frac{(2)w_{i,j+1/2}^{n+1/2} - (2)w_{i,j+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n}{\Delta y} \quad (39)$$

Ce schéma est explicite, centré en temps et en espace (c'est l'intérêt de calculer v , w_1 et w_2 sur 3 grilles différentes), stable sous la condition CFL

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2}}$$

et précis à l'ordre 2.

En ce qui concerne la source, il est équivalent de la traiter comme un second membre dans l'équation (37) ou de la superposer ponctuellement. Ainsi si nous traitons la k -ème source, $1 \leq k \leq N_i$, il nous faut rajouter la condition (d'un point de vue algorithmique)

$$v_{i,j}^n = v_{i,j}^n + f'(t_n - \tau) \quad (40)$$

si $e_k = (x_i, y_j)$ (si l'émetteur a pour coordonnées (x_i, y_j)).

Enfin, il nous faut traiter la condition sur le bord de Γ .

-La condition d'impédance La condition $\partial_\nu u^t(t, x) - \alpha(x) \partial_t u^t(t, x) = 0$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma$ s'écrit

$$\nu \cdot w - \alpha v = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (41)$$

Étant donné que les côtés de Γ sont parallèles aux axes du repère, le terme $\nu \cdot w$ vaut soit w_1 , soit w_2 . Nous discrétisons l'équation (41) aux pas de temps $t_n + \Delta t/2$. En conservant le caractère centré de notre schéma, nous obtenons

$$\nu \cdot w^{n+1/2} = \alpha \frac{v^n + v^{n+1}}{2} \text{ sur } \Gamma$$

Il nous faut maintenant discrétiser cette équation en espace. En centrant notre discrétisation sur Ω_h , nous obtenons

$$\nu \cdot \frac{w_{i,j,1/2}^{n+1/2} + w_{i,j,-1/2}^{n+1/2}}{2} = \alpha_{i,j} \frac{v_{i,j}^n + v_{i,j}^{n+1}}{2} \text{ sur } \Gamma$$

où $w_{i,j,\varepsilon}^{n+1/2} = \left({}^{(1)}w_{i+\varepsilon,j}^{n+1/2}, {}^{(2)}w_{i,j+\varepsilon}^{n+1/2} \right)$. En utilisant (37), il vient

$$\nu \cdot \left(w_{i,j,1/2}^{n+1/2} + w_{i,j,-1/2}^{n+1/2} \right) = \alpha_{i,j} \left(2v_{i,j}^n + \frac{{}^{(1)}w_{i+1/2,j}^{n+1/2} - {}^{(1)}w_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{{}^{(2)}w_{i,j+1/2}^{n+1/2} - {}^{(2)}w_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \quad (42)$$

Cette équation se traite simplement dans le cas où le nœud (x_i, y_j) n'est pas un coin de Γ (c'est à dire, dans le cas où (x_i, y_j) appartient à un seul côté de Γ). En effet, dans ce cas, selon l'orientation de ν , l'équation précédente permet de mettre à jour w du côté intérieur à Γ . Par exemple, si nous traitons un côté de Γ tel que $\nu = (1, 0)^T$ le long de ce côté, (42) devient

$${}^{(1)}w_{i+1/2,j}^{n+1/2} + {}^{(1)}w_{i-1/2,j}^{n+1/2} = \alpha_{i,j} \left(2v_{i,j}^n + \frac{{}^{(1)}w_{i+1/2,j}^{n+1/2} - {}^{(1)}w_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{{}^{(2)}w_{i,j+1/2}^{n+1/2} - {}^{(2)}w_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right)$$

Comme $\nu = (1, 0)^T$, le nœud intérieur à Γ est le nœud $(x_i - \Delta x/2, y_j)$, c'est à dire qu'il faut considérer la dernière équation comme une équation linéaire en l'inconnue ${}^{(1)}w_{i-1/2,j}^{n+1/2}$, soluble de manière unique. Ce raisonnement permet d'imposer (42) sur "l'intérieur" des côtés de Γ .

Il nous faut maintenant traiter les coins, c'est-à-dire le cas où (x_i, y_j) appartient à deux côtés de Γ (voir figure 12). La différence avec le cas précédent, quand le nœud traité se situe sur un seul côté de Γ , provient du fait qu'il nous faut à présent mettre à jour simultanément deux quantités : dans l'exemple de la figure 12, les deux quantités $(1)w_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ et $(2)w_{i,j-1/2}^{n+1/2}$ doivent être actualisées.

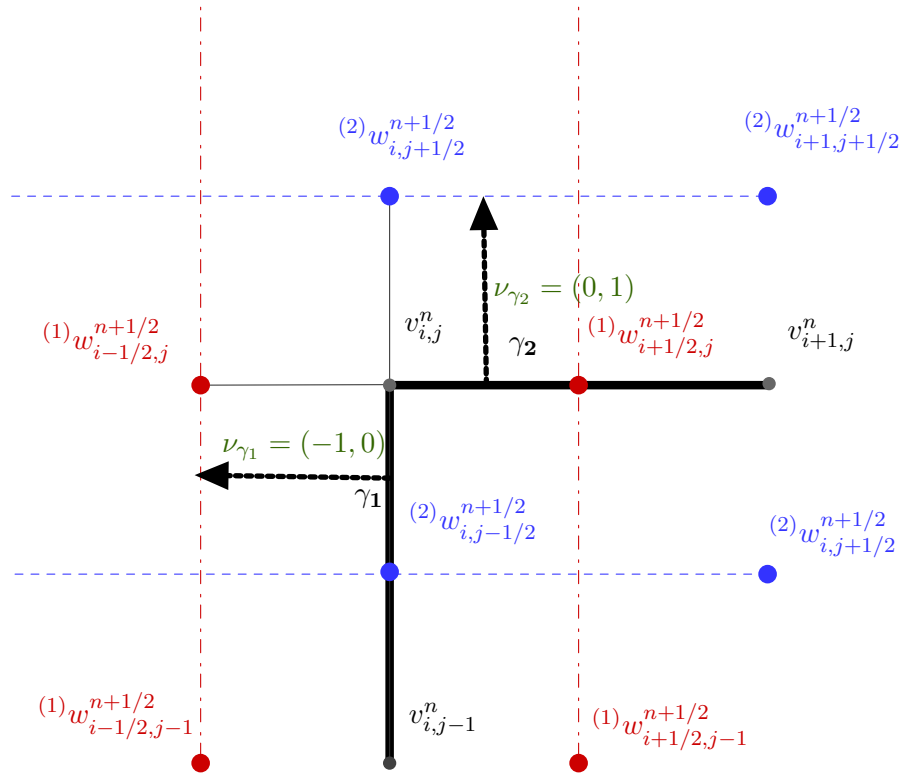


FIGURE 12 – Le cas d'un coin : une partie $\gamma_1 \cup \gamma_2$ de Γ en trait noir épais, l'orientation étant donnée par ν_{γ_1} et ν_{γ_2} : l'extérieur de Γ est au nord-ouest.

Dénotons par γ_1 et γ_2 les bords de Γ correspondant à $\nu_x < 0$ et $\nu_y > 0$ respectivement. En développant (42) le long de γ_1 et de γ_2 respectivement nous obtenons le système linéaire de dimension 2 suivant

$$\begin{cases} - \left((1)w_{i+1/2,j}^{n+1/2} + (1)w_{i-1/2,j}^{n+1/2} \right) = \alpha_{i,j} \left(2v_{i,j}^n + \frac{(1)w_{i+1/2,j}^{n+1/2} - (1)w_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{(2)w_{i,j+1/2}^{n+1/2} - (2)w_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \\ (2)w_{i,j+1/2}^{n+1/2} + (2)w_{i,j-1/2}^{n+1/2} = \alpha_{i,j} \left(2v_{i,j}^n + \frac{(1)w_{i+1/2,j}^{n+1/2} - (1)w_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{(2)w_{i,j+1/2}^{n+1/2} - (2)w_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \end{cases} \quad (43)$$

en l'inconnue $(^{(1)}w_{i+1/2,j}^{n+1/2}, ^{(2)}w_{i,j-1/2}^{n+1/2})^T$. Réécrivons ce système sous forme matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 - \frac{\alpha_{i,j}}{\Delta x} & \frac{\alpha_{i,j}}{\Delta y} \\ \frac{\alpha_{i,j}}{\Delta x} & 1 + \frac{\alpha_{i,j}}{\Delta y} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} ^{(1)}w_{i+1/2,j}^{n+1/2} \\ ^{(2)}w_{i,j-1/2}^{n+1/2} \end{pmatrix} = B$$

où le second membre B se déduit facilement du système précédent. Nous avons

$$\det A = -1 - \alpha_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \right) \neq 0$$

ce qui montre que le système (43) admet une solution unique pour toute impédance $\alpha \geq 0$, la solution admettant une expression analytique puisqu'il s'agit simplement d'inverser une matrice d'ordre 2. Ce raisonnement s'adapte à tout type de coin (un coin étant déterminé par l'orientation des deux côtés de Γ le constituant, c'est-à-dire par les deux vecteurs sortants γ_1 et γ_2) de manière générique. Nous ne présentons pas les calculs dans le cas général, l'exemple développé ci-dessus étant représentatif de la marche à suivre et les notations relativement lourdes (dans le cas où l'on s'abstrait de l'orientation du coin).

Finalement, notons que le cas où Γ est soumis à une condition de Neumann se déduit facilement du cas Robin-Fourier puisqu'il suffit d'appliquer la même démarche avec $\alpha = 0$, le système (43) devenant alors découplé, c'est-à-dire que la matrice A est diagonale.

Remarque 29. Nous n'avons pas présenté l'analyse du cas où Γ est soumis à une condition de Dirichlet, celle-ci étant effectuée dans [3]. Précisons cependant que celle-ci se traite facilement d'un point de vue numérique puisqu'il suffit d'imposer $v_{i,j}^n = 0$ sur Γ . Ainsi nous sommes en mesure de traiter des conditions mixtes, c'est-à-dire le cas où $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$ est soumis à une condition de Dirichlet sur Γ_D , de Neumann sur Γ_N et de Robin-Fourier sur Γ_R , où chaque frontière délimite un ouvert borné.

Références

- [1] A. BAMBERGER AND T. H. DUONG, *Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d'une onde acoustique*, *Mathematical Methods in the Applied Science*, 8 (1986), pp. 405–435.
- [2] F. BEN HASSEN, Y. BOUKARI, AND H. HADDAR, *Application of the linear sampling method to retrieve cracks with impedance boundary conditions*, *Rapport de recherche RR-7478*, INRIA, Dec. 2010.
- [3] Q. CHEN, H. HADDAR, A. LECHLEITER, AND P. MONK, *A sampling method for inverse scattering in the time domain*, *Inverse Problems*, 26 (2010).
- [4] M. CHIPOT, *Handbook of differential equations : stationary partial differential equations*, Elsevier, 2007.
- [5] D. COLTON AND R. KRESS, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer, 1992.
- [6] M. COSTABEL, *Time-dependent problems with the boundary integral equation method*, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, (2004).
- [7] T. HA-DUONG, *On retarded potential boundary integral equations and their discretisations*, in *Topics in Computational Wave Propagation : Direct and Inverse Problems*, M. Ainsworth, P. Davies, D. Duncan, P. Martin, and B. Rynne, eds., Springer-Verlag, 2003, pp. 301–336.
- [8] L. HORMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, Springer, 1985.
- [9] P. JOLY, *Introduction à l'analyse mathématique des équations de Maxwell en régime transitoire*, Ecole Polytechnique, 1998.
- [10] A. KIRSCH AND N. GRINBERG, *The Factorization Method for Inverse Problems*, *Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications*, 2008.
- [11] W. M. LEAN, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, 2000.
- [12] J.-C. NÉDÉLEC, *Acoustic and Electromagnetic Equations, Integral Representations for Harmonic Problems*, Springer, 2001.
- [13] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis. Third Edition.*, McGraw-Hill, 1987.
- [14] O. SCHERZER, *The use of morozov's discrepancy principle for tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems*, *Computing*, 51 (1993).
- [15] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.
- [16] J. STRATTON, *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill, 1941.
- [17] F. TREVES, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, 1975.
- [18] M. L. WHITNEY, *Theoretical and Numerical Study of Tikhonov's Regularization and Morozov's Discrepancy Principle*, PhD thesis, Georgia State University, 2009.



Centre de recherche INRIA Saclay – Île-de-France
Parc Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 Orsay Cedex (France)

Centre de recherche INRIA Bordeaux – Sud Ouest : Domaine Universitaire - 351, cours de la Libération - 33405 Talence Cedex
Centre de recherche INRIA Grenoble – Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier
Centre de recherche INRIA Lille – Nord Europe : Parc Scientifique de la Haute Borne - 40, avenue Halley - 59650 Villeneuve d'Ascq
Centre de recherche INRIA Nancy – Grand Est : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex
Centre de recherche INRIA Paris – Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
Centre de recherche INRIA Rennes – Bretagne Atlantique : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex
Centre de recherche INRIA Sophia Antipolis – Méditerranée : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399