CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Approche en paramètres de stratification pour l'optimisation biniveau de structures de fuselage composite

D. Bettebghor[1,2], M. Samuelides[3], S. Grihon[1],
N. Bartoli[2], J. Morlier[3]

[1] *Airbus Operations SAS, France, {dimitri.bettebghor,stephane.grihon}@airbus.com*
[2] *DTIM, Onera France, {nathalie.bartoli,dimitri.bettebghor}@onera.fr*
[3] *ISAE-SupAero, France, {joseph.morlier,manuel.samuelides}@isae.fr*

Résumé — On présente ici une méthode d'optimisation biniveau de grandes structures de fuselage composite. Ce schéma biniveau est inspiré de la formulation Quasi Separable Decomposition (QSD) récemment développée par Haftka et Watson. Le comportement membrane et hors-plan des stratifiés est représenté au moyen des paramètres de stratification. La boucle d'optimisation supérieure fait intervenir la redistribution des efforts et a pour contraintes des quantités calculées par des problèmes d'optimisation locale en stabilité où les facteurs critiques de flambage sont approchés par des modèles réduits.
Mots clés — optimisation biniveau, paramètres de stratification, approximation de calcul de flambage

1 Introduction

L'optimisation de structures composites stratifiés est par essence un problème mixte. Une telle optimisation mêle en effet la dépendance continue de la redistribution des efforts par rapport aux variables de rigidité et d'inertie avec le caractère discret des angles et de l'épaisseur des stratifiés. Pour pallier à la difficulté de ce type de problème MINLP (*Mixed Integer Non Linear Programming*), il est désormais courant d'utiliser des variables continues qui permettent une représentation exacte à la fois du comportement membrane (traction, compression, cisaillement) et du comportement hors-plan (stabilité e.g flambage) : les paramètres de stratification. Le principe général est donc d'effectuer une optimisation continue sur la base de ces variables et ensuite d'identifier les séquences d'empilement les plus proches (dans une métrique à préciser) dans l'espace des séquences d'empilement admissibles. D'autre part, la taille excessive du problème général conduit à favoriser des algorithmes d'optimisation dits multi-niveaux qui permettent de séparer le problème général en une multitude de sous-problèmes de taille inférieure (autant de problèmes que d'éléments structuraux) qui pourront être résolus en parallèle sur différents processeurs.

On décrit dans un premier temps le problème d'optimisation étudié. Les variables de dimensionnement ainsi que les contraintes (déformations, flambage,...). En particulier, on s'intéresse à la prise en compte de la redistribution des efforts au travers des différentes formulations existantes. Puis, on détaille plus spécifiquement les stratifiés, les différentes règles de drapage ainsi que le problème d'optimisation le plus général avec des contraintes de continuité entre les séquences d'empilement voisines. Dans un deuxième temps, on s'intéresse à la description du comportement du stratifié au moyen des paramètres de stratification. On rappelle la définition de ces paramètres ainsi que les équations qui permettent de décrire l'enveloppe convexe de l'espace des paramètres de stratification faisables pour les séquences d'empilement de stratifiés en angle [0°,+/-45°,90°]. Puis, on définit le schéma QSD et décrivons l'adaptation de ce schéma dans le cas de notre problème d'optimisation. La boucle d'optimisation supérieure fait intervenir la redistribution des efforts (modèle EF global) et a pour contraintes des quantités calculées par des problèmes d'optimisation locale. Pour rendre efficace l'implémentation de ce schéma, l'utilisation d'une part des sensibilités post-optimales (i.e dérivées du résultat d'une optimisation par rapport aux paramètres de l'optimisation) et d'autre part de modèles réduits des calculs de stabilité locale se révèle nécessaire. On détaillera donc l'analyse post-optimale ainsi que la méthode de construction de modèles réduits. Enfin, le schéma général est présenté, ainsi qu'une première validation sur un cas test classique de l'optimisation de structures. Les premiers résultats obtenus par une approche en paramètres de stratification sont présentés. Pour terminer, les avantages et défauts de ce schéma seront listés avant de conclure

sur les pistes d'amélioration.

1.1 Le problème général d'optimisation de structures aéronautiques composites

Optimiser une structure de fuselage revient bien souvent à minimiser sa masse sous des contraintes de déformation, de déplacements maximaux et de stabilité locale (tolérance aux dommages, réparabilité, flambage, post-flambage). La première difficulté de cette optimisation réside dans les différents niveaux d'analyse que ces contraintes font intervenir. D'une part, les déformations et les déplacements sont calculés au moyen d'une analyse globale de la structure (niveau avion) et d'autre part, l'analyse locale est réalisée au niveau de l'élément structural (super-raidisseur : panneau et raidisseur par exemple dans le cas d'un fuselage) et dépend bien évidemment de la redistribution des efforts au travers des flux que l'élément en question supporte. Cette différence de niveau se reflète tant du point de vue des outils utilisés à chacun des niveaux (Global FEM/outils métiers) qu'au travers des variables de dimensionnement de chacune de ces analyses. De fait, l'analyse globale de la structure dépend essentiellement des variables de rigidité (aires de section, moment d'inertie, proportions des orientations dans le cas des stratifiés) qui ne décrivent pas de manière fine les éléments structuraux et cette analyse est traditionnellement réalisée par des logiciels classiques d'analyse par éléments finis (Nastran,...). L'analyse locale dépend quant à elle essentiellement des variables détaillées des éléments structuraux (type de profil de raidisseur, dimensions détaillées du profil, séquence d'empilement) et est souvent réalisée par des codes de calcul maison (méthodes de Rayleigh-Ritz par exemple), spécialement conçus pour cette description fine de l'élément. Notons que cette analyse locale dépend bien évidemment aussi des variables de rigidité au travers des flux et que ces variables de rigidité sont des fonctions simples des variables détaillées (proportions d'orientation qui peuvent être déduites de la séquence, l'aire de section des dimensions détaillées).

1.2 Règles de faisabilité des séquences d'empilement des stratifiés

On décrit ici les règles classiques de drapage des séquences d'empilement. Les stratifiés considérés ont pour orientation possible [0°,+/-45°,90°]. L'espace des séquences admissibles est contraint par un certain nombre de règles de conception. Ces règles traduisent des critères liés au comportement mécanique des stratifiés. Les règles de conception que l'on s'impose sont les suivantes :

- Symétrie du stratifié : le drapage est symétrique par rapport au plan moyen. Dans le cas d'un nombre impair de plis, le plan moyen est défini comme la médiane du pli au centre du stratifié. Cette règle permet d'éviter le couplage plan/hors-plan (entre tenseurs A et D) et annule de fait le tenseur B dit de couplage. Notons qu'il s'agit d'une condition suffisante et non nécessaire. Certaines séquences peuvent avoir les termes de couplage du tenseur B nuls sans pour autant être symétriques. Cette règle se justifie aussi du point de vue de la fabrication du stratifié, car un stratifié non symétrique peut se contracter lors du refroidissement.
- Balancement du stratifié : cette règle équilibre le drapage par rapport à l'axe principal (ici 0°). Le nombre de plis à 45° doit donc être égal au nombre de plis à -45°. Cette règle annule certains termes du tenseur A qui couple en membrane la traction/compression avec le cisaillement. Ainsi au niveau de la structure globale des sollicitations en flexion peuvent engendrer des sollicitations en torsion.
- Minimum de chaque orientation : la proportion minimale de chaque orientation est bornée. En général, on souhaite que cette proportion ne soit pas inférieure à 8 % ou 10 %. Cette règle permet de donner une résistance minimale dans chaque direction.
- Ecart angulaire entre plis adjacents : cette règle limite l'écart entre deux orientations successives à $\pm 45°$, de manière à limiter les risques de délaminage en bords libres.
- Plis successifs de même orientation : cette règle limite au maximum à 4 le nombre de couches successives de même orientation. L'objectif est d'éviter d'une part une concentration de contraintes mécaniques intra-laminaires entre les couches de même orientation et le pli contigu et d'autre part de limiter l'endommagement progressif.

Ces règles sont courantes dans l'industrie aéronautique. On peut noter tout de même qu'il existe d'autres règles : le battage des plis, par exemple, qui impose une distribution uniforme des orientations. D'autre part, il arrive que certaines règles soient assouplies pour des applications bien spécifiques (aéroélasticité par exemple).

Du point de vue de l'optimisation, ces contraintes restreignent considérablement l'espace de design des séquences d'empilement. Elles ont pour la plupart une écriture mathématique assez simple, soit en prenant comme variables d'optimisation discrète directement les orientations (dans le cas par exemple des algorithmes génétiques), ou alors, comme dans le cas de la programmation linéaire, en associant 4 variables binaires à chaque couche décrivant chacune des orientations possibles. Néanmoins dans le cadre de la programmation continue, ces contraintes ne peuvent pas toutes être écrites de manière simple dans la mesure où la plupart sont des contraintes discrètes. Toutefois, certaines d'entre elles peuvent être réécrites dans un cadre continu.

1.3 Continuité des séquences : blending

Enfin, on décrit ici le dernier type de contraintes qu'un problème d'optimisation de structures aéronautiques fait intervenir, à savoir la continuité des séquences entre éléments structuraux voisins. L'objectif est d'assurer une continuité entre les plis adjacents. Cette contrainte de continuité permet d'obtenir des performances mécaniques importantes. Cette continuité garantit de fait une bonne intégrité du panneau. Ces contraintes de continuité sont connues sous le nom de blending. Il existe différentes définitions du problème de blending. On peut par exemple souhaiter que des panneaux de même épaisseur aient les mêmes séquences d'empilement (cela conduit à la définition de tables de drapage) ou bien simplement souhaiter que des séquences voisines partagent les mêmes orientations sur leur épaisseur commune.

2 Paramètres de stratification

Les paramètres de stratification ont été introduits par Miki en 1982 et ont été utilisés en premier lieu dans le cadre d'une procédure graphique de dimensionnement des stratifiés en rigidité de matériau équivalent. De fait, il s'agit d'une représentation compacte et continue des différents comportements du stratifié au moyen de 12 paramètres (qui bien souvent se réduisent en fait à 8 ou moins) et il en découle que les "constantes de l'ingénieur" (modules de rigidité équivalents E_x, E_y, G_{xy} et ν_{xy}) sont monotones sur l'espace des paramètres de stratification. Notons que l'épaisseur n'intervient pas dans leur définition mais seulement les orientations des couches et leurs positions relatives (l'ordre d'empilement). La donnée de l'épaisseur et des paramètres de stratification permettent de calculer le tenseur plan A (rigidité de membrane), le tenseur B (couplage) et le tenseur hors-plan D (rigidité de flexion). Ainsi le nombre de paramètres ne dépend pas de l'épaisseur. D'autre part, un bon nombre des quantités d'intérêt de l'optimisation de structures (souplesse, énergie de déformation, flambage) dépendent simplement de ces paramètres. Grenestedt a montré par exemple que pour certains stratifiés, le flambage est concave par rapport aux paramètres de stratification [9]. Ces résultats justifient l'utilisation des paramètres de stratification en tant que variables d'optimisation continue. En comparaison, la dépendance du flambage par rapport aux orientations est beaucoup plus complexe et n'est certainement pas convexe ou concave. Les qualités des paramètres de stratification en font des variables d'optimisation bien choisies au-delà du cas des stratifiés classiques (fibres rectilignes) et sont, par exemple, utilisés par Gürdal comme variables d'optimisation dans le cas de fibres courbes [11].

2.1 Définition

On rappelle brièvement quelques éléments de théorie des stratifiés ainsi que la définition des paramètres de stratification. Dans la mesure où l'on s'intéresse ici à des stratifiés symétriques, le tenseur B de couplage plan/hors-plan est nul. Rappelons que l'on a :

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec les notations suivantes : $N = (N_x, N_y, N_{xy})$ les flux, $M = (M_x, M_y, M_{xy})$ les moments, $\varepsilon = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ les déformations et $\kappa = (\frac{\partial w}{\partial x^2}, \frac{\partial w}{\partial y^2}, \frac{\partial w}{\partial xy})$ les courbures du plan moyen (avec w le déplacement transverse).

Les tenseurs A et D se définissent à partir des paramètres de stratification :

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{22} \\ A_{66} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & \xi_A^1 & \xi_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_A^2 & 1 & 0 \\ 1 & -\xi_A^1 & \xi_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_A^2 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_A^3 & \xi_A^4 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_A^3 & -\xi_A^4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

et

$$\begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{22} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{pmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{pmatrix} 1 & \xi_D^1 & \xi_D^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_D^2 & 1 & 0 \\ 1 & -\xi_D^1 & \xi_D^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_D^2 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_D^3 & \xi_D^4 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_D^3 & -\xi_D^4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} \tag{3}$$

avec h l'épaisseur totale du stratifié et U_i $(i = 1 \dots 6)$ les modules de rigidité. Les paramètres de stratification plan $\xi_A^{1,2,3,4}$ et hors-plan $\xi_D^{1,2,3,4}$ sont définis de manière générale par :

$$\xi_A^{1,2,3,4} = \frac{1}{2} \int_1^{-1} \{\cos(2\theta), \cos(4\theta), \sin(2\theta), \sin(4\theta)\} dz \tag{4}$$

$$\xi_D^{1,2,3,4} = \frac{1}{2} \int_1^{-1} \{\cos(2\theta), \cos(4\theta), \sin(2\theta), \sin(4\theta)\} z^2 dz \tag{5}$$

Pour les stratifiés symétriques, ces expressions prennent la forme suivante :

$$\xi_A^{1,2,3,4} = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^{p} \{\cos(2\theta_k), \cos(4\theta_k), \sin(2\theta_k), \sin(4\theta_k)\} \tag{6}$$

$$\xi_D^{1,2,3,4} = \frac{1}{2h} \sum_{k=-p}^{p} \{\cos(2\theta_k), \cos(4\theta_k), \sin(2\theta_k), \sin(4\theta_k)\} ((\frac{k+1}{p})^3 - (\frac{k}{p})^3) \tag{7}$$

On voit ainsi que dans le cas de stratifiés d'orientation $(0^\circ/+-45^\circ/90^\circ)$ les ξ_A^4 et ξ_D^4 sont nuls. D'autre part, on voit aussi que le balancement d'une séquence d'empilement se traduit par $\xi_A^3 = 0$.

2.2 Equations de compatibilité

Du fait de leur définition, les paramètres de stratification dépendent tous des mêmes orientations. Il n'est pas étonnant que ces paramètres ne soient pas totalement indépendants les uns par rapports aux autres. Autrement dit, lorsque les paramètres de stratification sont utilisés comme variables d'optimisation indépendantes, les valeurs à l'optimum ne correspondent pas, en général, à une séquence d'empilement existante (même en autorisant des orientations continues). Ainsi l'optimisation continue risque fort de conduire à des paramètres plan totalement incompatibles avec les paramètres hors-plan, rendant encore plus périlleux la post-identification d'une séquence d'empilement admissible.

Récemment, Weaver et al. ([6], [7]) ont pu écrire un ensemble d'une trentaine d'équations liant les paramètres plan et hors-plan assurant ainsi leur compatibilité. Un point de l'espace des paramètres de stratification vérifiant ces équations est donc compatible au sens où il existe une séquence d'empilement qui donne bien ces valeurs de paramètre. Néanmoins, ces équations assurent uniquement la compatibilité plan/hors-plan et non l'admissibilité d'une éventuelle séquence correspondante. Elles décrivent l'enveloppe convexe des paramètres de stratification pour un ensemble arbitraire d'orientation mais ne décrivent pas l'ensemble des paramètres de stratification correspondant à des séquences admissibles car de fait, cet ensemble est discret.

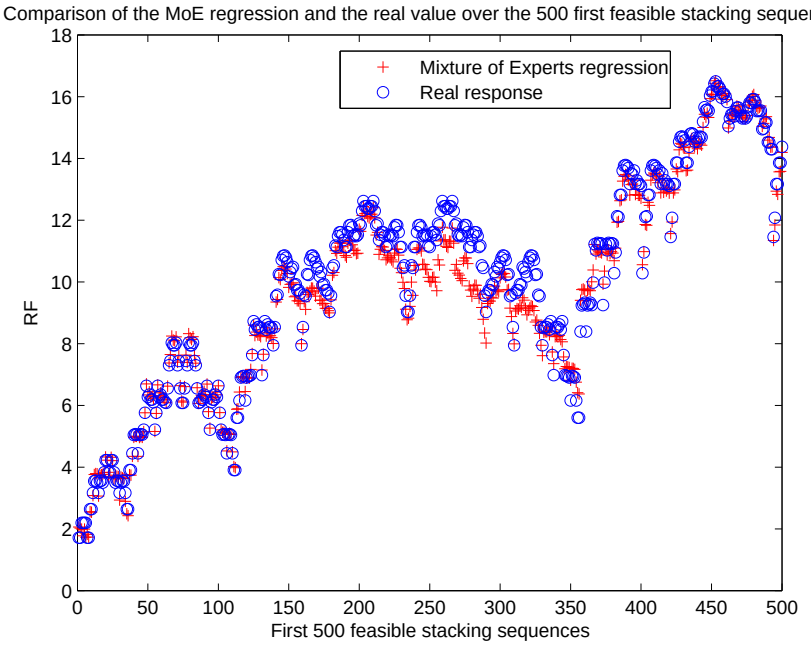


FIG. 1 – Comparaison du modèle réduit et de l'outil métier sur base de test indépendante

2.3 Approximation de facteurs de réserve de flambage en paramètres de stratification

Comme rappelé précédemment, les paramètres de stratification se révèlent aussi utiles dans le calcul des facteurs de réserve (appelé reserve factor ou RF) de flambage. En effet, la dépendance des facteurs de réserve de flambage par rapport aux paramètres de stratification hors-plan (ou par rapport aux termes du tenseur D) est plus simple que la dépendance par rapport aux orientations. Ceci s'explique en partie par le fait que ces paramètres (et les termes de D) interviennent directement comme coefficients de l'opérateur différentiel de flambage (rappelons que les valeurs de facteurs de réserve sont définies comme les premières valeurs propres d'une équation aux dérivées partielle d'ordre 4).
Ainsi, cette représentation continue permet de construire facilement des modèles réduits des calculs de stabilité (flambage,...) de bonne qualité. On a ainsi construit des modèles réduits des sorties d'outils métier Airbus (Rayleigh-Ritz pour panneaux courbes). Néanmoins, la qualité parfois inégale des modèles réduits nous a conduit à développer une méthode originale de construction de modèles réduits sur la base de mélange d'experts [4]. L'idée étant de partitionner la base d'apprentissage en plusieurs sous-bases sur lesquelles on entraîne un modèle réduit local (ou expert), ces experts étant ensuite recombinés de manière lisse. Cette méthode s'est révélée intéressante principalement lorsque la sortie à approcher est un facteur critique défini comme un minimum de plusieurs facteurs parfois très différents (approximation de fonctions discontinues ou continues par morceaux). On a représenté Fig. 2, les résultats de la régression obtenue sur les outils métiers Airbus où l'on compare la sortie de *panel buckling*, facteur critique entre le flambage local de peau et le flambage global du super-raidisseur. Dans ce cas, les entrées de la régression sont l'épaisseur, les paramètres de stratification (ξ_A^1, ξ_A^2, ξ_D^1, ξ_D^2, et ξ_D^3) et les flux (N_x, N_y et N_{xy}) et la sortie approchée est le facteur de réserve de flambage panneau. La base d'apprentissage consistait en 6400 séquences admissibles parmi les séquences admissibles de 8 à 32 plis (plus de 6 millions) et la comparaison est effectuée sur une base de test indépendante.

3 Optimisation biniveau

Avant de présenter le schéma d'optimisation utilisé, définissons les notations du problème d'optimisation :

- N éléments structuraux indexé par $i = 1 \dots N$,
- $m^{(i)}$ la masse de l'élément i
- $X_i = (x_1^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)})$ les n_i dimensions locales de l'élément i et $n = \sum_{i=1}^{N} n_i$ la taille totale du pro-

blème,
- $Y = (Y_1, \ldots, Y_N) = \phi(X_1, \ldots, X_N)$ la relation entre dimensions locales et variables de rigidité (aire de section par exemple égale au produit des dimensions locales),
- $F = \Phi(Y)$ le vecteur des flux calculé par FEA. On suppose pour la suite que les sensibilités des flux (ou des déformations) sont facilement accessibles (ce qui est généralement le cas),
- $c(\Phi(Y))$ les contraintes de déformations maximales (ou de déplacements,...),
- $c_{gl}^{(i)}(X_i, \Phi(Y)))$ les contraintes de stabilité locale (flambage,...),
- $c_{loc}^{(i)}(X_i)$ les contraintes de bornes et/ou de ratio.

Le problème global peut alors être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{array}{ll} \min_X & M(X) = \sum_{i=1}^{N} m^{(i)}(X_i) \\ \text{s.t} & \left\{ \begin{array}{l} c(\Phi(Y)) \leq 0 \\ c_{gl}^{(i)}(X_i, \Phi_i(Y)) \leq 0 \\ c_{loc}^{(i)}(X_i) \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{8}$$

Notons que nous n'avons pas fait apparaître explicitement la dépendance $\phi(X) = Y$. De fait, on peut soit utiliser cette dépendance pour supprimer les variables de rigidités Y du problème d'optimisation et avoir un problème uniquement en variables détaillées (formulation AIO *All-In-One*) où toutes les contraintes dépendent de toutes les variables. On peut à l'inverse ajouter cette relation comme contrainte et écrire le problème d'optimisation en variables Y et X pour aboutir à la classique formulation bloc-angulaire où la jacobienne des matrices est beaucoup plus creuse que dans le cas AIO. La formulation bloc-angulaire est la base des formulations biniveau ([12], [8]). De fait, on cherche à écrire un problème d'optimisation supérieure (ou système) sur la seule base des variables de rigidité Y, ce problème faisant intervenir dans ces contraintes la résolution de problème d'optimisation au niveau détaillé. Ainsi le schéma d'optimisation globale ne fait intervenir explicitement que des variables de rigidité. Notons que du point de vue des calculs, la résolution exacte de tels problèmes paraît extrêmement coûteuse dans la mesure où chaque calcul de contraintes du niveau supérieur nécessite la résolution de N problèmes d'optimisation.

3.1 Schéma QSD général et adaptation aux composites

La formulation *Quasi Separable Decomposition* développée par Liu [13] ou par Haftka et al. ([1], [2], [3]) propose d'une part d'optimiser la marge d'admissibilité du design local (maximiser la marge $RF - 1$ dans le cas des structures) et d'imposer au niveau supérieur la positivité de cette marge optimale. Une fonction implicite est donc créée pour associer aux variables supérieures (ou à des quantités calculées uniquement à l'aide des variables supérieures) de l'élément structural i, le design optimal. Dans les applications les plus courantes de QSD, on définit la marge comme étant le maximum du RF de flambage d'une structure composite pour une aire de section et des proportions d'orientation données.
Dans un article récent [1], Haftka et Schutte propose l'ajout de budgets b_i au niveau supérieur pour autoriser la non admissibilité de certaines contraintes d'inégalité locales sans toutefois donner de réponse au traitement des contraintes d'égalité. Nous avons étendu le schéma initial proposé par Haftka et Schutte pour prendre en compte la contrainte hiérarchique $\phi(X) = Y$. Cette contrainte d'égalité est alors traitée comme dans la formulation CO (CO pour Collaborative Optimization), connue en optimisation multi-disciplinaire. Le schéma biniveau proposé se met sous la forme suivante :

- *Niveau supérieur* :

$$\begin{array}{ll} \min_{Y,b} & M(Y) = \sum_{i=1}^{N} m^{(i)}(Y_i) + \sum_{i=1}^{N} b_i \\ \text{s. t.} & \left\{ \begin{array}{l} c_{glob}(\Phi(Y_1, \ldots, Y_N)) \leq 0 \\ \mu_i^{\star}(Y_i, \Phi_i(Y), b_i) \leq 0 \quad \text{pour} \quad i = 1 \ldots N \end{array} \right. \end{array} \tag{9}$$

- avec $\mu_i^{\star}$ pour $i = 1 \ldots N$ qui est la marge d'admissibilité optimale calculée à partir du *niveau inférieur* i :

$$\begin{array}{ll} \mu_i^{\star} = \min_{(\mu_i, X_i)} & \mu_i \\ \text{s. t.} & \left\{ \begin{array}{l} c_{glob-loc}^{(i)}(Y_i, \Phi_i, X_i) - \mu_i \leq 0 \\ c_{loc}^{(i)}(X_i) - \mu_i \leq 0 \\ \frac{1}{2}||Y_i - \phi(X_i)||^2 - b_i - \mu_i \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{10}$$

4 Applications et mise en oeuvre du schéma présenté

Pour tester ce schéma, dans un premier temps sans modèle réduit, l'utilisation des dérivées analytiques des marges optimales se révèle être indispensable pour mener à bien les calculs. De fait, si l'on n'utilise pas ces dérivées analytiques, on doit lancer autant d'optimisations locales supplémentaires que de variables à chaque itération pour les calculer par différences finies. D'où l'utilisation des sensibilités post-optimales qui sont présentées ci-dessous.

4.1 Sensibilités post-optimales

Notons dans un premier temps que

$$\mu^\star(Y,b) = (\mu_1^\star(Y_1,\Phi_1(Y),b_1)\dots\mu_N^\star(Y_N,\Phi_N(Y),b_N)). \tag{11}$$

Les sensibilités des $\mu_i^\star$ peuvent être obtenues aisément à l'aide des multiplicateurs de Lagrange :

$$\frac{d\mu_i^\star}{dY_i} = \frac{\partial\mu_i^\star}{\partial Y_i} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial Y_i}\frac{\partial\mu_i^\star}{\partial\Phi_i} \tag{12}$$

où $\frac{\partial\mu_i^\star}{\partial Y_i}$ et $\frac{\partial\mu_i^\star}{\partial\Phi_i}$ sont les sensibilités post-optimales calculées à l'aide des multiplicateurs de Lagrange λ trouvés lors de l'optimisation locale

$$\frac{\partial\mu_i^\star}{\partial Y_i} = -\lambda^T\frac{\partial c^i}{\partial Y_i} \tag{13}$$

où $\frac{\partial c^i}{\partial Y_i}$ et $\frac{\partial\Phi_i}{\partial Y_i}$ sont les dérivées des contraintes locales du flux (ou des contraintes) calculé par FEA (ces sensibilités s'obtiennent aisément par méthode directe ou adjointe).

4.2 Cas test de validation

Cette formulation a été testée sur un cas test classique de l'optimisation de structures, souvent utilisé par montrer l'insuffisance des critères uniquement basés sur des hypothèses mécaniques (critère FSD). Il s'agit du treillis 10 barres où chacune des barres est 'profilée' en I comme un raidisseur (décrit dans [5]) ; on cherche alors à déterminer la masse optimale sous des contraintes de déformation maximale et de flambage (flambage de colonne et flambage local de l'âme du 'raidisseur'). Ce treillis est soumis à un ensemble de 40 cas de charge et on a pu comparer la convergence entre le schéma AIO et notre adaptation de QSD. Pour l'ensemble des cas de charge, notre adaptation de QSD converge vers le même optimum que la formulation AIO. On a représenté Fig. 3 les résultats détaillés de convergence (nombre d'itérations de l'optimiseur global) pour un ensemble de 21 points de départ différents. Notre adaptation de QSD converge en général avec moins d'itérations globales que la formulation AIO (47 itérations pour QSD en moyenne contre 63 itérations pour AIO). Ce schéma est actuellement en cours de validation sur une structure de fuselage réaliste : panneau de fuselage composite de 48 super-raidisseurs travaillant en compression. Les variables du niveau supérieur sont l'épaisseur etles paramètres de membrane ; les variables locales sont les paramètres hors-plan. Les contraintes locales de RF sont approchées au moyen des modèles réduits décrits dans la section précédente.

5 Conclusion

Notre adaptation du schéma QSD se révèle appropriée pour traiter l'optimisation d'une grande structure avec redistribution des efforts. Les premiers cas test ont permis de valider cette approche tout en montrant un avantage en terme de calculs par rapport à l'approche initiale. Néanmoins, ce schéma nécessite une implémentation sophistiquée ainsi qu'une communication entre différents niveaux d'optimisation pas toujours simple à relier. D'autre part, la propriété de blending n'est pour l'instant pas prise en compte. Nos travaux actuels cherchent à adapter la formulation pour les contraintes de continuité entre séquences.

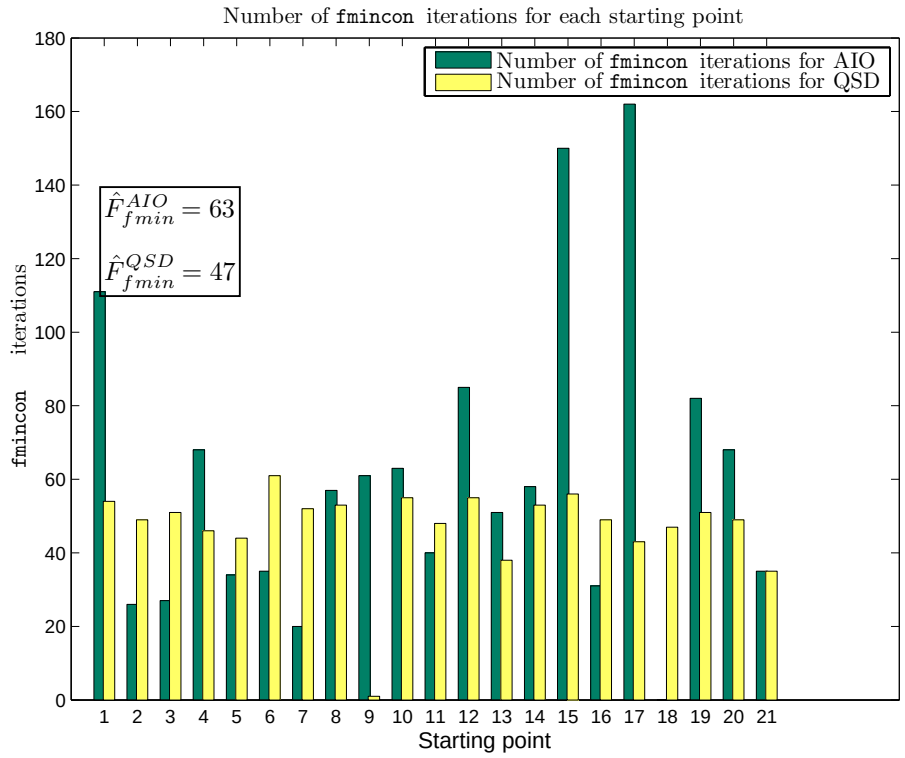


FIG. 2 – Comparaison entre les schéma QSD original et la formulation AIO

Références

[1] Schutte, J.F. and Haftka, R.T., (2010), *Global structural optimization of a stepped cantilever beam using quasiseparable decomposition*, Engineering Optimization. ,Vol 42(4), 347–367

[2] Haftka, R.T., and Watson, L.T., (2006) *Decomposition Theory for Multidisciplinary Design Optimization Problems with Mixed Integer Quasiseparable Subsystems*, Optimization and Engineering, 7, 135–149.

[3] Haftka, R.T., and Watson, L.T., *Multidisciplinary Design Optimization with Quasiseparable Subsystems* Optimization and Engineering, 6, 9–20, March 2005

[4] Bettebghor, D. and Bartoli, N. and Grihon, S. and Morlier, J. and Samuelides, M., *Surrogate modeling approximation using a mixture of experts based on EM joint estimation*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 1–17, 1615-147X, Springer

[5] Samuelides, M. and Bettebghor, D. and Grihon, S. and Merval, A. and Morlier, J., *Modèles réduits en optimisation multiniveau de structures aéronautiques*,9e Colloque national en calcul des structures,25–29,2009

[6] Diaconu, C.G. and Sato, M. and Sekine, H., *Feasible region in general design space of lamination parameters for laminated composites*, AIAA journal, 40, 3, 559–565, 2002

[7] Bloomfield, MW and Diaconu, CG and Weaver, PM, *On feasible regions of lamination parameters for lay-up optimization of laminated composites*, Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science, 465, 2104, 1123, 2009

[8] Tosserams, S. and Etman, L.F.P. and Rooda, JE, *A classification of methods for distributed system optimization based on formulation structure*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 39, 5, 503–517, 2009, Springer

[9] Grenestedt, JL, *Composite plate optimization only requires one parameter*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 2, 1 29–37, 1990, Springer

[10] Chittick, I.R. and Martins, J.R.R.A., *Aero-structural optimization using adjoint coupled post-optimality sensitivities*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 36, 1, 59–70, 2008, Springer

[11] Setoodeh, S. and Abdalla, M.M. and IJsselmuiden, S.T. and Gürdal, Z.,*Design of variable-stiffness composite panels for maximum buckling load*, Composite Structures, 87, 1, 109–117, 2009, Elsevier

[12] Haftka, R.T. and Gürdal, Z., *Elements of structural optimization*, 1992, Springer

[13] Boyang Liu, *A two level optimization of composite wing structures based on panel genetic optimization*, University of Florida, 2001