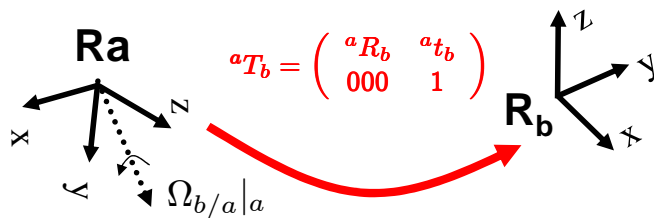


# Rotation and rotation velocity



$$R = {}^a R_b$$

$$R.R^T = I_3$$

$$\dot{R}.R^T + R.\dot{R}^T = 0 \implies \dot{R}.R^T = -R.\dot{R}^T = -\left(\dot{R}.R^T\right)^T$$

$$\dot{R}.R^T = S(t) \implies \dot{R} = S(t).R$$

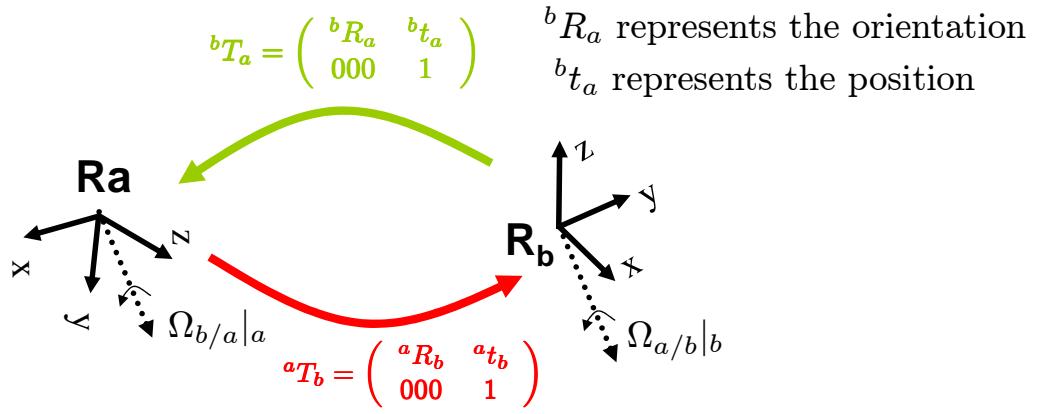
Consider  $p_b(t)$  constant  $p_a(t) = R(t).p_b(t)$

$$\dot{p}_a(t) = \dot{R}(t).p_b(t) \implies \dot{p}_a(t) = S(t).R.p_b(t)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_a(t) &= \Omega \times p_a(t) \\ \dot{p}_a(t) &= \Omega \times (R.p_b(t)) \end{aligned} \right\} \implies \dot{p}_a(t) = [\Omega]_{\times} .R.p_b(t)$$

$$\implies S(t) = [\Omega]_{\times}$$

$$[\Omega_{b/a}|_a]_{\times} = {}^a \dot{R}_b . {}^a R_b^T$$



$$\begin{aligned} \Omega_{b/a|a} & & \Omega_{b/a|a} &= -\Omega_{a/b|a} & & \Omega_{b/a|a} &= {}^a R_b \cdot \Omega_{b/a|b} \\ \Omega_{a/b|b} & & \Omega_{a/b|b} &= -\Omega_{b/a|b} & & \Omega_{a/b|b} &= {}^b R_a \cdot \Omega_{a/b|a} \end{aligned}$$

$$[\Omega_{b/a|a}]_{\times} = {}^a \dot{R}_b \cdot {}^a R_b^T$$

$$[\Omega_{a/b|b}]_{\times} = {}^b \dot{R}_a \cdot {}^b R_a^T$$

Considérons une rotation quelconque  $R$ . On peut écrire :

$$R \cdot R^T = I_3 \tag{30}$$

La même chose pour une rotation instantanée  $R(t)$  dépendante du temps :

$$R(t) \cdot R^T(t) = I_3 \tag{31}$$

Si l'on calcule sa dérivée :

$$\dot{R}(t) \cdot R^T(t) + R(t) \cdot \dot{R}^T(t) = O_3 \tag{32}$$

soit

$$\dot{R}(t) \cdot R^T(t) = -R(t) \cdot \dot{R}^T(t) = -(\dot{R}(t) \cdot R^T(t))^T \tag{33}$$

On en déduit que cela représente une matrice antisymétrique  $S(t)$  d'un vecteur.

On en déduit :

$$\dot{R}(t) = S(t) \cdot R(t) \tag{34}$$

Considérons un vecteur constant  $\underline{p}(t)$ , que l'on transforme par  $R(t)$  :  $\underline{p}(t) = R(t) \cdot \underline{p}(t)$ . Alors, si l'on dérive on a :

$$\dot{\underline{p}}(t) = \dot{R}(t) \cdot \underline{p}(t) = S(t) \cdot R(t) \cdot \underline{p}(t) \tag{35}$$

Or, on peut également écrire :

$$\dot{\underline{p}}(t) = \Omega(t) \wedge R(t) \cdot \underline{p}(t) = [\Omega(t)]^{\wedge} \cdot R(t) \cdot \underline{p}(t) \tag{36}$$

Par conséquent, le vecteur  $\Omega(t)$  de rotation, peut-être défini par :

$$[\Omega(t)]^{\wedge} = \dot{R}(t) \cdot R^T(t) = -(\dot{R}(t) \cdot R^T(t))^T \tag{37}$$

Par définition,  $\Omega(t)$  représente le vecteur de rotation instantané.