HAL open science

Varietà che parametrizzano forme e loro varietà delle secanti

Alessandra Bernardi

To cite this version:

Alessandra Bernardi. Varietà che parametrizzano forme e loro varietà delle secanti. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. B, 2007, VIII (X-A), pp.191-194. hal-00645956

HAL Id: hal-00645956

https://inria.hal.science/hal-00645956

Submitted on 28 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Varietà che parametrizzano forme e loro varietà delle secanti

Alessandra Bernardi

I problemi studiati in questa tesi prendono origine dal seguente problema: *Sia K un campo algebricamente chiuso e di caratteristica* 0. *Sia S l'anello dei polinomi $K[x_0, \ldots, x_n]$ ed S_d la sua parte di grado d. Qual è il più piccolo intero positivo $G(d)$ tale che il generico elemento di S_d si possa scrivere come*

$$F = N_1 + \cdots + N_{G(d)} \tag{1}$$

dove ogni $N_i = M^{(i)}_{1,j(1)} \cdots M^{(i)}_{k,j(k)}$ e $M^{(i)}_{1,j(1)} \in S_{j(1)}, \ldots, M^{(i)}_{k,j(k)} \in S_{j(k)}$?

Definizione **1** *Se il generico elemento di S_d si può scrivere come (1) si dice che F è una "Forma Canonica"*

Il problema sopra descritto può essere riformulato dal punto di vista geometrico. Sia $\phi : \mathbf{P}(S_{j(1)}) \times \cdots \times \mathbf{P}(S_{j(k)}) \to \mathbf{P}(S_d)$ la mappa tale che $\phi(([M_{1,j(1)}], \ldots, [M_{k,j(k)}])) = [M_{1,j(1)} \cdots M_{k,j(k)}]$ dove $\sum_{l=1}^{k} j(l) = d$.

Definizione **2** *La varietà che parametrizza forme del tipo $M_{1,j(1)} \cdots M_{k,j(k)} \in S_d$ è $X := \overline{\mathrm{Im}(\phi)} \subset \mathbf{P}(S^d)$.*

Definizione **3** *Se X è una varietà proiettiva irriducibile, la "$(s-1)$-esima varietà delle secanti di X" è $\mathrm{Sec}_{s-1}(X) := \overline{\bigcup_{P_1,\ldots,P_s \in X} < P_1, \ldots, P_s >}$.*

Dunque se X è definita come in Definizione 2, allora $\mathrm{Sec}_{s-1}(X)$ parametrizza forme del tipo (1). L'intero che risolve il problema sopra descritto è
$G(d) = \min \left\{ s \in \mathbf{Z}^+ \mid \dim(\mathrm{Sec}_{G(d)-1}(X)) = \binom{n+d}{d} - 1 \right\}$.

Remark **1** *Se $X \subset \mathrm{P}^N$ è una varietà ridotta e irriducibile di dimensione n, allora la dimensione aspettata di $\mathrm{Sec}_{s-1}(X)$ è $\mathrm{expdim}(\mathrm{Sec}_{s-1}(X)) = \min\{ns + s - 1, N\}$.*

Definizione **4** *Se $\dim(\mathrm{Sec}_{s-1}(X)) < \mathrm{expdim}(\mathrm{Sec}_{s-1}(X))$ si dice che $\mathrm{Sec}_{s-1}(X)$ è difettiva con difetto $\delta_s(X) = \mathrm{expdim}(\mathrm{Sec}_{s-1}(X)) - \dim(\mathrm{Sec}_{s-1}(X))$.*

Uno degli strumenti più importanti nello studio della dimensione di varietà delle secanti è il Lemma di Terracini:

Lemma **1** *Sia $X \subset \mathbf{P}^N$ una varietà proiettiva irriducibile. Siano $P_1, \ldots, P_s \in X$ punti generici e sia $Q \in < P_1, \ldots, P_s >$. Allora $T_Q(\mathrm{Sec}_{s-1}(X)) = < T_{P_1(X)}, \ldots, T_{P_s}(X) >$.*

A questo strumento puramente geometrico se ne può associare uno algebrico. Sia $R = K[y_0, \ldots, y_n]$ un anello di polinomi. Si consideri l'azione di R su S data da $y_i \circ x_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(y_i)$. Questa azione è chiamata anche"Apolarità".

Definizione **5** *Se $I \subset R$ è un ideale omogeneo, il "Sistema Inverso" I^{-1} di I è l'R-sottomodulo di S contenente tutti gli elementi di S annullati da I.*

Remark **2** *Se $Z = \mathrm{Proj}(S/I(X))$ è uno schema proiettivo, la funzione di Hilbert di Z in grado d è $H(Z,d) = \dim(((I(Z))^{-1})_d)$.*

Si può quindi spostare il problema della conoscenza della funzione di Hilbert di un dato schema, allo studio del sistema inverso del suo ideale di definizione (e viceversa).

Proposizione **1** *Sia $X \subset \mathbf{P}(S_d)$ la varietà che parametrizza forme del tipo (1). Sia $(I^{(i)})_d \subset R_d$ la parte di grado d del sistema inverso del cono tangente $T_{P_i}(X) \subset S_d$ per ogni $i = 1, \ldots, s$ e $P_1, \ldots, P_s$ punti generici su X. Sia inoltre $I = I^{(1)} + \cdots + I^{(s)} \subset R_d$ e $Z = \mathrm{Proj}(R/I)$. Allora, combinando il Lemma di Terracini col metodo dei Sistemi Inversi si ottiene che $H(Z,d) - 1 = \dim(\mathrm{Sec}_{s-1}(X))$.*

In questa tesi ci si occupa di studiare la dimensione di varietà delle secanti di varietà proiettive che parametrizzano tre tipi particolari di forme (il terzo caso è una generalizzazione del concetto di Forma Canonica ai tensori).

1. – Varietà delle secanti a varietà osculanti di varietà di Veronese

Siano $L_1, \ldots, L_s$ forme lineari di S e $F_1, \ldots, F_s \in S_k$. Il primo problema che si affronta in questa tesi è lo studio della dimensione delle varietà delle secanti delle varietà che parametrizzano forme del tipo

$$F = L_1^{d-k} F_1 + \cdots + L_s^{d-k} F_s. \tag{2}$$

al variare degli interi $d > k > 0$ ed $n > 0$. Un primo risultato è il seguente:

Proposizione **2** *La varietà proiettiva associata a (2) è $\mathrm{Sec}(O_{k,\nu_d(\mathbf{P}^n)})$ dove $O_{k,\nu_d(\mathbf{P}^n)}$ è la k-esima varietà osculante alla d-esima immersione di Veronese di $\mathbf{P}^n$ in $\mathbf{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ che indichiamo con $\nu_d(\mathbf{P}^n)$.*

Dapprima si calcola, quando possibile, la dimensione di $\mathrm{Sec}(O_{k,\nu_d(\mathbf{P}^n)})$ con l'uso diretto del Lemma di Terracini. Dopodiché si applica il metodo dei Sitemi Inversi.

Proposizione **3** *Il sistema inverso di $T_{P_i}(O_{k,\nu_d(\mathbf{P}^n)}) \subset S_d$ è la parte di grado d di un ideale $I^{(i)} \subset R$ dipendente solo da n e da k ma non da d e tale che $\wp_i^{k+1} \supset I^{(i)} \supset \wp_i^{k+2}$ dove $\wp_i \subset R$ è un ideale primo con supporto su un punto.*

In molti casi sarà possibile spostare il problema del calcolare direttamente $H(R/(I^{(1)} + \cdots + I^{(s)}), d)$ al computo di $H(R/(\wp_1^{k+1} + \cdots + \wp_s^{k+1}), d)$ oppure di $H(R/(\wp_1^{k+2} + \cdots + \wp_s^{k+2}), d)$ grazie al lemma:

Lemma **2** *$H(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}),d)$ è regolare se o $h^1((\wp_1^{k+2}+\cdots+\wp_s^{k+2})_d)=0$, (quindi $\binom{d+n}{n}\geq s\binom{k+n+1}{n}$) oppure $h^0((\wp_1^{k+1}+\cdots+\wp_s^{k+1})_d)=0$, (quindi $\binom{d+n}{n}\leq s\binom{k+n}{n}$).*
$H(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}),d)$ è non-regolare, con difetto δ, se o $h^1((\wp_1^{k+1}+\cdots+\wp_s^{k+1})_d)>\exp h^1((I^{(1)}+\cdots+I^{(s)})_d)=\max\{0,l(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}))-\binom{d+n}{n}\}$; in questo caso $\delta\geq h^1((\wp_1^{k+1}+\cdots+\wp_s^{k+1})_d)-\exp(h^1((I^{(1)}+\cdots+I^{(s)})_d)$; oppure $h^0((\wp_1^{k+2}+\cdots+\wp_s^{k+2})_d)>\exp(h^0((I^{(1)}+\cdots+I^{(s)})_d)=\max\{0,\binom{d+n}{n}-l(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}))\}$; in questo caso $\delta\geq h^0((\wp_1^{k+2}+\cdots+\wp_s^{k+2})_d)-\exp(h^0((I^{(1)}+\cdots+I^{(s)})_d)$.

In tutti i casi studiati non si è trovato alcun esempio in cui la difettività di $H(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}),d)$ non dipenda dalla difettività di $H(R/(\wp_1^{k+1}+\cdots+\wp_s^{k+1}),d)$ oppure di $H(R/(\wp_1^{k+2}+\cdots+\wp_s^{k+2}),d)$. In questa tesi si congettura che la difettività si ha solo nei casi descritti dal Lemma 2.

Nel caso di $\mathbf{P}^2$ si prova la congettura per $s\leq 9$. Per provarlo si utilizza "La méthode d'Horace" (descritta in [3]) su uno schema Z' che è una specializzazione di $\mathrm{Proj}(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}))$: essa consiste nel considerare una curva $\mathcal{C}$ per $P_1,\ldots,P_t$ con $t\leq s$, dopodiché si studia lo schema residuo $Res_{\mathcal{C}}(Z')$ il cui ideale rappresentativo è $(I(Z'):I(\mathcal{C}))$; ora se $\mathcal{C}$ è una componente fissa di molteplicità ν, allora $H(Z',d)=H(Res_{\mathcal{C}}(Z'),d-t\nu)$.

Non citiamo in questa circostanza tutti i risultati trovati per $s>2$ per motivi di spazio. Mostriamo solo un esempio in cui si riscontra una difettività elevata: $O_{4,\nu_5(\mathbf{P}^6)}\subset\mathbf{P}^{461}$. Se $s=2$ allora $\mathrm{expdim}(\mathrm{Sec}_1(O_{4,\nu_5(\mathbf{P}^6)}))=431$ ma in realtà il difetto è $\delta_2=86$. Se $s=3,4$ i difetti sono $\delta_3=44$ e $\delta_4=9$. Solo $\mathrm{Sec}_4(O_{4,\nu_5(\mathbf{P}^6)})=\mathbf{P}^{461}$.

2. – Varietà delle secanti a varietà che parametrizzano forme che si decompongono come prodotto di forme lineari

Il secondo problema affrontato in questa tesi è lo studio della dimensione della varietà delle secanti della varietà $\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n)\subset\mathbf{P}(S_d)$ che parametrizza forme di grado d completamente decomponibili come prodotto di forme lineari.
Un primo interesse nei confronti di questa varietà è dovuto alla seguente congettura formulata da Ehrenborg in [2]: *il più piccolo $s\in\mathbf{Z}^+$ tale che $\mathrm{Sec}_{s-1}(\mathbf{G}(n-1,n+d-1))=\mathbf{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ sarebbe uguale al $\min\{s\in\mathbf{Z}^+\mid\mathrm{Sec}_{s-1}(\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n))=\mathbf{P}^{\binom{n+d}{d}-1}\}$, dove $\mathbf{G}(k,N)$ è la Grassmanniana dei $\mathbf{P}^k\subset\mathbf{P}^N$.* Se questa congettura fosse vera, sarebbe possibile calcolare la dimensione di $\mathrm{Sec}_{s-1}(\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n))$ in molti casi. In questa tesi se ne mostra però un controesempio: $\dim(\mathrm{Sec}_2(\mathbf{G}(3,6)))=33<\mathrm{expdim}(\mathrm{Sec}_2(\mathbf{G}(3,6)))=\dim(\mathbf{P}^{34})=34$. In questa tesi si dimostra che suddetta congettura è vera per $d=2$.

Se $d=2$ si riesce anche a dimostrare la seguente:

Proposizione **4** *L'intersezione $\mathbf{G}(n-1,n+1)\cap\mathrm{Split}_2(\mathbf{P}^n)\subset\mathbf{P}^{\frac{n^2+3n}{2}}$ è il luogo degli $(n-1)$-spazi di $\mathbf{P}^{n+1}$ che sono $(n-1)$-secanti alla curva razionale normale $\nu_{n+1}(\mathbf{P}^1)$.*

Se $d>2$ il risulatato si può estendere almeno in una direzione:

Proposizione **5** *Il luogo* $\{(n-1)-$*spazi* $(n-1)-$*secanti a* $\nu_{n+d-1}(\mathbf{P}^1)\}$ *è contenuto in* $\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n) \cap \mathbf{G}(n-1, n+d-1)$.

Per quanto riguarda la dimensione della varietà delle secanti di $\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n)$, quello che si riesce a dimostrare combinando il metodo dei Sistemi Inversi col Lemma di Terracini è la seguente:

Proposizione **6** *Se* $d > 2$ *e* $n \geq 3(s-1)$, *allora* $\mathrm{Sec}_{s-1}(\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n))$ *non è difettiva.*

3. – Varietà delle secanti a varietà di Segre

La varietà di Segre parametrizza tensori completamente decomponibili, ossia se $V_1, \ldots, V_t$ sono spazi vettoriali, la varietà di Segre parametrizza tensori $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_t$ per i quali esistono $v_i \in V_i$ per ogni $i = 1, \ldots, t$ tali che $T = v_1 \otimes \cdots \otimes v_t$. Questo è un caso più generale del problema descritto inizialmente in quanto le forme possono essere viste come tensori.
La varietà delle $(s-1)$-secanti ad una varietà di Segre parametrizza tensori che si possono scrivere come somma di s tensori completamente decomponibili.

Questa parte della tesi è di tipo descrittivo. Si espongono i risultati trovati col metodo dei Sistemi Inversi e "La méthode d'Horace" in [1] e quelli trovati invece con l'uso della teoria delle rappresentazioni in [4].
La descrizione del metodo attraverso la teoria delle rappresentazioni inizia con la presentazione un algoritmo descritto in [4] per la decomposizione della parte di grado d dell'ideale della varietà delle secanti di una varietà di Segre, e si conclude col costruire i generatori dell'ideale della prima varietà delle secanti alla varietà di Segre con $t = 3$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Catalisano M.V., Geramita A.V., Gimigliano A., *Rank of tensors, secant variety of Segre varieties and fat points*, Lin. Alg. and Applic., **355**, (2002), 263–285

[2] Ehrenborg R., *On Apolarity and Generic Canonical Forms*, Journal of Algebra, **213**, (1999), 167–194

[3] Hirschowitz A., *La Méthode de Horace pour l'interpolation à plusieurs variables*, Manuscripta Math., **50**, (1985), 337–388

[4] Landsberg J.M., Manivel L., *On the ideals of secant varieties of Segre varieties*, Found Comuput. Math. 4, **4**, (2004), 397–422

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano
e-mail: `abernardi@dm.unibo.it`
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. A. Gimigliano, Università di Bologna